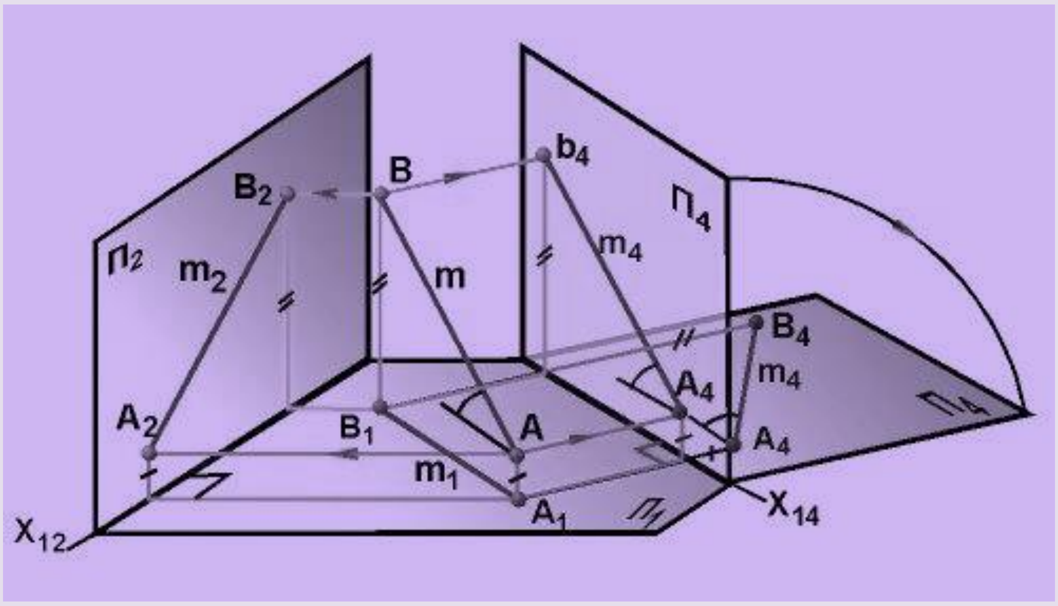
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Нижнекамский химико-технологический институт (филиал) федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования
«Казанский национальный исследовательский технологический университет»
НХТИ ФГБОУ ВО «КНИТУ»

О.А. Маркова

СПОСОБ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА. СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОЕКЦИЙ

Учебно-методическое пособие



2018

УДК 514.181+182
М 25

Маркова, О.А.
М 25 Способ прямоугольного треугольника. Способы преобразования проекций: Учебно-методическое пособие / О.А. Маркова. - Нижнекамск: ИПЦ «Гузель», 2018. - 76 с.

Учебно-методическое пособие содержит теорию, основные положения, примеры решения задач по темам начертательной геометрии «Способ прямоугольного треугольника», «Способы преобразования проекций» для самостоятельного изучения и дальнейшего выполнения подобных заданий.

Публикация предназначена для студентов, обучающихся в учреждениях высшего образования по программам бакалавриата технического направления.

Пособие подготовлено согласно учебным программам, рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры «Техника и физика низких температур» НХТИ ФГБОУ ВО «КНИТУ».

Рецензенты:
Гарипов М.Г., кандидат технических наук, доцент;
Макусева Т.Г., кандидат педагогических наук, доцент.

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие содержит теорию, положения, примеры решения задач по темам начертательной геометрии «Способ прямоугольного треугольника», «Способы преобразования проекций» для самостоятельного изучения и дальнейшего выполнения подобных заданий согласно своему варианту.

Цель настоящего пособия - помочь студентам научиться:

- во-первых, применять при выполнении задания различные способы решения;

- во-вторых, выбирать какой способ предпочтительней в каждом конкретном случае.

Начертательная геометрия изучает различные методы и способы построения изображений геометрических объектов на плоскости и разрабатывает способы решения пространственных задач по изображениям этих объектов. Для выполнения всех геометрических заданий используют графические построения. Следовательно, практически все решения метрических и позиционных задач по начертательной геометрии основываются на одних и тех же графических действиях с применением обозначений и символов, а также некоторых сокращений названий объектов (таблица 1).

Обозначения, символы и сокращения

Таблица 1

Обозначения геометрических объектов в различных системах				
I	*II*		*III*	
Плоскости проекций:				
- горизонтальная	$\mathit{\Pi}_1$	π_1	Π_1	π_1
- фронтальная	$\mathit{\Pi}_2$	π_2	Π_2	π_2
- профильная	$\mathit{\Pi}_3$	π_3	Π_3	π_3
Оси проекций	X, Y, Z	x, y, z	X, Y, Z	x, y, z
	OX, OY, OZ	Ox, Oy, Oz	OX, OY, OZ	Ox, Oy, Oz

Продолжение таблицы 1

I	*II*	*III*
Точки в пространстве	*A, B, .., 1, 2, …*	A, B, .., 1, 2, …
Координаты точек	X_A, Y_A, Z_A $A_X, A_Z, A_У$	$\mathrm{X_A, Y_A, Z_A}$ $\mathrm{A_X, A_Z, A_У}$
Проекции точек: - горизонтальная - фронтальная - профильная	 $A_1, .., 1_1, .., A', …$ $A_2, .., 1_2, .., A'', …$ $A_3, .., 1_3, .., A''', …$	 $\mathrm{A_1, .., 1_1, .., A', …}$ $\mathrm{A_2, .., 1_2, .., A'', …}$ $\mathrm{A_3, .., 1_3, .., A''', …}$
Линии	*AB, .., a, .., (AB), .., (12), .., |AB|, .., |12|, ...*	AB, .., a, .., (AB), .., (12), .., |AB|, .., |12|, ...
Проекции линий	проекциями точек	
Горизонталь (проекции горизонтали)	*H* (h_1, h_2)	H $(\mathrm{h_1, h_2})$
Фронталь (проекции фронтали)	*F* (f_1, f_2)	F $(\mathrm{f_1, f_2})$
Отрезки	*[AB], .., [12], ...*	[AB], .., [12], …
Проекции отрезков	$[A_1B_1], .., [1_12_1], ...$	$[\mathrm{A_1B_1}], .., [\mathrm{1_12_1}], ...$
Углы	$\alpha, \beta, ...$	α, β, …
Плоскости	$P, Q, .., \alpha, \gamma, ...$	P, Q, .., α, γ, ...
Следы плоскостей: - горизонтальные - фронтальные - профильные	 $P_1, .., \alpha_1, ...$ $P_2, .., \alpha_2, ...$ $P_3, .., \alpha_3, ...$	 $\mathrm{P_1}, .., \alpha_1, ...$ $\mathrm{P_2}, .., \alpha_2, ...$ $\mathrm{P_3}, .., \alpha_3, ...$
Символы геометрических объектов в различных системах		
Треугольник, разность	*Δ*	Δ
Прямой угол	┐, ⊾	┐, ⊾
Прямоугольный треугольник	◺	◺
Бесконечность	∞	∞
Угол	∠	∠

Продолжение таблицы 1

I	*II*	*III*
Сокращения названий геометрических объектов		
Точка	*Тчк, тчк, т.*	Тчк, тчк, т.
Натуральная величина	*Н.В., н.в.*	Н.В., н.в.
Символы отношений между геометрическими объектами		
Равенство, результат	$=$	$=$
Неравенство	$\neq$	$\neq$
Совпадение	$\equiv$	$\equiv$
Приблизительное равенство	$\approx$	$\approx$
Приблизительность (около)	$\sim$	$\sim$
Конгруэнтность	$\cong$	$\cong$
Взаимная принадлежность	$\in$	$\in$
Непринадлежность	$\notin$	$\notin$
Пересечение	$\cap$, $\bigcap$	$\cap$, $\bigcap$
Объединение	$\cup$	$\cup$
Перпендикулярность	$\perp$	$\perp$
Параллельность	$\parallel$	$\parallel$
Логическое следствие	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$
Равносильность, эквивалентность	$\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow$
Сравнение «больше»	$>$	$>$
Сравнение «меньше»	$<$	$<$
Логическое «и»	$\wedge$	$\wedge$
Логическое «или»	$\vee$	$\vee$

I. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1. Тема «Способ прямоугольного треугольника»

Длина проекции отрезка прямой линии при ортогональном проецировании на плоскость равна длине отрезка лишь в том случае, если отрезок является отрезком прямой уровня, то есть прямой, параллельной плоскости проекций. В случае, когда отрезок прямой занимает в пространстве общее положение, длина его проекций не равна истинной длине отрезка и всегда меньше своей действительной величины. В тех задачах, где требуется определить натуральную величину отрезка, а также разность координат концов отрезка или углы наклона его к плоскостям проекций и применяется *способ прямоугольного треугольника*. Для этого вполне достаточно иметь только две проекции отрезка.

В чем же суть данного способа?

Рассмотрим рисунок 1: строят ортогональную проекцию A_1B_1 отрезка AB на плоскости π_1, затем проводят отрезок AB_0, параллельный A_1B_1. Образованный треугольник ABB_0 получается прямоугольным и является подобным треугольнику MBB_1.

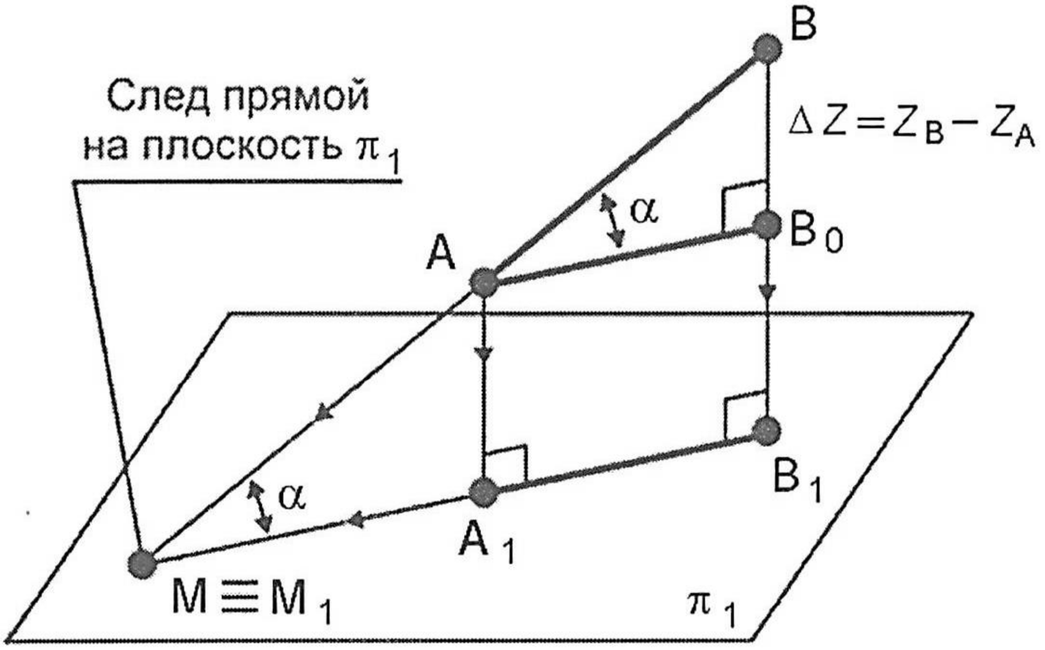


Рисунок 1 – *Проецирование отрезка прямой на плоскость*

Отрезок AB является гипотенузой прямоугольного треугольника

ABB_0, у которого один катет $AB_0 = A_1B_1$ (A_1B_1 - проекция на плоскость π_1), а другой - $BB_0 = BB_1 - AA_1$ (разности расстояний), то есть разности координат ΔZ. Угол наклона прямой, заданной отрезком AB, к плоскости π_1 равен α.

На рисунке 2 показано практическое применение способа прямоугольного треугольника. Определены натуральная величина отрезка и углы его наклона к плоскостям проекций.

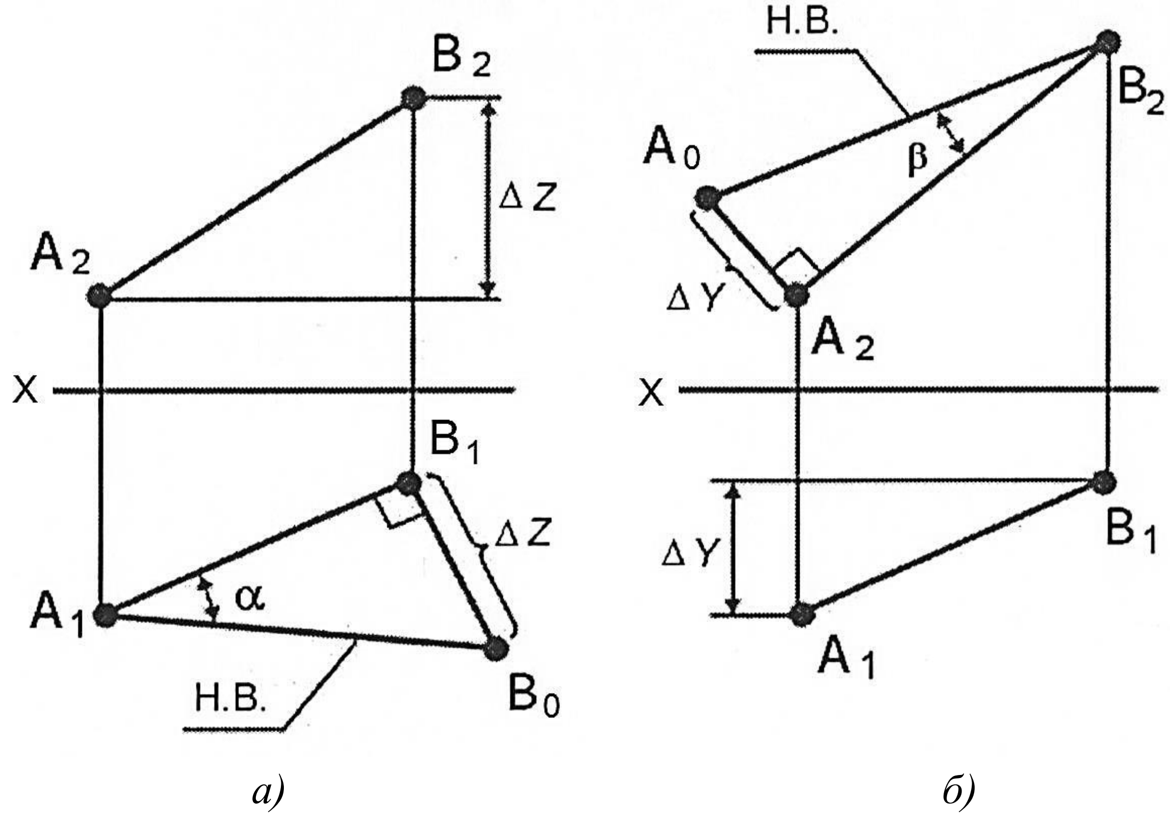


Рисунок 2 – *Определение величины отрезка и углов его наклона*

Приняв A_1B_1 за один катет, на рисунке 2,*а* строят прямоугольный треугольник, вторым катетом которого является отрезок B_1B_0. $[B_1B_0] = Z_B - Z_A$, то есть разности координат Z (разности высот). Длина гипотенузы A_1B_0 равна натуральной величине отрезка AB, а угол $\alpha = B_1A_1B_0$ - величине угла наклона его к плоскости проекций π_1.

На рисунке 2,*б* показано аналогичное решение, когда натуральная величина определена на фронтальной плоскости проекций. В этом случае угол β определяет угол наклона отрезка прямой к фронтальной плоскости проекций π_2. Если $\Delta Z = Z_B - Z_A$, то $\Delta Y = Y_A - Y_B$ – разность координат Y.

Выводы:

- натуральная величина отрезка прямой общего положения равна гипотенузе прямоугольного треугольника, одним катетом которого будет являться проекция отрезка на любую плоскость проекций, а другим – разность расстояния от концов отрезка до этой же плоскости;

- угол между катетом-проекцией и гипотенузой равен действительной величине угла наклона отрезка к той плоскости проекций, на которой и выполнены построения.

1.2. Тема «Способы преобразования проекций»

В начертательной геометрии под преобразованием комплексного чертежа (проекций) объекта понимают его изменение, вызванное перемещением объекта в пространстве или введением новых плоскостей проекций.

Если геометрический объект (прямая или плоская фигура) расположен в плоскости уровня (параллельной плоскости проекций), то на данную плоскость проекции он отобразится в натуральную величину. Многие метрические задачи, связанные с определением натуральных величин (размеров, углов) геометрических объектов, в этом случае решаются просто. А вот при определении расстояния от точки до плоскости удобней, чтобы плоскость была проецирующей и, следовательно, проецировалась в прямую линию. Значит, придание фигурам частного положения относительно плоскостей проекций значительно облегчает решение различных задач.

Поэтому при решении некоторых метрических и позиционных задач начертательной геометрии необходимо посредством изменения положения геометрических объектов и плоскостей проекций добиться удобного для каждого конкретного случая относительного положения. Этого можно достигнуть двумя способами:

1) положение оригинала в пространстве остается неизменным,

а заменяют одну или обе плоскости проекций - *способ замены (перемены) плоскостей проекций*;

2) неизменной остается система плоскостей проекций, а изменяют только положение оригинала в пространстве - *способ вращения* (*совмещения*, *перемещения*).

1.2.1. Способ замены плоскостей проекций

При проецировании предмета на дополнительную плоскость проекций объект не меняет своего положения в пространстве по отношению к плоскостям проекций, а исходная система основных плоскостей проекций дополняется новыми плоскостями проекций, которые выбираются так, чтобы получить наиболее удобные виды дополнительных проекций.

Этот способ заключается в том, что одна из основных плоскостей π_1, π_2 или π_3 заменяется новой плоскостью проекций π_0, подходящим образом расположенной относительно оригинала и перпендикулярной незаменяемой плоскости проекций. Например, если заменяется плоскость проекций π_2, то новая плоскость π_4 должна быть перпендикулярна к незаменяемой плоскости π_1 (рисунок 3,*а*). Если же заменяется плоскость π_1, то плоскость, например, π_5 должна быть перпендикулярна к плоскости π_2 (рисунок 3,*б*).

Рассмотрим более подробно преобразование наглядного и комплексного (эпюра) чертежей точки при замене плоскостей проекций, показанное на рисунке 3.

Пусть точка A задана своими проекциями A' и A'' в системе плоскостей проекций (π_1/π_2). Заменим фронтальную плоскость π_2 на новую плоскость π_4, перпендикулярную к плоскости π_1, и спроецируем данную точку A на плоскость, обозначив полученную проекцию через A_4 (рисунок 3,*а*). Нетрудно видеть, что если точка A определяется своими проекциями A' и A'' в старой системе плоскостей проекций (π_1/π_2), то она также определяется своими проекциями A' и A_4 в новой системе плоскостей проекций (π_1/π_4). Новая ось проекций X_1 определяет положение горизонтально-проецирующей плоскости π_4, A_4 является новой проекцией точки A на плоскость π_4.

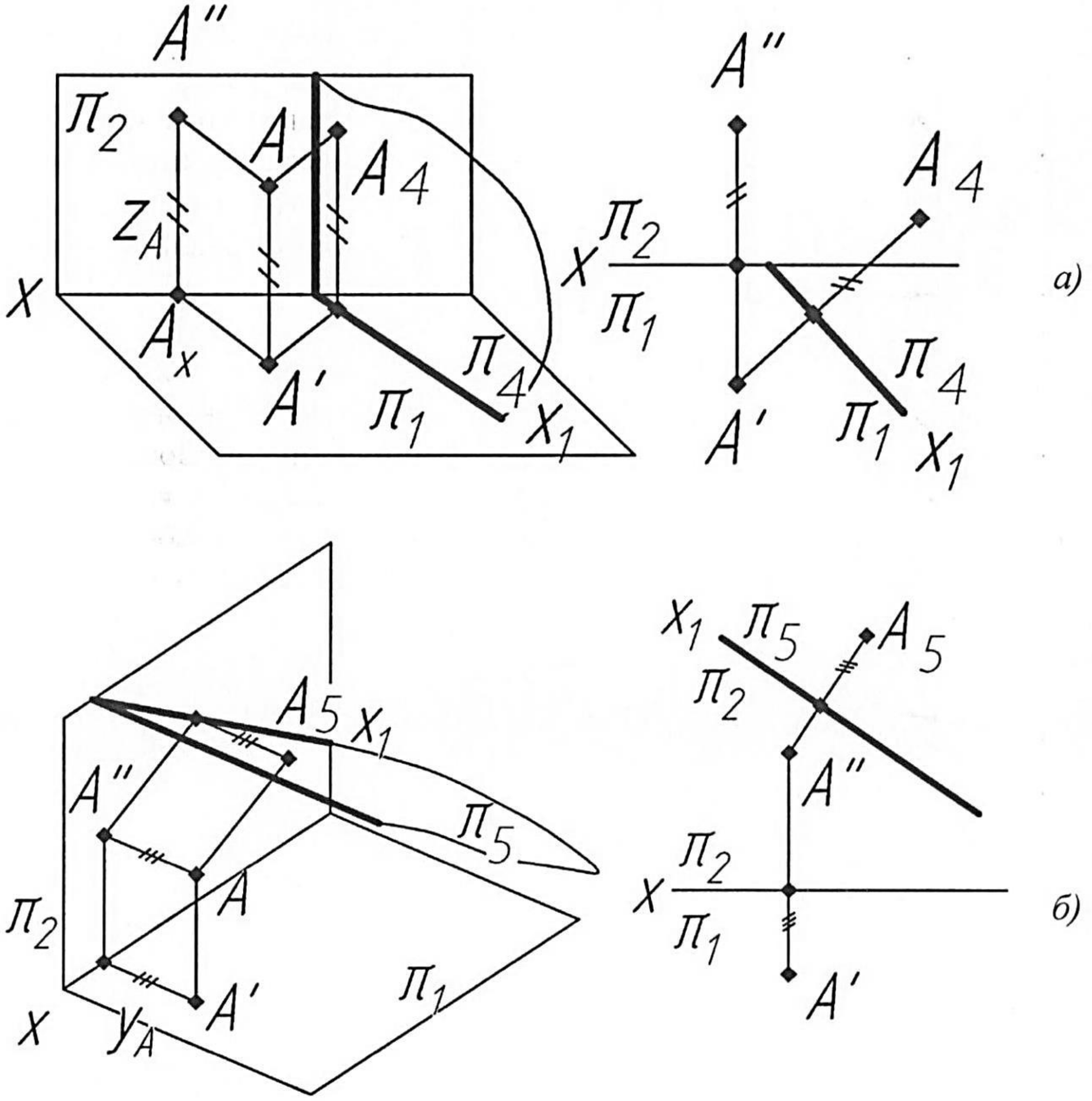


Рисунок 3 – *Замена плоскостей проекций*

На рисунке 3,*б* горизонтальная плоскость проекций π_1 аналогично заменена новой плоскостью π_5, перпендикулярной к π_2. Плоскость π_5 - фронтально-проецирующая, ось проекций X_1 определяет положение плоскости π_5, проекция A_5 является новой проекцией точки A на плоскость π_5.

Делаем *выводы*:

При замене старой системы плоскостей проекций (π_1/π_2) на новую систему (π_1/π_4) остаются неизменными: 1) A' - горизонтальная проекция точки A; 2) координата Z - аппликата данной точки, то есть высота точки A.	При замене старой системы плоскостей проекций (π_1/π_2) на новую систему (π_2/π_5) остаются неизменными: 1) A'' - фронтальная проекция точки A; 2) координата Y - ордината данной точки, то есть глубина точки A.

Следовательно, построение новой проекции точки вместо заменяемой связано с двумя ее старыми проекциями - незаменяемой и заменяемой. *Через незаменяемую проекцию точки проводят новую линию связи, перпендикулярную к новой оси X_1, и на ней от новой оси X_1 откладывается расстояние, равное расстоянию от заменяемой проекции точки до старой оси X.* Так как решение некоторых задач требует ввести более одной новой плоскости проекций, то это правило применяется и при последовательном выполнении двух и более замен плоскостей.

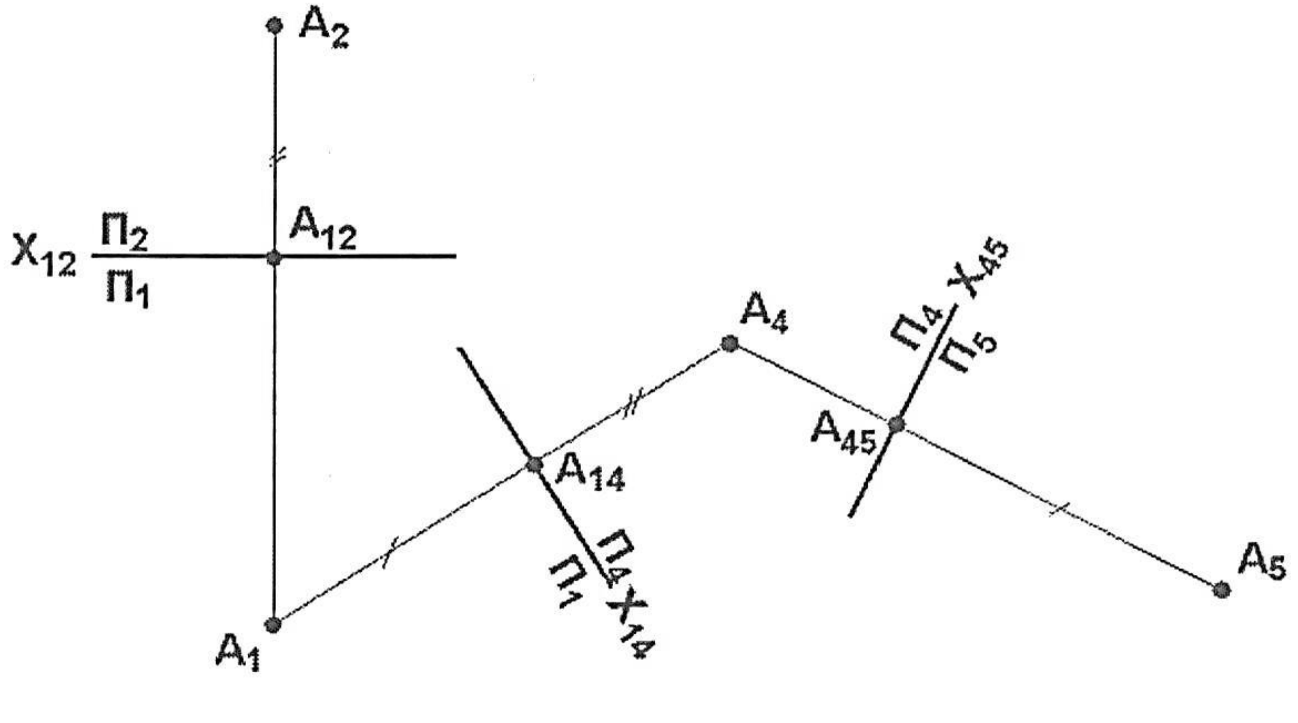


Рисунок 4 – *Две замены плоскостей проекций*

На рисунке 4 для точки А произведена замена плоскости $П_2$ на плоскость $П_4$, перпендикулярную к плоскости $П_1$, после этого заменена и плоскость $П_1$ на плоскость $П_5$, перпендикулярную к плоскости $П_4$. При выполнении последней замены нужно считать поле $П_1$ заменяемым, поле $П_4$ - незаменяемым и поле $П_5$ - новым. Поле $П_2$ не участвует в этой замене. Линию связи полей $П_1$ и $П_4$ считают старой линией связи, а линию связи полей $П_4$ и $П_5$ - новой.

1.2.2. Задачи, решаемые заменой плоскостей

Введение новых плоскостей проекций π_4 ($П_4$), π_5 ($П_5$), π_6 ($П_6$), … последовательно позволяет получить такую систему плоскостей проекций, в которой данный оригинал займет удобное для решения той или иной задачи положение.

С помощью *одной замены* плоскости проекций решаются *четыре основные типовые задачи*:

1). Преобразование прямой общего положения в прямую уровня.

2). Преобразование прямой уровня в проецирующую прямую.

3). Преобразование плоскости общего положения в плоскость проецирующую.

4). Преобразование проецирующей плоскости в плоскость уровня.

С помощью *двух замен* плоскостей проекций решаются *две основные типовые задачи*:

1). Преобразование прямой общего положения в прямую проецирующую.

2). Преобразование плоскости общего положения в плоскость уровня.

С применением способа замены (перемены) плоскостей можно решать ряд других задач как самостоятельных, так и отдельных частей задач, включающих большой объем графических решений.

Ниже подробно рассмотрим примеры решений подобных типовых задач.

1.2.3. Преобразование прямых заменой плоскостей

Известно, что:

- прямая в пространстве может занимать общее или частное положения;

- прямая, не параллельная и не перпендикулярная ни одной из плоскостей проекций, называется прямой общего положения;

- прямая, параллельная одной плоскости проекций, является прямой уровня;

- прямая, параллельная двум плоскостям проекций и перпендикулярная третьей, называется проецирующей прямой.

Пример задачи 1: *заменой плоскостей преобразовать прямую общего положения в прямую уровня.*

Ответ: Для решения задачи необходимо заменить плоскость проекций Π_1 или Π_2 новой плоскостью проекций Π_4, параллельной прямой l и перпендикулярной к незаменяемой плоскости проекций (рисунок 5). Для того, чтобы прямая l в новой системе плоскостей проекций стала, например, фронталью, заменяем фронтальную плоскость проекций Π_2 новой плоскостью $\Pi_4 \perp \Pi_1$ и параллельной прямой l.

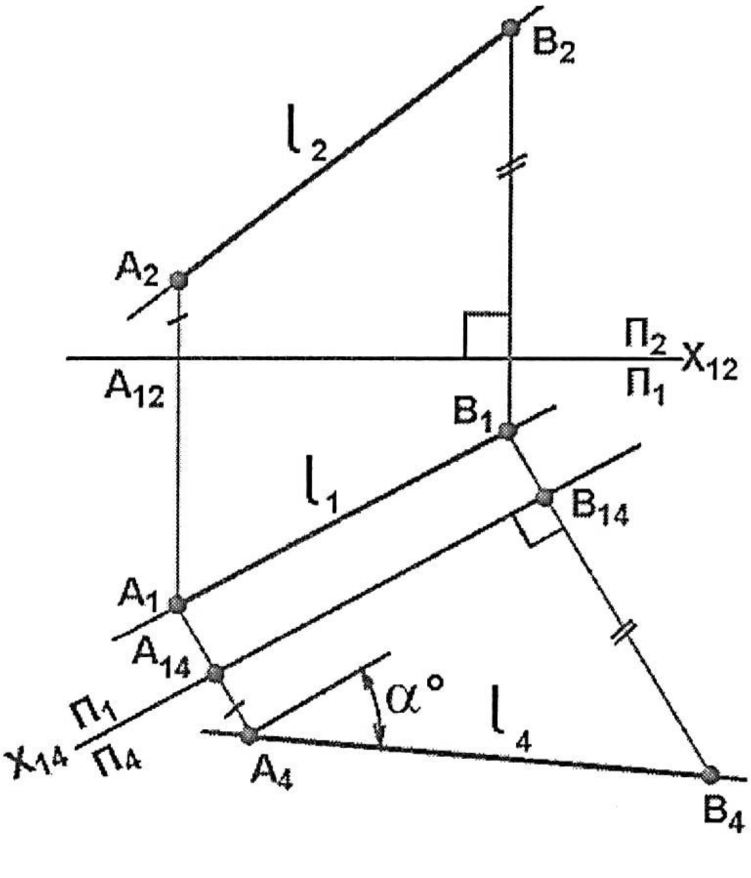


Рисунок 5 - *Преобразование прямой общего положения в прямую уровня*

Построение:

1). Проводим новую ось проекций $X_{14} \parallel l_1$ на произвольном расстоянии от нее; такое положение оси X_{14} обусловливается тем, что Π_4 параллельна l.

Если допустим, в частном случае, плоскость $П_4$ проведена непосредственно через прямую l, то ось $X_{14} = l_1$.

2). Выберем на прямой l две точки $A\,(A_1, A_2)$ и $B\,(B_1, B_2)$.

3). Построим проекции точек A и B на плоскости $П_4$.

4). Прямая $l_4\,(A_4, B_4)$ является проекцией прямой l на плоскость $П_4$. Прямая l (A, B) в новой системе плоскостей проекций $П_1/П_4$ является фронталью.

Примечания:

1). Отрезок [AB] прямой l проецируется на плоскость $П_4$ в *истинную величину*, то есть $|A_4B_4| = |AB|$.

2). Угол α - величина угла наклона прямой l к плоскости $П_1$.

Пример задачи 2: *заменой плоскостей превратить прямую уровня в проецирующую прямую.*

Ответ: Допустим, что заданная линия уровня (рисунок 6) является горизонталью H (h_1, h_2). Поэтому для решения задачи заменяем плоскость $П_2$ исходной системы $П_1/П_2$ плоскостью $П_4 \perp H$, при этом плоскость $П_4$ будет перпендикулярна $П_1$, так как $H \,||\, П_1$ и образует с ней новую систему плоскостей проекций $П_1/П_4$.

Построение:

1). Проводим новую ось проекций $X_{14} \perp h_1$; такое положение оси обусловливается тем, что $П_4 \perp H$.

2). Выберем на прямой H (горизонтали) две точки A и B.

3). Построим на эпюре проекции точек $A\,(A_1, A_2)$ и $B\,(B_1, B_2)$ на плоскости $П_4$; так как расстояния от точек A и B до плоскости $П_1$ одинаковы, то проекции

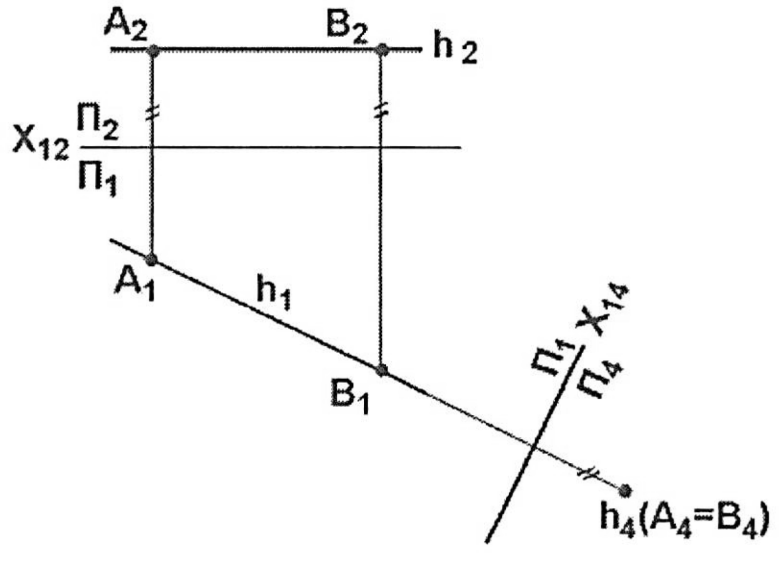


Рисунок 6 - *Преобразование прямой уровня в проецирующую*

их на плоскости $П_4$ совпадут, то есть $h_4 \equiv A_4 \equiv B_4$. Прямая H (h_1, h_4) в новой системе плоскостей проекций $П_1/П_4$ является фронтально-проецирующей.

1.2.4. Преобразование плоскостей заменой плоскостей

Известно, что:

- плоскость в пространстве может занимать общее или частное положения;

- плоскость, не перпендикулярная и не параллельная ни к одной из плоскостей проекций, называется плоскостью общего положения;

- плоскость, параллельная одной плоскости проекций, является плоскостью уровня;

- плоскость, перпендикулярная плоскости проекций, называется проецирующей.

Пример задачи 3: *заменой плоскостей преобразовать плоскость общего положения в проецирующую плоскость.*

Ответ: Вспомним, *две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости.* Для решения задачи необходимо заменить плоскость проекций Π_1 или Π_2 исходной системы Π_1/Π_2 новой плоскостью Π_4, перпендикулярной плоскости Σ, заданной ΔABC (рисунок 7).

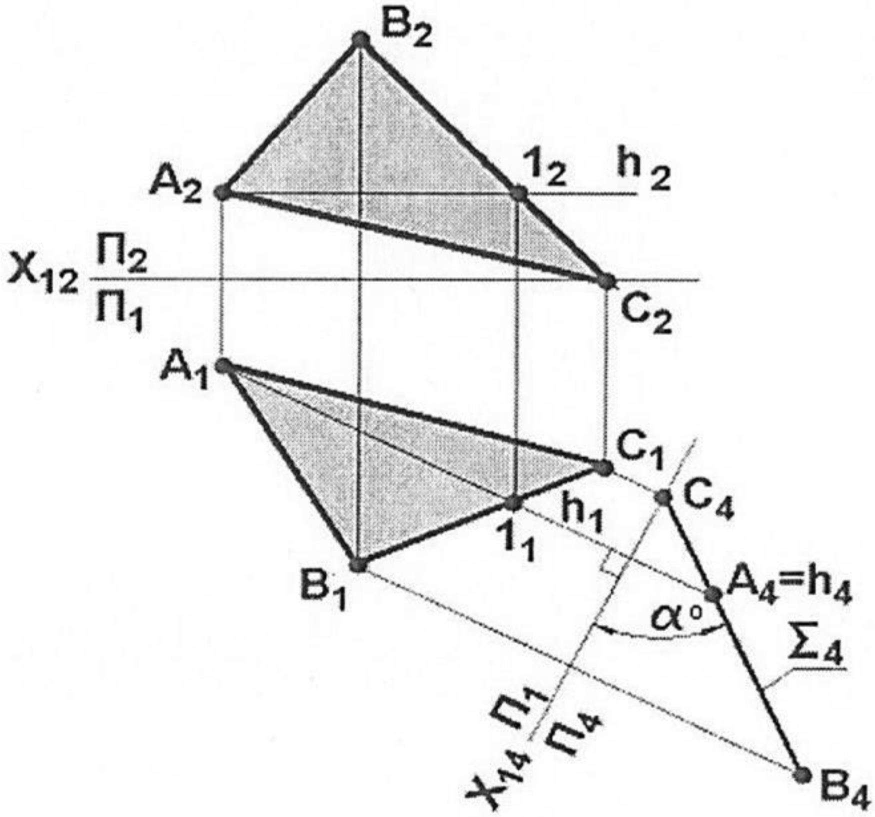


Рисунок 7 – *Преобразование плоскости общего положения*

Если любую прямую, принадлежащую плоскости Σ (ΔABC), преобразовать в проецирующую, то плоскость Σ в новой системе плоскостей проекций станет проецирующей. Проще всего для этой цели воспользоваться линией уровня.

На чертеже заданная плоскость Σ приведена во фронтально-проецирующую путем преобразования горизонтали H (h_1, h_2), принадлежащей плоскости, во фронтально-проецирующую прямую. В новой системе плоскостей проекций Π_1/Π_4 плоскость Σ стала фронтально-проецирующей ($\perp$ Π_4), и поэтому ее проекция на Π_4 выродилась в прямую линию ($C_4A_4B_4$). Угол α - это угол наклона плоскости Σ к плоскости Π_1.

Итак, заменив плоскость проекций Π_2 новой плоскостью Π_4, достигается следующее: плоскость Σ (ΔABC) стала проецирующей; проекция угла α, образованного проекцией $C_4A_4B_4$ с осью X_{14}, равна натуральной величине угла.

Пример задачи 4: с помощью перемены плоскостей превратить проецирующую плоскость в плоскость уровня.

Ответ: На рисунке 8 заданная плоскость является фронтально-проецирующей.

Плоскость Π_1 заменим новой плоскостью проекций Π_4, параллельной плоскости ΔABC, и, перпендикулярной незаменяемой плоскости Π_2. Тогда в новой системе плоскостей проекций Π_2/Π_4 плоскость ΔABC станет горизонтальной плоскостью уровня.

Построение:

1). Проводим новую ось X_{24} параллельно проекции $A_2B_2C_2$ на произвольном от нее расстоянии; такое положение оси X_{24} обусловливается тем, что Π_4 || (ΔABC).

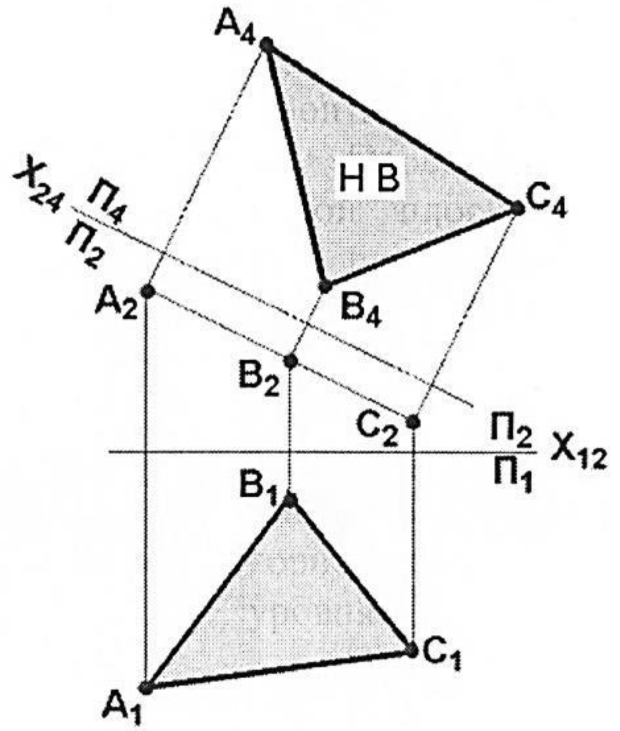


Рисунок 8 - *Преобразование плоскости*

2). Построим проекции точек A, B и C на плоскость $П_4$.

3). Треугольник $A_4B_4C_4$ является проекцией ΔABC на новую плоскость $П_4$.

Примечания:

1). Так как плоскость ΔABC параллельна плоскости $П_4$ ($\Delta A_4B_4C_4 \cong \Delta ABC$), то новая проекция отображает Δ в натуральную величину.

2). Если ось X_{24} будет совпадать с проекцией ΔABC (прямой $A_2B_2C_2$), то плоскость $П_4$ совместится с заданной плоскостью.

1.2.5. Две замены плоскостей

Пример задачи 5: *заменой плоскостей преобразовать прямую общего положения в проецирующую прямую.*

Ответ: Одной заменой плоскости проекций прямую общего положения привести в проецирующую нельзя, так как новая плоскость $П_4$, перпендикулярная прямой, не будет перпендикулярна ни одной из старых плоскостей проекций, и не образует ни с одной из них прямоугольной системы плоскостей проекций.

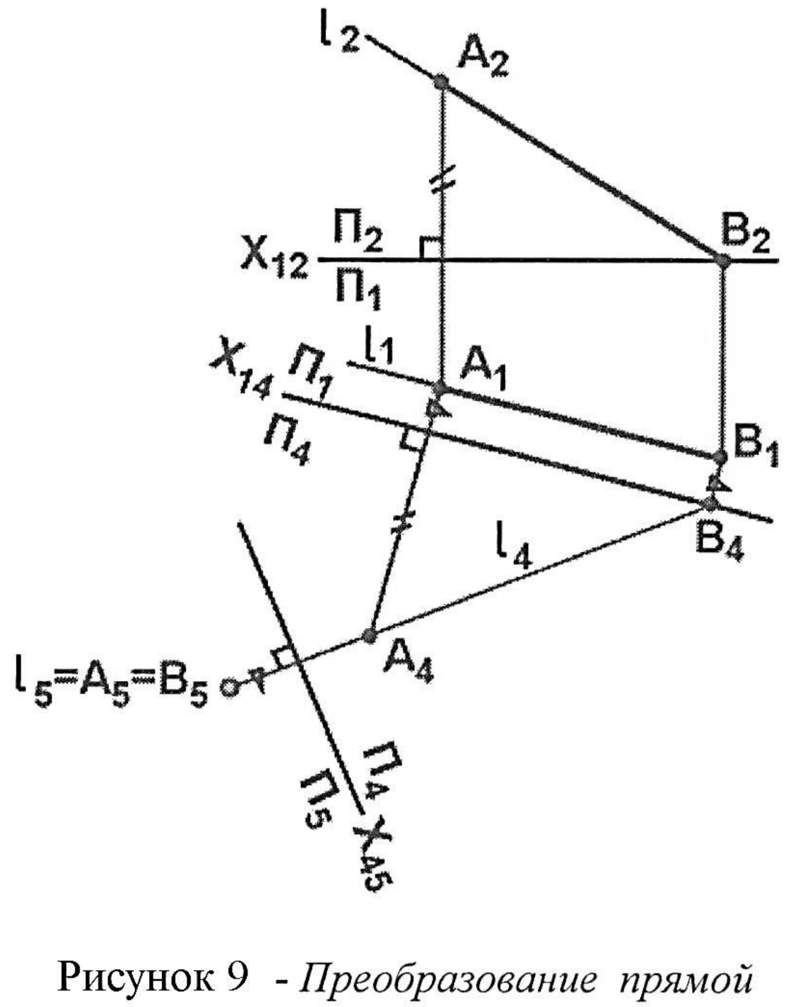


Рисунок 9 - *Преобразование прямой общего положения в проецирующую*

На рисунке 9 показано как прямая l общего положения преобразовывалась в прямую горизонтально-проецирующую. Чтобы прямую l привести в проецирующую, нужны две последовательные замены плоскостей проекций. Прямую l

общего положения вначале следует преобразовать в линию уровня (см. рисунок 5), а затем линию уровня привести в проецирующую (см. рисунок 6).

Пример задачи 6: *с помощью замен плоскостей преобразовать плоскость общего положения в плоскость уровня.*

Ответ: Нельзя плоскость общего положения преобразовать в плоскость уровня заменой только одной плоскости проекций, так как плоскость $П_4$, параллельная ей, не будет перпендикулярна ни одной из старых плоскостей проекций и не образует ни с одной из них прямоугольной системы плоскостей проекций. Для того чтобы плоскость общего положения преобразовать в плоскость уровня, необходимо выполнение двух последовательных замен (перемен) плоскостей проекций.

На рисунке 10 показано преобразование плоскости ΔABC в горизонтальную плоскость уровня.

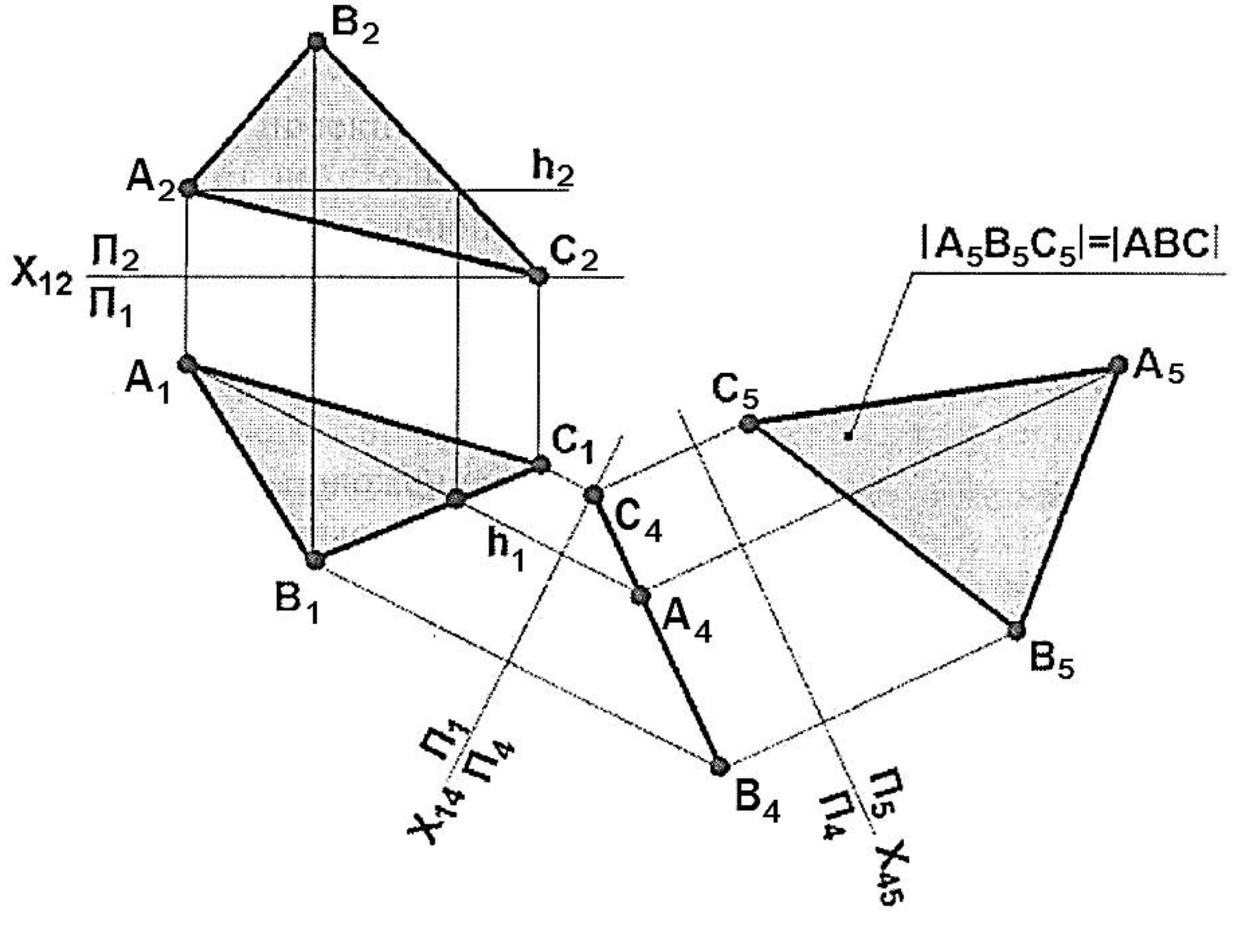


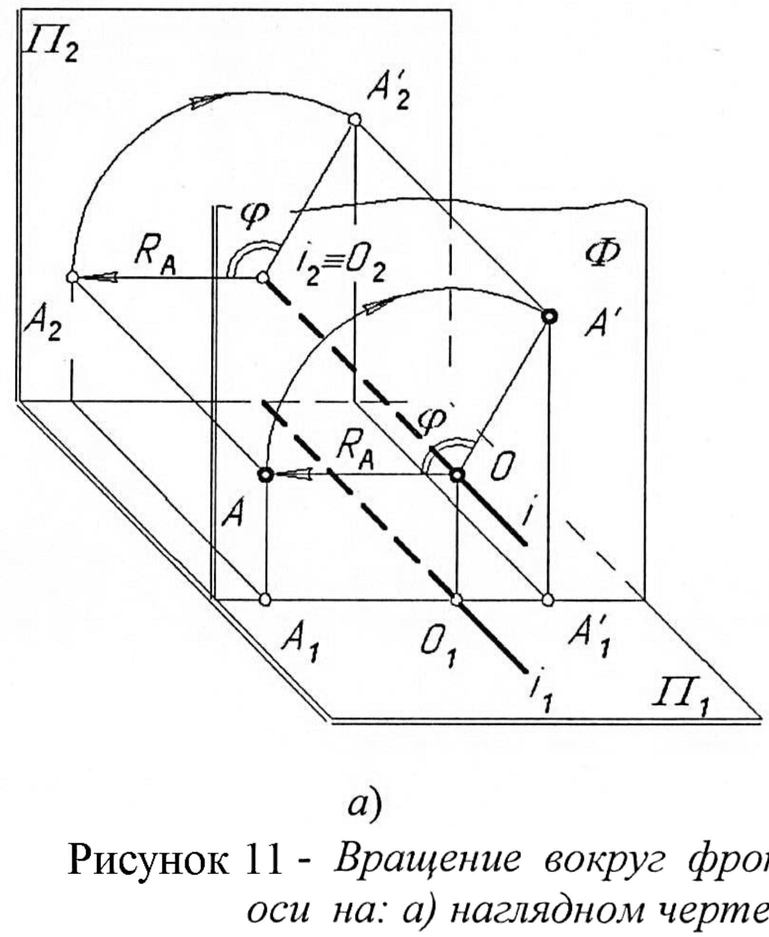
Рисунок 10 – *Преобразование плоскости общего положения в плоскость уровня*

Вначале плоскость общего положения необходимо привести в проецирующую (см. рисунок 7), а затем проецирующую плоскость в плоскость уровня (см. рисунок 8).

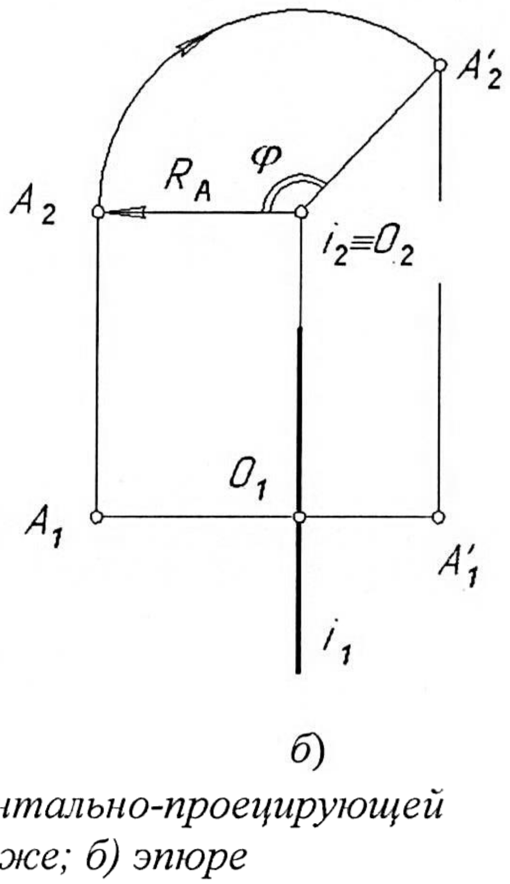
1.2.6. Способ вращения

Другой способ преобразования чертежей – это способ *вращения*. Он состоит в том, что заданная система плоскостей проекций остается неизменной, а фигуру (объект, предмет) вращают вокруг неподвижной оси до тех пор, пока она не займет какое-то частное положение относительно плоскостей проекций. Например, станет параллельной или перпендикулярной одной из плоскостей проекций. Вращение производят вокруг осей, перпендикулярных (проецирующих) или параллельных (уровня) плоскостям проекций.

Рассмотрим механизм вращения точки вокруг проецирующей оси. Пусть точка A вращается вокруг фронтально-проецирующей оси i ($\perp$ Π_2), при этом точка будет описывать дугу окружности с центром O, проходящим через ось вращения i (i_1, i_2) (рисунок



а)



б)

Рисунок 11 - *Вращение вокруг фронтально-проецирующей оси на: а) наглядном чертеже; б) эпюре*

Значит, траектория точки A при вращении вокруг фронтально-проецирующей оси - окружность (или дуга окружности), плоскость которой параллельна фронтальной плоскости проекций. Радиус вращения равен расстоянию от точки до оси вращения, угол поворота фронтальной проекции A_2 точки A равен углу поворота точки в пространстве.

На комплексном чертеже (эпюре) *траектория движения точки проецируется без искажения на ту плоскость проекций, к которой ось вращения перпендикулярна, на другие плоскости проекций она проецируется в виде отрезка, параллельного оси проекций.*

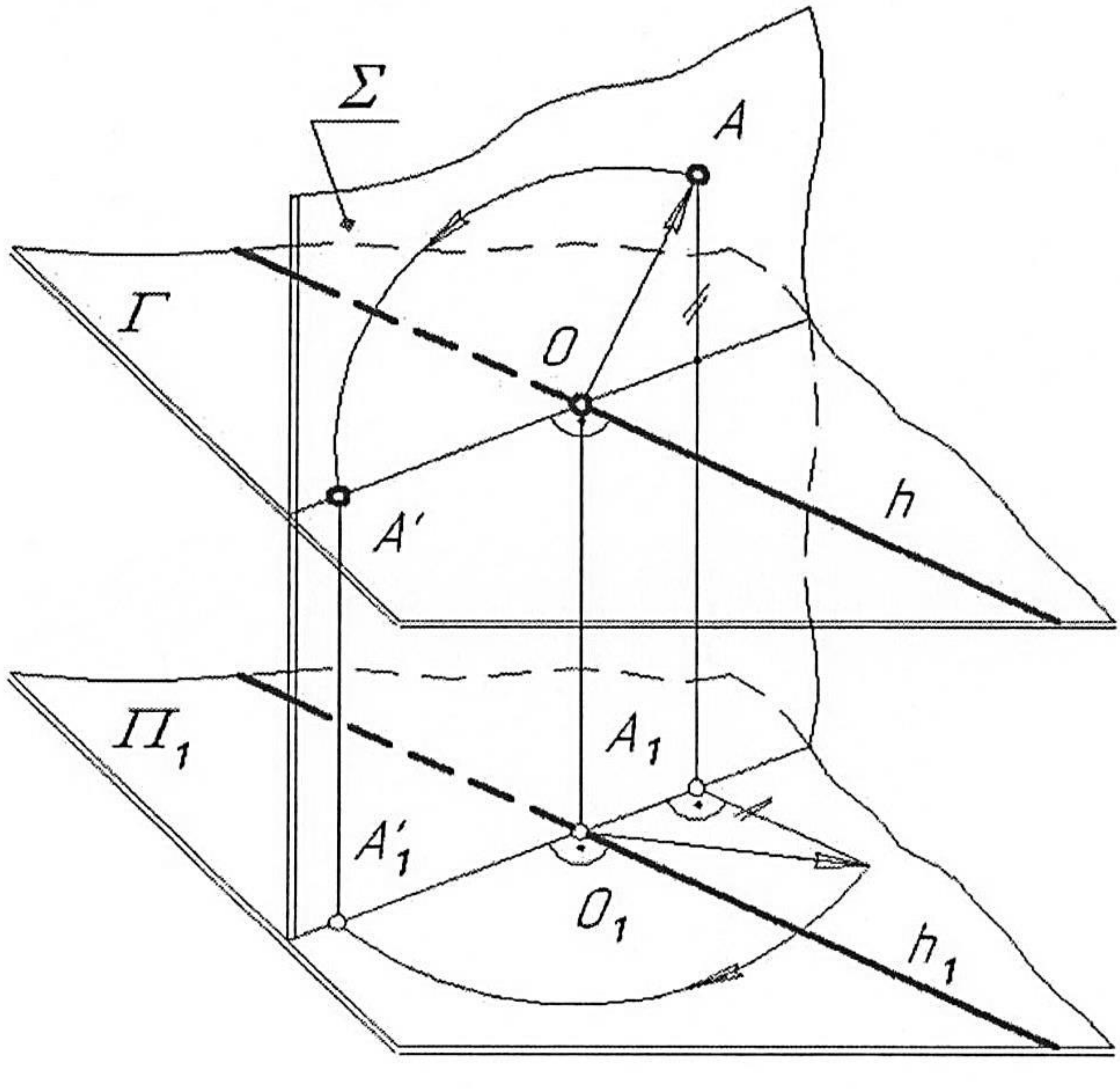


Рисунок 12 - *Пространственная модель вращения точки вокруг горизонтали*

Если за ось вращения принята линия уровня, например, взята горизонталь h, то траектория движения точки в пространстве - дуга окружности или окружность, центр которой находится на оси вращения, а радиус вращения равен расстоянию от точки до оси вращения (рисунок 12). Точка вращается в своей плоскости, перпендикулярной линии уровня и траектория вращения точки на горизонтальную плоскость проекций Π_1 проецируется в виде отрезка, перпендикулярного горизонтальной проекции горизонтали.

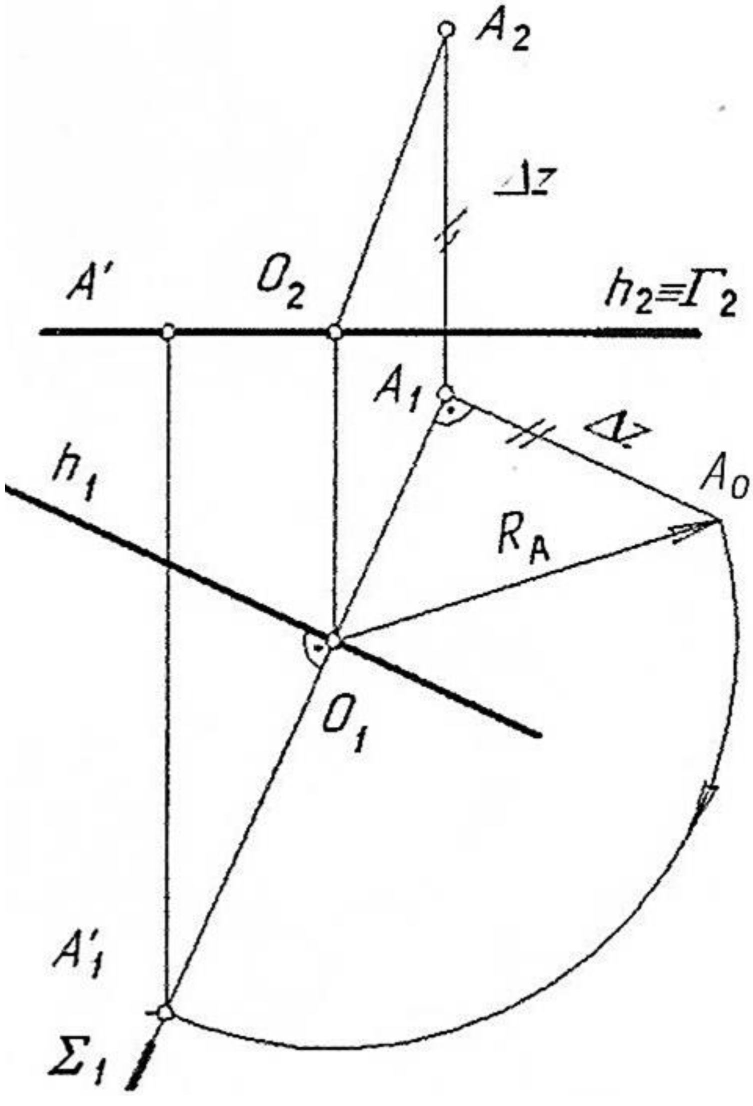


Рисунок 13 - *Вращение точки вокруг горизонтали*

Новое положение точки будет определено, когда горизонтальная проекция траектории ее движения будет равна натуральной величине ее радиуса вращения R_A (рисунок 13).

Алгоритм вращения точки:

- $h \subset \Gamma\ (\Gamma \parallel \Pi_1) \Rightarrow h_2 \equiv \Gamma_2$;
- $A \in \Sigma$; $\Sigma \perp \Pi_1$;
- $\Sigma \perp h \Leftrightarrow \Sigma_1 \perp h_1$;
- $\Sigma \perp h = O$, O - центр вращения точки;
- радиус вращения точки $R_A = |AO|$;
- $A' \in \Gamma$, A' - новое положение точки.

1.2.7. Задачи, решаемые способом вращения

Суть способа вращения состоит в том, что геометрическая фигура (объект, предмет) вращается вокруг некоторой неподвижной оси до требуемого положения относительно стационарных плоскостей проекций.

С помощью *способа вращения геометрической фигуры* решаются *четыре основные типовые задачи*:

1). Преобразование прямой общего положения в прямую уровня.

2). Преобразование прямой уровня в проецирующую прямую.

3). Преобразование плоскости общего положения в плоскость проецирующую.

4). Преобразование проецирующей плоскости в плоскость уровня.

С помощью *двух поворотов* объекта решаются *две основные типовые задачи*:

1). Преобразование прямой общего положения в прямую проецирующую.

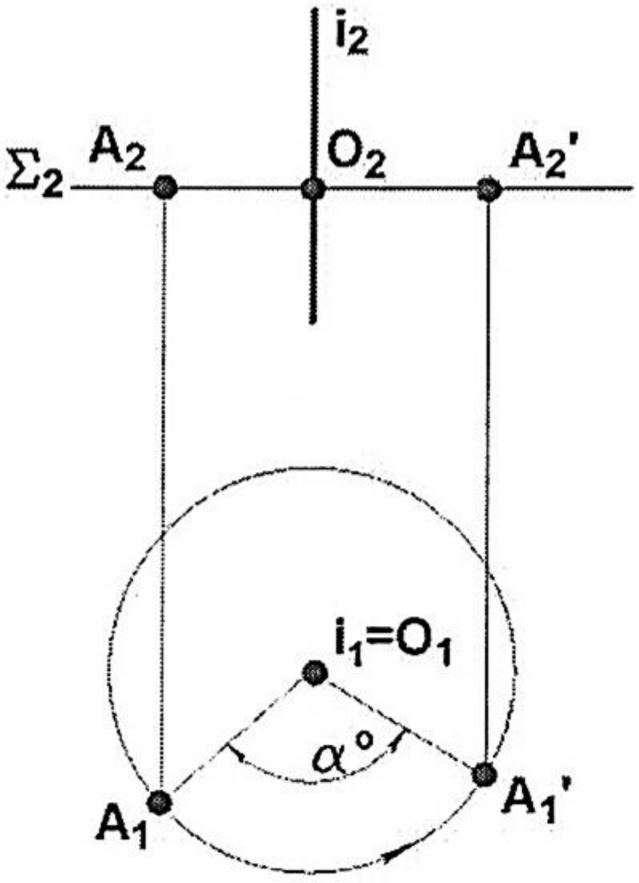
2). Преобразование плоскости общего положения в плоскость уровня.

С применением способа вращения объектов можно решать ряд других задач как самостоятельных, так и отдельных частей задач.

1.2.8. Поворот точки вокруг горизонтально-проецирующей оси

Как повернуть точку вокруг горизонтально-проецирующей оси?

Ответ: Если точка A вращается вокруг оси $i \perp \Pi_1$, то плоскость Σ, в которой располагается окружность, описываемая точкой, становится горизонтальной плоскостью уровня ($\Sigma || \Pi_1$). Значит, окружность, описываемая точкой A в пространстве, спроецируется на плоскость проекций Π_1 без искажения, а на плоскость Π_2 - в отрезок прямой, совпадающей с Σ_2 (рисунок 14).



Таким образом, на эпюре (комплексном чертеже):

1). Горизонтальная проекция A_1 точки A перемещается по окружности радиуса $|R_A| = |AO| = |A_1O_1|$.

2). Фронтальная проекция A_2 точки A перемещается по прямой, перпендикулярной линиям связи (вырожденная фронтальная проекция Σ_2 плоскости $\Sigma || \Pi_1$).

3). Величина угла поворота α горизонтальной проекции A_1 точки A до положения A_1' равна величине угла поворота точки в пространстве.

Рисунок 14 - *Вращение точки вокруг проецирующей оси*

1.2.9. Преобразование способом вращения прямых

Известно, что в качестве оси вращения может быть взята любая прямая, но на практике при преобразовании чертежа (проекций) широкое распространение получило вращение вокруг проецирующих прямых и линий уровня.

Пример задачи 7: *способом вращения превратить прямую общего положения в прямую уровня.*

Ответ: Для того, чтобы прямую общего положения l (l_1, l_2) преобразовать, например, во *фронталь*, ее необходимо вращать вокруг оси $i \perp \Pi_1$ так, чтобы l_1 стала параллельной оси X.

Выполнение (рисунок 15):

1). Выбираем две точки A (A_1, A_2) и B (B_1, B_2), принадлежащие прямой l.

2). Для удобства решения задачи проводим через точку B (B_1, B_2) прямой l (l_1, l_2) ось вращения i (i_1, i_2) перпендикулярно $П_1$.

3). При вращении прямой l вокруг оси i точка B прямой останется неподвижной, так как принадлежит оси, а точка A будет вращаться по правилам и свойствам, рассмотренным выше.

4). Угол поворота точки A и горизонтальной проекции A_1 определяется условием задачи так: когда прямая l займет положение l' параллельное $П_2$, и ее проекция l_1' расположится к линии связи строго перпендикулярно.

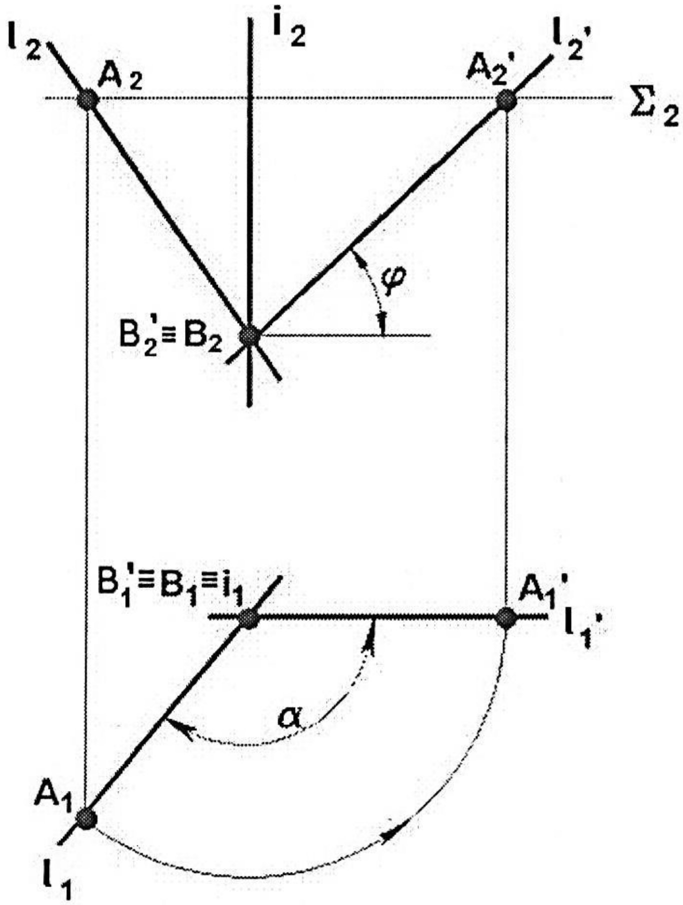


Рисунок 15 - *Поворот прямой до положения фронтали*

Дальнейшие построения ясны из чертежа. Прямая l' (l_1', l_2') - *искомая фронталь*. А новая проекция $|B_2'A_2'|$ получается в натуральную величину фронтали.

Примечания: Для преобразования прямой l общего положения в горизонталь требуются аналогичные построения. Прямую l необходимо вращать вокруг оси i, перпендикулярной $П_2$ и проходящей через какую-либо точку прямой так, чтобы l_1 стала параллельной оси X.

Пример задачи 8: *преобразовать способом вращения прямую уровня в проецирующую.*

Ответ: Для решения задачи необходимо выбрать положения оси вращения.

Если, например, заданная линия уровня - AB (A_1B_1, A_2B_2) является *горизонталью*, то ее можно преобразовать поворотом вокруг оси i, перпендикулярной горизонтальной плоскости Π_1, во *фронтально-проецирующую прямую* (рисунок 16). При этом сама горизонталь сохраняет параллельность плоскости Π_1 и может быть повернута в положение, перпендикулярное плоскости проекций Π_2.

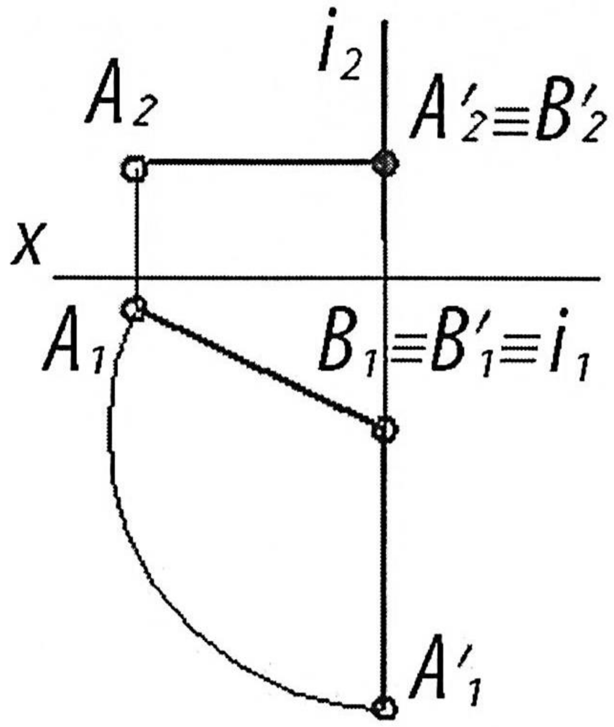


Рисунок 16 - *Преобразование линии уровня в проецирующую*

Для быстроты решения проводим через точку B (B_1, B_2) горизонтали ось вращения i. Построение ясно из чертежа:

$A_1'B_1' \perp$ оси X; $A_2' \equiv B_2'$.

Прямая, заданная отрезком $A'B'$ - *искомая прямая, фронтально-проецирующая.*

Примечания:

1). Если, например, линия уровня является фронталью, то ее можно преобразовать в горизонтально-проецирующую прямую вращением около оси i перпендикулярной Π_2.

2). Для того чтобы прямую общего положения преобразовать в проецирующую, необходимо выполнить два последовательных поворота:

- превращение прямой общего положения в линию уровня (см. рисунок 15);
- преобразование полученной линии уровня преобразовать в проецирующую (см. рисунок 16).

1.2.10. Преобразование способом вращения плоскостей

Пример задачи 9: *повернуть плоскость общего положения в плоскость проецирующую.*

Ответ: Для того, чтобы решить задачу вспомним, что две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости. Значит, если любую прямую плоскости преобразовать в проецирующую прямую, то и сама плоскость тоже станет проецирующей. Проще всего для этой цели воспользоваться линиями уровня.

На рисунке 17 изображена плоскость общего положения Σ (ΔABC) и процесс ее превращения в проецирующую. Подобное преобразование традиционно начинают с выбора оси вращения i.

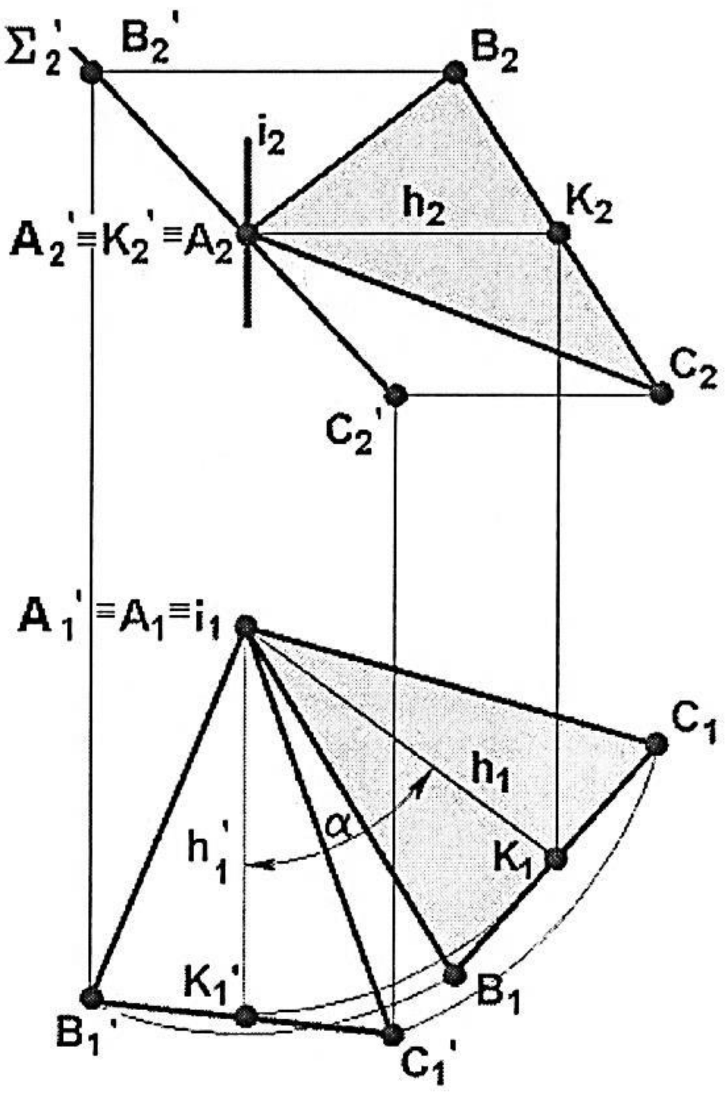


Рисунок 17 - *Преобразование плоскости общего положения в проецирующую*

Если плоскость ΔABC поворачивать вокруг оси вращения i ($i \perp \Pi_1$) так, чтобы горизонталь H (AK) плоскости Σ была повернута в положение, перпендикулярное Π_2, при этом плоскость Σ становится фронтально-проецирующей.

Для упрощения построений на чертеже горизонталь АК (A_1K_1, A_2K_2) и ось вращения i (i_1, i_2) проведены через А - вершину ΔABC. Угол поворота на Π_1 проекций точек B_1 и C_1 по своей величине равен величине угла поворота α проекции горизонтали h_1: $\angle\alpha = \angle K_1A_1K_1'$, при этом проекции $\Delta A_1B_1C_1 \cong \Delta A_1'B_1'C_1'$.

Так как в новом положении плоскость Σ треугольника ABC перпендикулярна Π_2 (Σ_2), то его фронтальная проекция вырождается в прямую линию -

$B_2'A_2'C_2'$.

Примечания: Для того, чтобы плоскость Σ преобразовать в горизонтально-проецирующую, ее необходимо повернуть вокруг оси вращения $i \perp П_2$, а в качестве вспомогательной линии уровня взять фронталь.

Пример задачи 10: *способом вращения преобразовать проецирующую плоскость в плоскость уровня.*

Ответ: На рисунке 18 показан процесс преобразования проецирующей плоскости в плоскость уровня. Если плоскость Σ, заданная треугольником ABC, фронтально-проецирующая, то ее можно преобразовать в горизонтальную плоскость уровня, вращая вокруг оси i, перпендикулярной плоскости $П_2$. Ось вращения для быстроты построения проходит через вершину A - ΔABC.

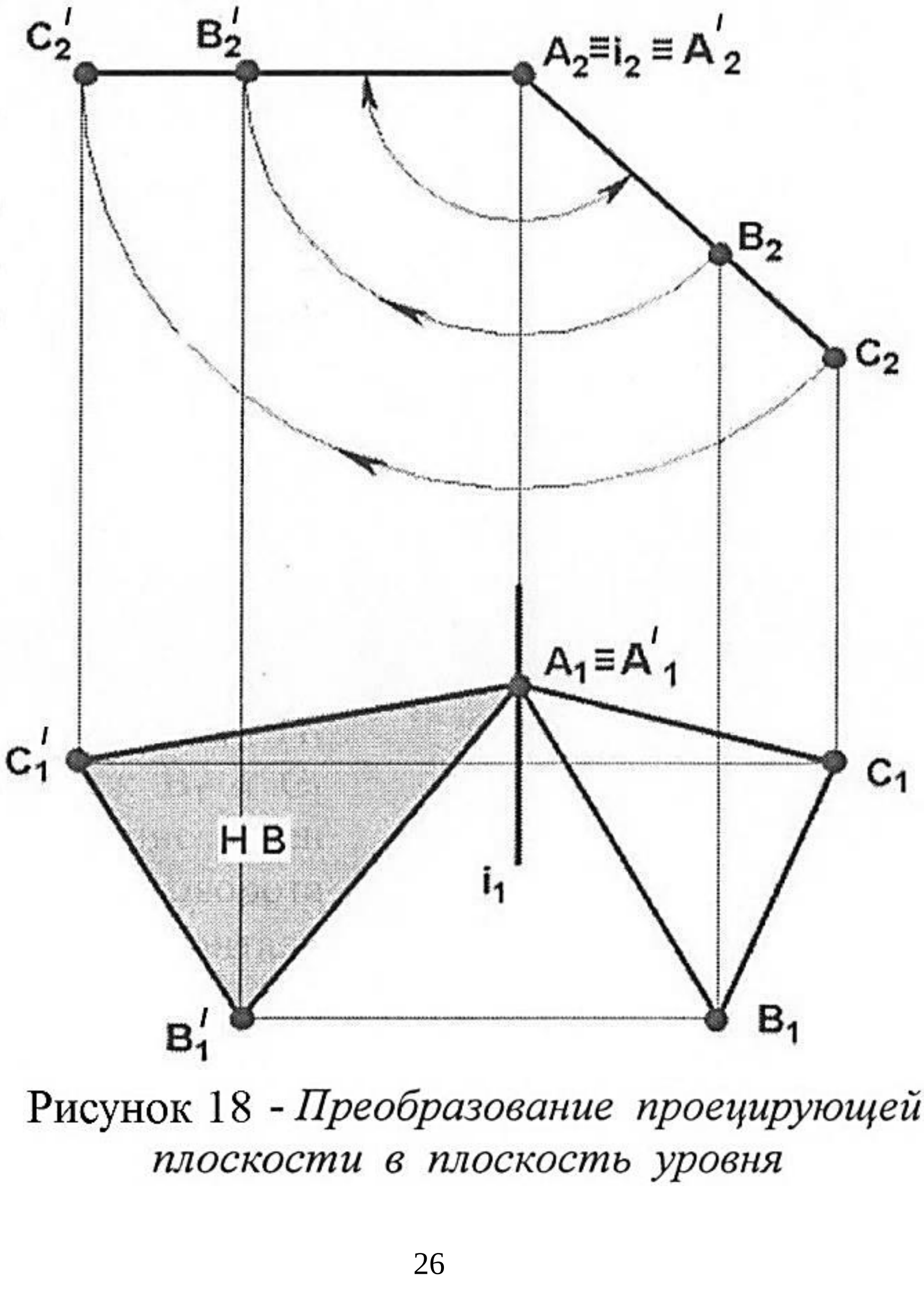


Рисунок 18 - *Преобразование проецирующей плоскости в плоскость уровня*

После поворота плоскость треугольника Σ располагается параллельно плоскости $П_1$, и ее фронтальная проекция - прямая $|A_2B_2C_2|$ занимает положение $|A_2'B_2'C_2'|$, перпендикулярное линиям связи и параллельное оси X. Угол поворота определяет вращение заданной плоскости до положения плоскости уровня. Величина угла $\alpha = \angle C_2A_2C_2'$. Проекция $\Delta A_1'B_1'C_1'$ отображается в действительную (натуральную) величину треугольника.

Примечание: Горизонтально-проецирующую плоскость можно преобразовать во фронтальную плоскость уровня, вращая ее вокруг оси $i \perp П_1$ и проходящей через какую-либо точку плоскости.

1.2.11. Примеры преобразования чертежей двумя поворотами

Пример задачи 11: *повернуть прямую общего положения в прямую проецирующую.*

Ответ: На рисунке 19 отрезок AB прямой общего положения преобразован так, чтобы одна его проекция проецировалась в натуральную величину, а другая в точку. На примере использованы оси $i \perp П_1$ для первого вращения, $j \perp П_2$ - для второго вращения.

Преобразование:

1). Ось вращения i для удобства построения лучше провести через конец отрезка AB, и повернуть проекцию отрезка вокруг i до положения фронтали B'A' ($B_1'A_1'$, $B_2'A_2'$): $B_2'A_2'$ - натуральная величина отрезка AB.

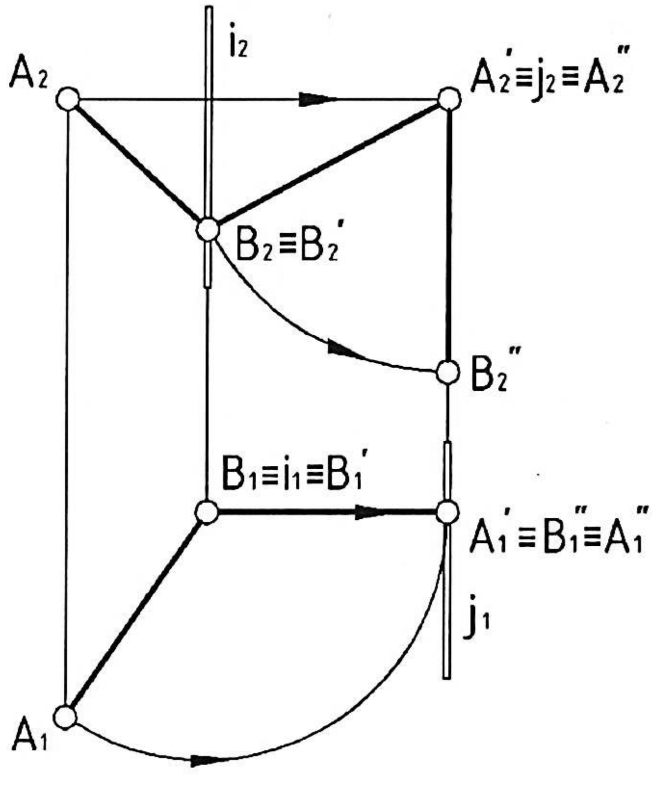


Рисунок 19 - *Поворот прямой общего положения в проецирующую*

2). Ось вращения j лучше также задать через один из концов отрезка, и после повернуть проекцию отрезка $B_2'A_2'$ в положение отрезка горизонтально-проецирующей прямой A"B" (A_1"B_1", A_2"B_2"): $A_1" \equiv B_1"$.

Примечание: Если необходимо прямую общего положения повернуть во фронтально-проецирующую, то первая ось вращения i должна быть перпендикулярна Π_2, а вторая ось $j \perp \Pi_1$. Например, как на рисунке 20.

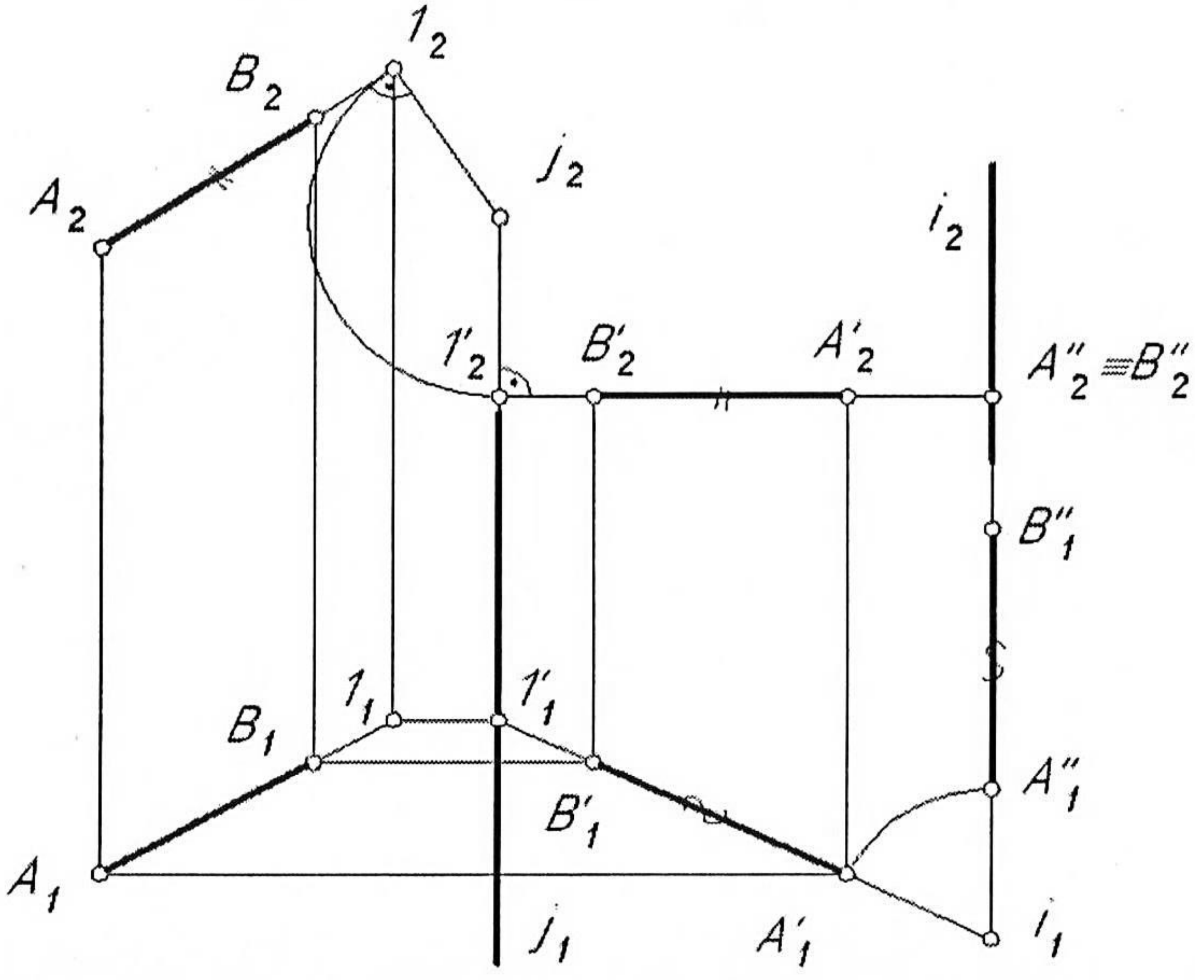


Рисунок 20 - *Вращение прямой общего положения в проецирующее положение*

Пример задачи 12: *преобразовать плоскость общего положения в плоскость уровня.*

Ответ: Для того чтобы плоскость общего положения преобразовать в плоскость уровня, необходимо выполнить два последовательных поворота: вначале преобразовать ее в плоскость проецирующую (см. рисунок 17), а затем проецирующую плоскость преобразовать в плоскость уровня (см. рисунок 18). Решение начинают с изображений проекций фронтали плоскости F (f_1, f_2). Преобразование плоскости общего положения Σ (ΔABC) во фронтальную плоскость уровня показано на рисунке 21.

Построение:

1). Ось вращения $i \perp \Pi_2$ для удобства построения лучше провести через вершину ΔABC плоскости Σ, затем повернуть фронтальную проекцию треугольника вокруг оси i до положения горизонтально-проецирующего. Новая горизонтальная проекция треугольника выродилась в прямую линию - $A_1'B_1'C_1'$.

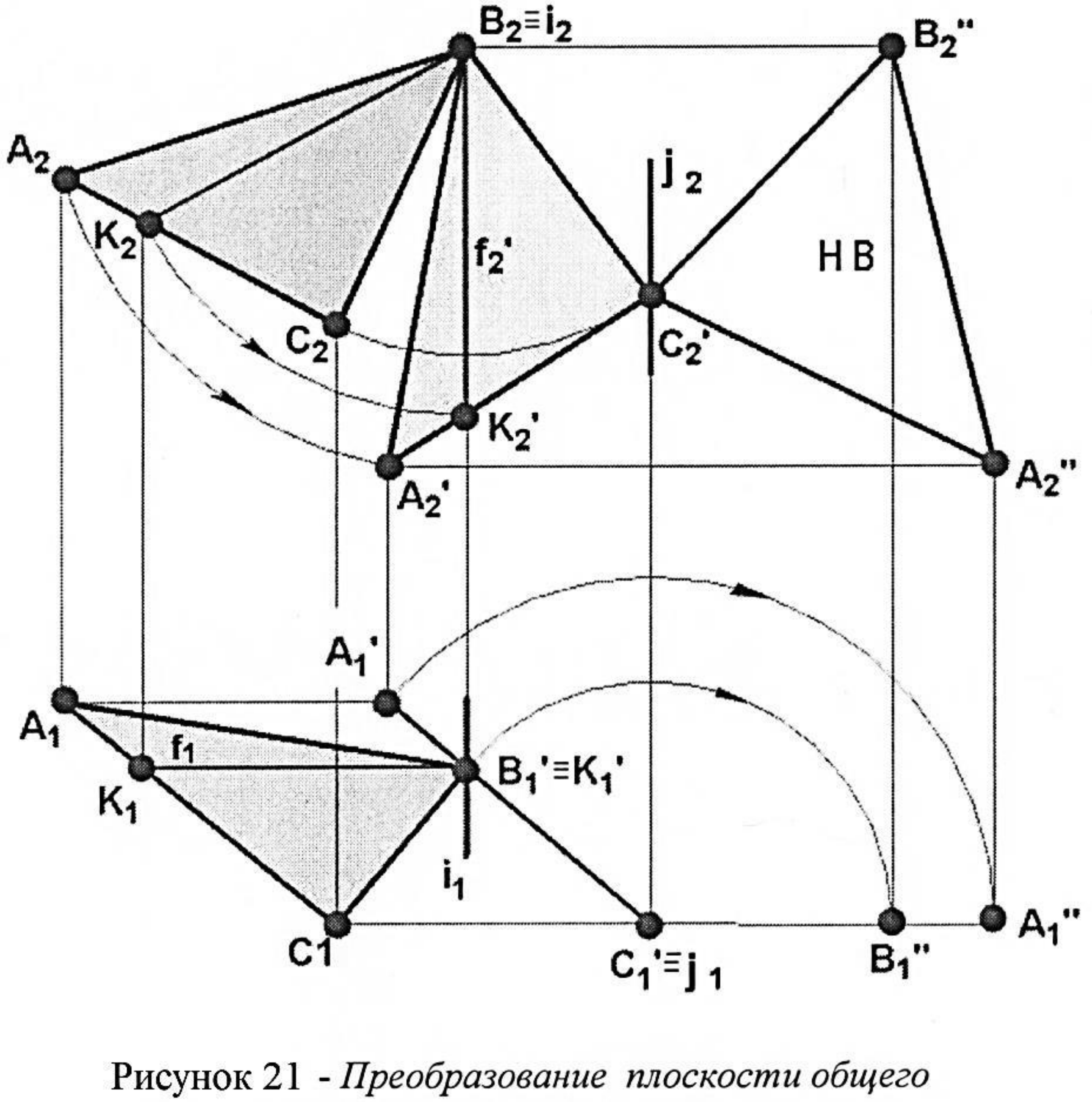


Рисунок 21 - *Преобразование плоскости общего положения в плоскость уровня*

2). Ось вращения j $\perp$ Π_1 для быстроты построения лучше задать через конец новой горизонтальной проекции плоскости $A_1'B_1'C_1'$, после повернуть эту проекцию в положение фронтального уровня ($\Delta \| \Pi_2$): $\Delta A_2''B_2''C_2''$ - натуральная величина треугольника, задающего плоскость.

Примечание: Если необходимо плоскость общего положения повернуть в горизонтальную плоскость уровня, то первая ось вращения i должна быть перпендикулярна Π_1, а вторая ось $j \perp \Pi_2$, и построение начинают с выполнения проекций горизонтали H (h_1, h_2). Например, как на рисунке 22.

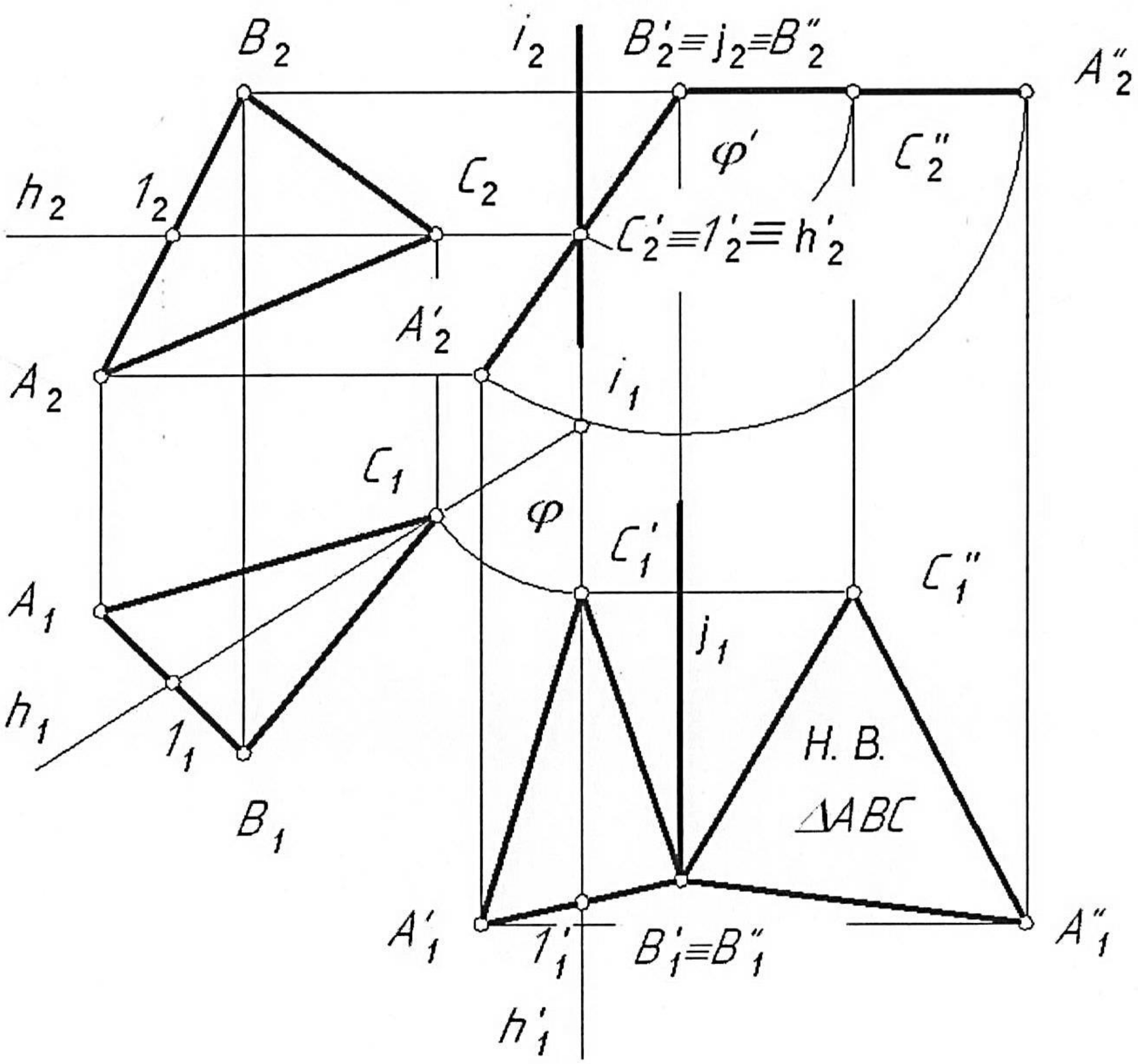


Рисунок 22 - *Преобразование плоскости общего положения в горизонтальную плоскость*

1.2.12. Способ плоскопараллельного перемещения

Плоскопараллельным перемещением называется такое перемещение, при котором все точки геометрического объекта (фигуры) перемещаются в параллельных плоскостях. При таком перемещении движется сам объект, а плоскости проекций остаются неподвижными.

Способ вращения без указания осей, радиусов и центров вращения (при этом соблюдаются все свойства и правила) можно рассматривать как один из частных случаев плоскопараллельного перемещения. Этим способом могут быть решены все 4 основные задачи, сформулированные на стр. 21 данного пособия:

- 1-я и 2-я задачи - рисунок 23;
- 3-я и 4-я задачи - рисунок 24.

Отрезок прямой общего положения AB перемещаем так, что все его точки остаются в плоскостях, параллельных плоскости Π_1. При этом величины проекций: $A'_1B'_1 = A_1B_1$. Фронтальные проекции траекторий плоскопараллельного перемещения точек A и B - прямые, параллельные оси X. Вторым плоскопараллельным перемещением располагаем отрезок в проецирующее положение $\perp \Pi_1$, при этом величины проекций: $A'_2B'_2 = A''_2B''_2$. Горизонтальные проекции траекторий перемещения точек A и B - это прямые, параллельные оси X.

Результат построения на рисунке 23: $A''_1 \equiv B''_1$. То есть в новом положении отрезок стал определять горизонтально-проецирующую прямую.

На рисунке 24 изображено плоскопараллельное перемещение плоскости общего положения, заданной треугольником ABC. Выполнено последовательно два преобразования: сначала относительно оси, перпендикулярной к плоскости проекций Π_2, потом относительно оси, перпендикулярной к плоскости Π_1. При первом перемещении плоскость треугольника преобразована в горизонтально-проецирующую, для этого фронталь AD плоскости переведена в горизонтально-проецирующее положение: $A'_2D'_2 \perp$ оси X.

Другим плоскопараллельным перемещением треугольник плоскости $A'B'C'$ преобразован в треугольник $A''B''C''$, при этом фронтальная проекция $\Delta A''_2B''_2C''_2$ определяет действительный размер ΔABC, так как треугольник в конечном итоге стал задавать фронтальную плоскость уровня.

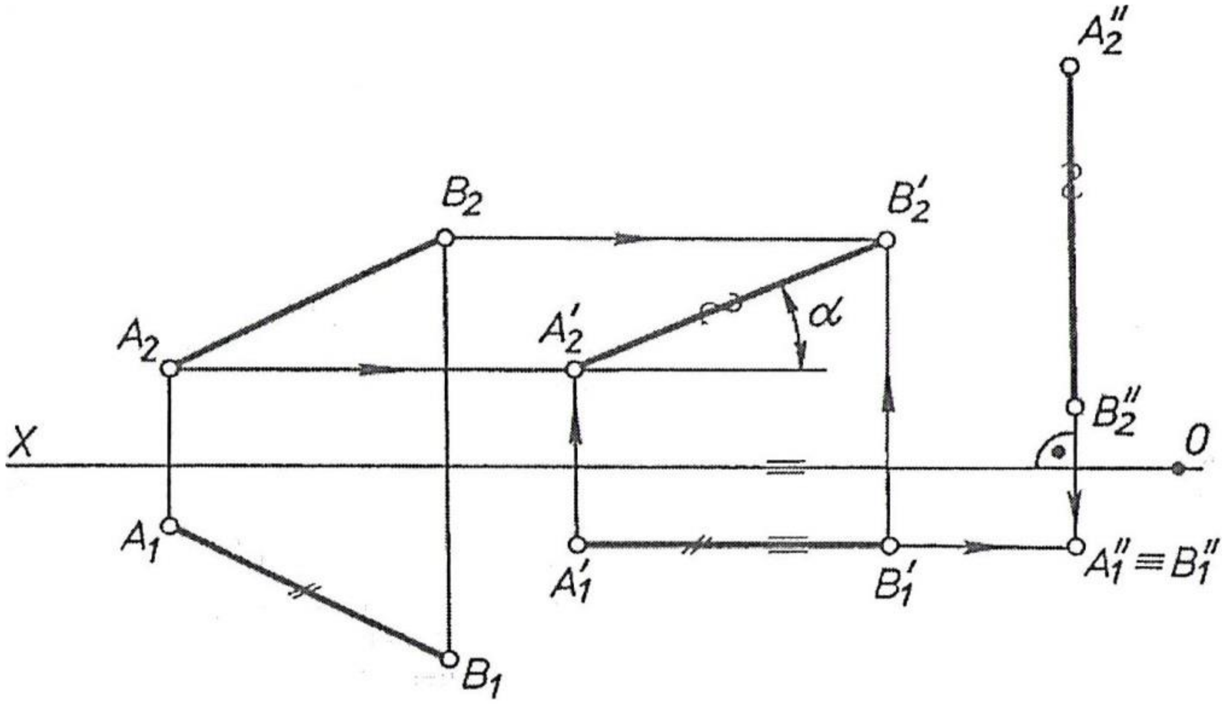


Рисунок 23 - *Плоскопараллельное перемещение отрезка прямой общего положения*

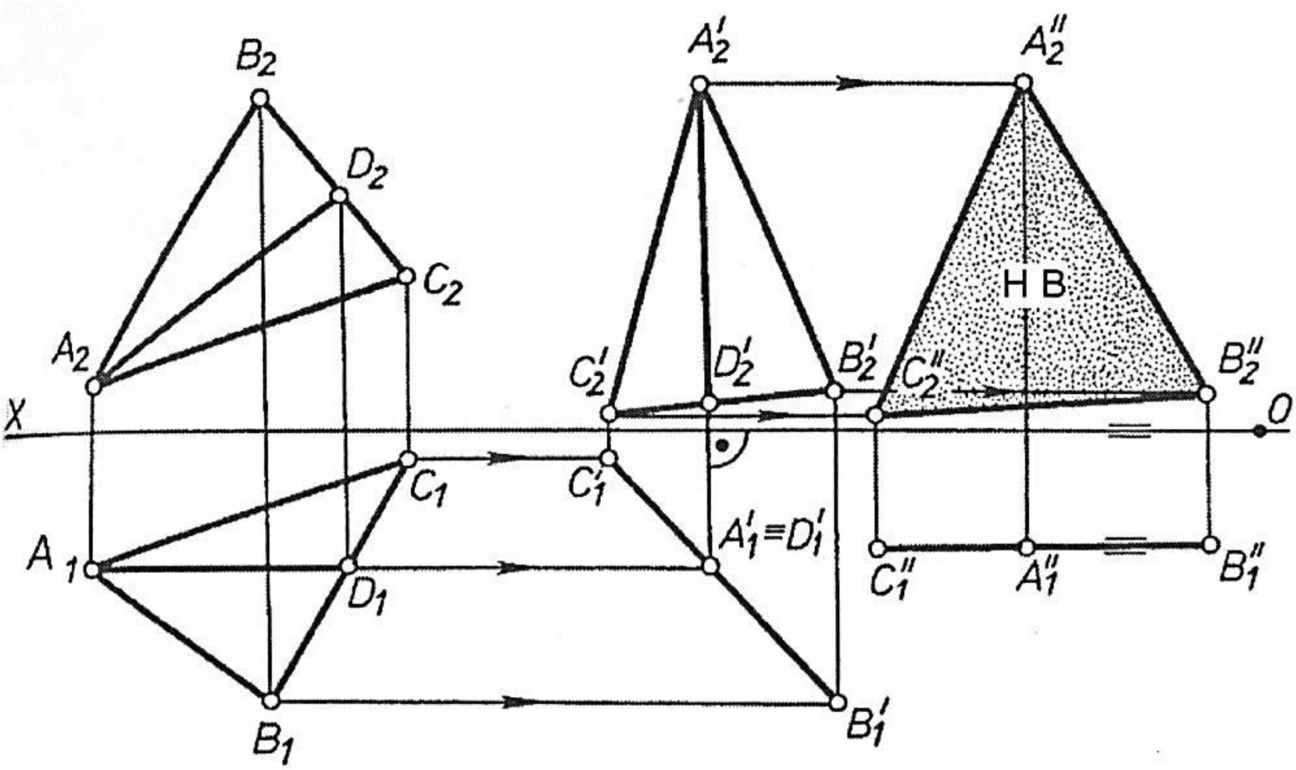


Рисунок 24 - *Преобразование плоскопараллельным перемещением плоскости общего положения*

1.2.13. Способ совмещения

Способом совмещения можно считать преобразование плоскости в плоскость уровня посредством вращения вокруг ее линии уровня. В отличие от метода замены плоскостей проекций и способа вращения вокруг проецирующих прямых, вращением вокруг линии уровня (включая и следы) плоскость общего положения в плоскость уровня можно преобразовать только за одно вращение. Это дает преимущество способу совмещения (при прочих равных условиях). На рисунке 25 изображено вращение плоскости вокруг линии уровня до истинной величины.

Совместим плоскость, заданную треугольником ABC, с положением горизонтальной плоскости, проходящей через горизонталь H. И если повернуть плоскость треугольника ABC вокруг горизонтали в положение, параллельное плоскости Π_1, и построить его новую горизонтальную проекцию, то эта проекция и будет искомой величиной.

Выполнение:

1). Для большой наглядности удобства построения проведем в плоскости через вершину B ΔABC горизонталь h (h_1, h_2) вне треугольника.

2). При вращении плоскости треугольника останутся неподвижными точки B и 1, лежащие на горизонтали H.

3). Таким образом, вращение плоскости треугольника ABC сводится к вращению только одной ее точки, например вершины A: $A \in \Sigma$; $\Sigma \perp H \Leftrightarrow \Sigma_1 \perp h_1$.

4). Центр вращения O (O_1, O_2) определяется в пересечении оси вращения с плоскостью вращения: $H \cap \Sigma = O$.

5). Определяем натуральную величину радиуса вращения OA (R_A) способом прямоугольного треугольника, отложив на перпендикуляре к A_1O_1 отрезок ΔZ, равный разности высот точек A и O - $\Delta Z = Z_A - Z_O$. Повернув радиус вращения, получим проекцию A_1 повернутой точки A.

6). Три точки B', A' и $1'$ определяют новое положение плоскости (Γ) треугольника, параллельное плоскости Π_1:

$A_1' \in \Gamma; \Gamma_2 \parallel X$.

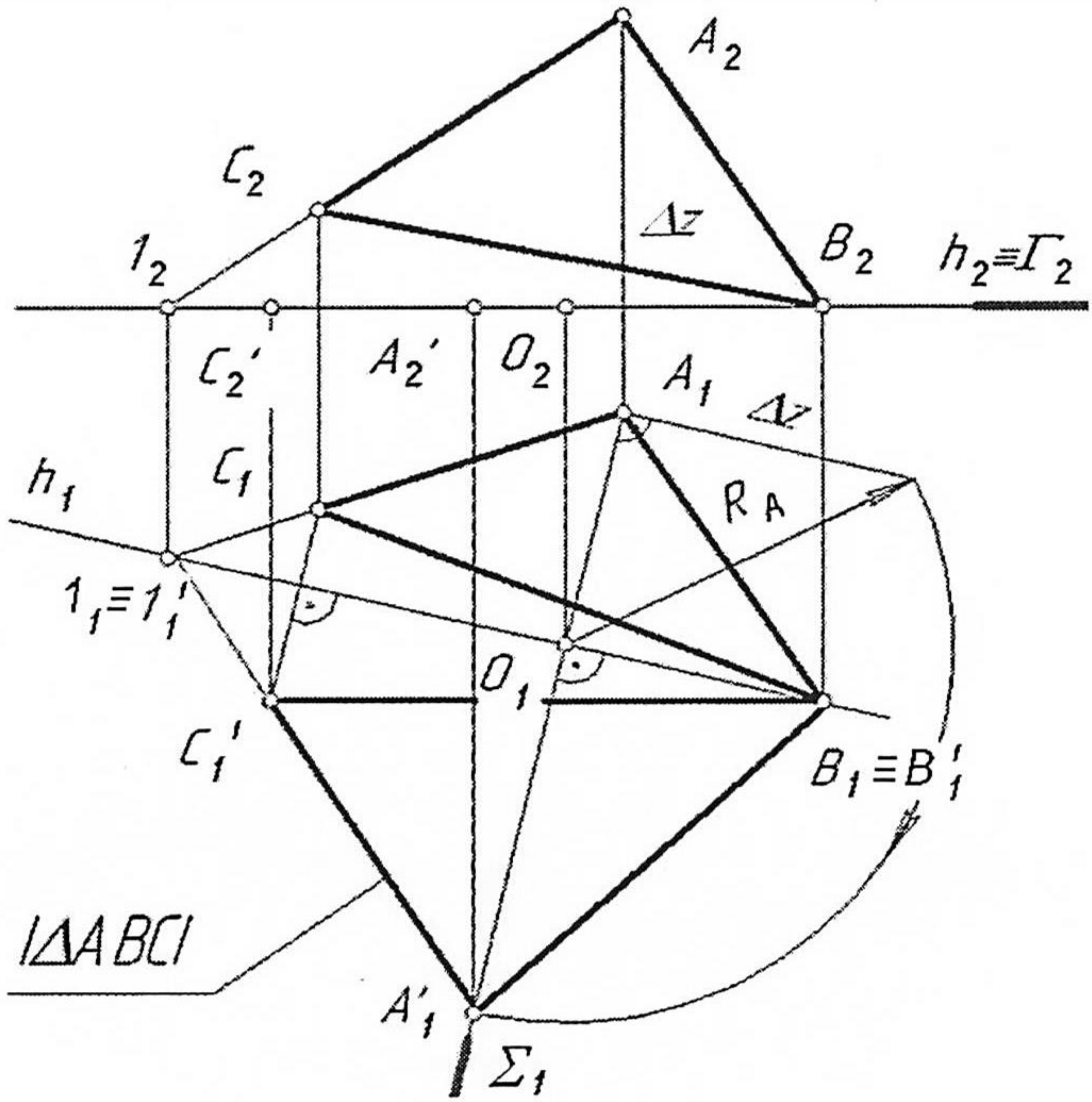


Рисунок 25 - *Вращение плоскости вокруг линии уровня до истинной величины*

7). Новое положение C' вершины C определяется как точка пересечения прямой $|A_1'1_1'|$ с плоскостью перпендикуляра, по которому перемещается точка С.

8). Новое положение треугольника ABC плоскости - $A'B'C'$ (Γ), следовательно, $\Delta A'B'C' \cong \Delta ABC$.

9). Горизонтальная проекция плоскости $\Delta A_1'B_1'C_1'$ получается в натуральную величину, это искомая величина.

1.2.14. Метрические задачи

Какие задачи являются метрическими?

Ответ: *Метрическими называются задачи, решение которых связано с определением свойств и характеристик геометрических фигур, измеряемых линейными и угловыми величинами.*

Существует три основные группы метрических задач:

1). Задачи на определение расстояний между геометрическими фигурами:

- расстояние между двумя точками;
- расстояние от точки до прямой общего положения;
- расстояние между параллельными прямыми;
- расстояние между параллельными плоскостями;
- расстояние между скрещивающимися прямыми (кратчайшее);
- расстояние от точки до плоскости;
- расстояние от точки до поверхности.

2). Задачи на определение углов между геометрическими плоскими фигурами:

- угол между пересекающимися и скрещивающимися прямыми;
- угол между прямой и плоскостью;
- угол между двумя плоскостями.

3). Задачи на определение действительных величин плоских геометрических фигур:

- действительная величина плоской фигуры.

К метрическим задачам относятся и задачи на построение в плоскости общего положения геометрических фигур по заданным размерам.

Теоретическая основа для решения таких метрических задач:

любая геометрическая фигура, принадлежащая плоскости, параллельной плоскости проекций, проецируется на нее в конгруэнтную ей фигуру

- это инвариантное свойство ортогонального проецирования.

Для решения метрических задач используют:

- способы преобразования комплексного чертежа;
- положения по теме «Взаимно перпендикулярные прямые и плоскости».

Общая схема решения:

- одним из способов преобразования комплексного чертежа привести одну или обе геометрические фигуры в частное положение ($\perp$ или $||$ одной из плоскостей проекций);

- или построить проекцию искомой фигуры на одну из выбранных плоскостей;

- или решить в плоскости частного положения заданную метрическую задачу, перенеся затем решение задачи на исходные проекции обратным преобразованием;

- при выборе способа преобразования комплексного чертежа следует ориентироваться на простоту графических операций.

1.2.15. Расстояние между объектами

Как определяется расстояние между геометрическими объектами?

Ответ: *Расстояние между двумя точками равно длине отрезка прямой линии (перпендикуляра), соединяющей эти точки.* Эта задача решается или способом прямоугольного треугольника (см. стр. 5-7 пособия; рисунок 26) или построением дополнительного изображения отрезка на новой плоскости, параллельной этому отрезку (см. рисунок 5, стр. 12-13 пособия).

Расстояние от точки до прямой линии равно длине перпендикуляра, опущенного из точки на эту прямую (рисунок 27,*а*). На рисунке 27,*б* изображена плоскость проекций Π_1, прямая l, перпендикулярная плоскости Π_1 (l' - ее основная проекция) и точка A. Расстояние от точки A до прямой l определяется величиной отрезка AK: $AK \perp l$. Отсюда $AK || \Pi_1$, следовательно, $AK = A'K' - K' \equiv l'$ и $|AK| = A'\, l'$. Расстояние от точки до проецирующей прямой измеряется на чертеже (эпюре) отрезком, соединяющим основную проекцию прямой с соответствующей проекцией точки (рисунок 27,*в*).

В общем случае, чтобы опустить перпендикуляр из точки на прямую, через эту точку проводят плоскость, перпендикулярную к этой прямой. *В частном случае* отрезок этого перпендикуляра отображается в натуральную величину на плоскости, если он проведен к проецирующей прямой. Для этого нужно преобразовать

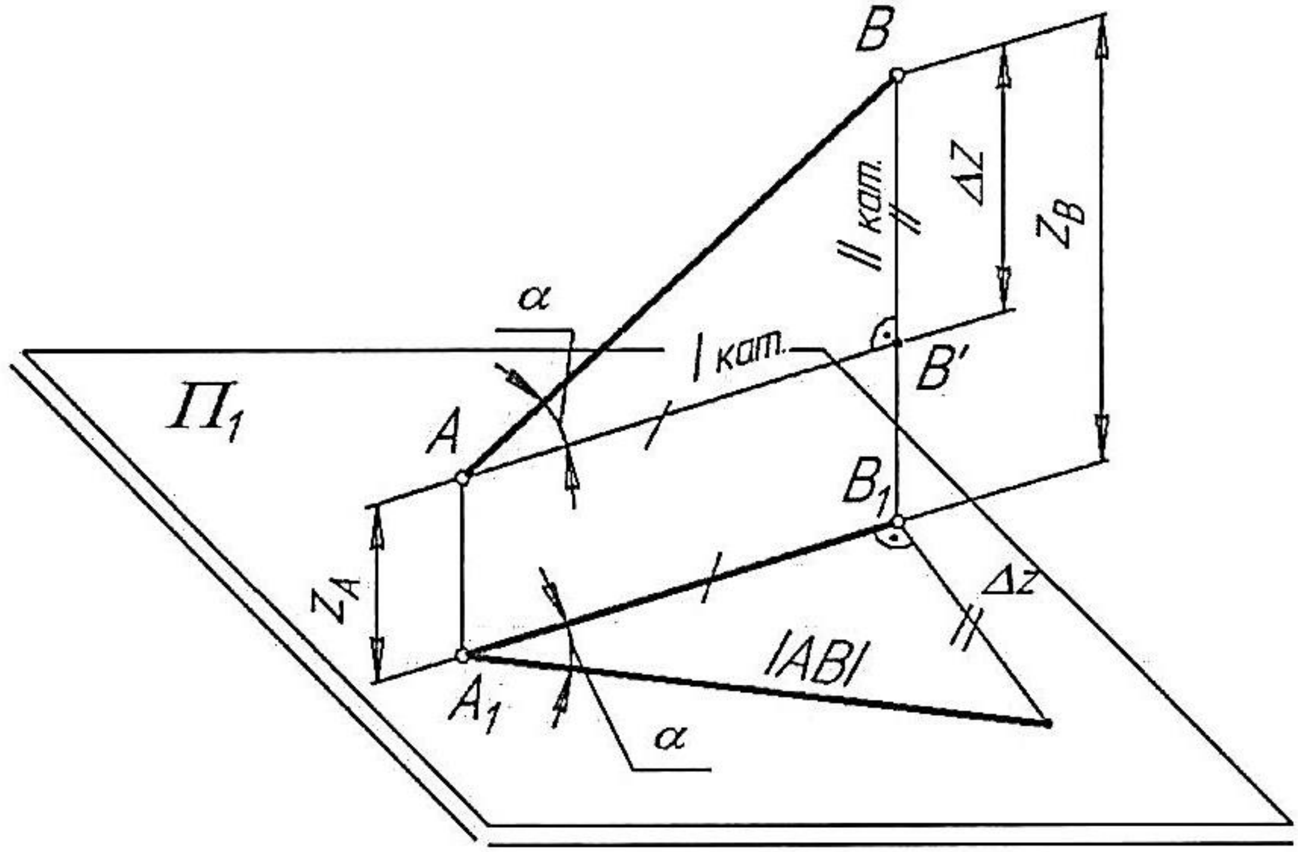


Рисунок 26 - *Способ прямоугольного треугольника*

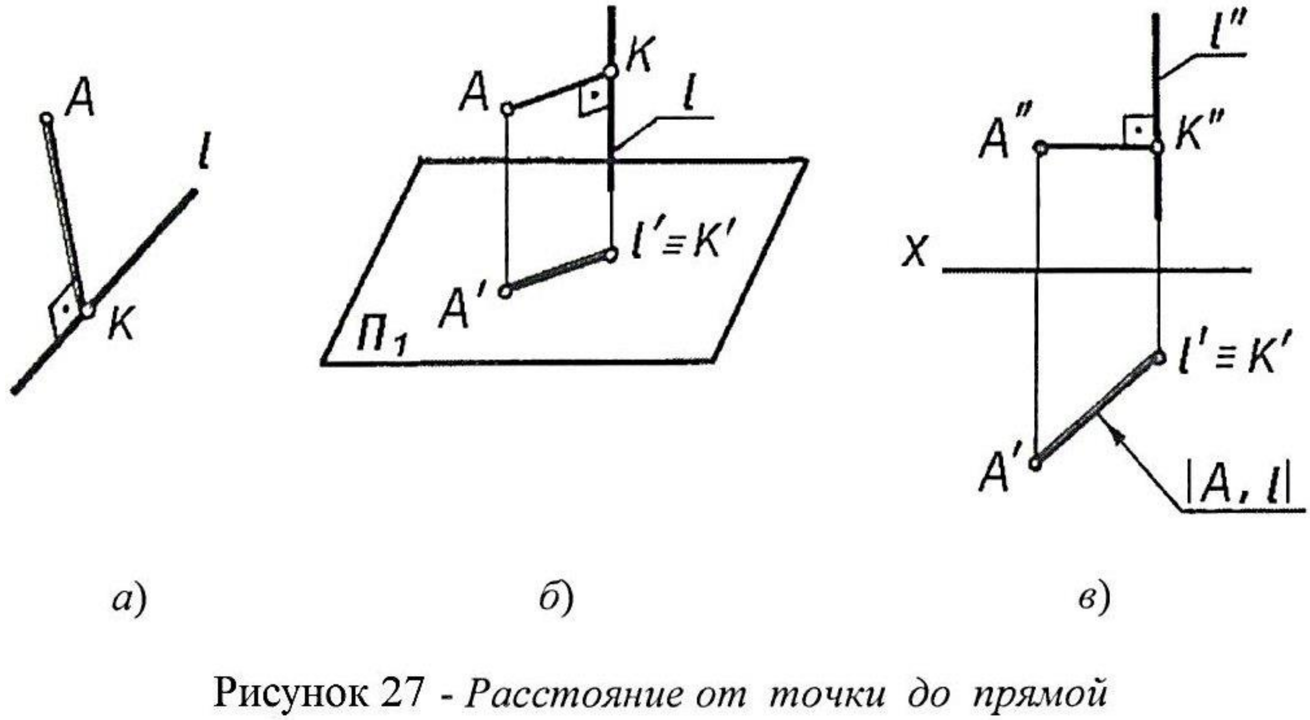


Рисунок 27 - *Расстояние от точки до прямой* чертеж данной прямой, сделав ее в новой системе плоскостей проецирующей. Следовательно, для определения расстояния от точки до прямой общего положения необходимо применить решение *исходной задачи преобразования чертежа со страницы 16 данного пособия* (см. рисунок 9).

Рассмотрим 5 задач на определение расстояний между геометрическими объектами:

Задача 1: Найти расстояние от точки до прямой (рисунок 28).

Обозначим расстояние от точки A до отрезка прямой CD длиной перпендикуляра AK.

Решение (рисунок 29):

1). Выберем взамен плоскости проекций Π_2 новую плоскость Π_4, перпендикулярную Π_1 и параллельную отрезку прямой CD. Новая ось проекций $X_1 \parallel C'D'$. На плоскости Π_4 проекция отрезка $C^{IV}D^{IV}$ проецируется в натуральную величину, так как его прямая в новой системе плоскостей проекций Π_1/Π_4 занимает положение горизонтали.

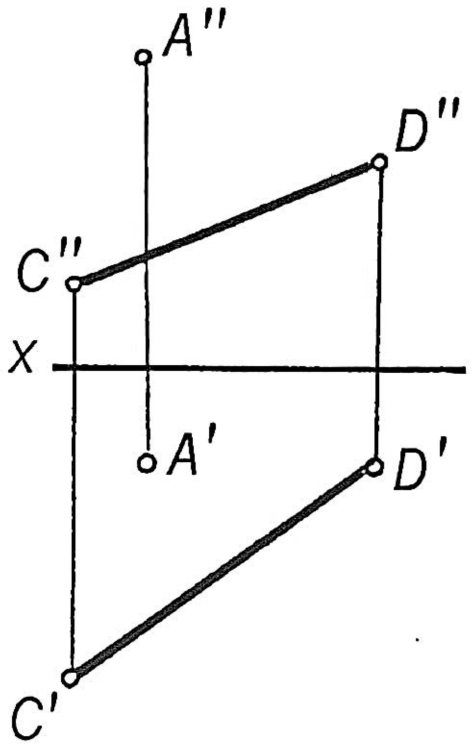


Рисунок 28 - *Определение расстояния между точкой и отрезком*

2). Преобразуем отрезок CD во фронтально-проецирующий способом замены. Введем вторую плоскость Π_5, перпендикулярно и Π_4, и отрезку: ось $X_2 \perp C^{IV}D^{IV} \Rightarrow C^V \equiv D^V$.

3). $|A^VK^V|$ - искомое расстояние; $|A^VK^V| = |AK|$.

4). Для построения проекций перпендикуляра AK в заданной системе плоскостей проекций Π_2/Π_1 вначале проводим $A^{IV}K^{IV} \parallel X_2$, так как в новой системе Π_4/Π_5 отрезок прямой AK является линией *уровня*. Затем, используя линии связи и принадлежность точки K отрезку прямой CD, находим $A'K'$ и $A''K''$.

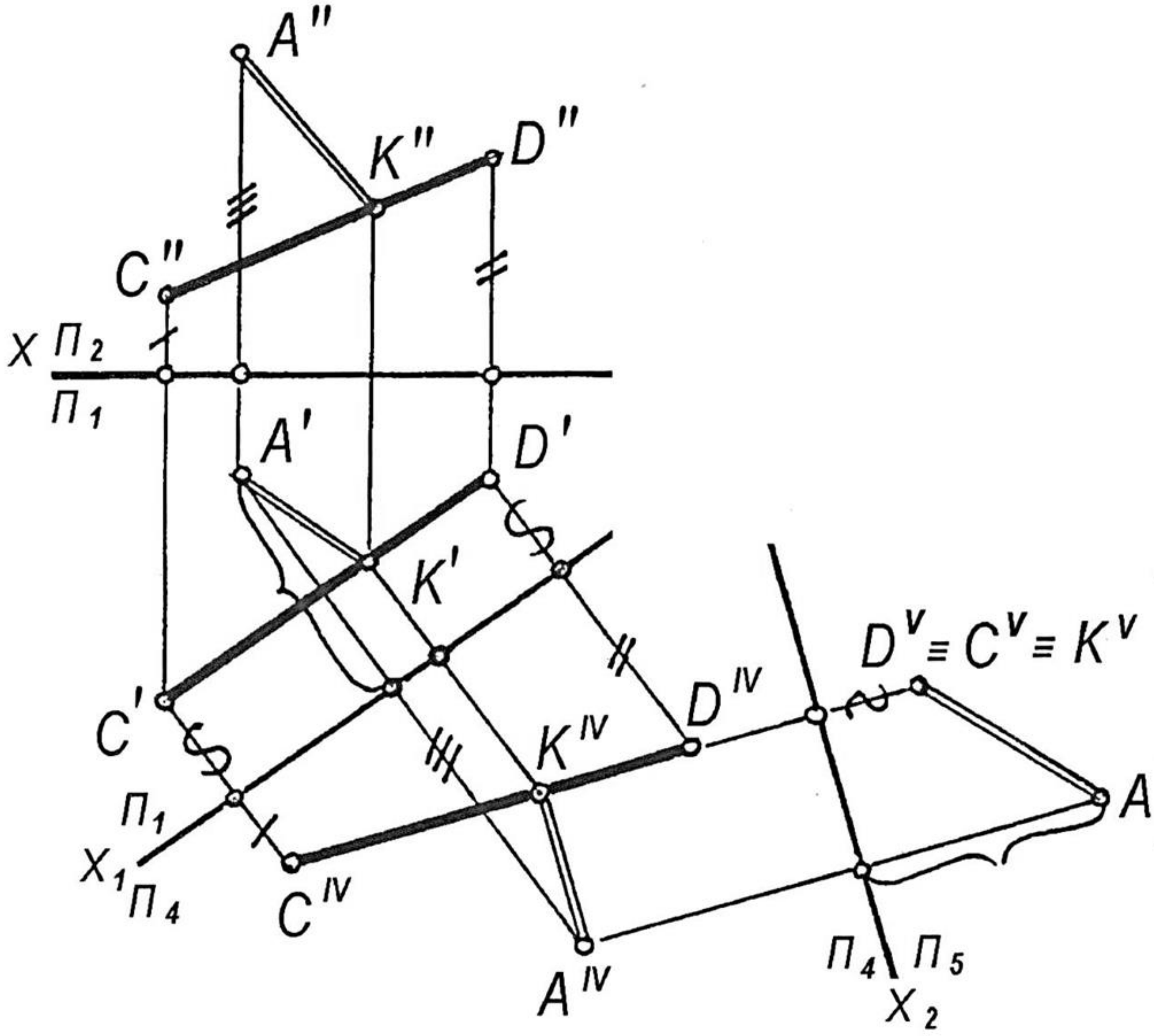
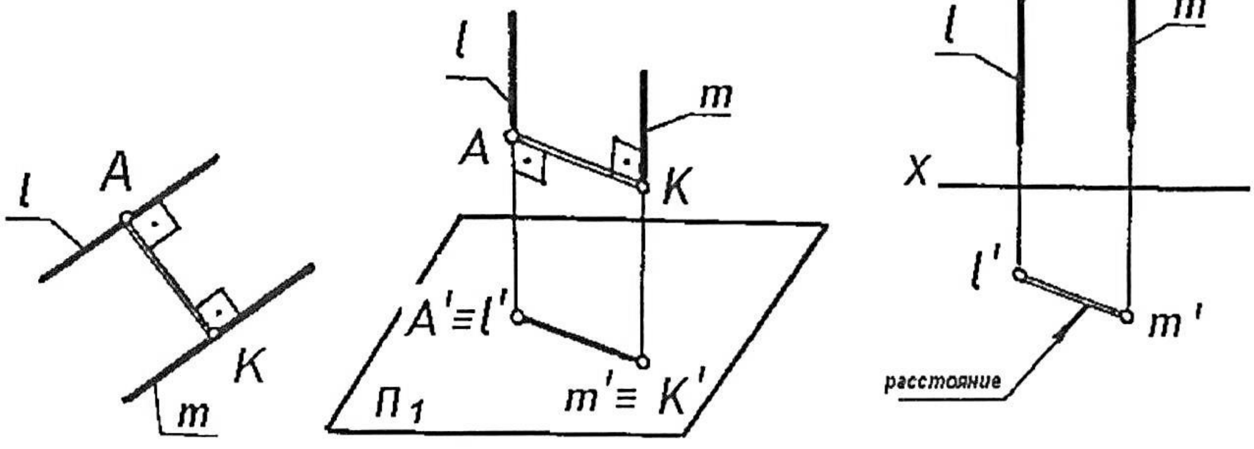


Рисунок 29 - *Расстояние от точки до прямой*

Расстояние между параллельными прямыми измеряется отрезком перпендикуляра между ними (рис. 30,*а*).

Если прямые перпендикулярны одной из плоскостей проекций, то на эту плоскость расстояние между ними проецируется без искажения. На рисунке 30,*б* изображена плоскость $П_1$ и две параллельные прямые l и m, перпендикулярные к этой плоскости $П_1$ (l' и m' - их основные проекции). Расстояние между прямыми l и m измеряется величиной отрезка $АК$: $АК \perp (l \wedge \text{m})$. В этом случае $АК \| П_1$ и $АК = А'К'$, но $А' \equiv l'$ и $К \equiv m'$, отсюда $|l||m| = l'm'$.

Расстояние между параллельными прямыми, занимающими проецирующее положение, равно на эпюре величине отрезка, соединяющего их основные проекции (рис. 30,*в*).



а) *б)* *в)*

Рисунок 30 - *Расстояние между параллельными прямыми*

Для определения расстояния между параллельными прямыми общего положения необходимо применить *решение исходной задачи преобразования чертежа со страницы 16* учебного пособия (см. рисунок 9).

Задача 2. Определить расстояние между параллельными прямыми m и n.

Решение (рисунок 31):

1). Первую плоскость проекций $П_4$ выберем перпендикулярно $П_1$ и параллельно прямым m и n: $X_1 \| m' \wedge n'$.

2). Для построения новой проекции m^{IV} прямой m задаем на ней две произвольные точки 1 и 2 и находим их новые проекции 1^{IV} и 2^{IV}. Соединив точки 1^{IV} и 2^{IV} прямой линией, получим новую проекцию m^{IV} прямой m. Для построения новой проекции n^{IV} прямой n задаем ней точку A, строим новую проекцию A^{IV} и проводим через A^{IV} прямую линию n^{IV}, параллельную прямой m^{IV}.

3). Вторую дополнительную плоскость $П_5$ выберем так: $П_5 \perp П_4$; $П_5 \perp m \wedge n$; $X_2 \perp m^{IV} \wedge n^{IV}$. Строим новые проекции m^V и n^V прямых m и n, используя принадлежащие им точки $1, 2$ и A.

4). $|A^V K^V|$ - искомая величина; $|A^V K^V| = |AK|$.

5). Обратное построение проекций перпендикуляра AK ($A'K'$ и $A''K''$) в исходной системе плоскостей проекций $П_2/П_1$ аналогично построениям в вышерассмотренной задаче 1 (см. стр. 38).

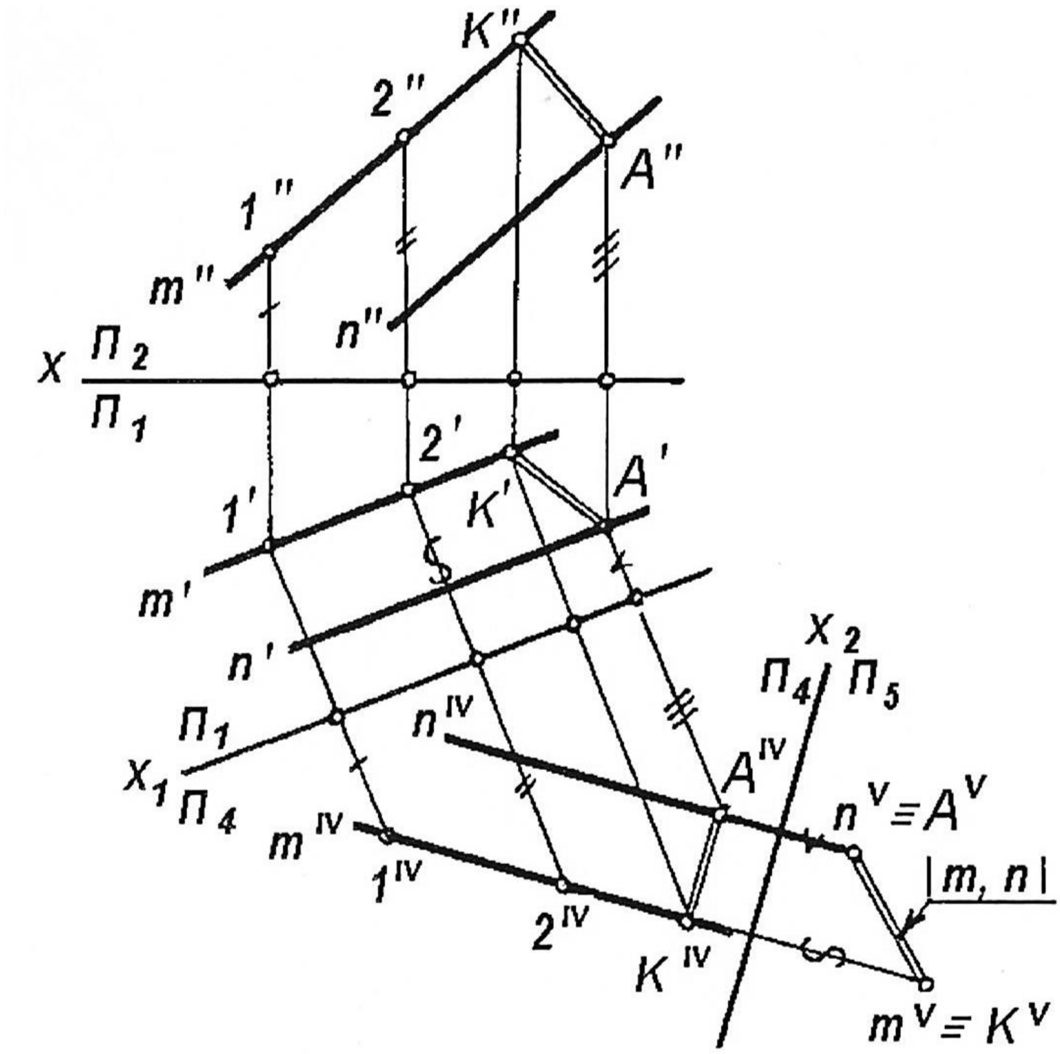


Рисунок 31 - *Определение расстояния между параллельными прямыми*

Расстояние от точки до плоскости измеряется отрезком перпендикуляра, проведенного из точки к плоскости(рисунок 32). *Если плоскость перпендикулярна одной из плоскостей проекций, то расстояние от точки до плоскости проецируется на эту плоскость без искажения.*

На рисунке 33,*а* изображена плоскость $П_1$, плоскость α, перпендикулярная к плоскости $П_1$ (α' - ее основная проекция) и точка *A*.

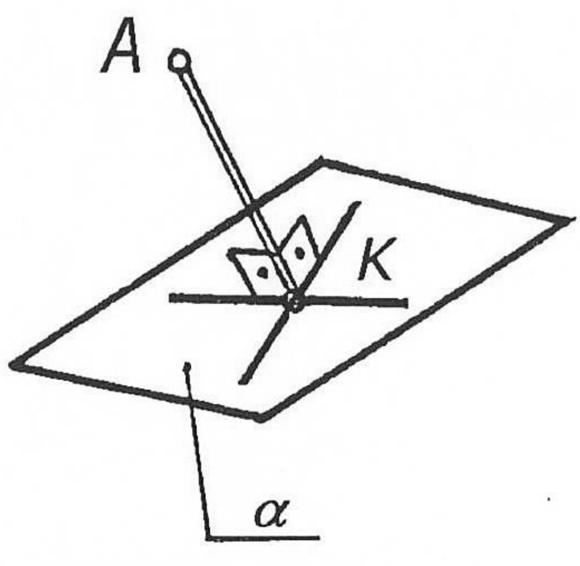
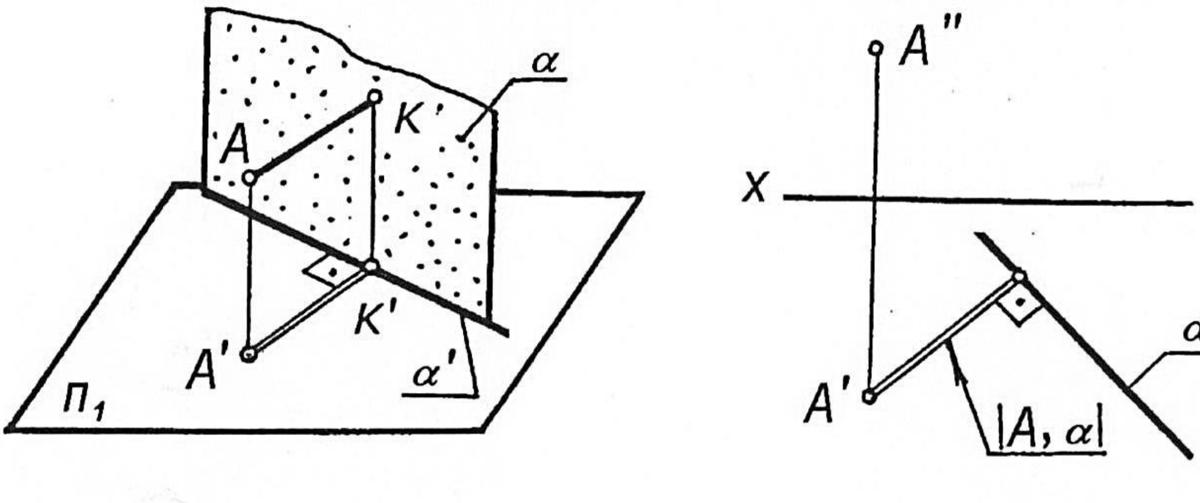


Рисунок 32 - *Перпендикуляр от точки к плоскости*

Расстояние от точки A до плоскости α измеряется величиной отрезка AK - $AK \perp \alpha$. В этом случае: $AK \| \Pi_1$, $AK \| A'K'$ и $|AK| = A'K' \Rightarrow A'K' \perp \alpha$. Отсюда, $A'K' \perp \alpha'$ (так как перпендикуляр к плоскости перпендикулярен к любой прямой этой плоскости).

Расстояние от точки до проецирующей плоскости измеряется на комплексном чертеже (эпюре) отрезком перпендикуляра, проведенного из соответствующей проекции точки к основной проекции плоскости (рисунок 33,*б*).



а) *б*)

Рисунок 33 - *Перпендикуляр от точки к проецирующей плоскости*

Следовательно, для определения расстояния от точки до плоскости общего положения необходимо применить решение *исходной задачи преобразования чертежа со страницы 14-15* пособия (см. рисунок 7).

Задача 3. Определить расстояние от точки M до плоскости W (ΔABC) (рисунок 34).

Построение:

1). В плоскости, заданной треугольником ABC, проведем проекции горизонтали H (h', h''). Систему плоскостей проекций Π_2/Π_1 заменим новой системой Π_1/Π_4: $\Pi_4 \perp \Pi_1$; $\Pi_4 \perp \Delta ABC \Rightarrow X_1 \perp h'(A'1')$.

2). $|M^{IV}K^{IV}|$ - искомое расстояние; $|M^{IV}K^{IV}| = |MK|$.

3). Для построения проекций отрезка MK в заданной системе плоскостей проекций Π_2/Π_1 вначале проводим $M'K' \| X_1$, так как в системе $П_1/П_4$ прямая, определяемая отрезком *МК*, является линией уровня. Затем, используя линии связи и известную координату (аппликату) Z_K точки *К*, находим K' и K''.

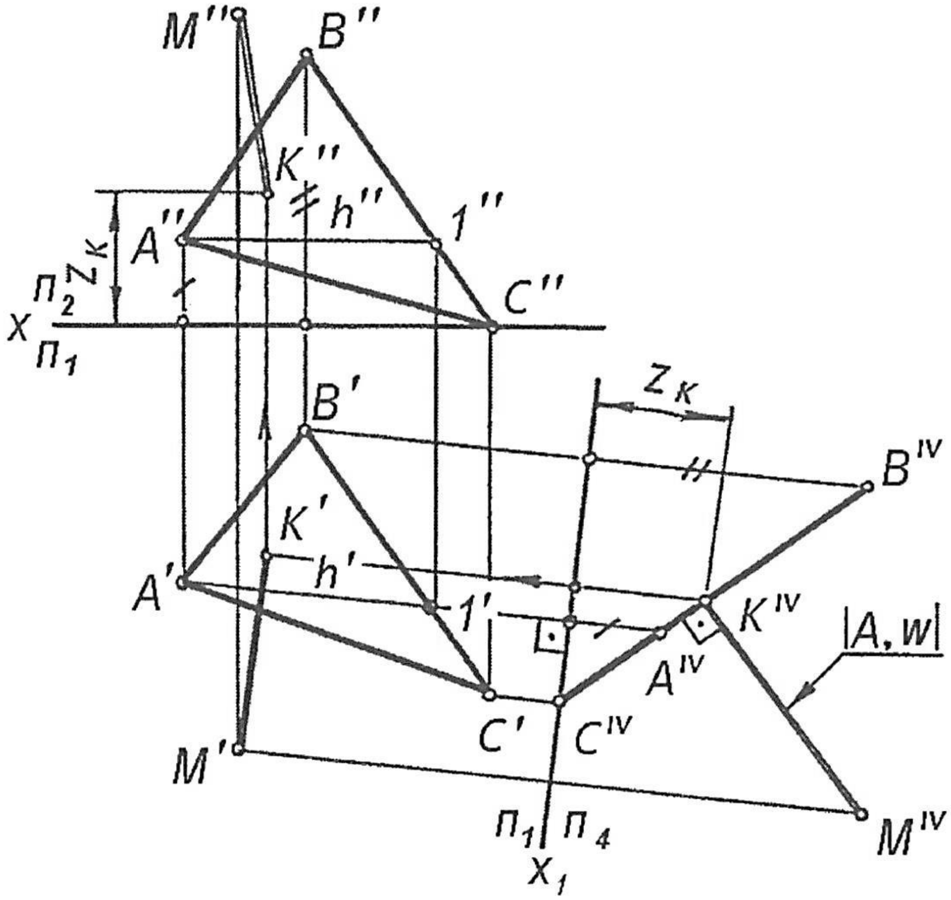


Рисунок 34 – *Определение расстояния от точки до плоскости*

Расстояние между скрещивающимися прямыми измеряется отрезком перпендикулярной прямой между ними. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми определяется длиной отрезка, одновременно перпендикулярного к обоим прямым.

В частном случае, если одна из скрещивающихся прямых перпендикулярна плоскости, то на эту плоскость расстояние до другой прямой проецируется без искажения. В общем случае, чтобы определить расстояние между скрещивающимися прямыми, необходимо преобразовать одну из прямых в проецирующую, например, способом замены плоскостей проекций. *Исходная задача для решения настоящей находится на странице 16* учебного пособия (см. рисунок 9).

Задача 4. Определить расстояние между скрещивающимися прямыми.

Построение (рисунок 35):

1). Первую плоскость проекций $П_4$ выберем перпендикулярно $П_1$ и параллельно, например, прямой, заданной отрезком АВ: $X_1 \parallel [A'B']$.

2). Проекция $[A^{IV}B^{IV}]$ получается в натуральную величину, и вторую дополнительную плоскость $П_5$ выберем так: $П_5 \perp П_4$; $П_5 \perp [AB]$; $X_2 \perp [A^{IV}B^{IV}]$. Строим новые проекции A^V и B^V: $A^V \equiv B^V$.

3). $|K^V T^V|$ - искомое расстояние; $|K^V T^V| = |KT|$.

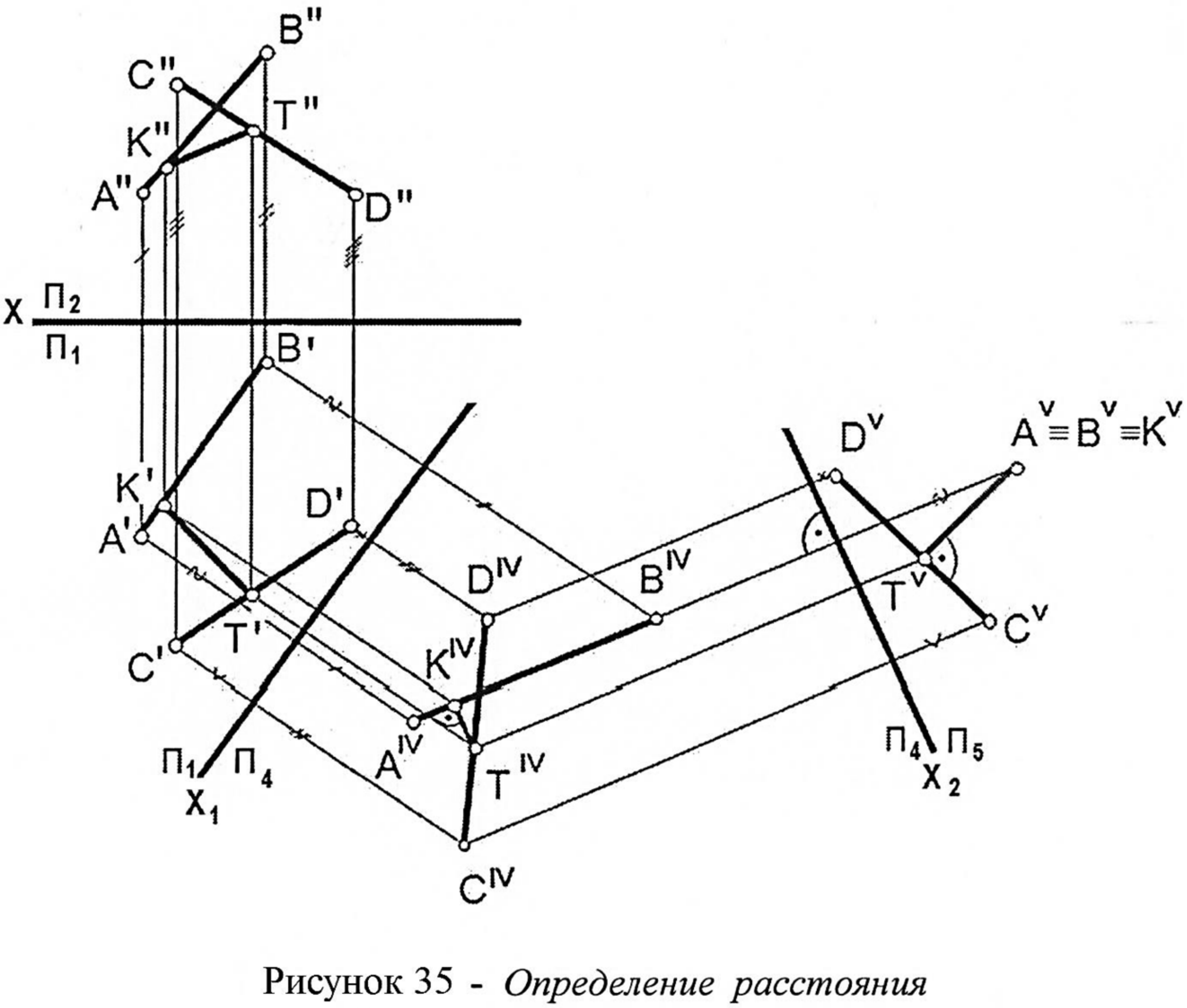
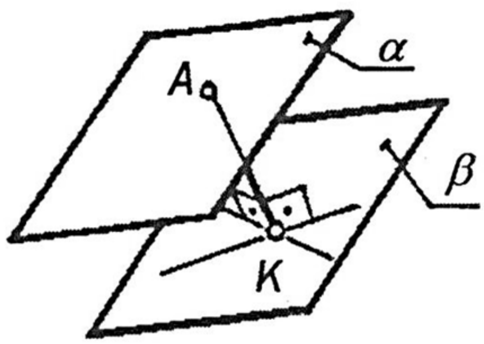
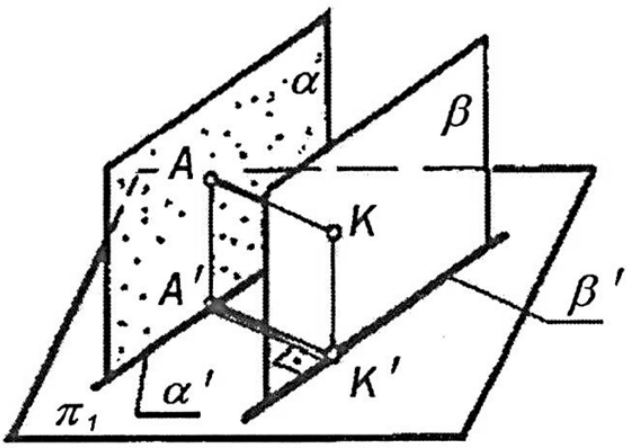


Рисунок 35 - *Определение расстояния между скрещивающимися прямыми*

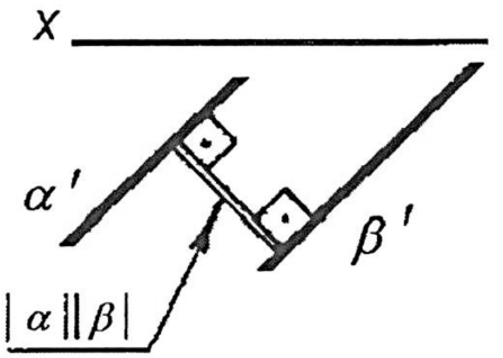
4). Обратное построение проекций перпендикуляра КТ ($K'T'$ и $K''T''$) в исходной системе плоскостей проекций $П_2/П_1$ аналогично построениям в вышерассмотренных задачах, изображенных на рисунках 29, 31.



а)



б)



в)

Рисунок 36 - *Расстояние между параллельными плоскостями*

Расстояние между двумя параллельными плоскостями измеряется величиной отрезка перпендикуляра между ними (рис. 36,*а*).

Если две плоскости перпендикулярны одной из плоскостей проекций, то расстояние между ними проецируется на эту плоскость без искажения.

На рисунке 36,*б* показаны параллельные плоскости α и β: $\alpha \wedge \beta$ перпендикулярны π_1, а $\alpha' \wedge \beta'$ - их основные проекции. Отрезок прямой $AK \perp \alpha \wedge \beta$; $[AK] \,||\, \pi_1 \Rightarrow |\alpha \,||\, \beta| = |AK| = |A'K'|$, $A'K' \perp \alpha' \wedge \beta'$. $[AK]$ - искомое расстояние.

Расстояние *на эпюре* между двумя параллельными плоскостями, занимающими проецирующее положение, равно расстоянию между их основными проекциями (рис. 36,*в*).

В общем случае, для определения расстояния между параллельными плоскостями необходимо использовать решение задачи, изображенной на рисунке 7 (см. стр. 14 пособия).

Задача 5. Определить расстояние между двумя параллельными плоскостями. Обе плоскости общего положения. Одна из них задана треугольником АВС, а другая следами.

Алгоритм построения (рисунок 37):

1). В плоскости ΔABC проведем проекции H (h'', h') и F (f', f''). И в плоскости α также проведем горизонталь и фронталь.

2). Новая плоскость $\Pi_4 \perp \Pi_1$, $\Pi_4 \perp \Delta ABC \Leftrightarrow \Pi_4 \perp h'$ (H); $X_1 \perp h' \Leftrightarrow X_1 \perp h_{o\alpha}$.

3). На плоскости Π_4 проведем отрезок перпендикуляра [ТК] между проекцией плоскости треугольника и следом плоскости α. [$T^{IV}K^{IV}$] - искомое расстояние.

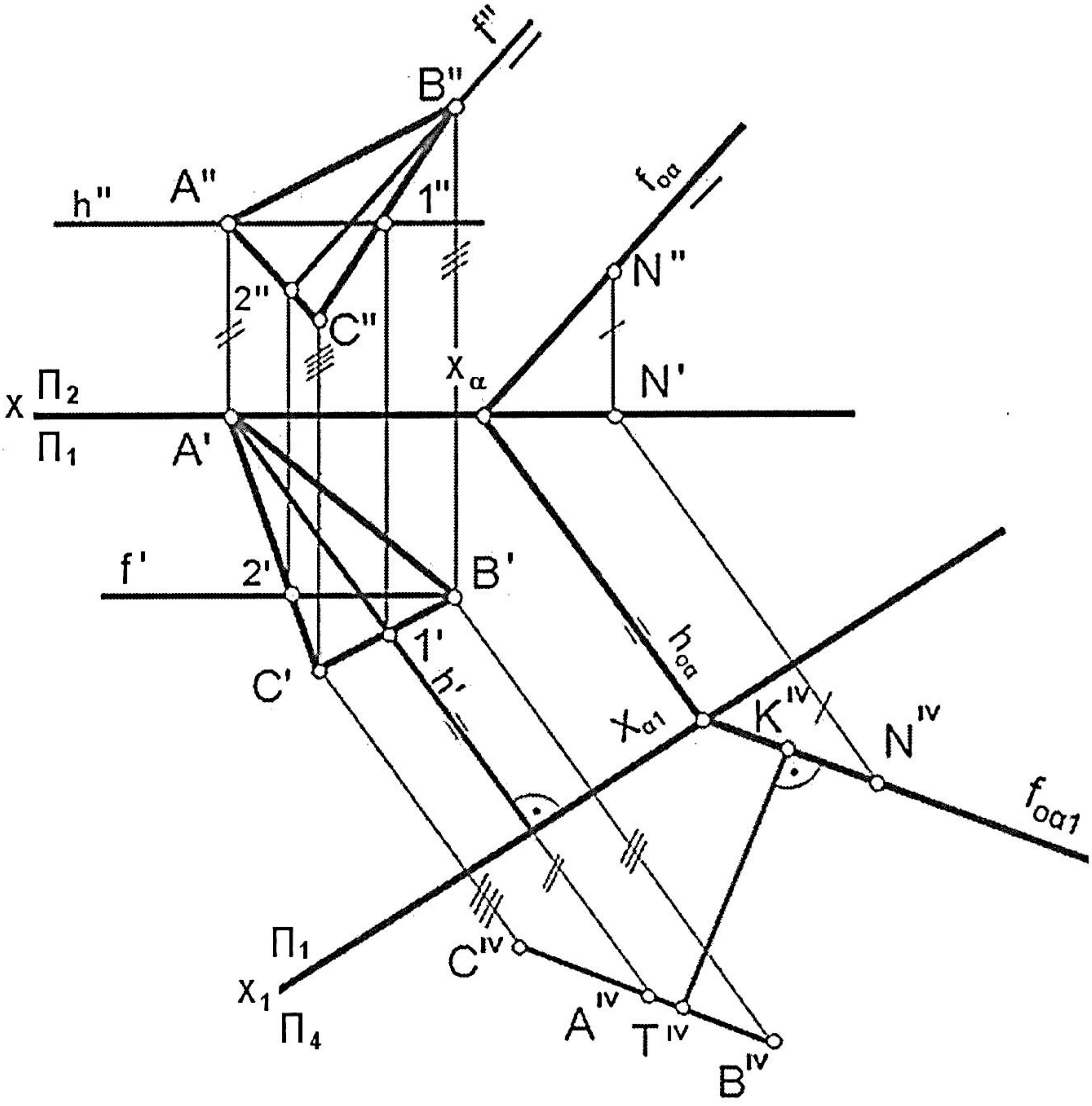


Рисунок 37 - *Определение расстояния между параллельными плоскостями*

1.2.16. Определение величины объекта

В третью группу метрических задач входят задачи на определение действительной величины плоской фигуры (объекта). Построение такой фигуры (прямой линии, плоскости), обладающей определенными метрическими свойствами, требует изображения на чертеже ее натурального вида. А точнее натурального вида какой-то ее части, так как плоскости, прямые - фигуры бесконечные.

Во многих вышерассмотренных примерах и задачах натуральная величина плоских фигур определяется в ходе построений и является или промежуточным этапом решения или итоговым результатом.

Рассмотрим две задачи:

Задача 1: Способом вращения определить натуральную величину отрезка AB прямой общего положения (рисунок 38).

Построение:

1). Для этого достаточно ось вращения с проекциями M_2N_2, M_1N_1 выбрать так, чтобы она проходила через одну из крайних точек отрезка, например, точку B с проекциями B_1, B_2.

2). Тогда при повороте точки A на угол φ в положение, когда горизонтальная проекция отрезка AB станет параллельна оси X, а сам отрезок переместится в положение параллельное $П_2$, и, следовательно, спроецируется на $П_2$ в натуральную величину.

3). Одновременно в натуральную величину отобразится и угол α наклона отрезка AB к плоскости $П_1$.

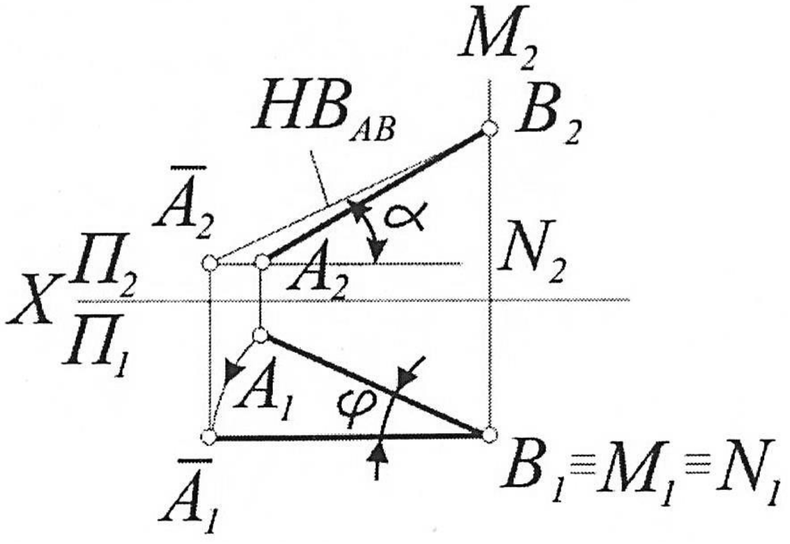


Рисунок 38 - *Определение НВ отрезка способом вращения*

Задача 2: Способом плоскопараллельного перемещения определить натуральную величину отрезка *AB* прямой общего положения (рисунок 39).

Построение:

1). Отрезок прямой общего положения *AB* перемещаем так, что все его точки остаются в плоскостях, параллельных плоскости $П_1$. При этом величины проекций: $A'_1B'_1 = A_1B_1$.

2). Фронтальные проекции траекторий плоскопараллельного перемещения точек *A* и *B* - прямые, параллельные оси *X*. Проекция $A'_2B'_2$ проецируется в натуральную величину.

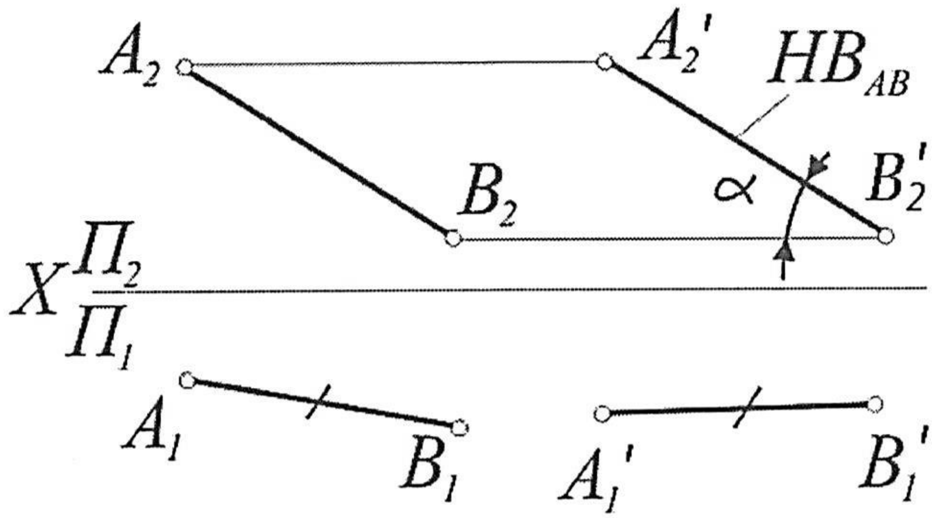


Рисунок 39 – *Определение НВ отрезка способом плоскопараллельного перемещения*

Нахождение различными способами преобразования проекций действительных величин плоских фигур, а именно, треугольников подробно показано в следующей части пособия.

II. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

2.1. Определение величины треугольника различными способами

Задача: *Определить натуральную величину треугольника (рисунок 40), задающего плоскость.*

Темы, знание которых необходимы при решении задачи:

1. Задание точки, прямой, плоскости.

2. Прямые плоскости.

3. Способ прямоугольного треугольника.

4. Способ замены (перемены) плоскостей проекций.

5. Способ вращения.

6. Способ совмещения.

7. Способ плоскопараллельного перемещения.

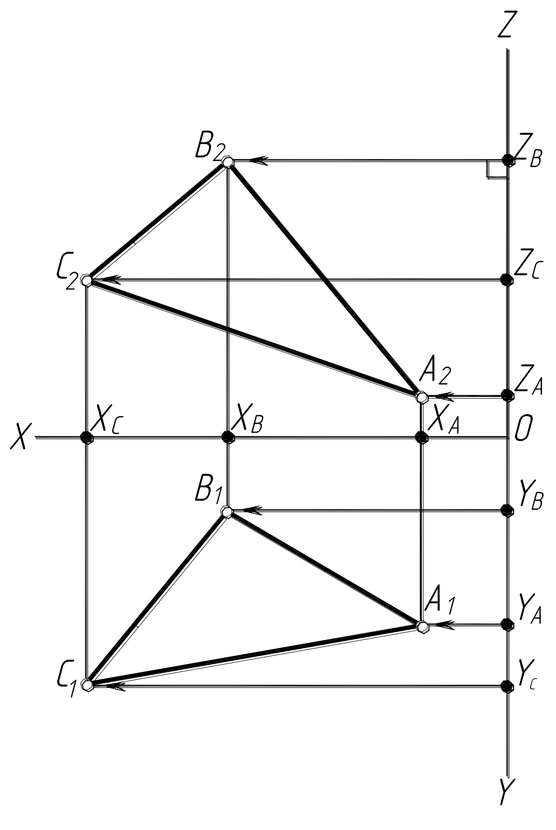


Рисунок 40 – *Заданный треугольник*

Анализ задачи:

Плоскость, заданная треугольником ABC, относительно системы плоскостей проекций π_1 π_2 π_3 занимает общее положение, поэтому ни одна из проекций не отображается в натуральную величину треугольника.

Рассмотрим выполнение данной задачи пятью способами.

Первый способ решения: **способ прямоугольного треугольника** – это один из метрических способов решения данной задачи (рисунок 41).

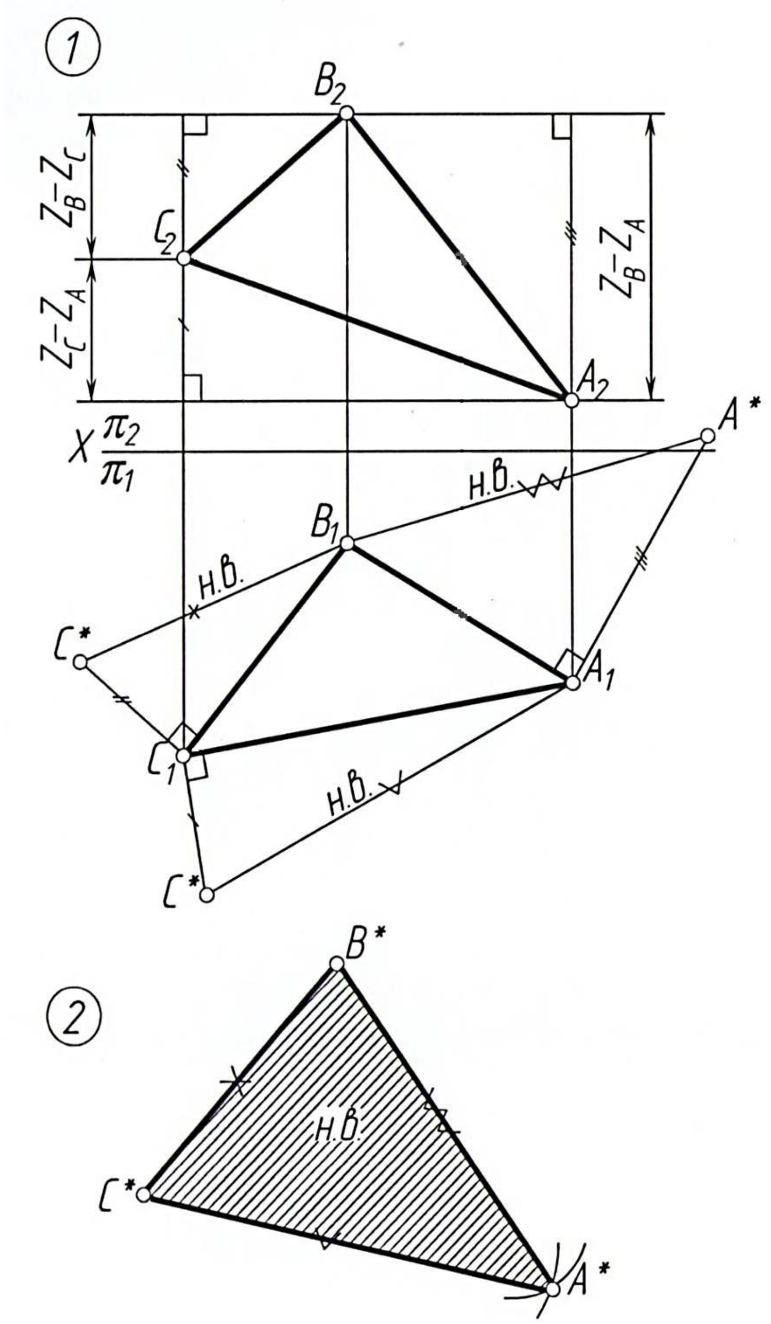


Рисунок 41 – *Определение НВ треугольника способом прямоугольного треугольника*

План решения и построения:

Способом прямоугольного треугольника определим величину каждой стороны треугольника и построим его натуральный вид.

Построение:

1. Заключим фронтальную проекцию стороны $\Delta\ ABC$ $[C_2B_2]$ как гипотенузу в прямоугольный треугольник, вертикальный катет которого равен $|\ Z_B - Z_C\ |$. Отложим этот катет под прямым углом к горизонтальной проекции стороны $[C_1B_1]$. Гипотенуза $[C^*B_1]$ треугольника $C^*C_1B_1$ является натуральной величиной стороны $\Delta\ ABC$ - $[CB]$ (рисунок 41, этап 1).

2. Аналогично находим натуральные величины сторон $\Delta\ ABC$ - $[BA]$ и $[CA]$ (рисунок 41, этап 1).

3. В произвольном положении отложим одну из сторон треугольника, например, $[C^*B^*]$ на поле чертежа. Затем с помощью циркуля засечками найдем положение точки A^*. Построенный треугольник $C^*B^*A^*$ имеет действительную величину $\Delta\ ABC$ (рисунок 41, этап 2).

Алгоритм решения:

1. Способом ⊾ находим *н.в.* всех сторон $\Delta\ ABC$.

2. С помощью циркуля строим *н.в.* $\Delta\ ABC$ - $\Delta\ C^*B^*A^*$.

- *Задачу можно решить по аналогии, начиная с нахождения натуральных величин сторон* $\Delta\ ABC$ *на плоскости проекций* π_2.

Второй способ решения задачи - **способ замены плоскостей**.

Положения способа замены плоскостей:

При проецировании предмета на дополнительную плоскость проекций предмет не меняет своего положения в пространстве по отношению к плоскостям проекций, а исходная система основных плоскостей проекций дополняется новыми, дополнительными, плоскостями проекций, которые выбираются так, чтобы получить наиболее удобные виды дополнительных проекций.

План решения и построения:

1. Введем в систему плоскостей проекций $\pi_1\ \pi_2$ дополнительную

плоскость так, чтобы она была перпендикулярна одновременно и одной из плоскостей проекций и плоскости, заданной треугольником, тогда последний спроецируется на новую плоскость отрезком прямой – плоскость треугольника станет проецирующей.

2. В новую систему плоскостей введем вторую дополнительную плоскость так, чтобы она была параллельна плоскости треугольника $A_4B_4C_4$, тогда новая плоскость треугольника станет плоскостью уровня и треугольник отобразится на вторую дополнительную плоскость в действительную величину.

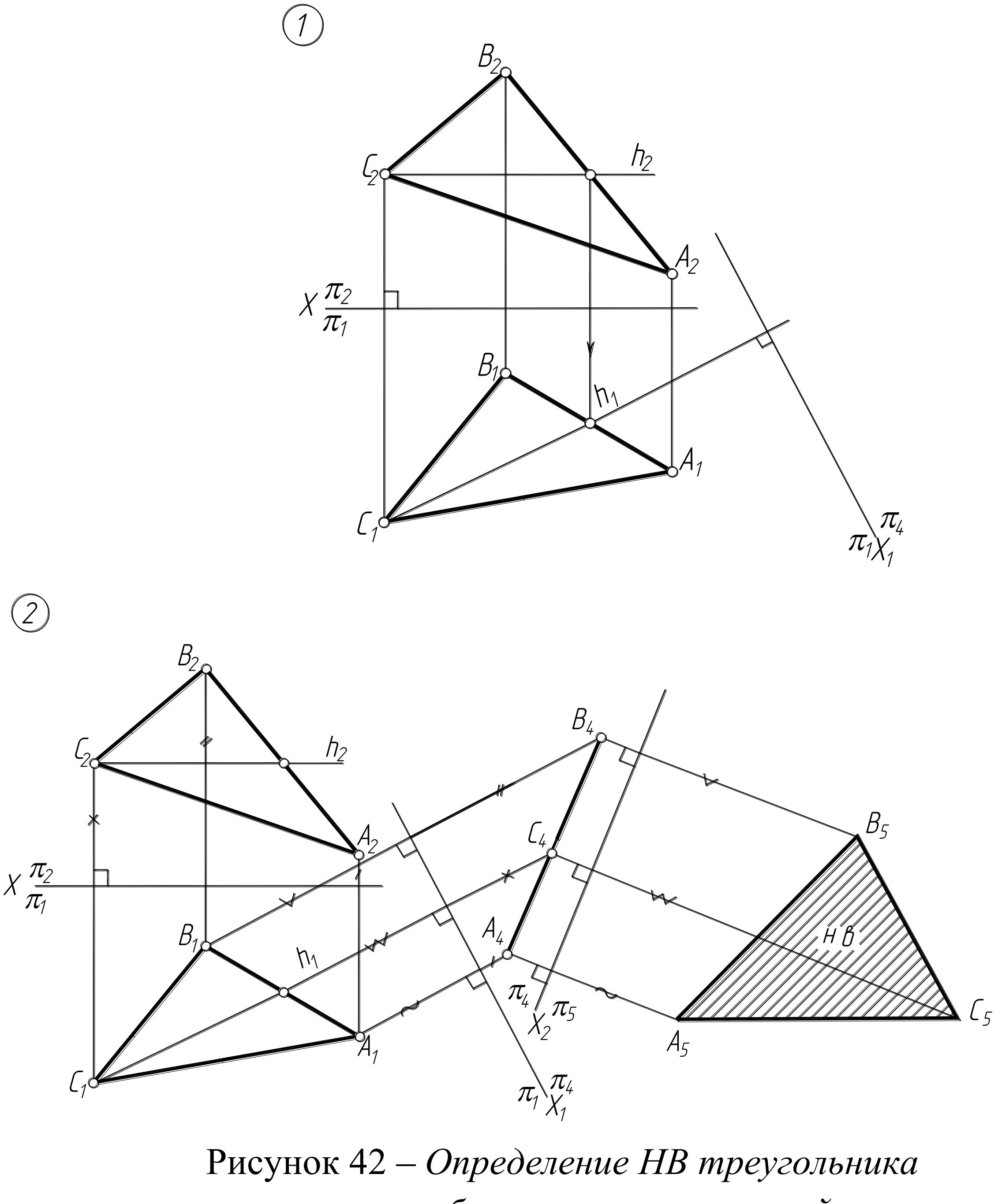


Рисунок 42 – *Определение НВ треугольника способом замены плоскостей*

Построение:

1. В проекциях $\Delta\, ABC$ проведем проекции горизонтали $H - h_2, h_1$ (рисунок 42, этап 1).

2. Введем в систему плоскостей проекций $\pi_1\ \pi_2$ дополнительную плоскость π_4 так, чтобы π_4 была перпендикулярна к π_1 и к $\Delta\ ABC$, тогда новая ось X_1 пройдет перпендикулярно h_1 (рисунок 42, этап 1).

3. На эпюре на плоскости π_4 находим проекции вершин треугольника A_4, B_4, C_4. От оси X_1 откладываем для каждой точки координату Z, треугольник проецируется в прямую - $A_4C_4B_4$ (рисунок 42, этап 2).

4. Введем в систему плоскостей вторую дополнительную плоскость π_5, которая параллельна $\Delta\ A_4B_4C_4$ и перпендикулярна плоскости π_4, ось X_2 пройдет параллельно $|\ A_4C_4B_4\ |$ (рисунок 42, этап 2).

5. На плоскость π_5 треугольник спроецируется в натуральную величину - $\Delta\, A_5B_5C_5$ (рисунок 42, этап 2).

Алгоритм решения:

1. В $\Delta\, ABC$ проводим $H - h_2, h_1$.

2. Систему $\pi_1\pi_2$ дополняем π_4 ($\pi_4 \perp \pi_1$; $\pi_4 \perp \Delta\, ABC$). Ось $X_1 \perp h_1$.

3. От X_1 откладываем Z_A, Z_C, Z_B и получаем $|A_4C_4\,B_4|$.

4. Систему $\pi_1\pi_4$ дополняем π_5 ($\pi_5 \perp \pi_4$; $\pi_5 \parallel \Delta\ ABC$). Ось $X_2 \parallel |A_4C_4B_4|$.

5. Проекция $\Delta\, A_5B_5C_5$ – *н.в.*

- *Задачу можно решить по аналогии, начиная с построения фронтали F и выбора первой дополнительной плоскости* $\perp \pi_2$ *и* $\perp \Delta$.

Третий способ решения задачи - **способ вращения**.

Положения способа:

Вращением фигуры вокруг оси называется такое движение, при котором каждая точка фигуры перемещается по окружности, плоскость которой перпендикулярна к оси вращения, центр расположен в точке пересечения оси вращения с плоскостью вращения, а радиус равен расстоянию от точки до оси вращения.

Свойства (правила) вращения:

- если вращать отрезок или плоскую фигуру вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций, то проекция на эту плоскость не меняется ни по виду, ни по величине – изменяется лишь положение;

- все точки другой проекции перемещаются по прямым, параллельным оси проекций и перпендикулярным оси вращения, и проекция изменяется как по форме, так и по величине.

План решения и построения:

1. Сделаем плоскость треугольника *ABC* проецирующей, вращая ее вокруг проецирующей оси i (i_1; i_2), которую для удобства построения выберем проходящей через одну из вершин треугольника.

2. Затем плоскость треугольника *ABC* повернем до плоскости уровня, чтобы определить его натуральную величину.

Построение:

1. Выбираем ось вращения i, которая перпендикулярна одной из плоскостей проекций, например π_2, и проходит через вершину A $\Delta\ ABC$ (тчк A, находясь на оси, при вращении $\Delta\ ABC$ остается на месте) (рисунок 43, этап 1).

2. Через вершину A проводим линию уровня, в нашем случае фронталь F (f_1, f_2) (рисунок 43, этап 1).

3. Фронталь вращаем до проецирующего положения, то есть на эпюре проекция фронтали f_2 повернута до положения перпендикуляра к оси проекции X (рисунок 43, этап 1).

4. На базе новой проекции $\bar{f}_2$ строим с помощью засечек $\Delta\ \bar{A}_2\bar{B}_2\bar{C}_2$ конгруэнтный треугольнику $A_2B_2C_2$. Горизонтальная проекция $\Delta\ ABC$ спроецировалась отрезком прямой $\bar{C}_1\ \bar{A}_1\bar{B}_1$ (рисунок 43, этап 1).

5. Выбираем вторую ось вращения i', перпендикулярную π_1, и проходящую через вершину треугольника $\bar{A}\ \bar{B}\ \bar{C}$ - $\bar{B}$ (рисунок 43, этап 2).

6. Повернем горизонтальную проекцию треугольника $\bar{C}_1\bar{A}_1\bar{B}_1$ до параллельности с осью X, получим новую проекцию $|\ \bar{\bar{B}}_1\ \bar{\bar{A}}_1\bar{\bar{C}}_1\ |$.

Проекция $\Delta\ \overline{\overline{A_2}}\,\overline{\overline{B_2}}\,\overline{\overline{C_2}}$ является натуральной величиной заданного треугольника (рисунок 43, этап 2).

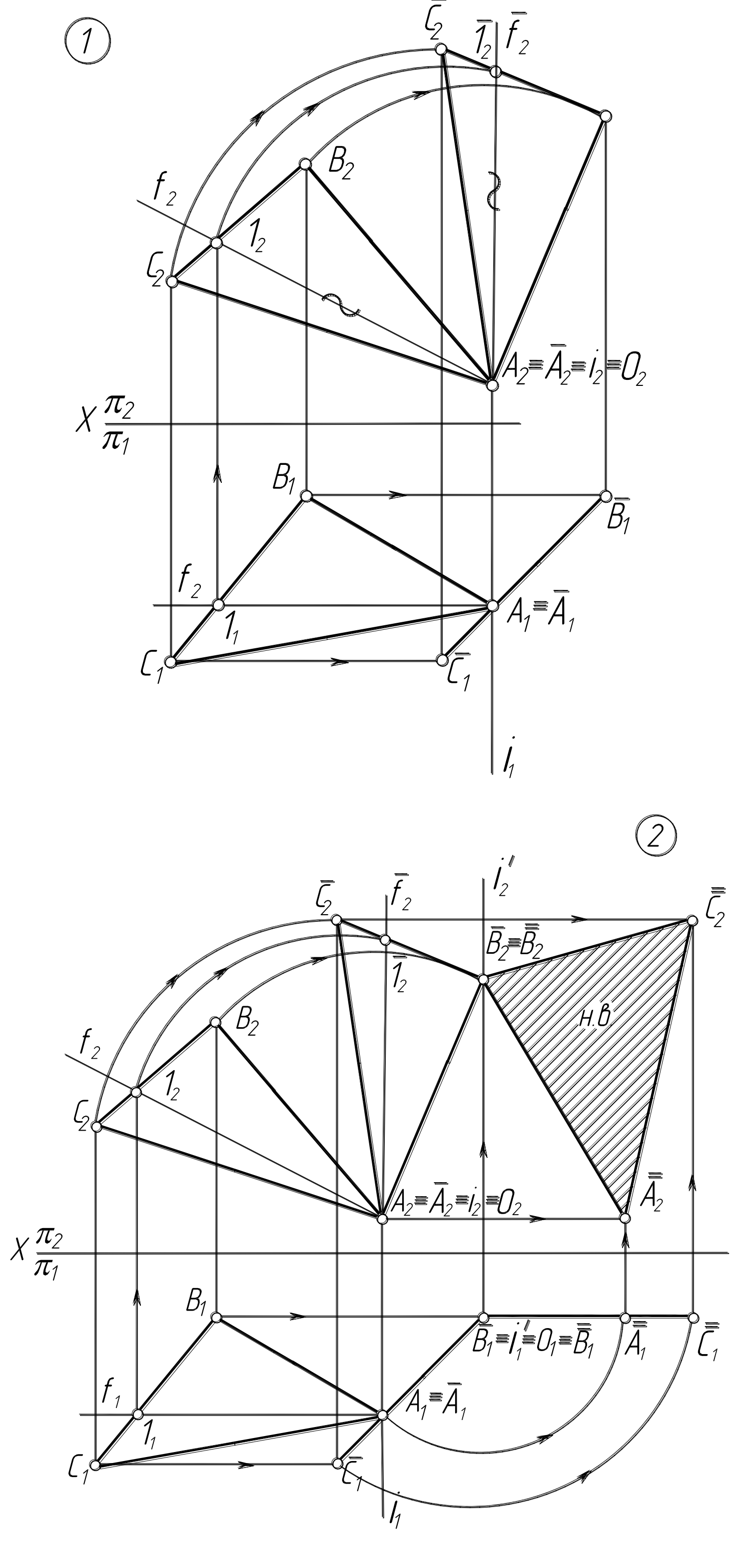


Рисунок 43 – *Определение НВ треугольника способом вращения*

Алгоритм решения:

1. Проводим $i \perp \pi_2$; $A \in i$.

2. Проводим $F \in \Delta ABC$; $A \in F$.

3. Вращаем f_2 до $\perp$ оси X.

4. Засечками строим $\Delta \overline{A_2}\overline{B_2}\overline{C_2}$; $\overline{F} \perp \pi_1 \Rightarrow \Delta ABC \perp \pi_1$ - $|\overline{C_1}\overline{A_1}\overline{B_1}|$.

5. Проводим $i' \perp \pi_1$; $\overline{B} \in i'$.

6. Повернем $|\overline{C_1}\overline{A_1}\overline{B_1}|$ || оси $X \Rightarrow |\overline{\overline{B_1}}\,\overline{\overline{A_1}}\,\overline{\overline{C_1}}|$. Проекция $\Delta\ \overline{\overline{A_2}}\,\overline{\overline{B_2}}\,\overline{\overline{C_2}}$ – *н.в.* ΔABC.

- *Задачу можно решить по аналогии, начиная с построения горизонтали H и выбора первой оси вращения $\perp \pi_1$.*

Четвертый способ решения задачи - **способ совмещения**.

Положения способа совмещения:

Способом совмещения можно считать преобразование плоскости в плоскость уровня посредством вращения вокруг ее линии уровня. Используя вращение вокруг линий уровня (включая и следы плоскостей), можно преобразить плоскость общего положения в плоскость уровня лишь одним вращением, а не двумя, как, например, при вращении вокруг проецирующих прямых. Это дает преимущество данному способу при прочих равных условиях.

План решения и построения:

1. Совместим плоскость, заданную треугольником ABC, например, с положением горизонтальной плоскости, проходящей через горизонталь H.

2. При вращении плоскости треугольника останутся неподвижными точки, лежащие на H.

Построение:

1. В $\Delta\ ABC$ через вершину A проведем прямую уровня - горизонталь H (h_2, h_1), которая будет являться осью вращения. Точка A останется неподвижной (рисунок 44, этап 1).

2. Точки C и B треугольника будут вращаться в плоскостях, перпендикулярных горизонтали H, проведем следы этих плоскостей $\alpha_1 \perp h_1$ и $\beta_1 \perp h_1$ $(C \in \alpha,\ B \in \beta)$ (рисунок 44, этап 1).

3. Плоскость β перпендикулярна оси вращения H. Центр вращения O (O_1, O_2) определяется в пересечении оси вращения с плоскостью вращения: $\beta \cap H = O$ (рисунок 44, этап 1).

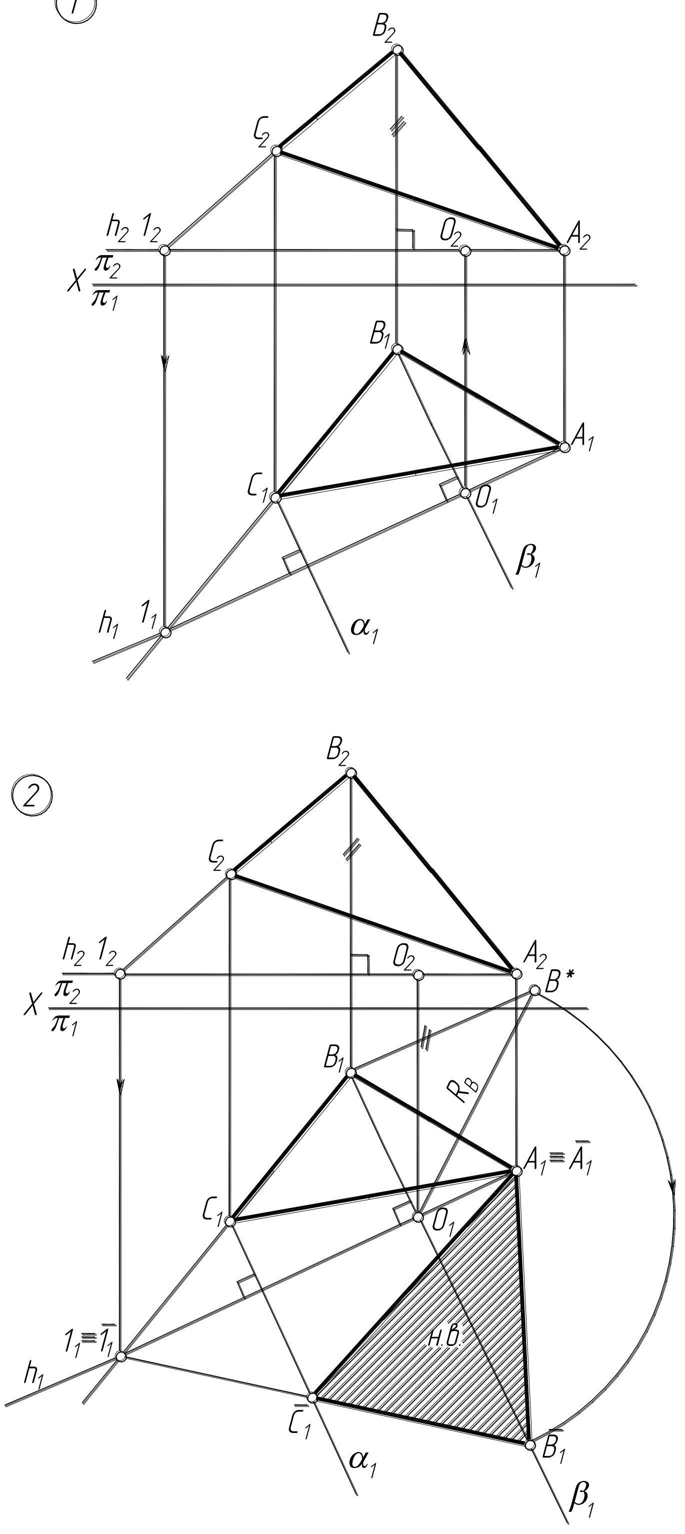


Рисунок 44 – *Определение НВ треугольника способом совмещения*

4. Натуральную величину радиуса вращения OB (R_B) определяем способом прямоугольного треугольника, отложив на перпендикуляре к B_1O_1 отрезок B^*B_1, равный разности высот точек B и O - $\Delta Z_{BO} = Z_B - Z_A$. Гипотенуза B^*O_1 будет натуральной величиной OB, которую отложим от O_1 на горизонтальном следе β_1. Получим проекцию B_1 повернутой точки B (рисунок 44, этап 2).

5. Соединим проекцию $\overline{B}_1$ повернутой точки B с проекцией $\overline{1}_1$ неподвижной точки 1 и отметим точку пересечения этой линии с α_1. Это будет проекция $\overline{C}_1$ повернутой точки C (положение $\overline{C}_1$ можно определить и аналогично нахождению нового положения точки B - $\overline{B}_1$). Соединив $\overline{A}_1\overline{B}_1\overline{C}_1$, получим натуральную величину треугольника ABC (рисунок 44, этап 2).

Алгоритм решения:

1. Проводим H ΔABC через A - h_2, h_1.

2. Проводим следы плоскостей вращения: α_1 и $\beta_1 \perp h_1$ - $C \in \alpha$, $B \in \beta$.

3. $\beta \perp H = O$. Определим *н.в.* радиуса вращения OB и найдем новое положение тчк $B - \overline{B}_1$.

4. Найдем новое положение тчк $C - \overline{B}_1\overline{1}_1 \cap \alpha_1 = \overline{C}_1$.

5. $\Delta\, \overline{A}_1\overline{B}_1\overline{C}_1$ – искомая величина.

- *Задачу можно решить по аналогии, совмещая плоскость Δ ABC с фронтальной плоскостью уровня, при этом начинают с построения фронтали F.*

Пятый способ решения задачи – **способ плоскопараллельного перемещения.**

Положения:

Плоскопараллельным перемещением называется такое перемещение, при котором все точки перемещаются в параллельных плоскостях. При таком перемещении движется сам предмет, плоскости проекций остаются неподвижными.

Способ вращения без указания осей, радиусов и центров вращения (при этом соблюдаются все свойства и правила) можно рассматривать как частный случай плоскопараллельного перемещения.

План решения и построения:

1. Переместим плоскость, заданную треугольником *ABC*, из общего положения в частное проецирующее положение, чтобы одна из ее проекций стала прямой линией.

2. Вторым перемещением плоскость треугольника приведем в положение плоскости уровня, тогда одна из проекций треугольника будет в натуральную величину.

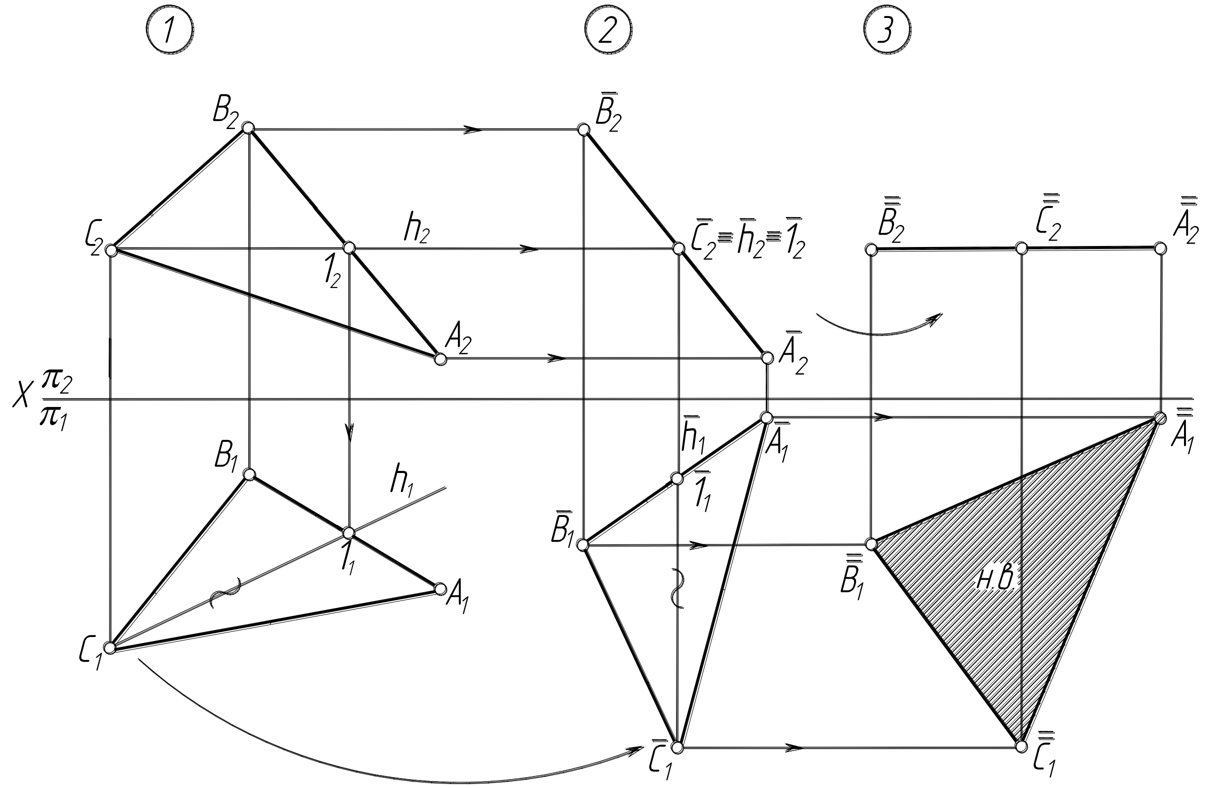


Рисунок 45 – *Определение НВ треугольника способом плоскопараллельного перемещения*

Построение:

1. В проекциях *Δ ABC* через вершину С проводим проекции горизонтали *H* (h_2, h_1) (рисунок 45, этап 1).

2. Перемещаем проекцию *Δ* $A_1B_1C_1$ в новое положение так, чтобы $\overline{h}_1$ расположилась вертикально, при этом размеры проекции остаются неизменными. При таком положении горизонтали заданная плоскость стала фронтально проецирующей и на π_2 спроецировалась отрезком прямой – $\overline{B}_2\overline{C}_2\overline{A}_2$ (рисунок 45, этап 2).

3. Перемещаем $\overline{B}_2\overline{C}_2\overline{A}_2$ параллельно оси X - $\overline{\overline{B}}_2\overline{\overline{C}}_2\overline{\overline{A}}_2$ (рисунок 45, этап 3).

4. После перемещения плоскость треугольника стала горизонтальной плоскостью уровня и проекция $\Delta\ \overline{\overline{A}}_1\overline{\overline{B}}_1\overline{\overline{C}}_1$ - это натуральная величина $\Delta\ ABC$ (рисунок 45, этап 3).

Алгоритм решения:

1. Через вершину $C\ \Delta\ ABC$ проводим $H\ (h_2, h_1)$.

2. Перемещаем $\Delta\ A_1B_1C_1$ в положение, когда $\overline{h}_1 \perp$ оси X - $\Delta\ \overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C} \perp \pi_2 \Rightarrow \overline{B}_2\overline{C}_2\overline{A}_2$ - прямая линия.

3. Перемещаем | $\overline{B}_2\overline{C}_2\overline{A}_2$ | - $\overline{\overline{B}}_2\overline{\overline{C}}_2\overline{\overline{A}}_2$ || оси X. $\Delta\ \overline{\overline{A}}_1\ \overline{\overline{B}}_1\ \overline{\overline{C}}_1$ - *н.в.*

- *Задачу можно решить по аналогии, начиная с построения фронтали F и перемещая фронтальную проекцию Δ ABC до горизонтально проецирующего положения.*

Контрольные вопросы к задаче:

1. Какими способами можно задать плоскость?
2. Какие положения плоскостей и прямых в пространстве знаете?
3. Когда прямая принадлежит плоскости? Горизонталь и фронталь плоскости.
4. Когда прямая будет перпендикулярна плоскости?
5. Как на практике применять способ прямоугольного треугольника?
6. В чем заключается способ перемены плоскостей проекций?
7. Сколько и в какой последовательности надо ввести дополнительных плоскостей в систему $\pi_1\ \pi_2$, чтобы определить натуральную величину фигуры, задающую плоскость общего положения?
8. В чем сущность преобразования проекций способом вращения?
9. Что такое ось, радиус и центр вращения?
10. Какая из проекций не изменяет своей величины при

вращении предмета вокруг оси перпендикулярной плоскости проекций?

11. Какие линии используются в качестве осей вращения?

12. Какие основные задачи решаются путем преобразования чертежа (проекций)?

Задание: *Решить задачу «Натуральная величина плоскости треугольника» согласно своему варианту. Данные для задачи находятся в Приложении (таблица) на стр. 73-74. В соответствии с требованием преподавателя способ выполнения задания может быть выбран или самостоятельно или указан преподавателем.*

2.2. Определение разными способами расстояния между геометрическими объектами

Задача*: Определить расстояние от точки Д до плоскости, заданной треугольником АВС (рисунок 46).*

Темы, знание которых необходимы при решении задачи:

1. Проецирование точки, прямой, плоскости.

2. Положение прямых и плоскостей в пространстве.

3. Теорема прямого угла.

4. Прямые плоскости.

5. Конкурирующие точки.

6. Способ прямоугольного треугольника.

7. Способ замены (перемены) плоскостей проекций.

8. Способ вращения.

9. Свойства вращения.

10. Способ совмещения.

11. Способ плоскопараллельного перемещения.

Анализ задачи:

1. Плоскость, заданная *Δ ABC*, относительно системы плоскостей проекций π_1 π_2 π_3 занимает общее положение.

2. Расстояние от точки до плоскости определяется длиной отрезка перпендикуляра, опущенного из точки на эту плоскость.

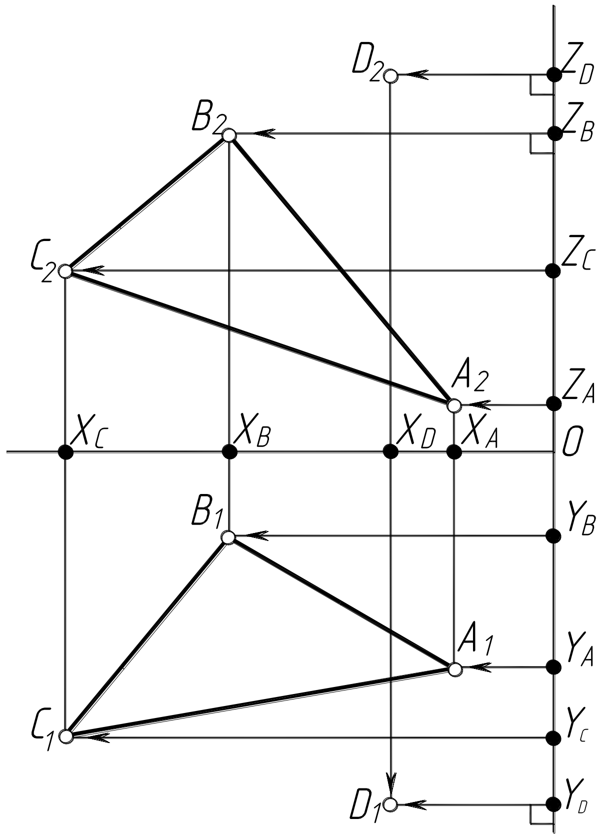


Рисунок 46 – *Заданные треугольник и точка*

Рассмотрим решение данной задачи разными способами.

Первый способ решения задачи - **способ прямоугольного треугольника**.

Положения:

1. Прямой угол проецируется на плоскость проекций без искажения при условии, если хотя бы одна из его сторон параллельна плоскости проекций.

2. Прямая перпендикулярна к плоскости, если она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, принадлежащим этой плоскости.

3. Для того чтобы прямая в пространстве была перпендикулярна плоскости, необходимо и достаточно, чтобы на эпюре горизонтальная проекция прямой была перпендикулярна к горизонтальной проекции горизонтали, а фронтальная проекция – к фронтальной проекции фронтали этой плоскости.

4. Для определения видимости элементов пользуются конкурирующими точками. На горизонтальной проекции видимой из конкурирующих точек является та, которая имеет большую высоту, т.е. координату *Z*. На фронтальной проекции видимой является точка у которой больше координата *Y*.

План решения и построения:

1. Из точки *Д* опустим перпендикуляр на плоскость *Δ ABC* на основании положений 2, 3.

2. Найдем точку (тчк *К*) пересечения перпендикуляра с плоскостью *Δ ABC*, проведя вспомогательную проецирующую плоскость.

3. Натуральную величину отрезка *ДК* определим способом прямоугольного треугольника.

Построение:

1. В заданной плоскости строим две пересекающиеся прямые – фронталь F и горизонталь H: в проекциях *Δ ABC* проводим проекции F - f_1 и f_2 и проекции $H – h_2$ и h_1 (рисунок 47, этап 1).

2. Из точки *Д* опускаем на плоскость перпендикуляр *b* следующим образом: из горизонтальной проекции точки $Д_1$ опускаем проекцию перпендикуляра к горизонтальной проекции h_1, из фронтальной проекции точки $Д_2$ опускаем проекцию перпендикуляра к фронтальной проекции фронтали f_2 (рисунок 47, этап 1).

3. Находим основание перпендикуляра – точку *К*. Для этого заключаем перпендикуляр *b* во вспомогательную, например, фронтально-проецирующую плоскость *γ*. Определяем точки пересечения плоскости *γ* с *Δ ABC – N, M*. Пересечение $[N_1M_1]$ с b_1 дает нам K_1, восстанавливаем в K_1 линию связи и на b_2 находим проекцию K_2 (рисунок 47, этап 2).

4. С помощью конкурирующих точек *1, 2, 3, 4* находим видимость частей перпендикуляра *b* (рисунок 47, этап 3).

5. Для нахождения натуральной величины отрезка перпендикуляра [*ДК*] заключим, например, фронтальную проекцию $Д_2K_2$ в качестве гипотенузы в прямоугольный треугольник,

вертикальный катет которого равен разности координат концов отрезка. Этот катет откладываем под прямым углом к одному из концов горизонтальной проекции отрезка. Д*К$_1$ и является искомой величиной (рисунок 47, этап 4).

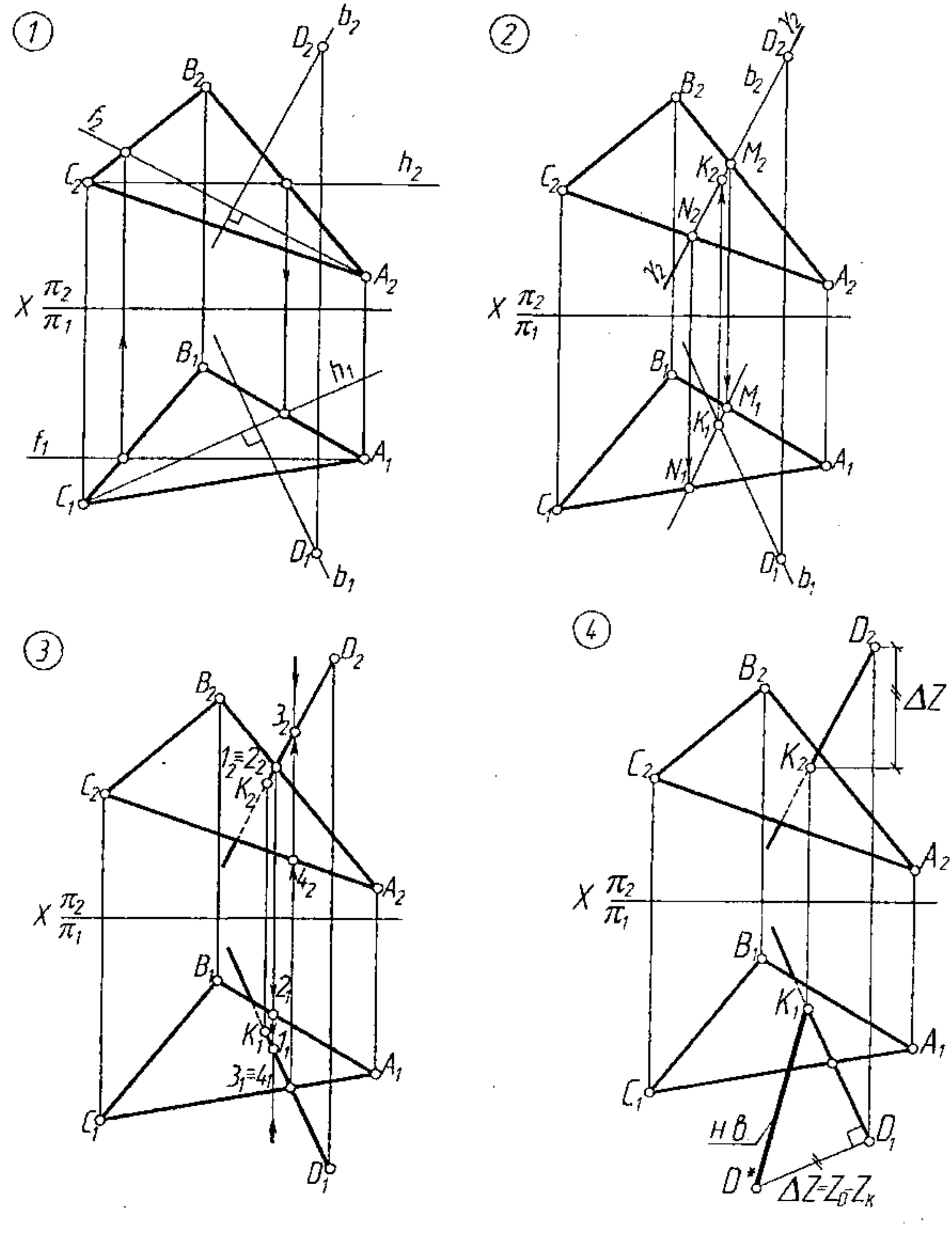


Рисунок 47 – *Определение расстояния способом прямоугольного треугольника*

Алгоритм решения:

1. Проводим в $\Delta\, ABC$ горизонталь H и фронталь F.

2. Опускаем из т. *Д* к плоскости $\Delta\ ABC$ перпендикуляр b – $b_1 \perp h_1$, $b_2 \perp f_2$.

3. Заключаем $b \in \gamma$ $(\gamma \perp \pi_2) \Rightarrow \gamma \cap \Delta\ ABC = [MN] \Rightarrow$ находим основание перпендикуляра $K = b \cap \Delta\ ABC$

4. Определяем *н.в.* [*ДК*].

- *Задачу можно решить по аналогии, находя натуральную величину отрезка перпендикуляра с помощью координат Y.*

Второй способ решения задачи - **способ замены плоскостей.**

Положения способа:

В способе замены (перемены) плоскостей проекций положение точек, прямых, плоских фигур, поверхностей в пространстве остается неизменным, а система π_1 π_2 дополняется новыми плоскостями, образующими и с π_1 или с π_2 или между собой системы взаимно перпендикулярных плоскостей, принимаемых за плоскости проекций.

Каждая новая система выбирается так, чтобы получить положение наиболее удобное для выполнения требуемого построения.

При построении в новой системе плоскостей проекций соблюдаются те же положения относительно зрителя, которые были установлены для системы плоскостей π_1 π_2.

План решения и построения:

1. Введем в систему плоскостей проекций π_1 π_2 дополнительную плоскость так, чтобы она была перпендикулярна одновременно и одной из плоскостей проекций и плоскости, заданной треугольником, тогда последний спроецируется на новую плоскость отрезком прямой.

2. Из новой проекции точки *Д* опустим перпендикуляр к проекции на дополнительной плоскости $\Delta\ ABC$ – найдем основание перпендикуляра точку *К*: [*ДК*] – это и будет истинное расстояние от точки *Д* до заданной плоскости.

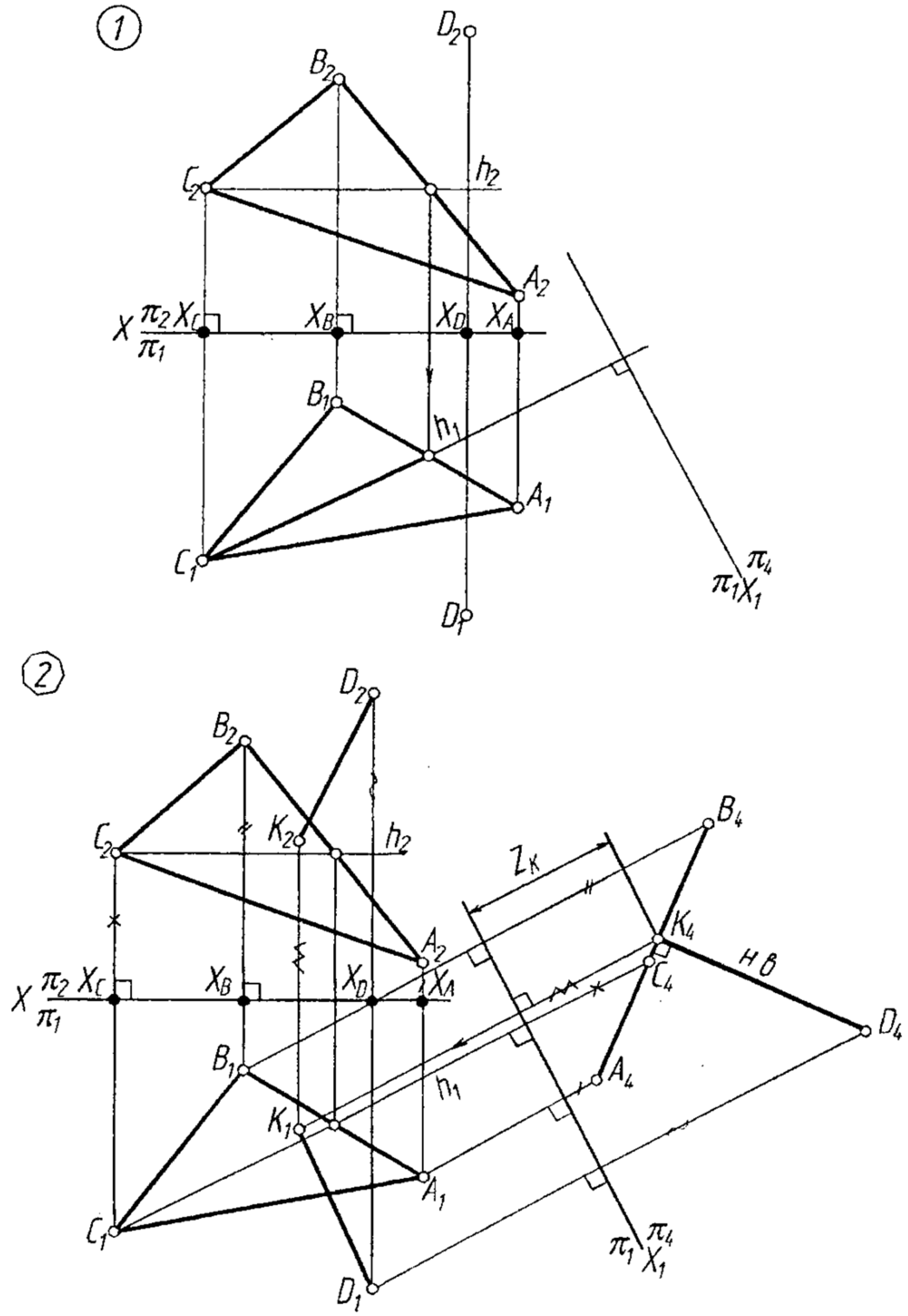


Рисунок 48 – *Определение расстояния способом замены плоскостей*

Построение:

1. В проекциях *Δ ABC* проведем проекции горизонтали $H - h_2, h_1$ (рисунок 48, этап 1).

2. Введем в систему плоскостей проекций π_1 π_2 дополнительную плоскость π_4 так, чтобы π_4 была перпендикулярна к π_1 и к Δ ABC, тогда новая ось OX_1 будет перпендикулярна h_1 (рисунок 48, этап 1).

3. На эпюре на плоскости π_4 находим проекции вершин A_4, B_4, C_4 треугольника и проекции точки $Д$ – $Д_4$. От оси OX_1 откладываем для каждой точки координату Z.

4. Из $Д_4$ к проекции треугольника $A_4B_4C_4$ проводим перпендикуляр. [$Д_4K_4$] – это натуральная величина расстояния от точки $Д$ до плоскости (рисунок 48, этап 2).

5. Находим проекции отрезка перпендикуляра - [$Д_1K_1$] и [$Д_2K_2$]. Если [$Д_4K_4$] натуральная величина, то перпендикуляр в системе плоскостей проекций π_1 π_4 занимает частное положение, поэтому его проекция [$Д_1K_1$] параллельна оси OX_1. В K_1 восстанавливаем линию связи и на ней от оси OX откладываем координату Z точки K – это и будет проекция K_2 (рисунок 48, этап 2).

Алгоритм решения:

1. В Δ ABC проводим H – h_2, h_1.

2. Систему $\pi_1\pi_2$ дополняем π_4 ($\pi_4 \perp \pi_1$; $\pi_4 \perp \Delta$ ABC). Ось $OX_1 \perp h_1$.

3. Из $Д_1$ опускаем $\perp$ к $A_4B_4C_4$, определяем K_4: $Д_4K_4 \perp A_4B_4C_4$. [$Д_4K_4$] – *н.в.* перпендикуляра.

4. Находим [$Д_1K_1$], [$Д_2K_2$]. Если [$Д_4K_4$] – *н.в.*, то [$Д_1K_1$] || OX_1, а расстояние от OX до K_2 – Z_K.

- *Задачу можно решить по аналогии, начиная с построения фронтали F и задавая дополнительную плоскость перпендикулярно плоскости проекций π_2.*

Третий способ решения задачи – **способ вращения.**

Положения:

При вращении вокруг оси каждая точка вращаемой фигуры перемещается в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Точка перемещается по окружности, центр которой находится в точке пересечения оси с плоскостью вращения (центр вращения), а радиус окружности равняется расстоянию от вращаемой точки до центра (радиус вращения).

Если ось вращения перпендикулярна, например, к плоскости π_1, то плоскость, в которой происходит вращение точки, параллельна плоскости π_1. Следовательно, траектория точки проецируется на плоскость π_1 без искажений, а плоскость π_2 – в виде отрезка прямой линии.

План решения и построения:

1. Расстояние от точки *D* до плоскости определяется длиной перпендикуляра, проведенного из точки *D* до плоскости треугольника *ABC*. Если плоскость *ABC* сделать проецирующей, то этот перпендикуляр спроецируется на соответствующую плоскость проекций без искажения.

Сделаем плоскость треугольника *ABC* проецирующей, вращая ее вокруг проецирующей оси *i* (i_1; i_2), которую для удобства построения выберем проходящей через одну из вершин треугольника. Вокруг этой оси поворачиваем согласно положению и точку *D*.

2. Опустим перпендикуляр из новой проекции точки *D* на новую проекцию (в виде отрезка прямой) треугольника *ABC* – это и будет искомое расстояние.

Построение:

1. Выбираем ось вращения, которая перпендикулярна одной из плоскостей проекций, например π_2 проходит через вершину A Δ ABC (тчк *A*, при вращении Δ ABC находясь на оси, остается на месте) (рисунок 49, этап 1).

2. Через вершину *A* проводим линию уровня, в нашем случае фронталь F (f_1, f_2) (рисунок 49, этап 1).

3. Фронталь вращаем до проецирующего положения, то есть на эпюре новая проекция фронтали $\overline{f_2}$ повернута до положения перпендикуляра к оси проекции *OX* (рисунок 49, этап 1).

4. На базе новой проекции $\overline{f_2}$ строим с помощью засечек Δ $\overline{A_2}\overline{B_2}\overline{C_2}$ конгруэнтный Δ $A_2B_2C_2$ и новое положение точки D – $\overline{D_2}$. Горизонтальная проекция Δ ABC спроецировалась отрезком прямой $\overline{A_1}\,\overline{B_1}\,\overline{C_1}$ (рисунок 49, этап 1).

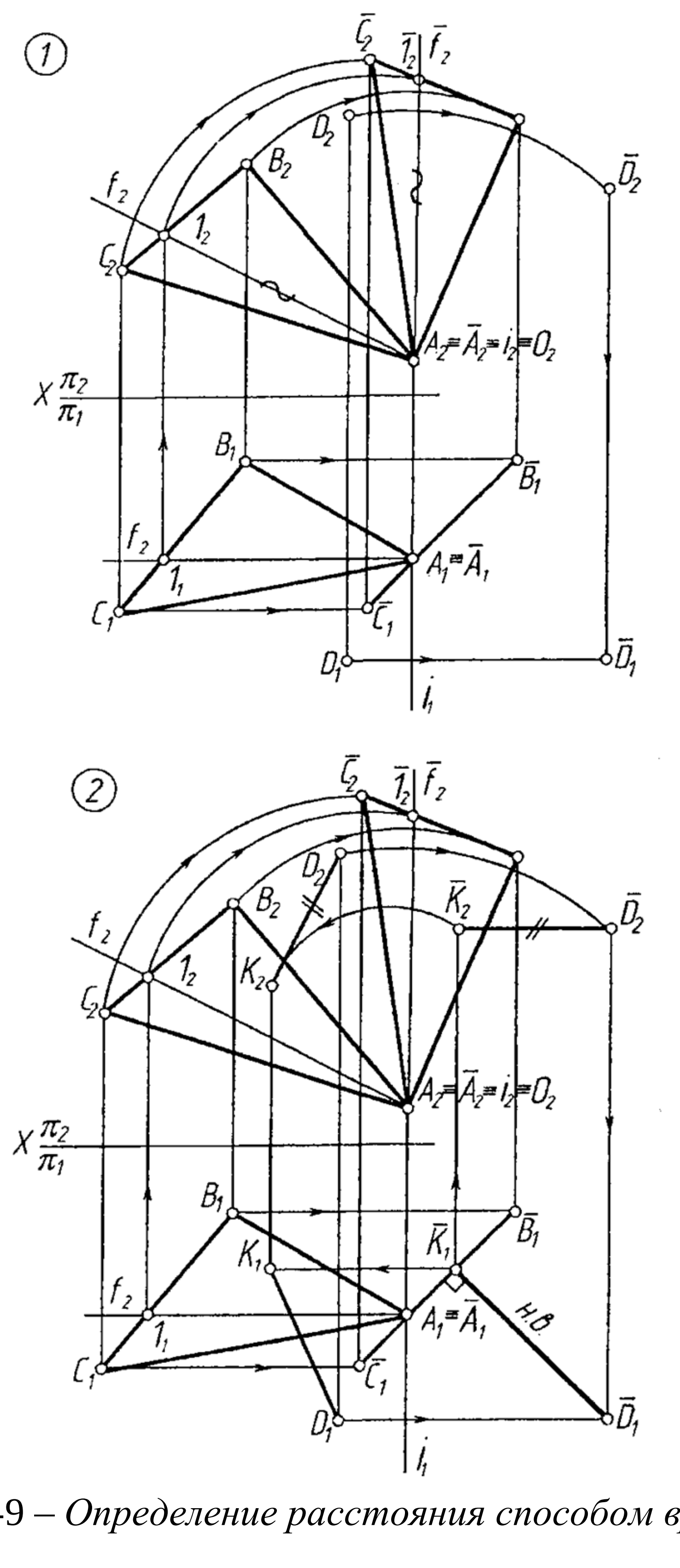


Рисунок 49 – *Определение расстояния способом вращения*

5. Опускаем перпендикуляр из новой горизонтальной проекции $\bar{D}_1$ на горизонтальную проекцию $\Delta\ \bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1$, находим кратчайшее расстояние DK от точки D до плоскости $\Delta\ ABC$ - $\bar{D}_1\bar{K}_1$. На π_2

проекция отрезка $\overline{D}_2\overline{K}_2$ будет параллельна оси OX, так как после поворота $[\overline{D}\overline{K}]$ стала занимать положение горизонтали H (рисунок 49, этап 2).

6. Проводим из $\overline{D}_1$ $\perp$ к Δ $\overline{A}_1\overline{B}_1\overline{C}_1$. $[\overline{D}\overline{K}]$ $\equiv$ H. $[\overline{D}_1\overline{K}_1]$ - кратчайшее расстояние. Обратным вращением находим сначала проекцию K_2, затем K_1. Проводим проекции отрезка перпендикуляра DK - $[D_1K_1]$, $[D_2K_2]$ (рисунок 49, этап 2).

Алгоритм решения:

1. Проводим $i \in A$; $i \perp \pi_2$.
2. Проводим $F \in A$; $F \in \Delta\, ABC$.
3. Вращаем f_2 вокруг т. A до $\overline{f}_2 \perp OX$.
4. Засечками строим $\Delta\, \overline{A}_2\overline{B}_2\overline{C}_2$ и т. $\overline{D}_2$.
5. $\overline{F} \perp \pi_1 \Rightarrow \Delta\ \overline{A}\overline{B}\overline{C} \perp \pi_1$.
6. $[\overline{D}_1\overline{K}_1]$ – *н.в.*

- *Задачу можно решить по аналогии, начиная с построения горизонтали H и выбора оси вращения $\perp \pi_2$.*

Четвертый способ решения задачи – **способ плоскопараллельного перемещения.**

Положения:

Переход от общего положения к частному может быть достигнут перемещением в пространстве проецируемой фигуры до частного положения относительно неизменной системы плоскостей проекций (плоскопараллельное перемещение).

Плоскопараллельное перемещение можно рассматривать как способ вращения без указания осей, радиусов и центров вращения. При этом соблюдаются все свойства и правила.

План решения:

1. Переместим плоскость, заданную треугольником ABC, из общего положения в частное проецирующее положение, чтобы одна из ее проекций стала прямой линией.

2. Вместе с треугольником, задающим плоскость, на это же расстояние перенесем и точку D, тогда перпендикуляр из новой

проекции точки D, опущенный на проекцию в виде отрезка треугольника ABC и будет натуральная величина расстояния от точки до плоскости.

Построение:

1. В проекциях $\Delta\ ABC$ через вершину С проводим проекции горизонтали H (h_2, h_1) (рисунок 50, этап 1).

2. Перемещаем проекции $\Delta\ A_1B_1C_1$ и точки D_1 в новое положение так, чтобы $\overline{h_1}$ расположилась вертикально, при этом прежние размеры проекции $\Delta\ A_1B_1C_1$ и расстояния от нее D_1 остаются неизменными. При таком положении горизонтали заданная плоскость стала фронтально-проецирующей и на π_2 спроецировалась отрезком прямой – $\overline{B_2}\,\overline{C_2}\,\overline{A_2}$ (рисунок 50, этап 2).

3. Из $\overline{D_2}$ опускаем перпендикуляр к $\overline{B_2}\,\overline{C_2}\,\overline{A_2}$, находим проекцию основания перпендикуляра $\overline{K_2}$. [$\overline{D_2}\overline{K_2}$] – натуральная величина искомого расстояния (рисунок 50, этап 2).

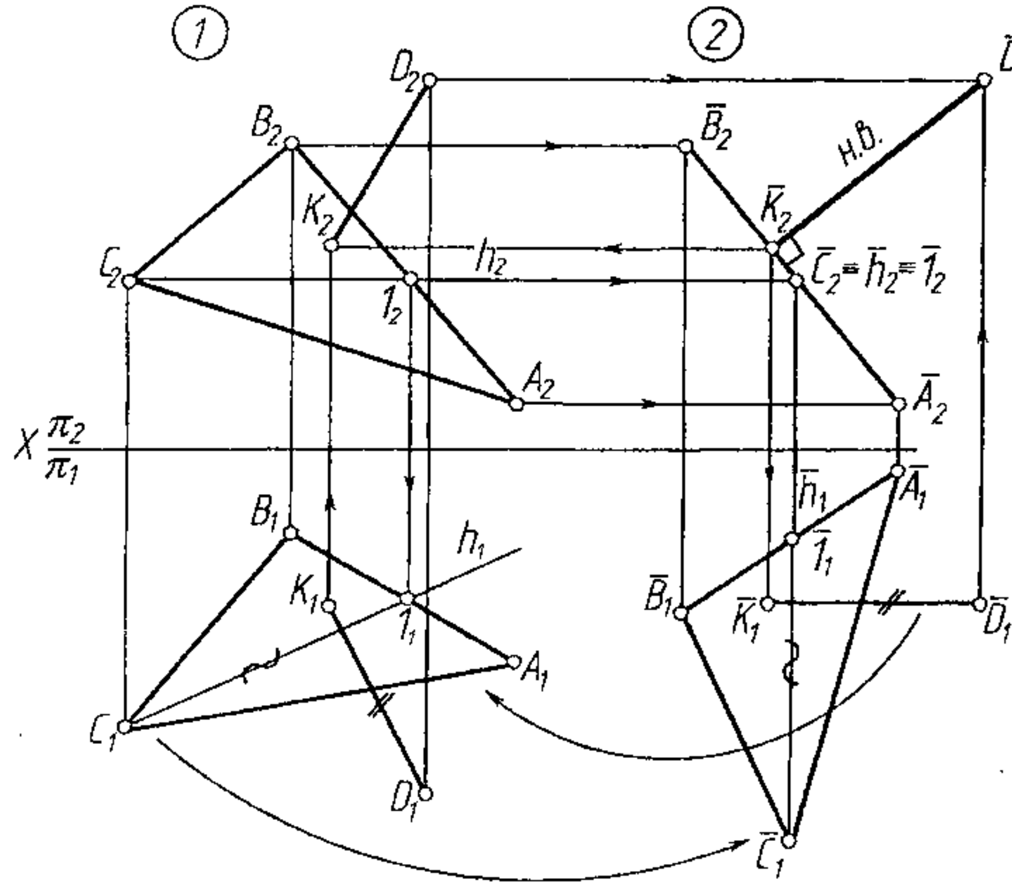


Рисунок 50 – *Определение расстояния способом плоскопараллельного перемещения*

4. После перемещения перпендикуляр DK занимает положение фронтали, поэтому проекция $[\overline{D}_1\overline{K}_1]$ проходит параллельно оси X (рисунок 50, этап 2).

5. Определим проекции перпендикуляра обратным перемещением - $[D_1K_1]$, $[D_2K_2]$ (рисунок 50, этап 1).

Алгоритм решения:

1. Через вершину C $\Delta\, ABC$ проводим H (h_2, h_1).
2. Перемещаем $\Delta\, A_1B_1C_1$ и D_1 в положение, когда $\overline{h}_1 \perp OX$.
3. Опускаем из $\overline{D}_2 \perp$ к $\overline{A}_2\overline{B}_2\overline{C}_2$. $\overline{D}_2\overline{K}_2$ – искомое расстояние.

- *Задачу можно решить по аналогии, начиная с построение фронтали F и перемещая фронтальную проекцию Δ ABC до горизонтально-проецирующего положения.*

Контрольные вопросы к задаче:

1. Конкурирующие точки.
2. Прямые и обратные теоремы прямого угла.
3. При каком условии прямой угол спроецируется на плоскость проекций прямым?
4. Свойства (правила) вращения.
5. Какая из проекций отрезков прямой линии не изменяет своей величины при вращении вокруг оси перпендикулярной плоскости проекций?
6. Можно ли путем поворота вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций, определить длину отрезка прямой линии и угол ее наклона к π_1 или к π_2?
7. К каким задачам относятся задачи на определение расстояния между геометрическими объектами?

Задание: *Решить задачу «Определение расстояния между плоскостью треугольника и точкой» согласно своему варианту. Данные для задачи находятся в Приложении (таблица) на стр. 73-74. В соответствии с требованием преподавателя способ выполнения задания может быть выбран или самостоятельно или указан преподавателем.*

ПРИЛОЖЕНИЕ

Задачи к выполнению Таблица

№ варианта	**Задача *«Натуральная величина плоскости треугольника»***	**Задача *«Определение расстояния между плоскостью треугольника и точкой»***	**№ варианта**	**Задача *«Натуральная величина плоскости треугольника»***	**Задача *«Определение расстояния между плоскостью треугольника и точкой»***
I	***II***	***III***	***IV***	***V***	***VI***
1	A(50;30;20) B(10;40;50) C(30;0;30)	ΔABC т.E(15;60;60)	19	K(60;40;40) B(30;10;20) P(20;30;20)	ΔKBP т.A(0;70;60)
2	A(0;30;30) D(50;10;60) C(30;40;10)	ΔADC т.B(65;60;80)	20	A(15;0;50) D(40;20;30) C(40;50;10)	ΔADC т.K(55;60;70)
3	K(10;50;20) B(40;10;0) C(30;30;50)	ΔKBC т.A(55;40;70)	21	A(20;30;30) B(30;40;50) C(0;50;10)	ΔABC т.D(65;60;75)
4	E(30;30;40) K(10;10;20) C(0;50;30)	ΔEKC т.D(45;60;60)	22	A(30;10;40) B(50;40;30) E(10;30;20)	ΔABE т.C(5;65;50)
5	A(30;40;50) B(20;10;0) C(50;40;10)	ΔABC т.E(65;70;65)	23	K(20;40;40) B(50;20;25) E(10;50;0)	ΔKBE т.A(70;80;65)
6	E(50;10;30) D(30;50;40) C(0;30;20)	ΔEDC т.K(15;60;55)	24	A(30;10;20) D(45;30;40) C(20;0;30)	ΔADC т.E(65;70;70)
7	A(30;10;10) B(0;20;50) D(40;40;20)	ΔABD т.C(55;70;80)	25	D(40;20;25) B(30;0;35) K(20;30;20)	ΔDBK т.A(5;50;60)
8	A(40;20;40) B(20;40;0) E(50;30;20)	ΔABE т.D(75;60;75)	26	A(60;20;10) B(40;60;50) D(30;35;10)	ΔABD т.K(25;60;80)
9	A(35;60;50) D(20;30;20) C(0;30;40)	ΔADC т.B(65;40;85)	27	E(10;50;40) B(30;20;0) C(50;10;20)	ΔEBC т.A(60;75;70)
10	K(30;25;30) B(60;0;50) C(20;50;10)	ΔKBC т.E(80;70;65)	28	A(0;40;10) B(40;20;50) D(50;50;30)	ΔABD т.C(15;70;75)
11	P(30;40;45) K(50;10;25) C(20;50;0)	ΔPKC т.A(0;75;60)	29	E(30;30;20) B(30;40;55) D(0;10;40)	ΔEBD т.K(55;60;80)

Продолжение таблицы

I	*II*	*III*	*IV*	*V*	*VI*
12	D(10;0;40) B(40;30;55) C(30;50;30)	∆DBC т.E(80;70;15)	30	K(20;50;10) D(45;0;50) A(60;10;30)	∆KDA т.C(75;60;85)
13	A(40;20;10) B(10;20;0) K(20;60;45)	∆ABK т.C(65;80;75)	31	A(50;30;15) B(30;40;50) C(20;30;0)	∆ABC т.E(60;70;65)
14	D(20;30;50) E(40;20;30) C(15;30;50)	∆DEC т.K(85;60;70)	32	P(15;40;30) B(40;50;10) C(0;30;20)	∆PBC т.D(75;80;55)
15	A(10;20;50) D(40;20;20) K(50;50;0)	∆ADK т.E(80;0;65)	33	A(50;30;50) B(40;10;0) E(20;50;30)	∆ABE т.C(0;60;75)
16	E(40;35;10) B(50;20;40) C(10;0;30)	∆EBC т.D(65;80;75)	34	D(10;40;30) B(60;0;50) C(20;50;10)	∆DBC т.K(45;70;80)
17	D(60;40;15) B(40;20;50) C(15;50;30)	∆DBC т.A(5;60;85)	35	K(20;40;10) B(0;30;60) C(20;50;20)	∆KBC т.E(55;70;0)
18	A(50;30;20) E(60;0;50) C(10;50;45)	∆AEC т.K(0;60;70)	36	A(25;40;0) B(40;10;50) C(10;50;20)	∆ABC т.D(75;60;60)

ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. https://studopedia.org/14-98320.html
2. Павлова А.А. Начертательная геометрия: Учеб. для студентов высш. учеб. заведений. – М.: ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ», 2001. – 304 с.
3. Начертательная геометрия. Натуральная величина плоской фигуры/ методические указания. О.А. Маркова - Нижнекамск: Нижнекамский химико-технологический институт (филиал) КГТУ, 2009. - 17 стр.
4. Начертательная геометрия. Точки, прямые, плоскости/ Учебное пособие. О.А. Маркова. - Нижнекамск: Нижнекамский химико-технологический институт (филиал) ФГБОУ ВПО «КНИТУ», 2013. - 132 стр.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Маркова
Ольга Анатольевна
кандидат педагогических наук

СПОСОБ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА. СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОЕКЦИЙ

Подписано в печать 01.03.2018 г. Формат 60x84 1/16
Печать офсетная. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 5,1515
Тираж 100. Заказ 77200

Отпечатано в ООО "ИПЦ "Гузель"
Республика Татарстан, г. Нижнекамск,
пр. Химиков , д. 18, тел.: 30-31-60