О.В. Шемелова, Т.Г. Макусева

ПРАКТИКУМ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Нижнекамск
2015

Ш46

Печатается по решению редакционно-издательского совета Нижнекамского химико-технологического института (филиала) ФГБОУ ВПО «КНИТУ»

Рецензенты:
Яковлева Е.В., доктор педагогических наук,
профессор кафедры физики НХТИ (филиал) ФГБОУ ВПО «КНИТУ»
Гайфутдинов А.Н., кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры МАХП НХТИ (филиал) ФГБОУ ВПО «КНИТУ»

Шемелова, О.В., Макусева, Т.Г.
Ш 46 Практикум по линейной алгебре: / О.В. Шемелова, Т.Г. Макусева. – Нижнекамск, 2015. – 103 с.

Предназначены для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы студентов, обучающихся по программам высшего образования и среднего профессионального образования, при изучении раздела «Линейная алгебра». По каждой теме раздела даны вопросы для самоконтроля, предложен необходимый справочный материал на основе решения типовых задач, приведен набор заданий трех уровней сложности, а также индивидуальные задания для домашней работы.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Математика является не только универсальным языком науки и мощным средством решения прикладных задач, но и элементом общей культуры. Поэтому математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую фундаментальной подготовки специалиста. Успех учёбы по высшей математике в высшей школе зависит от высокой научной и педагогической квалификации преподавателей и организации самостоятельного учебного труда самих студентов. Только при систематическом самостоятельном учебном труде студентов информация, полученная ими на лекциях, может быть переработана в систему знаний, которая в ходе практических занятий преобразуется в соответствующую систему умений и навыков.

Основными задачами самостоятельной учебной работы студентов являются:

1) творческое восприятие информации на лекции, её осмысливание и изложение содержания в конспекте лекции;

2) обобщение и переработка воспринятой информации в знания;

3) изучение учебной литературы и первоисточников, их конспектирование и доработка лекционных конспектов;

4) приобретение умений путём решения задач, выполнения расчётов и других практических заданий;

5) выработка навыков, развитие творчества путём применения полученных знаний к решению практических задач.

К выполнению заданий следует приступить лишь после изучения теоретического материала, соответствующего этой теме. Весь теоретический материал для выполнения типового расчёта можно почерпнуть из учебников или из конспекта лекций. В предлагаемых методических указаниях приводятся лишь краткие теоретические сведения, необходимые для решения задач. Методические указания содержат теоретические вопросы, подробно разобранные упражнения и набор заданий трех уровней сложности. Это позволит реализовать дифференцированный подход в обучении – каждый студент может решать задания доступного ему уровня сложности. Также предложены контрольные работы и расчетные задания.

Задачи решаются в аудитории (на практических занятиях) и в рамках самостоятельной работы (домашние задания). Необходимо также выполнить ряд контрольных работ и индивидуальных заданий по основным темам. При оценке работы студента на зачёте учитывается посещаемость студентом практических занятий и его активность на этих занятиях.

Критериями оценки результатов самостоятельной работы студента являются:

– уровень освоения студентом учебного материала;

– умение студента использовать теоретические знания при выполнении практических задач;

– сформированность общеучебных умений;

– обоснованность и четкость изложения ответа;

– оформление материала в соответствии с требованиями.

Т е м а 1: Действия над матрицами

Контрольные вопросы.

1) Что называется матрицей?

2) Что называется главной диагональю в матрице?

3) Как определяется расположение элемента в матрице?

4) Как определяется размер матрицы?

5) Какая матрица называется квадратной порядка n?

6) Операция сложения матриц. В каком случае выполняется операция сложения? Свойства операции сложения.

7) Операция умножения матриц. В каком случае выполняется операция умножения? Свойства операции умножения.

8) В чем заключается операция транспонирования матриц?

Примеры с решениями

Пример 1. Дано три матрицы: $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ и $C=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

а) Найти: $D=A+B$, если это возможно.

Определим размер заданных матриц: матрица A имеет 3 строки, т.е. $m=3$ и три столбца, т.е. $n=3$, тогда размер этой матрицы $A_{3\times 3}$. У матрицы B число строк $m=3$, число столбцов $n=2$, т.е. $B_{3\times 2}$. Таким образом, размеры матриц различны, их **нельзя складывать**.

б) Найти $K=B-C$, если это возможно.

Отметим, что соответствующими элементами матрицы называют элементы, находящиеся на пересечении одинаковых строк и одинаковых столбцов. Размеры матриц $B_{3\times2}$ и $C_{3\times2}$ одинаковы, потому вычитание возможно:

$$K = B - C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2-4 & -1-(-2) \\ 4-(-5) & 3-10 \\ -4-0 & 5-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 9 & -7 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

в) Найти $M = 2B + 3K$, если это возможно.

Так как размер матриц $B_{3\times2}$ и $K_{3\times2}$ одинаков, то их можно складывать.

$$M = 2\times\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} + 3\times\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 9 & -7 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{каждый элемент матриц} \\ \text{умножим на соответ-} \\ \text{ствующее число}\end{matrix}\right\}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot2 & 2\cdot(-1) \\ 2\cdot4 & 2\cdot3 \\ 2\cdot(-4) & 2\cdot5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\cdot(-2) & 3\cdot1 \\ 3\cdot9 & 3\cdot(-7) \\ 3\cdot(-4) & 3\cdot6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & 6 \\ -8 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 27 & -21 \\ -12 & 18 \end{pmatrix} =$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{сложим соответ-} \\ \text{ствующие элемен-} \\ \text{ты матриц}\end{matrix}\right\}$$

$$=\begin{pmatrix} 4+(-6) & -2+3 \\ 8+27 & 6+(-21) \\ -8+(-12) & 10+18 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 35 & -15 \\ -20 & 28 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Рассмотрим данные в примере 1 матрицы A, B и C. Какое из произведений $A\times B$ или $B\times C$ существует? Найдите элемент d_{21}, стоящий на пересечении второй строки и первого столбца существующего произведения.

Решение.

Возможность произведения матриц проверяется по формуле:

$$\boxed{A_{m\times p}\times B_{p\times n}=C_{m\times n}} \qquad \boxed{A\times B\neq B\times A}$$

Запишем размер данных матриц: $A_{3\times 3}$, $B_{3\times 2}$, $C_{3\times 2}$ и проверим возможность произведения.

$A_{3\times 3}\times B_{3\times 2}=D_{3\times 2}$ – произведение возможно

$B_{3\times 2}\times C_{3\times 2}=[2\neq 3]$ – произведение не возможно.

Найдем элемент d_{21}.

{найдем сумму произведений элементов 2-ой строки матрицы A, стоящей на 1-ом месте в произведении, на соответствующие элементы 1-го столбца матрицы B, являющейся вторым множителем произведения}

$d_{21}=4\cdot 2+2\cdot 4+0\cdot(-4)=8+8-0=16.$

Пример 3. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$. Найти произведение $A\times B$ и $B\times A$, если это возможно.

Решение.

$A_{2\times 2}\times B_{2\times 3}=C_{2\times 3}$ – умножение возможно,

$B_{2\times3}\times A_{2\times2}=\left[3\neq 2\right]$ – умножение невозможно.

Матрица произведения $C_{2\times3}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$ имеет 2 строки, 3 столбца и 6 элементов.

Найдем каждый элемент матрицы произведения $C_{2\times3}$ отдельно.

$$c_{11}=\left\{\begin{matrix}\text{перемножаются и складываются}\\ \text{соответствующие элементы 1-ой}\\ \text{строки матрицы } A \text{ и элементы}\\ \text{1-го столбца матрицы } B\end{matrix}\right\}=1\cdot 0+(-2)\cdot 4=-8$$

$$c_{12}=\left\{\begin{matrix}\text{перемножаются и складываются}\\ \text{соответствующие элементы 1-ой}\\ \text{строки матрицы } A \text{ и элементы}\\ \text{2-го столбца матрицы } B\end{matrix}\right\}=1\cdot(-2)+(-2)\cdot 5=-12$$

$$c_{13}=\left\{\begin{matrix}\text{перемножаются и складываются}\\ \text{соответствующие элементы 1-ой}\\ \text{строки матрицы } A \text{ и элементы}\\ \text{3-го столбца матрицы } B\end{matrix}\right\}=1\cdot 1+(-2)\cdot(-1)=3$$

$$c_{21}=\left\{\begin{matrix}\text{перемножаются и складываются}\\ \text{соответствующие элементы 2-ой}\\ \text{строки матрицы } A \text{ и элементы}\\ \text{1-го столбца матрицы } B\end{matrix}\right\}=3\cdot 0+(-1)\cdot 4=-4$$

$$c_{22}=\left\{\begin{matrix}\text{перемножаются и складываются}\\ \text{соответствующие элементы 2-ой}\\ \text{строки матрицы } A \text{ и элементы}\\ \text{2-го столбца матрицы } B\end{matrix}\right\}=3\cdot(-2)+(-1)\cdot 5=-11$$

$$c_{23} = \left\{ \begin{array}{l} \text{перемножаются и складываются} \\ \text{соответствующие элементы 2-ой} \\ \text{строки матрицы } A \text{ и элементы} \\ \text{3-го столбца матрицы } B \end{array} \right\} = 3 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = 4$$

В результате получили матрицу $C = A \times B = \begin{pmatrix} -8 & -12 & 3 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

Пример 4. Найти A^3, если $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение.

Возведение матрицы в степень n определяется как умножение матрицы на себя n раз. Таким образом, $A^3 = A \times A \times A$.

Найдем A^3 поэтапно. Прежде всего, вычислим $A^2 = A \times A = A_{2\times 2} \times A_{2\times 2} = B_{2\times 2} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$.

$$b_{11} = \left\{ \begin{array}{l} \text{перемножаются и склады-} \\ \text{ваются соответствующие эле-} \\ \text{менты 1-ой строки и 1-го} \\ \text{столбца матрицы } A \end{array} \right\} = (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot 0 = 4$$

$$b_{12} = \left\{ \begin{array}{l} \text{перемножаются и склады-} \\ \text{ваются соответствующие эле-} \\ \text{менты 1-ой строки и 2-го} \\ \text{столбца матрицы } A \end{array} \right\} = (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 2$$

$$b_{21} = \left\{ \begin{array}{l} \text{перемножаются и склады-} \\ \text{ваются соответствующие эле-} \\ \text{менты 2-ой строки и 1-го} \\ \text{столбца матрицы } A \end{array} \right\} = 0 \cdot (-2) + 4 \cdot 0 = 0$$

$$b_{22}=\left\{\begin{array}{l}\text{перемножаются и склады-}\\\text{ваются соответствующие эле-}\\\text{менты 2-ой строки и 2-го}\\\text{столбца матрицы } A\end{array}\right\}=0\cdot 1+4\cdot 4=16$$

В результате умножения получили $A^2=B=\begin{pmatrix}4 & 2\\0 & 16\end{pmatrix}$. Найдем A^3, выполнив умножение $A^3=A^2\times A=B_{2\times 2}\times A_{2\times 2}=C_{2\times 2}$. Отметим, что придерживаемся определенного порядка умножения матриц, а именно, матрицу $B=A^2$ умножаем на матрицу A. Элементы искомая матрица $A^3=C_{2\times 2}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$ найдем отдельно.

$$c_{11}=\left\{\begin{array}{l}\text{перемножаются и складываются}\\\text{соответствующие элементы 1-ой}\\\text{строки матрицы } B \text{ и элементы}\\\text{1-го столбца матрицы } A\end{array}\right\}=4\cdot(-2)+2\cdot 0=-8$$

$$c_{12}=\left\{\begin{array}{l}\text{перемножаются и складываются}\\\text{соответствующие элементы 1-ой}\\\text{строки матрицы } B \text{ и элементы}\\\text{2-го столбца матрицы } A\end{array}\right\}=4\cdot 1+2\cdot 4=12$$

$$c_{21}=\left\{\begin{array}{l}\text{перемножаются и складываются}\\\text{соответствующие элементы 21-}\\\text{ой строки матрицы } B \text{ и элементы}\\\text{1-го столбца матрицы } A\end{array}\right\}=0\cdot(-2)+16\cdot 0=0$$

$$c_{22} = \left\{ \begin{array}{l} \text{перемножаются и складываются} \\ \text{соответствующие элементы 2-ой} \\ \text{строки матрицы } B \text{ и элементы} \\ \text{2-го столбца матрицы } A \end{array} \right\} = 0 \cdot 1 + 16 \cdot 4 = 64$$

Таким образом, в результате получаем матрицу $A^3 = C = \begin{pmatrix} -8 & 12 \\ 0 & 64 \end{pmatrix}$.

Пример 5. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ и $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Найдите A^T, B^T, C^T и D^T, т.е. транспонируйте данные матрицы.

Решение.

Напомним, что ***операция транспонирования матрицы*** – это замена её строк столбцами с теми же номерами, т.е. 1-ая строка станет 1-ым столбцом и т.д., получим $A_{m \times n} \to A^T_{n \times m}$.

Найдем соответствующие транспонированные матрицы.

$$A_{3\times2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \to \qquad A^T_{2\times3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 6 \end{pmatrix};$$

$$B_{2\times2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \to \qquad B^T_{2\times2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix};$$

$$C_{2\times4} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \quad \to \quad C^T_{4\times2} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix};$$

$$D_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \to \quad D^T_{3\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Пример 6. Матрицы и определители. Выполнить операции над матрицами: $C = (B \cdot A + E)^T$, если $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение.

Выполним операции по действиям:

1) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot4+5\cdot2 & 3\cdot1+5\cdot5 & 3\cdot6+5\cdot3 \\ 1\cdot4+2\cdot2 & 1\cdot1+2\cdot5 & 1\cdot6+2\cdot3 \\ 4\cdot4+6\cdot2 & 4\cdot1+6\cdot5 & 4\cdot6+6\cdot3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 28 & 33 \\ 8 & 11 & 12 \\ 28 & 34 & 42 \end{pmatrix};$$

2) $B \cdot A + E = \begin{pmatrix} 22 & 28 & 33 \\ 8 & 11 & 12 \\ 28 & 34 & 42 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$=\begin{pmatrix} 22+1 & 28+0 & 33+0 \\ 8+0 & 11+1 & 12+0 \\ 28+0 & 34+0 & 42+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 23 & 28 & 33 \\ 8 & 12 & 12 \\ 28 & 34 & 42 \end{pmatrix};$$

3) $$(B\cdot A+E)^T=\begin{pmatrix} 23 & 28 & 33 \\ 8 & 12 & 12 \\ 28 & 34 & 42 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} 23 & 8 & 28 \\ 28 & 12 & 34 \\ 33 & 12 & 42 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $(B\cdot A+E)^T=\begin{pmatrix} 23 & 8 & 28 \\ 28 & 12 & 34 \\ 33 & 12 & 42 \end{pmatrix}.$

Пример 7. Найти значение матричного многочлена

$$f(x)=-x^3+2x^2-x+3, \qquad A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

В данном случае следует выполнить следующие действия с матрицами:

$$f(A)=-A^3+2\cdot A^2-A+3\cdot E,$$

где E – единичная матрица.

Вычислим по действиям:

1) $$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -1\cdot(-1)+0\cdot 3 & -1\cdot 0+0\cdot 2 \\ 3\cdot(-1)+2\cdot 3 & 3\cdot 0+2\cdot 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$$

2) $$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot(-1)+0\cdot 3 & 1\cdot 0+0\cdot 2 \\ 3\cdot(-1)+4\cdot 3 & 3\cdot 0+4\cdot 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 9 & 8 \end{pmatrix};$$

3) $f(A)=-\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 9 & 8\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -9 & -8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0\\ 6 & 8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 0\\ -6 & 1\end{pmatrix}.$$

<u>Ответ:</u> $f(A)=\begin{pmatrix}7 & 0\\ -6 & 1\end{pmatrix}$.

<u>Пример 8.</u> Найти значение матричного многочлена $f(A)$:

$f(x)=x^3-6x^2+9x+4$, где $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

<u>Решение.</u>

В данном случае следует выполнить следующие действия с матрицами:

$$f(A)=A^3-6\cdot A^2+9\cdot A+4\cdot E,$$

где E – единичная матрица.

Вычислим по действиям:

1) $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot0+0\cdot0 & 1\cdot0+0\cdot2+0\cdot1 & 1\cdot0+0\cdot(-1)+0\cdot4\\ 0\cdot1+2\cdot0+(-1)\cdot0 & 0\cdot0+2\cdot2+(-1)\cdot1 & 0\cdot0+2\cdot(-1)+(-1)\cdot4\\ 0\cdot1+1\cdot0+4\cdot0 & 0\cdot0+1\cdot2+4\cdot1 & 0\cdot0+1\cdot(-1)+4\cdot4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -6\\ 0 & 6 & 15\end{pmatrix};$$

2) $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 6 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 & 1\cdot 0 + 0\cdot 2 + 0\cdot 1 & 1\cdot 0 + 0\cdot(-1) + 0\cdot 4 \\ 0\cdot 1 + 2\cdot 0 + (-1)\cdot 0 & 0\cdot 0 + 3\cdot 2 + (-6)\cdot 1 & 0\cdot 0 + 3\cdot(-1) + (-6)\cdot 4 \\ 0\cdot 1 + 6\cdot 0 + 15\cdot 0 & 0\cdot 0 + 6\cdot 2 + 15\cdot 1 & 0\cdot 0 + 6\cdot(-1) + 15\cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -27 \\ 0 & 27 & 54 \end{pmatrix};$$

3) $6 \cdot A^2 = 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 6 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & -36 \\ 0 & 36 & 90 \end{pmatrix};$

4) $9 \cdot A = 9 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & -9 \\ 0 & 9 & 36 \end{pmatrix};$

5) $4 \cdot E = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix};$

6) $f(A) = A^3 - 6 \cdot A^2 + 9 \cdot A + 4 \cdot E =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -27 \\ 0 & 27 & 54 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & -36 \\ 0 & 36 & 90 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & -9 \\ 0 & 9 & 36 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 1-6+9+4 & 0-0+0+0 & 0-0+0+0 \\ 0-0+0+0 & 0-18+18+4 & -27-(-36)+(-9)+0 \\ 0-0+0+0 & 27-36+9+0 & 54-90+36+4 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $f(A)=\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

(во всех заданиях *n* – номер варианта)

1 УРОВЕНЬ

Задание 1.1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ n & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 8 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}$. Проанализировав размер матрицы, определите возможность действий $A+B$, $A+C$, $2A+4B$. В ответ запишите суммы элементов полученных матриц.

Задание 1.2. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \\ -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ -2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу $C=A^T+3B^T$, в ответ запишите наибольший элемент полученной матрицы.

Задание 1.3. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} n & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Проведя соответствующий анализ, найдите произведение матриц, где это возможно. В ответ запишите сумму элементов главной диагонали каждой полученной матрицы.

Задание 1.4. Вычислите многочлен $f(D)$, если $f(x)=x^2+2x+3$, а $D=\begin{pmatrix} 1 & n \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

2 УРОВЕНЬ

Задание 1.5. Дана сумма матриц:

$$3\times\begin{pmatrix} x & n & 3 \\ -2 & y & 5 \end{pmatrix}+2\times\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 4 & -6 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найдите значение выражения $2x-3y$.

Задание 1.6. Найдите матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} -1 & n-10 \\ 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Проверьте, справедливо ли равенство

$$A\times B\times C=(A\times B)\times C=A\times(B\times C).$$

Задание 1.7. Вычислите матрицу $D=C^2+(AB)^T$, если $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 10-n \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} n-10 & 1 \\ 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Задание 1.8. Докажите, что матрица $X=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ удовлетворяет уравнению $Ax^2+Bx+C=0$, где $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $0=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

3 УРОВЕНЬ

Задание 1.9. Какие из следующих операций можно провести с матрицами A, B?

а) $A+B$; б) A^T+B; в) $A+B^T$; г) $A\times B$;
д) $B\times A$; е) $A^T\times B$; ж) $A\times B^T$; з) $A^T\times B^T$;
и) $B^T\times A^T$,

если $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & n-10\\ 5 & 4 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 10-n & 0\\ -2 & 4\end{pmatrix}$. Произведите соответствующие действия, где это возможно.

Задание 1.10. Является ли матрица $X=\begin{pmatrix}n-10 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$ корнем уравнения

$$\begin{pmatrix}6 & -2 & 0\\ 5 & n-10 & 2\\ 4 & 1 & -2\end{pmatrix}\cdot X+\begin{pmatrix}-1 & 4 & 5\\ -7 & 2 & 1\\ 4 & 2 & n-10\end{pmatrix}-5E=\begin{pmatrix}6n-70 & -4 & -1\\ 7n-77 & n-16 & 3n-21\\ 4n-34 & -3 & n-20\end{pmatrix}.$$

Задание 1.11. Дано произведение матриц:

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 & 4 \\ 2 & -4 & n-10 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 10-n & 4 & 5 \\ 6 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} = C.$$

Найдите следующие элементы матрицы произведения C: c_{21}, c_{32}, c_{12}, c_{24}.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ ДОМАШНЕЙ РАБОТЫ

Задание 1.12. Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & n-10 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 10-n & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицы: **а)** $D = A \times C + 2B^T$, **б)** $K = C^T \times 2A^T - B$.

Задание 1.13. Проверьте справедливость равенства $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ при заданных матрицах

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & n-11 & 2 \\ n-12 & 5 & -3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & 0 & 5 \\ 12-n & -4 & 7 & 6 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & n-11 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задание 1.14. Дано произведение матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ n-10 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & x_2 & x_3 \\ y_1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найдите значения x_2, x_3, y_1.

Тема 2: *Элементарные преобразования матриц. Ранг матрицы*

Контрольные вопросы.

1) В чем заключается метод элементарных преобразований над матрицами?

2) Какая матрица называется ступенчатой матрицей?

3) Что называется рангом матрицы?

Примеры с решениями

Пример 9. Привести к ступенчатому виду матрицу

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 8 \\ -1 & 3 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Решение.

Выполним следующие элементарные преобразования над матрицей A:

1) к элементам второй строки прибавим соответствующие элементы первой строки и из элементов третьей строки вычтем элементы первой строки, в результате A преобразуется к виду:

$$A\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right);$$

2) переставим вторую и третью строки:

$$A\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right);$$

3) из третьей строки полученной матрицы вычтем вторую строку, умноженную на 3, получим: $A \to A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array}\right)$.

Пример 10. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение.

Приведем данную матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \left\{ \begin{array}{l} \text{поменяем ме-} \\ \text{стами 1-ую и} \\ \text{3-ю строки} \end{array} \right\} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left\{ \begin{array}{l} \text{1) Вычтем из 2-ой строки 1-ую строку,} \\ \text{результат запишем во 2-ую строку;} \\ \text{2) Вычтем из 3-ей строки 1-ую строку, умножен-} \\ \text{ную на 2, результат запишем в 3-ю строку} \end{array} \right\} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}; \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{rang}(A) = 3.$$

Пример 11. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение.

Вычислять ранг матрицы будем с помощью элементарных преобразований, приводя матрицу элементарными преобразованиями к ступенчатому виду.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\left\{\begin{array}{l}\text{1) Вычтем из 2-ой строки 1-ую строку, умножен-} \\ \text{ную на 2, результат запишем во 2-ую строку;} \\ \text{2) Вычтем из 3-ей строки 1-ую строку,} \\ \text{результат запишем в 3-ю строку}\end{array}\right\}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\left\{\begin{array}{l}\text{Вычтем из 3-ой строки 2-ую стро-} \\ \text{ку, умноженную на 2, результат} \\ \text{запишем в 3-ю строку}\end{array}\right\}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, исходная матрица методом элементарных преобразований приведена к виду, когда ее ранг равен количеству ее ненулевых строк. Следовательно, $\operatorname{rang}(A)=2$.

Пример 12. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Вычислим ранг матрицы, приводя ее с помощью элементарных преобразований к ступенчатому виду:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -2 & 4\\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7\\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2\end{pmatrix}\sim\left\{\begin{matrix}\text{Вычтем из 2-ой строки удво-}\\ \text{енную 1-ую строку, результат}\\ \text{запишем во 2-ую строку.}\\ \text{Вычтем из 3-ей строки 1-ую}\\ \text{строку, результат запишем в}\\ \text{3-ю строку.}\end{matrix}\right\}$$

$$\sim\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -2 & 4\\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1\\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2\end{pmatrix}\sim\left\{\begin{matrix}\text{Умножим 2-ую строку на (–2),}\\ \text{сложим с 3-ей строкой, сумму}\\ \text{запишем в 3-ю строку.}\end{matrix}\right\}$$

$$\sim\begin{pmatrix}2 & -1 & 3 & -2 & 4\\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Таким образом, ранг полученной матрицы равен числу ее ненулевых строк, т.е. равен 2. А, следовательно, ранг исходной матрицы также равен 2, $r(A)=2$.

Пример 13. Найти ранг матрицы $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & a & 1/2\\ 2 & -1 & 5 & a\\ 1 & 1 & 1 & 6\end{pmatrix}$ при различных значениях a.

Решение.

При помощи элементарных преобразований приведем данную матрицу к ступенчатому виду:

$$B=\begin{pmatrix}1 & -1 & a & 1/2\\ 2 & -1 & 5 & a\\ 1 & 1 & 1 & 6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & a & 1/2\\ 0 & -1 & -2a+5 & -1+a\\ 0 & 2 & 1-a & 4\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & a & 1/2\\ 0 & -1 & 5-2a & a-1\\ 0 & 0 & 3a-9 & 6-2a\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & a & 1/2\\ 0 & -1 & 5-2a & a-1\\ 0 & 0 & 3(a-3) & 2(3-a)\end{pmatrix}.$$

Поясним выполненные действия:

1) вычтем из 2-ой строки удвоенную 1-ю строку, вычтем из 3-ей строки 1-ую;

2) вычтем из 3-ей строки удвоенную 2-ую строку.

Видим, что в полученной ступенчатой матрице при $a=3$ последняя строка становится нулевой, в остальных случаях это не так.

Ответ: $r(B)=2$ при $a=3$, $r(B)=3$ при $a\neq 3$.

Задания для самостоятельной работы

(во всех заданиях n – номер вашего варианта)

1 уровень

Задание 2.1. Найдите ранг матрицы:

а) $A=\begin{pmatrix} 31 & -10 & -20 \\ -2 & 9 & -10 \\ -13 & 3 & 10 \end{pmatrix}$; **б)** $B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

2 уровень

Задание 2.2. Найдите ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задание 2.3. Укажите те значения параметров p и q, при которых ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & p \\ 5 & 10 & q \end{pmatrix}$ равен 1.

3 *уровень*

Задание 2.4. Найдите значение параметра t, при котором $\operatorname{rang}(A)=3$.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & -3 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 18 & -12 & 7 & t \end{pmatrix}.$$

Индивидуальные домашние задания

Задание 2.5. Найдите ранг $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & n & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 & 5 & n \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Задание 2.6. Найдите ранг данной матрицы методом элементарных преобразований (по вариантам):

1. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -11 & -1 & 19 \\ 1 & 12 & 2 & -16 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -10 & 1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 6 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 13 & 16 \\ 2 & -6 & 9 & 11 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -13 & -1 \\ 2 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \\ 7 & -15 & -11 & 8 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **12.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 9 & 12 \\ 3 & 1 & 8 & -7 \\ -2 & -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 & -2 \\ 8 & -2 & 6 & -4 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ 6 & -2 & 8 & -4 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -7 & 5 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & -6 & 2 \\ 6 & 3 & -9 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & 3 & -7 \\ -1 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -4 \\ 1 & 9 & 8 & -2 \\ 1 & 12 & -7 & -2 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 7 \\ 6 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 \\ 3 & 7 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 5 & 6 \\ 9 & 5 & 7 & 10 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -9 & -8 \\ 2 & 7 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -9 & -8 \\ 2 & 7 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ **30.** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 5 & 7 \\ 9 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

Задание 2.7. Вычислите ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -5 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

<u>*Тема 3*</u>*: Определители. Миноры и алгебраические дополнения.*

Контрольные вопросы.

1) Что называется определителем матрицы?

2) Сформулировать свойства определителя матрицы.

3) Что называется минором для элемента a_{ij} матрицы?

4) Что называется алгебраическим дополнением для элемента a_{ij} матрицы?

5) Какие существуют способы вычисления определителей различных порядков?

Примеры с решениями

<u>Пример 14.</u> Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

<u>Решение.</u>

Определитель будет равен:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - (-3) \cdot 2 = 10\,.$$

<u>Пример 15</u>. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

<u>Решение.</u>

Определитель этой матрицы будет равен:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 1\cdot 2\cdot 5 + 0\cdot 0\cdot 4 + (-3)\cdot 2\cdot 2 - 4\cdot 2\cdot 2 - \\ -2\cdot 0\cdot 1 - (-3)\cdot 0\cdot 5 = 10 - 12 - 16 = -18 \end{matrix}$$

Пример 16. Вычислить миноры M_{13} и M_{32} для соответствующих элементов матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение.

Вычислим минор M_{13} для элемента a_{13} матрицы. Для этого запишем определитель второго порядка, полученный вычеркиванием первой строки и третьего столбца из исходной матрицы, и вычислим определитель:

$$M_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (-3)\cdot 2 - 4\cdot 2 = -6 - 8 = -14.$$

Аналогично вычислим минор M_{32}. В этом случае определитель второго порядка получается из исходной матрицы путем вычеркивания третьей строки и второго столбца. Запишем:

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot 0 - (-3)\cdot 2 = 0 + 6 = 6.$$

Пример 17. Вычислить алгебраические дополнения A_{13} и A_{32} для соответствующих элементов матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение.

Вычислим алгебраическое дополнение A_{13} для элемента a_{13} матрицы. Для этого минор этого элемента M_{13} умножим $(-1)^{1+3}$. Получим:

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 2 - 4 \cdot 2 = -6 - 8 = -14 .$$

Аналогично вычислим алгебраическое дополнение A_{32}. В этом случае минор этого элемента M_{32} умножим $(-1)^{3+2}$. Запишем:

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 0 - (-3) \cdot 2) = -(0 + 6) = -6 .$$

Пример 18. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -3 & -2 & 7 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}:$$

а) разложением по первой строке;

б) разложением по второму столбцу.

Решение.

а) $\Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -3 & -2 & 7 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} +$

$$+6\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}-3 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & 7\\ 0 & 5\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}-3 & 7\\ 4 & 5\end{vmatrix}+6\cdot\begin{vmatrix}-3 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=((-2)\cdot 5-0\cdot 7)-2\cdot((-3)\cdot 5-4\cdot 7)+6\cdot((-3)\cdot 0-4\cdot(-2))=$$

$$=(-10-0)-2\cdot(-15-28)+6\cdot(0+8)=-10-2\cdot(-43)+6\cdot 8=$$

$$=-10+86+48=124\,.$$

б) $$\Delta_A=\begin{vmatrix}1 & 2 & 6\\ -3 & -2 & 7\\ 4 & 0 & 5\end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 7\\ 4 & 5\end{vmatrix}+(-2)\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 6\\ 4 & 5\end{vmatrix}+$$

$$+0\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 6\\ -3 & 7\end{vmatrix}=-2\cdot\begin{vmatrix}-3 & 7\\ 4 & 5\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}1 & 6\\ 4 & 5\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}1 & 6\\ -3 & 7\end{vmatrix}=$$

$$=-2\cdot((-3)\cdot 5-4\cdot 7)-2\cdot(1\cdot 5-4\cdot 6)+0\cdot(1\cdot 7-(-3)\cdot 6)=$$

$$=-2\cdot(-15-28)-2\cdot(5-24)+0\cdot(7+18)=$$

$$=-2\cdot(-43)-2\cdot(-19)+0\cdot 25=$$

$$=86+38=124\,.$$

Пример 19. Вычислить определитель четвертого порядка, разложив по элементам второго столбца.

Решение.

Вычислим определитель по одному из рядов (строке или столбцу). Выберем такой ряд, в котором содержится наибольшее количество нулей. Таким рядом оказывается второй столбец, в котором есть 2 нуля.

$$\Delta=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 3 & 5\\ -2 & 1 & 3 & 0\\ 5 & -4 & 0 & 7\\ 2 & 0 & -1 & 4\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}-1 & 3 & 5\\ 5 & 0 & 7\\ 2 & -1 & 4\end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix}-1 & 3 & 5\\ -2 & 3 & 0\\ 2 & -1 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=0+42-25-7-60+4\cdot(-12+10-30+24)=-50+4\cdot(-8)=-82\,.$$

Пример 20. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Разложим определитель по элементам 3-ей строки, умножив их на миноры с соответствующим знаком:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = a \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} + b \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+ c \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} + d \cdot (-1)^7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= a \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} -$$

$$- d \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 8a - 15b + 12c - 19d\ .$$

Задания для самостоятельной работы

(во всех заданиях n – номер вашего варианта)

1 уровень

Задание 3.1. Вычислить определитель матрицы:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ n & -7 \end{pmatrix}$; **б)** $B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -n & 5 \end{pmatrix}$.

Задание 3.2. Вычислить минор M_{23} и алгебраическое дополнение A_{12} для элементов матрицы $A = \begin{pmatrix} 7 & n-5 & 10 \\ -1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Задание 3.3. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 7 & n-5 & 10 \\ -1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}:$$

а) по правилу треугольников;
б) по теореме разложения.

2 уровень

Задание 3.4. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 2x & 5 \\ 4 & x-3 \end{vmatrix} = n$.

Задание 3.5. Решить неравенство $\begin{vmatrix} 2 & x-3 \\ -x & -3 \end{vmatrix} \le n$.

Задание 3.6. Вычислить минор M_{23} и алгебраическое дополнение A_{43} для элементов матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & n-9 & 4 \\ 5 & 3 & -2 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 6 \\ -4 & 2 & 8 & n-8 \end{pmatrix}.$$

Задание 3.7. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & n-9 & 4 \\ 5 & 3 & -2 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 6 \\ -4 & 2 & 8 & n-8 \end{pmatrix}:$$

а) разложением по второй строке;
б) разложением по третьему столбцу.

3 УРОВЕНЬ

Задание 3.8. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 2x-1 & 5 & -3 \\ x+2 & 4 & 0 \\ 7 & n & 1 \end{vmatrix} = n$.

Задание 3.9. Решить неравенство $\begin{vmatrix} 2 & x-5 & -3 \\ -1 & 7-x & 0 \\ n & 2 & 4 \end{vmatrix} \geq n-10$.

Индивидуальные домашние задания

<u>Задание 3.10.</u> Решить неравенство $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ n & x+5 & 2-x \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \le 4$.

<u>Задание 3.11.</u> Решить уравнение $\begin{vmatrix} 2 & 0 & n \\ x & 0 & 1 \\ 3 & -1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & x \\ n-10 & 2 \end{vmatrix}$.

<u>Задание 3.12.</u> Решить уравнение $\begin{vmatrix} x & x+4 & n-10 \\ -2 & x & -2 \\ 2 & x & x+1 \end{vmatrix} = 0$.

Тема 4: Обратная матрица.

Контрольные вопросы.

1) Какая матрица называется вырожденной?

2) Что называется обратной матрицей для матрицы A?

3) В каком случае невозможно построить обратную матрицу для матрицы A?

4) Каковы этапы построения обратной матрицы?

5) Как можно проверить правильность построения обратной матрицы?

Примеры с решениями

Пример 21. Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Вычислим определитель $\Delta_A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - (-3) = 5$.

Так как $\Delta_A \neq 0$, обратная матрица существует. Найдем алгебраическое дополнение для каждого элемента a_{ij}. Получим:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 1 = 1; \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-1) = 1;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 3 = -3; \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2.$$

Запишем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}2+3 & -6+6\\ -1+1 & 3+2\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Пример 22. Найти обратную матрицу для матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Решение.

1) Вычислим определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=4+0+0-0-1-12=-9\neq 0.$$

2) Находим алгебраические дополнения для элементов матрицы A:

$$A_{11}=+\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=4-1=3; \qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-(6-0)=-6;$$

$$A_{13}=+\begin{vmatrix}3 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=3-0=3; \qquad A_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-(4-0)=-4;$$

$$A_{22}=+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2-0=2; \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-(1-0)=-1;$$

$$A_{31}=+\begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=2-0=2; \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-(1-0)=-1;$$

$$A_{33}=+\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix}=2-6=-4.$$

В результате получаем матрицу $\tilde{A}=\begin{pmatrix}3 & -6 & 3\\ -4 & 2 & -1\\ 2 & -1 & -4\end{pmatrix}$, составленную из алгебраических дополнений к элементам матрицы A.

3) Транспонируем матрицу $\widetilde{A}$, получаем матрицу

$$\widetilde{A}^T = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

4) Тогда обратная матрица:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \widetilde{A}^T = \frac{1}{-9} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Выполним проверку правильности построения обратной матрицы, т.е. проверим выполнение равенства $A \cdot A^{-1} = E$. Вычислим нужное произведение матриц:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 6 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 6 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 6 + 0 \cdot (-3) & 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 & 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 4 \\ 3 \cdot (-3) + 2 \cdot 6 + 1 \cdot (-3) & 3 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \\ 0 \cdot (-3) + 1 \cdot 6 + 2 \cdot (-3) & 0 \cdot 4 + 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 & 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}9&0&0\\0&9&0\\0&0&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Так как в результате вычисления произведения $A\cdot A^{-1}$ получилась единичная матрица, значит обратная матрица $A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{4}{9}&-\frac{2}{9}\\ \frac{2}{3}&-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\\ -\frac{1}{3}&\frac{1}{9}&\frac{4}{9}\end{pmatrix}$ найдена верно.

Пример 23. При каких значениях a и b матрица $\begin{pmatrix}b&a&a\\a&b&a\\a&a&b\end{pmatrix}$ обратима?

Решение.

Матрица обратима, если ее определитель не равен нулю. Найдем условия, накладываемые на a и b, при которых это не так, т.е. $\begin{vmatrix}b&a&0\\a&b&a\\a&a&b\end{vmatrix}=b^3+2a^3-3a^2b=0$. Для этого разложим левую часть полученного равенства на множители:

$$b^3+2a^3-3a^2b=b^3-a^2b-2a^2b+2a^3=b\left(b^2-a^2\right)-2a^2(a+b)=$$
$$=b(b-a)(a+b)-2a^2(a+b)=(a+b)\left(b^2-ab-2a^2\right)=$$
$$=(a+b)\left(b^2-a^2-ab-a^2\right)=(a+b)\left((b-a)(b+a)-a(b+a)\right)=$$
$$=(a+b)^2(b-2a)=0.$$

Итак, если $b=-a$ или $b=2a$, то определитель равен нулю и, следовательно, обратной матрицы не существует.

Ответ: обратная матрица существует, если $b \neq \begin{cases} -a, \\ 2a. \end{cases}$.

Пример 24. Вычислить обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Вычислим определитель матрицы по правилу «треугольников»:

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 4\cdot 4\cdot 4 + 1\cdot 1\cdot(-1) + 1\cdot(-1)\cdot 1 -$$

$$-1\cdot 4\cdot 1 - 4\cdot(-1)\cdot(-1) - 4\cdot 1\cdot 1 =$$

$$= 64 - 1 - 1 - 4 - 4 - 4 = 50.$$

Найдем алгебраические дополнения.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4\cdot 4 - (-1)\cdot(-1) = 15;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(1\cdot 4 - 1\cdot(-1)) = -5;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1) - 1\cdot 4 = -5;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -(1\cdot 4 - (-1)\cdot 1) = -5;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4\cdot 4 - 1\cdot 1 = 15;$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(4\cdot(-1) - 1\cdot 1) = 5;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 4 \cdot 1 = -5;$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(4 \cdot (-1) - 1 \cdot 1) = 5;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 15.$$

Составим матрицу из алгебраических дополнений:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 15 & -5 & -5 \\ -5 & 15 & 5 \\ -5 & 5 & 15 \end{pmatrix}.$$

Транспонируем матрицу $\tilde{A}$:

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 15 & -5 & -5 \\ -5 & 15 & 5 \\ -5 & 5 & 15 \end{pmatrix}.$$

Тогда обратная матрица имеет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{50} \cdot \begin{pmatrix} 15 & -5 & -5 \\ -5 & 15 & 5 \\ -5 & 5 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,1 & -0,1 \\ -0,1 & 0,3 & 0,1 \\ -0,1 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 0,3 & -0,1 & -0,1 \\ -0,1 & 0,3 & 0,1 \\ -0,1 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,3 \cdot 4 + (-0,1) \cdot 1 + (-0,1) \cdot 1 & 0,3 \cdot 1 + (-0,1) \cdot 4 + (-0,1) \cdot (-1) & 0,3 \cdot 1 + (-0,1) \cdot (-1) + (-0,1) \cdot 4 \\ -0,1 \cdot 4 + 0,3 \cdot 1 + 0,1 \cdot 1 & -0,1 \cdot 1 + 0,3 \cdot 4 + 0,1 \cdot (-1) & -0,1 \cdot 1 + 0,3 \cdot (-1) + 0,1 \cdot 4 \\ -0,1 \cdot 4 + 0,1 \cdot 1 + 0,3 \cdot 1 & -0,1 \cdot 1 + 0,1 \cdot 4 + 0,3 \cdot (-1) & -0,1 \cdot 1 + 0,1 \cdot (-1) + 0,3 \cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E\,.$$

Ответ: $A^{-1}=\begin{pmatrix}0{,}3&-0{,}1&-0{,}1\\-0{,}1&0{,}3&0{,}1\\-0{,}1&0{,}1&0{,}3\end{pmatrix}$.

Пример 25. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix}1&-2\\-3&4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-2&3&5\\3&-1&0\end{pmatrix}.$$

Решение.

Запишем данное матричное уравнение в виде $AX=B$. Его решением является матрица $X=A^{-1}B$ (если существует матрица A^{-1}).

Найдем определитель матрицы A:

$$\Delta_A=\begin{vmatrix}1&-2\\-3&4\end{vmatrix}=1\cdot4-(-3)\cdot(-2)=4-6=-2\neq0\,.$$

Так как $\Delta_A\neq0$, то обратная матрица A^{-1} существует, и исходное уравнение имеет (единственное) решение.

Найдем обратную матрицу:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta_A}\cdot\tilde{A}=\frac{1}{-2}\cdot\begin{pmatrix}4&2\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-1\\-1{,}5&-0{,}5\end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу

$$X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}-2&-1\\-1{,}5&-0{,}5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&3&5\\3&-1&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2\cdot(-2)+(-1)\cdot3&-2\cdot3+(-1)\cdot(-1)&-2\cdot5+(-1)\cdot0\\-1{,}5\cdot(-2)+(-0{,}5)\cdot3&-1{,}5\cdot3+(-0{,}5)\cdot(-1)&-1{,}5\cdot5+(-0{,}5)\cdot0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -5 & -10 \\ 1{,}5 & -4 & -7{,}5 \end{pmatrix}.$$

Выполним проверку правильности найденного решения. Для этого вычислим произведение матриц AX:

$$AX=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -5 & -10 \\ 1{,}5 & -4 & -7{,}5 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot1+(-2)\cdot1{,}5 & 1\cdot(-5)+(-2)\cdot(-4) & 1\cdot(-10)+(-2)\cdot(-7{,}5) \\ (-3)\cdot1+4\cdot1{,}5 & (-3)\cdot(-5)+4\cdot(-4) & (-3)\cdot(-10)+4\cdot(-7{,}5) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1-3 & -5+8 & -10+15 \\ -3+6 & 15-16 & 30-30 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}=B.$$

Все верно.

Ответ: $X=\begin{pmatrix} 1 & -5 & -10 \\ 1{,}5 & -4 & -7{,}5 \end{pmatrix}$.

Пример 26. Решить матричное уравнение:

$$X\cdot\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Решение матричного уравнения вида $X\cdot A=B$ ищем в виде:

$$X=B\cdot A^{-1}.$$

Найдем обратную матрицу A^{-1} для матрицы $A=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Вычислим определитель матрицы A:

$$\Delta_A=\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=3\cdot(-4)-2\cdot(-5)-=-2.$$

Найдем алгебраические дополнения.

$A_{11}=-4$; $\qquad A_{12}=-2$;

$$A_{21} = -(-5) = 5\,; \qquad\qquad A_{22} = 3.$$

Составим матрицу из алгебраических дополнений:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Транспонируем матрицу $\widetilde{A}$:

$$\widetilde{A}^T = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда обратная матрица имеет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2{,}5 \\ 1 & -1{,}5 \end{pmatrix}.$$

Тогда неизвестная матрица X будет равна:

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2{,}5 \\ 1 & -1{,}5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 + 5 \cdot 1 & -1 \cdot (-2{,}5) + 5 \cdot (-1{,}5) \\ -2 \cdot 2 + 6 \cdot 1 & -2 \cdot (-2{,}5) + 6 \cdot (-1{,}5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Выполним проверку правильности найденного решения. Для этого вычислим произведение матриц XA:

$$XA = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 + (-5) \cdot 2 & 3 \cdot (-5) + (-5) \cdot (-4) \\ 2 \cdot 3 + (-4) \cdot 2 & 2 \cdot (-5) + (-4) \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 - 10 & -15 + 20 \\ 6 - 8 & -10 + 16 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = B.$$

Все верно. Таким образом, $X = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

(во всех заданиях n – номер вашего варианта)

1 УРОВЕНЬ

Задание 4.1. Определить значения x, при которых существует обратная матрица для матрицы A:

а) $A=\begin{pmatrix} 10-x & 5 \\ n & -3 \end{pmatrix}$; **б)** $A=\begin{pmatrix} 5-x & n \\ -7 & 2x \end{pmatrix}$.

Задание 4.2. Составить обратную матрицу для матрицы $A=\begin{pmatrix} 3n & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$. Проверить, верно ли составлена обратная матрица.

2 УРОВЕНЬ

Задание 4.3. Определить значения x, при которых не существует обратной матрицы для матрицы A:

$$A=\begin{pmatrix} x+3 & n-9 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \\ x & 5 & 10-n \end{pmatrix}.$$

Задание 4.4. Составить обратную матрицу для матрицы $A=\begin{pmatrix} 9-n & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 10-n \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Проверить, верно ли составлена обратная матрица.

Задание 4.5. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 4 & 10-n \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 34-3n & 48-4n \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$;

б) $X \cdot \begin{pmatrix} n-9 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19-n & 7 \\ 47-3n & 15 \end{pmatrix}$.

3 УРОВЕНЬ

Задание 4.6. Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 8-n & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -2 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n-16 & 6n-n^2+28 \\ 6 & -3n-9 \end{pmatrix}.$$

Задание 4.7. Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} -3 & n-10 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -9 & 2n-20 & -1 \\ 6 & 8 & -3 \\ 0 & 14 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задание 4.8. Решить матричное уравнение:

$$X \cdot \begin{pmatrix} n-10 & 3 & -1 \\ 5 & n & -4 \\ -2 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -12 & 0 \\ -15 & -3n & 12 \\ 2n-20 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Индивидуальные домашние задания

Задание 4.9. Построить обратную матрицу A^{-1} для матрицы A и сделать проверку:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & n-11 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задание 4.10. Решить матричное уравнение и выполнить проверку

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ n-10 & -5 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 10 & -n-5 \end{pmatrix}.$$

Задание 4.11. Решить матричное уравнение и выполнить проверку.

$$\begin{pmatrix} n-15 & 2 & -1 \\ -1 & n-14 & 2 \\ 2 & -1 & 13-n \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} n-18 \\ 15-n \\ 16-n \end{pmatrix}.$$

Задание 4.12. Решить матричное уравнение и выполнить проверку.

$$X\cdot\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ n-11 & -3 & 0 \\ 5 & -2 & n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n-11 & -3 & 0 \\ 3n-17 & -11 & 4n+8 \\ 5n-55 & -15 & 0 \end{pmatrix}.$$

Т е м а 5 : ***РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.***

Контрольные вопросы.

1) Что называется системой линейных алгебраических уравнений?

2) Какая система линейных алгебраических уравнений называется совместной? В каком случае система несовместна?

3) Какая система линейных алгебраических уравнений называется определенной? В каком случае система неопределенна?

4) Какая система линейных алгебраических уравнений называется однородной?

5) Какие методы решения систем линейных алгебраических уравнений Вы знаете?

6) В чем состоит метод Крамера решения систем линейных алгебраических уравнений?

7) В каком случае существует единственное решение для системы линейных алгебраических уравнений?

8) В чем состоит матричный метод решения систем линейных алгебраических уравнений?

9) В чем состоит метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений?

10) Какие переменные относят к базисным и свободным переменным?

11) Что называется общим и частным решением системы линейных алгебраических уравнений?

12) Что называется фундаментальной системой решений?

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 27. Решить систему уравнений по формулам Крамера

$$\begin{cases} 2x+3y=-2, \\ 4x-5y=-26. \end{cases}$$

Решение.

Составим и вычислим определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) - 4 \cdot 3 = -22 .$$

Так как $\Delta = -22 \neq 0$, то система имеет единственное решение. Составим и вычислим вспомогательные определители Δ_x и Δ_y системы, заменяя в определителе Δ поочередно первый и второй столбцы столбцом правой части системы:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -26 & -5 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-5) - (-26) \cdot 3 = 88 ,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -26 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-26) - 4 \cdot (-2) = -44 .$$

Вычислим неизвестные x и y системы, применяя формулы Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{88}{-22} = -4 , \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-44}{-22} = 2 .$$

Выполним проверку, подставляя найденное решение $x = -4$ и $y = 2$ в исходную систему:

$$\begin{cases} 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 2 = -2, \\ 4 \cdot (-4) - 5 \cdot 2 = -26, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -8 + 6 = -2, \\ -16 - 10 = -26. \end{cases}$$

Все верно.

Ответ: $x = -4$, $y = 2$.

Пример 28. Решить систему уравнений по формулам Крамера

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6. \end{cases}$$

Решение.

Составим и вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -4 - 2 + 18 + 3 + 3 - 16 = 2.$$

Так как $\Delta = 2 \neq 0$, то система имеет единственное решение. Составим и вычислим вспомогательные определители Δ_1, Δ_2 и Δ_3 системы, заменяя в определителе Δ поочередно первый, второй и третий столбцы столбцом правой части системы:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -20 - 12 + 9 + 18 + 15 - 8 = 2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 5 + 36 - 3 - 40 + 6 = -2,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -6 + 2 + 30 + 5 - 3 - 24 = 4.$$

Вычислим неизвестные x_1, x_2 и x_3 системы, применяя формулы Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2}{2} = -1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{4}{2} = 2$$

Выполним проверку, подставляя найденное решение $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ и $x_3 = 2$ в исходную систему:

$$\begin{cases} 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 = 5, \\ 2 \cdot 1 - (-1) - 2 = 1, \\ 1 + 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 = 6, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 1 - 2 + 6 = 5, \\ 2 + 1 - 2 = 1, \\ 1 - 3 + 8 = 6. \end{cases}$$

Все верно.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$.

Пример 29. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

и решим ее с помощью обратной матрицы.

Решение.

Выпишем матрицы и векторы, которые входят в матричную запись рассматриваемой системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}, для чего вычислим определитель матрицы и ее миноры:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 2 + 2 - 1 - 2 - 6 = -2 \neq 0.$$

Находим алгебраические дополнения для элементов матрицы A:

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1; \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(6 - 2) = -4;$$

$$A_{13} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1; \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(3 - 1) = -2;$$

$$A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 1) = 0;$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(2 - 2) = 0;$$

$$A_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1.$$

В результате получаем матрицу $C = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Транспонируем матрицу C, получаем матрицу $C^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Значит, обратная матрица имеет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot C^T = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому вектор решений можно найти, умножив B слева на A^{-1}:

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ -4 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

и значит, $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{1}{2}$.

Выполним проверку, подставляя найденное решение $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$ и $x_3 = \frac{1}{2}$ в исходную систему:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}=1, \\ 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1+2\cdot\frac{1}{2}=1, \\ -\frac{1}{2}+1+3\cdot\frac{1}{2}=2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}=1, \\ -1+1+1=1, \\ -\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}=2. \end{cases}$$

Все верно.

Ответ: $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=1$, $x_3=\frac{1}{2}$.

Пример 30. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x-4y+3z=1, \\ x-2y+4z=3, \\ 3x-y+5z=2. \end{cases}$$

Решение. Для заданной системы уравнений составляется расширенная матрица и приводится к ступенчатому виду:

$$A\,|\,B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ S_2-S_1\cdot 2 \\ S_3-S_1\cdot 3 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \end{array}\right) S_3 \leftrightarrow S_2 \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right).$$

Применяется теорема Кронекиера-Капелли: $r(A)=r(A\,|\,B)=3=n$, т.е. система имеет единственное решение.

$$\begin{cases} x-2y+4z=3, \\ 5y-7z=-7, \\ -5z=-5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y+4z=3, \\ 5y=-7+7\cdot 1=0, \Rightarrow \\ z=1, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x = 2\cdot 0 - 4\cdot 1 + 3 = -1, \\ y = 0, \\ z = 1, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -1, \\ y = 0, \\ z = 1. \end{cases}$$

Выполним проверку, подставляя найденное решение $x = -1$, $y = 0$ и $z = 1$ в исходную систему:

$$\begin{cases} 2\cdot(-1) - 4\cdot 0 + 3\cdot 1 = 1, \\ -1 - 2\cdot 0 + 4\cdot 1 = 3, \\ 3\cdot(-1) - 0 + 5\cdot 1 = 2, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -2 - 0 + 3 = 1, \\ -1 - 0 + 4 = 3, \\ -3 - 0 + 5 = 2. \end{cases}$$

Все верно.

Ответ: $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$.

Пример 31. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2x + y + z = 2, \\ 3x + 2y + 2z = 3. \end{cases}$$

Решение.

Для заданной системы уравнений составляется расширенная матрица и приводится к ступенчатому виду:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ S_2 - S_1\cdot 2 \\ S_3 - S_1\cdot 3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ S_3 - S_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Применяется теорема Кронекиера-Капелли: $r(A) = r(A|B) = 2 < n$, т.е. система имеет множество решений.

В системе $r = 2$ переменные базисные, и значит, $n - r = 3 - 2 = 1$ свободная. Базисными могут любые переменные, определитель из коэффициентов которых отличен от 0. Проверим это условие для переменных x и y:

$$\begin{array}{cc} x & y \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Значит, переменные x и y можно считать базисными, а z – свободной.

Составим систему уравнений на основе ступенчатой матрицы:

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ \quad y + z = 0, \end{cases}$$

и выразим базисные переменные через свободную переменную z:

$$y = -z,$$

$$x + (-z) + z = 1,$$

$$x = 1.$$

Получим: $\begin{cases} x = 1, \\ y = -z \end{cases}$ – общее решение системы. Придавая свободной переменной z произвольные значения, находим некоторое частное решение. Например, при $z = 2$, получаем частное решение: $\begin{cases} x = 1, \\ y = -2, \\ z = 2. \end{cases}$

Выполним проверку, подставляя найденное общее решение $x = 1$, $y = -z$ в исходную систему:

$$\begin{cases} 1 + (-z) + z = 1, \\ 2 \cdot 1 + (-z) + z = 2, \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-z) + 2z = 3, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 1 - z + z = 1, \\ 2 - z + z = 2, \\ 3 - 2z + 2z = 3. \end{cases}$$

Ответ: общее решение системы $\begin{cases} x = 1, \\ y = -z, \end{cases}$ $z \in R$.

Пример 32. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение.

Для заданной системы уравнений составляется расширенная матрица и приводится к ступенчатому виду:

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ S_2 - S_1 \\ S_3 + S_1 \cdot 2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ S_3 - S_2 \cdot 2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{array}\right).$$

Применяется теорема Кронекиера-Капелли: $r(A) = 2 \neq r(A|B) = 3$, т.е. система не имеет решений.

Ответ: не имеет решений.

Пример 33. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - 14x_2 - x_3 + 4x_4 = 22, \\ 15x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 43, \\ x_1 - x_2 + 13x_3 - 2x_4 = 28, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 - 16x_4 = -18. \end{cases}$$

Решение. Для заданной системы уравнений составляется расширенная матрица и приводится к ступенчатому виду:

$$A|B=\left(\begin{array}{cccc|c}2 & -14 & -1 & 4 & 22\\ 15 & 1 & -2 & 3 & 43\\ 1 & -1 & 13 & -2 & 28\\ 3 & 1 & -5 & -16 & -18\end{array}\right)\begin{array}{l}S_1\leftrightarrow S_3\\ \\ \\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 13 & -2 & 28\\ 15 & 1 & -2 & 3 & 43\\ 2 & -14 & -1 & 4 & 22\\ 3 & 1 & -5 & -16 & -18\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ S_2-S_1\cdot 15\\ S_3-S_1\cdot 2\\ S_4-S_1\cdot 3\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 13 & -2 & 28\\ 0 & 16 & -197 & 33 & -377\\ 0 & -12 & -27 & 8 & -34\\ 0 & 4 & -44 & -10 & -102\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \\ S_4:2\leftrightarrow S_2\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 13 & -2 & 28\\ 0 & 2 & -22 & -5 & -51\\ 0 & -12 & -27 & 8 & -34\\ 0 & 16 & -197 & 33 & -377\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ S_3+S_2\cdot 6\\ S_4+S_2\cdot(-8)\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 13 & -2 & 28\\ 0 & 2 & -22 & -5 & -51\\ 0 & 0 & -159 & -22 & -340\\ 0 & 0 & -21 & 73 & 31\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \\ S_4\cdot 159-S_3\cdot 21\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & 13 & -2 & 28\\ 0 & 2 & -22 & -5 & -51\\ 0 & 0 & -159 & -22 & -340\\ 0 & 0 & 0 & 12069 & 12069\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \\ S_4:12069\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 13 & -2 & 28 \\ 0 & 2 & -22 & -5 & -51 \\ 0 & 0 & -159 & -22 & -340 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Применяется теорема Кронекиера-Капелли: $r(A)=r(A\,|\,B)=4=n$, т.е. система имеет единственное решение.

$$\begin{cases} x_1-x_2+13x_3-2x_4=28, \\ \quad 2x_2-22x_3-5x_4=-51, \\ \quad\quad -159x_3-22x_4=-340, \\ \quad\quad\quad x_4=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1-x_2+13x_3-2x_4=28, \\ \quad 2x_2-22x_3-5x_4=-51, \\ -159x_3=22\cdot 1-340, \\ x_4=1, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1-x_2+13x_3-2x_4=28, \\ \quad 2x_2-22x_3-5x_4=-51, \\ x_3=\dfrac{-318}{-159}=2, \\ x_4=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1-x_2+13x_3-2x_4=28, \\ 2x_2=22\cdot 2+5\cdot 1-51=-2, \\ x_3=2, \\ x_4=1, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1-x_2+13x_3-2x_4=28, \\ x_2=\dfrac{-2}{2}=-1, \\ x_3=2, \\ x_4=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1-13\cdot 2+2\cdot 1+28=3, \\ x_2=-1, \\ x_3=2, \\ x_4=1, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=3, \\ x_2=-1, \\ x_3=2, \\ x_4=1. \end{cases}$$

Выполним проверку, подставляя найденное решение $x_1=3$, $x_2=-1$, $x_3=2$ и $x_4=1$ в исходную систему:

$$\begin{cases} 2\cdot 3-14\cdot(-1)-2+4\cdot 1=22, \\ 15\cdot 3+(-1)-2\cdot 2+3\cdot 1=43, \\ 3-(-1)+13\cdot 2-2\cdot 1=28, \\ 3\cdot 3+(-1)-5\cdot 2-16\cdot 1=-18, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 6+14-2+4=22, \\ 45-1-4+3=43, \\ 3+1+26-2=28, \\ 9-1-10-16=-18. \end{cases}$$

Все верно.

Ответ: $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 1$.

Пример 34. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+3x_4=1, \\ 6x_1-3x_2-3x_3-x_4=-9, \\ -7x_1+x_2+x_3-2x_4=8, \\ -3x_1+9x_2+9x_3+10x_4=12. \end{cases}$$

Решение.

Составляется расширенная матрица системы и приводится к ступенчатому виду:

$$A\,|\,B=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 & -1 & -9 \\ -7 & 1 & 1 & -2 & 8 \\ -3 & 9 & 9 & 10 & 12 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \mathrm{II}-\mathrm{I}\cdot 6 \\ \mathrm{III}+\mathrm{I}\cdot 7 \\ \mathrm{IV}+\mathrm{I}\cdot 3 \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III}+\mathrm{II} \\ \mathrm{IV}+\mathrm{II} \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Применяется теорема Кронекиера-Капелли: $r(A)=r(A\,|\,B)=2<4=n$, т.е. система имеет множество решений.

Определим базисные и свободные переменные. Так как $r=2$, то базисных переменных две, а свободных $n-r=4-2=2$. Проверим x_1 и x_2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -15 \end{vmatrix} = -15 \neq 0.$$

Значит, x_1 и x_2 можно считать базисными переменными, а x_3 и x_4 – свободными.

Выразим базисные переменные через свободные. Составим систему

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+3x_4=1, \\ \quad -15x_2-15x_3-19x_4=-15. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+3x_4=1, \\ -15x_2=15x_3+19x_4-15, \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ из второго уравнения выразим

$$x_2=\frac{15x_3+19x_4-15}{-15}=-x_3-\frac{19}{15}x_4+1$$

$\Rightarrow$ из первого уравнения выражаем

$$x_1=1-2x_2-2x_3-3x_4=1-2\cdot\left(-x_3-\frac{19}{15}x_4+1\right)-2x_3-3x_4=$$

$$=1+2x_3+\frac{38}{15}x_4-2-2x_3-3x_4=-1-\frac{7}{15}x_4.$$

Таким образом, общее решение системы

$$\begin{cases} x_1=-1-\dfrac{7}{15}x_4, \\ x_2=1-x_3-\dfrac{19}{15}x_4, \end{cases} \qquad x_3, x_4 \in R.$$

От общего решения можно перейти к частному решению, выбирая произвольные значения x_3 и x_4. Пусть $x_3 = 1$, $x_4 = 15$, тогда x_1 = – 1 – 7 = – 8, x_2 = 1 – 1 – 19 = – 19, x_3 = 1, x_4 = 15.

Ответ: общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 = -1 - \dfrac{7}{15} x_4, \\ x_2 = 1 - x_3 - \dfrac{19}{15} x_4, \end{cases} \qquad x_3, x_4 \in R.$$

частное решение x_1 = – 8, x_2 = – 19, x_3 = 1, x_4 = 15.

Пример 35. Найти общее решение системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Выпишем матрицу A системы и с помощью элементарных преобразований приведем к равносильной системе ступенчатого вида

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} S_2 - S_1 \cdot 2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} S_2 \cdot (-1) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда имеем $r(A) = 2$. Выберем в качестве базисного минора минор

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) = 1 \neq 0,$$

соответствующий третьему и четвертому столбцу матрицы A. Следовательно, x_3 и x_4 – это будут главные переменные, а x_1 и

x_2 – свободные переменные. Полагая $x_1 = C_1$, $x_2 = C_2$, где $C_1, C_2 \in R$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_3 - x_4 = -x_1 - x_2 \\ x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_4 = -C_1 - C_2, \\ x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = C_1, \\ x_2 = C_2, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = C_1 + C_2. \end{cases}$$

Таким образом, общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = C_1, \\ x_2 = C_2, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = C_1 + C_2, \end{cases} \quad \text{где } C_1, C_2 \in R.$$

Выполним проверку:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 2 \cdot 0 - (C_1 + C_2) = 0, \\ 2C_1 + 2C_2 + 3 \cdot 0 - 2 \cdot (C_1 + C_2) = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - C_1 - C_2 = 0, \\ 2C_1 + 2C_2 - 2C_1 - 2C_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Все верно.

<u>**Ответ:**</u> $\begin{cases} x_1 = C_1, \\ x_2 = C_2, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = C_1 + C_2, \end{cases}$ где $C_1, C_2 \in R$.

Пример 36. Исследовать совместность системы и найти ее общее решение

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 16, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9. \end{cases}$$

Решение.

Приведем к ступенчатому виду расширенную матрицу системы:

$$A \mid B = \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 3 & 2 & 3 & 16 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} S_1 \leftrightarrow S_3 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 9 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 3 & 16 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ S_2 - S_1 \cdot 2 \sim \\ S_3 - S_1 \cdot 3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -11 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ S_3 - S_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ S_2 \cdot (-1) \sim \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Так как $r(A) = r(A|B) = 2 < 4 = n$, то система совместна и неопределенна (т.е. имеет бесконечно много решений).

Количество главных переменных равно $r(A) = 2$, количество свободных переменных равно $n - r(A) = 4 - 2 = 2$. В качестве главных переменных выберем x_1, x_3, а в качестве свободных – x_2, x_4. Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9, \\ x_3 = 11. \end{cases}$$

Теперь выразим главные переменные

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}\cdot(9 - x_2 - x_3 - x_4), \\ x_3 = 11. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}\cdot(9 - 11 - x_2 - x_4), \\ x_3 = 11. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 - \dfrac{x_2}{2} - \dfrac{x_4}{2}, \\ x_3 = 11. \end{cases}$$

Обозначим свободные переменные $x_2 = t_1$, $x_4 = t_2$, $t_1, t_2 \in R$. Тогда общее решение системы имеет вид:

$$\left(-1 - \frac{t_1}{2} - \frac{t_2}{2};\, t_1;\, 11;\, t_2\right),\ t_1, t_2 \in R.$$

Пусть $t_1 = 0$, $t_2 = -2$ (выберем произвольно). Тогда получим частное решение системы:

$$(0; 0; 11; -2).$$

Сделаем проверку частного решения, подставив его в исходную систему уравнений:

$$\begin{cases} 6\cdot 0 + 3\cdot 0 + 2\cdot 11 + 3\cdot(-2) = 16, \\ 4\cdot 0 + 2\cdot 0 + 11 + 2\cdot(-2) = 7, \\ 2\cdot 0 + 0 + 11 - 2 = 9. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 22 - 6 = 16, \\ 11 - 4 = 7, \\ 11 - 2 = 9. \end{cases}$$

Все верно.

<u>Ответ:</u> общее решение системы $\left(-1 - \dfrac{t_1}{2} - \dfrac{t_2}{2};\, t_1;\, 11;\, t_2\right)$, $t_1, t_2 \in R$, частное решение системы $(0; 0; 11; -2)$.

<u>Пример 37.</u> Решить однородную систему уравнений. Указать общее решение и фундаментальную систему решений.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0; \\ -2x_1 + x_3 + 4x_4 = 0; \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0; \\ 5x_1 - x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Приведем матрицу коэффициентов системы к ступенчатому виду:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 5 & -3 & -2\\ -2 & 0 & 1 & 4\\ 1 & -3 & 5 & 2\\ 5 & -1 & 6 & -2\end{pmatrix}\begin{matrix}S_3-S_1\\ S_2+S_1\cdot 2\\ S_3-S_1\\ S_4-S_1\cdot 5\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 5 & -3 & -2\\ 0 & 10 & -5 & 0\\ 0 & -8 & 8 & 4\\ 0 & -26 & 21 & 8\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ S_2:5\\ S_3:4\\ S_4-S_2\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 5 & -3 & -2\\ 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -2 & 2 & 1\\ 0 & -26 & 21 & 8\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ S_3+S_2\\ S_4+S_2\cdot 13\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 5 & -3 & -2\\ 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 8 & 8\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ S_4-S_3\cdot 8\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 5 & -3 & -2\\ 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Так как $r(A)=3<4=n$, то система неопределенна. В качестве главных переменных можно выбрать x_1, x_2, x_3, соответствующие столбцам ненулевого минора третьего порядка: $\begin{vmatrix}1 & 5 & -3\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$; в качестве свободной переменной – x_4.

Запишем систему, соответствующую полученной матрице:

$$\begin{cases}x_1+5x_2-3x_3-2x_4=0,\\ 2x_2-x_3=0,\\ x_3+x_4=0,\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=-5x_2+3x_3+2x_4,\\ x_2=\dfrac{1}{2}x_3,\\ x_3=-x_4,\end{cases}\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 5 \cdot \dfrac{1}{2} x_4 - 3x_4 + 2x_4, \\ x_2 = -\dfrac{1}{2} x_4, \\ x_3 = -x_4, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{2} x_4, \\ x_2 = -\dfrac{1}{2} x_4, \\ x_3 = -x_4. \end{cases}$$

Обозначим свободную переменную x_4 через t, запишем общее решение системы: $(1{,}5t; -0{,}5t; -t; t) = t(1{,}5; -0{,}5; -1; 1)$, $t \in R$.

Из общего решения $X(t) = \begin{pmatrix} 1{,}5t \\ -0{,}5t \\ -t \\ t \end{pmatrix}$ находим фундаментальное решение: $E = X(1) = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -0{,}5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Общее решение данной системы через фундаментальную систему записывается в виде: $X(t) = t \cdot E = t \cdot \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -0{,}5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: общее решение системы $X(t) = \begin{pmatrix} 1{,}5t \\ -0{,}5t \\ -t \\ t \end{pmatrix}$, $t \in R$;

фундаментальное решение $E = X(1) = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -0{,}5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Пример 38. Найти общее и фундаментальное решение однородной системы уравнений.

$$\begin{cases} -x - 2y - 7z - u = 0, \\ 3x - y + 4z + 2u = 0, \\ 5x - 4y + z + 3u = 0. \end{cases}$$

Решение.

Приведем к ступенчатому виду матрицу коэффициентов системы:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -7 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & 2 \\ 5 & -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ S_2 + 3 \cdot S_1 \\ S_3 + 5 \cdot S_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & -7 & -1 \\ 0 & -7 & -17 & -1 \\ 0 & -14 & -34 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} S_1 : (-1) \\ \\ S_2 - 2 \cdot S_2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & -7 & -17 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} S_2 : (-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 7 & 17 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $r(A) = 2 < 3 = n$, то система неопределенна. В качестве главных переменных можно выбрать x, y, соответствующие столбцам ненулевого минора второго порядка: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix}$; в качестве свободных переменных – z, u.

Запишем систему, соответствующую полученной матрице:

$$\begin{cases} x+2y+7z+u=0, \\ 7y+17z+u=0, \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x=-2y-7z-u, \\ 7y=-17z-u, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x=-2\cdot\left(-\dfrac{17}{7}z-\dfrac{1}{7}u\right)-7z-u, \\ y=-\dfrac{17}{7}z-\dfrac{1}{7}u, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x=-\dfrac{15}{7}z-\dfrac{5}{7}u, \\ y=-\dfrac{17}{7}z-\dfrac{1}{7}u. \end{cases}$$

Запишем общее решение системы:

$$X(z,u)=\begin{pmatrix} -\dfrac{15}{7}z-\dfrac{5}{7}u \\ -\dfrac{17}{7}z-\dfrac{1}{7}u \\ z \\ u \end{pmatrix}, \text{ где } z,u\in R.$$

Из общего решения находим фундаментальную систему решений:

$$E_1=X(1,0)=\begin{pmatrix} -\dfrac{15}{7} \\ -\dfrac{17}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2=X(0,1)=\begin{pmatrix} -\dfrac{5}{7} \\ -\dfrac{1}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение данной системы через фундаментальную систему записывается в виде:

$$X(z,u)=z\cdot E_1+u\cdot E_2=z\cdot\begin{pmatrix}-\frac{15}{7}\\-\frac{17}{7}\\1\\0\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}-\frac{5}{7}\\-\frac{1}{7}\\0\\1\end{pmatrix},\text{ где } z,u\in R.$$

Пример 39. Дана система уравнений.

А) Найти её общее решение метом Гаусса.

Б) Для соответствующей ей однородной системы найти фундаментальную систему решений с помощью нахождения базисного минора.

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+3x_4+7x_5=30\\x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7\\5x_1+3x_2+x_3+x_4-7x_5=-11\\-3x_1+3x_3+3x_4+15x_5=48\end{cases}$$

Решение.

А) Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$A|B=\left(\begin{array}{ccccc|c}1&2&3&3&7&30\\1&1&1&1&1&7\\5&3&1&1&-7&-11\\-3&0&3&3&15&48\end{array}\right)\begin{array}{l}\\S_2\leftrightarrow S_1\\\\\\\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&7\\1&2&3&3&7&30\\5&3&1&1&-7&-11\\-3&0&3&3&15&48\end{array}\right)\begin{array}{l}\\S_2-S_1\\S_3-S_1\cdot 5\\S_4+S_1\cdot 3\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&7\\0&1&2&2&6&23\\0&-2&-4&-4&-12&-46\\0&3&6&6&18&69\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ S_3+S_2\cdot 2\\ S_4-S_2\cdot 3\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&7\\0&1&2&2&6&23\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

Так как $r(A)=r(A\,|\,B)=2<5$, то система совместна и неопределенна. Количество главных переменных равно $r(A)=2$, количество свободных переменных равно $n-r(A)=5-2=3$. Выберем какой-нибудь не равный нулю минор 2-го порядка полученной матрицы A, например, минор $\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=1$. Его столбцы (1-й и 2-й столбцы матрицы A) соответствуют переменным x_1 и x_2 – это будут базисные переменные, а x_3, x_4 и x_5 – свободные переменные. Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице:

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=7,\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=23,\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1+x_2=7-x_3-x_4-x_5,\\x_2=23-2x_3-2x_4-6x_5,\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=-(23-2x_3-2x_4-6x_5)+7-x_3-x_4-x_5,\\x_2=23-2x_3-2x_4-6x_5,\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1=-16+x_3+x_4+5x_5,\\x_2=23-2x_3-2x_4-6x_5.\end{cases}$$

Обозначим свободные переменные $x_3=t_1$, $x_4=t_2$, $x_5=t_3$, $t_1,t_2,t_3\in R$. Запишем общее решение системы $\left(-16+t_1+t_2+5t_3;\ 23-2t_1-2t_2-6t_3;\ t_1;\ t_2;t_3\right)$, где $t_1,t_2,t_3\in R$.

О т в е т А): система совместна и неопределенна; общее решение $\left(-16+t_1+t_2+5x_5;\, 23-2t_1-2t_2-6t_3;\, t_1;\, t_2;\, t_3\right)$, где $t_1, t_2, t_3 \in R$.

Б) Запишем однородную систему, соответствующую заданной системе:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+3x_4+7x_5=0 \\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ 5x_1+3x_2+x_3+x_4-7x_5=0 \\ -3x_1+3x_3+3x_4+15x_5=0 \end{cases}$$

Запишем матрицу системы в ступенчатом виде:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 1 & -7 \\ -3 & 0 & 3 & 3 & 15 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ S_2 \leftrightarrow S_1 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 7 \\ 5 & 3 & 1 & 1 & -7 \\ -3 & 0 & 3 & 3 & 15 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ S_2-S_1 \\ S_3-S_1\cdot 5 \\ S_4+S_1\cdot 3 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -2 & -4 & -4 & -12 \\ 0 & 3 & 6 & 6 & 18 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ S_3+S_2\cdot 2 \\ S_4-S_2\cdot 3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $r(A)=2<5=n$, то система неопределенна. В качестве главных переменных можно выбрать x_1, x_2, соответствующие столбцам ненулевого минора второго порядка: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1$; в качестве свободных переменных – x_3, x_4 и x_5.

Запишем систему, соответствующую полученной матрице:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 - x_4 - x_5, \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 - 6x_5, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -(-2x_3 - 2x_4 - 6x_5) - x_3 - x_4 - x_5, \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 - 6x_5, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 + 5x_5, \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 - 6x_5. \end{cases}$$

Обозначим свободные переменные $x_3 = k_1$, $x_4 = k_2$, $x_5 = k_3$, где $k_1, k_2, k_3 \in R$. Запишем общее решение системы: $(k_1 + k_2 + 5k_3; -2k_1 - 2k_2 - 6k_3; k_1; k_2; k_3)$, где $k_1, k_2, k_3 \in R$.

Запишем общее решение системы в виде:

$$\begin{cases} x_1 = k_1 + k_2 + 5k_3, \\ x_2 = -2k_1 - 2k_2 - 6k_3, \\ x_3 = k_1, \\ x_4 = k_2, \\ x_5 = k_3, \end{cases} \qquad \text{где } k_1,\ k_2,\ k_3 \in R,$$

или

$$X(k_1, k_2, k_3) = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 + 5k_3 \\ -2k_1 - 2k_2 - 6k_3 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}.$$

Из общего решения запишем фундаментальную систему решений:

$$E_1 = X(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ E_2 = X(0,1,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ E_3 = X(0,0,1) = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение данной системы уравнений через фундаментальную систему записывается в виде:

$$X(k_1, k_2, k_3) = k_1E_1 + k_2E_2 + k_3E_3 =$$

$$= k_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ k_1,\ k_2,\ k_3\ \in R.$$

<u>**Ответ Б):**</u> общее решение системы

$$X(k_1, k_2, k_3) = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 + 5k_3 \\ -2k_1 - 2k_2 - 6k_3 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}, \text{ где } k_1, k_2, k_3 \in R;$$

фундаментальная система решений $E_1 = X(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$$E_2 = X(0,1,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad E_3 = X(0,0,1) = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

(во всех заданиях n – номер вашего варианта)

1 УРОВЕНЬ

Задание 5.1. Решить системы уравнений: **а)** методом Крамера; **б)** методом обратной матрицы. Выполнить проверку.

а) $\begin{cases} 3x + (n-10)y = n - 22, \\ (n-12)x + 4y = 52 - 4n. \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} 2x + (10-n)y = 3n - 20, \\ (n-11)x - 3y = 5n - 46. \end{cases}$

Задание 5.2. Решить систему уравнений: **а)** методом Крамера; **б)** методом обратной матрицы; **в)** методом Гаусса. Выполнить проверку.

$$\begin{cases} 2x + (10-n)y - 3z = 8 - n, \\ -x + 6y + (n-10)z = 7, \\ (n-11)x - y + 4z = 10 - n. \end{cases}$$

2 УРОВЕНЬ

Задание 5.3. Решить систему уравнений методом Гаусса. Выполнить проверку.

$$\begin{cases} -x_1+(n-11)x_2+3x_3-x_4=8-n, \\ 2x_1+3x_2+(n-10)x_3+4x_4=7, \\ (n-11)x_1+x_2-x_3+x_4=n-10, \\ -3x_1-2x_2+x_3+(n-10)x_4=2n-21. \end{cases}$$

Задание 5.4. Найти общее решение однородной системы уравнений. Записать одно частное решение и выполнить проверку.

$$\begin{cases} -x+(10-n)y-3z=0, \\ 2x-6y+(n-10)z=0, \\ (n-11)x+y-2z=0. \end{cases}$$

3 УРОВЕНЬ

Задание 5.5. Решить систему уравнений: **а)** методом Крамера; **б)** методом обратной матрицы. Выполнить проверку.

$$\begin{cases} -x_1+(n-11)x_2+3x_3-x_4=8-n, \\ 2x_1+3x_2+(n-10)x_3+4x_4=7, \\ (n-11)x_1+x_2-x_3+x_4=n-10, \\ -3x_1-2x_2+x_3+(n-10)x_4=2n-21. \end{cases}$$

Задание 5.6. Решить систему уравнений методом Гаусса. Записать одно частное решение и выполнить проверку.

$$\begin{cases} -x_1+(n-11)x_2+3x_3-x_4+x_5=8-n, \\ 2x_1+3x_2+(n-10)x_3+4x_4-3x_5=7, \\ 3x_1+x_2-x_3+(n-11)x_4-2x_5=n-10. \end{cases}$$

Задание 5.7. Найти общее решение однородной системы уравнений. Записать фундаментальное решение. Найти одно частное решение и сделать проверку.

$$\begin{cases} -x_1+(n-11)x_2+3x_3-x_4+x_5=0, \\ 2x_1+3x_2+(n-10)x_3+4x_4-3x_5=0, \\ 3x_1+x_2-x_3+(n-11)x_4-2x_5=0. \end{cases}$$

Индивидуальные домашние задания

Задание 5.8. Решить систему уравнений: **а)** методом Крамера; **б)** методом обратной матрицы; **в)** методом Гаусса. Выполнить проверку.

$$\begin{cases} (2n-15)x+7y-2z=31; \\ -2x+(15-n)y+5z=20-3n; \\ 3x-y+(n-4)z=17-5n. \end{cases}$$

Задание 5.9. Решить систему уравнений методом Гаусса. Выполнить проверку.

$$\begin{cases} 2x_1+(n-11)x_2+3x_3=2n-19; \\ x_1+2x_2+(n-15)x_3+4x_4=26-n; \\ (13-n)x_1-x_2+3x_3=34-3n; \\ 4x_1-2x_2+x_3+(3-2n)x_4=10-2n. \end{cases}$$

Задание 5.10. Решить систему уравнений методом Гаусса. Записать одно частное решение и выполнить проверку.

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + (n-10)x_3 + x_4 - x_5 = 7, \\ -x_1 + (n-10)x_2 + 3x_3 - 4x_4 + x_5 = n-12, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + (n-11)x_4 + 2x_5 = 4. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + (n-10)x_3 + x_4 = 0, \\ -2x_1 + (n-10)x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + (n-11)x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 0, \\ -x_1 + 5x_2 - 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

Контрольная работа по теме «Линейная алгебра»

<u>Задание 1.</u> Решить уравнение, подставив вместо n номер своего варианта:

$$\begin{vmatrix} 3x-2 & 5 \\ x & -1 \end{vmatrix} = 2-8n\,.$$

<u>Задание 2.</u> Вычислить определитель, подставив вместо x значение, полученное в ***задании 1***:

$$D = \begin{vmatrix} 10-x & 1 & 0 \\ 220-21x & -2 & 4 \\ x-10 & 5 & -1 \end{vmatrix}.$$

<u>Задание 3.</u> Найти матрицу $M = 3AB + 2C$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ D-10 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 10-D & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & D-10 \\ 0 & 1 & 39-4D \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, подставив вместо D значение определителя, вычисленное в ***задании 2***.

<u>Задание 4.</u> Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 4 & m_{23}-9 \\ -2 & 10-m_{23} \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4m_{23} & m_{23}-9 \\ -2m_{23} & 10-m_{23} \end{pmatrix}$, подставив вместо m_{23} элемент с номером (2,3) матрицы M, вычисленной в ***задании 3***. Вычислить определитель d полученной матрицы X.

<u>Задание 5.</u> Решить систему уравнений матричным методом и методом Крамера

$$\begin{cases} -3x + (d-11)y + z = 3d - 36; \\ 2x - y + (12-d)z = 17d - d^2 + 54; \\ (8-d)x + y - 3z = 41 - 6d, \end{cases}$$

подставив вместо d значение определителя, вычисленное ***задании 4***. Вычислить сумму S корней системы уравнений.

<u>Задание 6.</u> Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + (S-10)x_3 + x_4 - x_5 = 7, \\ -x_1 + (S-10)x_2 + 3x_3 - 4x_4 + x_5 = S - 12, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + (S-11)x_4 + 2x_5 = 4, \end{cases}$$

подставив вместо S сумму корней системы уравнений, полученную в ***задании 5***. Записать одно частное решение и выполнить проверку.

Контрольная работа по теме «Линейная алгебра»

Вариант 1

1. Решить уравнение $\begin{vmatrix} x+2 & 1 \\ 2-5x & -x \end{vmatrix} = 0$.

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$.

3. Найти $2AB+3C$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Решить систему матричным методом и методом Крамера

$$\begin{cases} x+y-z=1, \\ 2x-y+z=5, \\ x \quad +3z=8. \end{cases}$$

6. Решить систему методом Гаусса $\begin{cases} x+2y+3z=4, \\ 2x+y-z=3, \\ 3x+3y+2z=7. \end{cases}$

Вариант 2

1. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 0 & x-3 \\ x & 1 \end{vmatrix} = 0$.

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 4 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Найти $2E + AB$, если E – единичная матрица, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

5. Решить систему матричным методом и методом Крамера

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0, \\ x + y + z = 6, \\ x - 2y + 3z = -1. \end{cases}$$

6. Решить систему методом Гаусса $\begin{cases} x + 3y - 4z = 3, \\ 7y - 7z = 1, \\ 2x - y - z = 5. \end{cases}$

Вариант 3

1. Решить уравнение $\begin{vmatrix} x & 4 \\ 1 & x-3 \end{vmatrix} = 0$.

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Найти $AB+4E$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, E – единичная матрица.

4. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

5. Решить систему матричным методом и методом Крамера

$$\begin{cases} x+y+z = 5, \\ 2x-y-z=-2, \\ x+y = 4. \end{cases}$$

6. Решить систему методом Гаусса $\begin{cases} x-4y+3z=5, \\ 2x-8y+6z=10, \\ 3x-12y+9z=15. \end{cases}$

Вариант 4

1. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 2x-3 & 5 \\ x & -2 \end{vmatrix} = 0$;

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Найти $A-2BC$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Решить матричное уравнение $X \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Решить систему матричным методом и методом Крамера

$$\begin{cases} x+y+z=5, \\ 2x-y+z=6, \\ x+4z=7. \end{cases}$$

6. Решить систему методом Гаусса $\begin{cases} x+2y-4z=1, \\ 2x+y-5z=-1, \\ x-y-z=-2. \end{cases}$

Вариант 5

1. Решить уравнение $\begin{vmatrix} x+1 & x+1 \\ -4 & x \end{vmatrix} = 0$.

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 5 \\ -4 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$;

3. Найти $AB+4C$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Решить матричное уравнение $X \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Решить систему матричным методом и методом Крамера

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4, \\ x - y - 3z = -1, \\ x + 4z = 2. \end{cases}$$

6. Решить систему методом Гаусса $\begin{cases} 3x + 2y - z = 3, \\ x - y + z = 1, \\ 13x + 2y + z = 13. \end{cases}$

Вариант 6

1. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 2x-1 & 2x-1 \\ -4 & x-3 \end{vmatrix} = 0$.

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$.

3. Найти $AB+2C$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Решить матричное уравнение $X \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Решить систему матричным методом и методом Крамера

$$\begin{cases} -6x+2y+z=4, \\ 3x-y+z=-2, \\ x+y-4z=-2. \end{cases}$$

6. Решить систему методом Гаусса $\begin{cases} 2x+y-z=11, \\ 3x+2y-4z=15, \\ 4x+3y-7z=19. \end{cases}$

Вариант 7

1. Решить уравнение $\begin{vmatrix} x & 7+6x \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0$.

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 0 \\ 3 & -7 & 2 & 6 \end{vmatrix}$.

3. Найти $3A-4BC$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

5. Решить систему матричным методом и методом Крамера

$$\begin{cases} x - y + z = 1, \\ 2x + 3y - z = 4, \\ 2x + y - 2z = 3. \end{cases}$$

6. Решить систему методом Гаусса $\begin{cases} x + 3y - z = 0, \\ 2x - y + 3z = 1, \\ 7x + 7y + 3z = 2. \end{cases}$

Вариант 8

1. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 2x & x-5 \\ 1 & x-5 \end{vmatrix} = 0$.

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 & 3 \\ 8 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$.

3. Найти $3AB + 4E$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

E – единичная матрица.

4. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \times X = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$.

5. Решить систему матричным методом и методом Крамера

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0, \\ 4x + y + 5z = -5, \\ x - 3y + z = -8. \end{cases}$$

6. Решить систему методом Гаусса $\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 4, \\ 4x + 6y - 10z = 8, \\ 8x + 12y - 20z = 16. \end{cases}$

Вариант 9

1. Решить уравнение $\begin{vmatrix} x+4 & x^2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -7 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$.

3. Найти $-AB+3C$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Решить матричное уравнение $X \times \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

5. Решить систему матричным методом и методом Крамера

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 2x - y - 3z = 3, \\ x + 2y + z = -1. \end{cases}$$

6. Решить систему методом Гаусса $\begin{cases} 3x + 2y - z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0, \\ x + 3y - 4z = 0. \end{cases}$

Вариант 10

1. Решить уравнение $\begin{vmatrix} x-3 & x^2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

3. Найти $AB + C^T$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$.

5. Решить систему матричным методом и методом Крамера

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2, \\ x - 3y + 5z = 2, \\ 3x - 4y - 6z = -10. \end{cases}$$

6. Решить систему методом Гаусса $\begin{cases} x - 2y + z = 4, \\ 2x + 3y - z = 3, \\ 4x - y + z = 11. \end{cases}$

Вариант 11

1. Решить уравнение $\begin{vmatrix} x^2 & x+4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & -4 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

3. Найти $2A - BC$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Решить матричное уравнение $X \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$.

5. Решить систему матричным методом и методом Крамера

$$\begin{cases} x - y + z = 2, \\ 2x + y + 2z = 1, \\ 3x - y + z = 0. \end{cases}$$

6. Решить систему методом Гаусса $\begin{cases} 2x - y + 3z = 0, \\ x + 2y - 5z = 0, \\ 3x + y - 2z = 0. \end{cases}$

Вариант 12

1. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 3-x & 2 \\ x-3 & -x \end{vmatrix} = 0$.

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 \\ -1 & 5 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$.

3. Найти $2AB+3C$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Решить систему матричным методом и методом Крамера

$$\begin{cases} x+y+2z=-4, \\ 2x+y+z=3, \\ x+3y+3z=-1. \end{cases}$$

6. Решить систему методом Гаусса $\begin{cases} 3x+2y+z=4, \\ -x+y+2z=3, \\ 2x+3y+3z=7. \end{cases}$

Вариант 13

1. Решить уравнение $\begin{vmatrix} -2 & x+3 \\ x & 5 \end{vmatrix} = 0$.

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 5 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Найти $2E + AB$, если E – единичная матрица, $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

4. Решить матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 5 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$.

5. Решить систему матричным методом и методом Крамера

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2, \\ 4x + 2y + 5z = 7, \\ 7x + 5y + 3z = 8. \end{cases}$$

6. Решить систему методом Гаусса $\begin{cases} 3x + y - 4z = 3, \\ 7x - 7z = 1, \\ -x + 2y - z = 5. \end{cases}$

Вариант 14

1. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 2x & 8 \\ 1 & x+3 \end{vmatrix} = 0$.

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 4 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \end{vmatrix}$.

3. Найти $AB + 4E$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, E – единичная матрица.

4. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Решить систему матричным методом и методом Крамера

$$\begin{cases} x + y + 3z = 7, \\ 2x + 3y + z = 10, \\ x + 4y - z = 6. \end{cases}$$

6. Решить систему методом Гаусса $\begin{cases} x + 3y - 4z = 5, \\ 2x + 6y - 8z = 10, \\ 3x + 9y - 12z = 15. \end{cases}$

Вариант 15

1. Решить уравнение $\begin{vmatrix} x-3 & -7 \\ x & 2 \end{vmatrix} = 0$;

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -4 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 6 \end{vmatrix}$.

3. Найти $A-2BC$, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$.

4. Решить матричное уравнение $X \times \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

5. Решить систему матричным методом и методом Крамера

$$\begin{cases} x+2y+z=1, \\ x+3y-4z=-16, \\ 2x+y+3z=11. \end{cases}$$

6. Решить систему методом Гаусса $\begin{cases} x+y-4z=2, \\ 2x-y-5z=1, \\ x-2y-z=-1. \end{cases}$

Вариант 16

1. Решить уравнение $\begin{vmatrix} x-3 & x-3 \\ -6 & x-4 \end{vmatrix} = 0$.

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 2 & 7 \\ -1 & 2 & 0 & 5 \\ -4 & 0 & 3 & 6 \end{vmatrix}$;

3. Найти $AB+4C$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Решить матричное уравнение $X \times \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Решить систему матричным методом и методом Крамера

$$\begin{cases} x+y+z=12, \\ 2x+y-z=5, \\ x-2y-3z=-20. \end{cases}$$

6. Решить систему методом Гаусса $\begin{cases} -x+2y+3z=3, \\ x-y+z=1, \\ x+2y+13z=13. \end{cases}$

Вариант 17

1. Решить уравнение $\begin{vmatrix} x-1 & 4 \\ x-1 & x+3 \end{vmatrix} = 0$.

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -6 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 4 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$.

3. Найти $AB+2C$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 5 \\ -6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Решить матричное уравнение $X \times \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Решить систему матричным методом и методом Крамера

$$\begin{cases} 2x+2y+z=6, \\ 3x-y+z=4, \\ x+3y+4z=12. \end{cases}$$

6. Решить систему методом Гаусса $\begin{cases} 2x-y+z=11, \\ 3x-4y+2z=15, \\ 4x-7y+3z=19. \end{cases}$

Вариант 18

1. Решить уравнение $\begin{vmatrix} -x & 8-x \\ -3 & x \end{vmatrix} = 0$.

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & -9 \\ 3 & -7 & 2 & 6 \end{vmatrix}$.

3. Найти $3A-4BC$, если $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times X = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}$.

5. Решить систему матричным методом и методом Крамера

$$\begin{cases} 5x+y-z=0, \\ x+2y-5z=-3, \\ x-2y+4z=2. \end{cases}$$

6. Решить систему методом Гаусса $\begin{cases} x-z=3, \\ 2x+y+3z=-1, \\ 7x+2y+3z=7. \end{cases}$

Вариант 19

1. Решить уравнение $\begin{vmatrix} 2x & x+3 \\ -7 & x+3 \end{vmatrix} = 0$.

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -4 & 2 & 2 & 3 \\ 8 & 0 & -6 & 1 \\ 3 & -8 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$.

3. Найти $3AB+4E$, если $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

E – единичная матрица.

4. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \times X = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$.

5. Решить систему матричным методом и методом Крамера

$$\begin{cases} x-2y-3z=-2, \\ x-2y+5z=6, \\ 2x-y-z=4. \end{cases}$$

6. Решить систему методом Гаусса $\begin{cases} 3x+2y-5z=4, \\ 6x+4y-10z=8, \\ 12x+8y-20z=16. \end{cases}$

ВАРИАНТ 20

1. Решить уравнение $\begin{vmatrix} x+5 & x^2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$.

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -7 & 5 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{vmatrix}$.

3. Найти $-AB+3C$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 1 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Решить матричное уравнение $X \times \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

5. Решить систему матричным методом и методом Крамера

$$\begin{cases} 2x+2y-z=-2, \\ 3x+6y+z=-10, \\ x+y-4z=-8. \end{cases}$$

6. Решить систему методом Гаусса $\begin{cases} 3x+2y-z=0, \\ 2x-y+3z=0, \\ x+3y-4z=0. \end{cases}$

Список литературы

1. Ермилова Н.А., Павельчук А.В., Матрицы, определители, системы линейных уравнений: Учебно-методическое пособие / Н.А. Ермилова, А.В. Павельчук. – Благовещенск: Амурский гос.ун-т, 2013. – 68 с.

2. Ильин В.А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Учебник / В.А. Ильин, Г.Д. Ким. – М.: Проспект, 2012. – 400 с.

3. Лунгу К.Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс: С контрольными работами: линейная алгебра; аналитическая геометрия; основы математического анализа; комплексные числа / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. – М.: Айрис-пресс, 2011. – 576 с.

4. Матрицы, определители и системы линейных уравнений: Методические указания к решению задач / Сост.: Е.А. Толкачева, М.Н. Абрамова, А.И. Куприянов. Спб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2006. – 32 с.

5. Просветов Г.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Задачи и решения: Учебно-практическое пособие / Г.И. Просветов. – М.: Альфа-Пресс, 2009. – 208 с.

Учебное издание

Шемелова Ольга Васильевна
кандидат физико-математических наук
Макусева Татьяна Гавриловна
кандидат педагогических наук

ПРАКТИКУМ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Корректор Белова И.М.
Худ. редактор Федорова Л.Г.

Сдано в набор
Подписано в печать
Бумага писчая. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. Тираж 100.
Заказ №

НХТИ (филиал) ФГБОУ ВПО «КНИТУ»,
г. Нижнекамск, 423570, ул. 30 лет Победы, д. 5а