Министерство образования и науки Российской Федерации
Нижнекамский химико-технологический институт (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
«Казанский национальный исследовательский технологический
университет»

А.В. Садыков

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

2018

УДК 510.6
С 14

Печатается по решению редакционно-издательского совета Нижнекамского химико-технологического института (филиала) ФГБОУ ВО «КНИТУ».

Рецензенты:

Шакиров И.А., кандидат физ.-мат. наук, доцент, проректор по науке Набережночелнинского государственного педагогического университета;

Гайфутдинов А.Н., кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры МАХП НХТИ (филиал) ФГБОУ ВО «КНИТУ».

ISBN 978-5-4386-1540-8

Садыков А.В.
Основы математической логики: учебное пособие. – Санкт-Петербург: «Свое издательство», 2018. – 94 с.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров «Информатика и вычислительная техника», «Управление в технических системах», «Автоматизация технологических процессов и производств». Излагаемый материал сопровождается примерами и дополняется упражнениями. Приведены задачи для самостоятельного решения.

УДК 510.6

ISBN 978-5-4386-1540-8

СОДЕРЖАНИЕ

1. ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

1.1. Высказывания и операции над ними

Определение 1. ***Высказывание*** – связное повествовательное предложение, о котором можно сказать истинно оно или ложно.

Примеры.

A_1 – " $8 < 5$ "

A_2 – " Город Саратов находится на берегу Волги "

A_3 – " Слава российским космонавтам! "

В приведенных примерах высказываниями являются A_1, A_2, причем A_1 – ложное высказывание, A_2 – истинное высказывание. A_3 не является высказыванием, так как не является повествовательным предложением.

Высказывание можно рассматривать как величину, принимающую два значения: "*истина*" и "*ложь*". Высказывания будем обозначать латинскими буквами, а их значения, то есть "*истину*" и "*ложь*", соответственно 1 и 0. Введем функцию λ, заданную на совокупности всех высказываний и принимающую значения в множестве $\{0, 1\}$, по следующему правилу:

$$\lambda(P) = \begin{cases} 0, & \textit{если высказывание } P \textit{ ложно;} \\ 1, & \textit{если высказывание } P \textit{ истинно.} \end{cases}$$

Функцию λ называют ***функцией истинности***, а значение $\lambda(P)$ для высказывания P – ***значением истинности*** или ***логическим значением*** высказывания P. Для приведенных высказываний имеем $\lambda(A_1) = 0$, $\lambda(A_2) = 1$.

Из элементарных высказываний с помощью логических операций строят ***сложные высказывания***. В качестве основных в алгебре высказываний принято пять логических операций. Эти операции определяются следующим образом.

Определение 2. ***Конъюнкцией*** двух высказываний A, B называется высказывание $A \wedge B$, которое истинно тогда и только тогда, когда истинны одновременно оба высказывания. Очевидно, в обычной речи операции конъюнкции соответствует союз "*и*". Конъюнкцию еще обозначают символами •, &.

Определение 3. ***Дизъюнкцией*** двух высказываний A, B называется высказывание $A \vee B$, которое ложно тогда и только тогда, когда ложны одновременно оба высказывания.

В обычной речи операции дизъюнкции соответствует соединение высказываний связкой "*или*" с той лишь разницей, что $A \vee B$ согласно определению истинно и в случае, когда и A, и B оба истинны. Дизъюнкцию еще обозначают символом **+**.

Определение 4. ***Импликацией*** двух высказываний A, B называется высказывание $A \to B$, которое ложно тогда и только тогда, когда высказывание A истинно, а B ложно.

В обычной речи импликации соответствует связка "*если ... то*".

По определению при ложном A это высказывание истинно независимо от того, какое значение принимает B. В обычной речи подразумевается, что когда A ложно, то предложение "*если A, то B*" не имеет смысла.

Также по определению при истинном B высказывание $A \to B$ истинно независимо от того, какое значение принимает A. В обычной речи оба высказывания A и B могут быть истинными, но истинность B не выводится из истинности A как, например в предложении "*если* калина красная, *то* снег белый".

Определение 5. ***Эквивалентностью*** двух высказываний A, B называется высказывание $A \leftrightarrow B$, которое истинно тогда и только тогда, когда оба данных высказывания имеют одинаковые значения, то есть либо оба истинны, либо оба ложны. В обычной речи эквивалентности соответствует связка "*тогда и только тогда*".

Определение 6. ***Отрицанием*** высказывания A называется высказывание $\overline{A}$, которое истинно тогда и только тогда, когда A ложно (другое обозначение: $\neg A$).

Операция отрицания является унарной операцией, остальные – бинарными. ***Таблицы истинности*** этих операций имеют вид:

A B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$	$\overline{A}$
0 0	0	0	1	1	1
0 1	0	1	1	0	1
1 0	0	1	0	0	0
1 1	1	1	1	1	0

1.2. Формулы логики высказываний

Переменные, вместо которых можно подставлять высказывания, называют ***пропозициональными переменными*** или ***переменными высказываниями***.

Понятие формулы в алгебре высказываний вводится индуктивно.

Определение 7.

1. Переменные высказывания (пропозициональные переменные) X, Y, Z, X_i, Y_i, Z_i $(i \in N)$ и логические константы 0,1 – формулы.

2. Если F_1 и F_2 – формулы, то выражения $\overline{F_i}$ $(i = 1, 2)$, $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \to F_2)$, $(F_1 \leftrightarrow F_2)$ также являются формулами.

3. Никаких других формул, кроме тех, которые образуются с помощью пунктов 1–2, нет.

Замечание 1. Для всякого выражения в алфавите $\{X, Y, Z, X_i, Y_i, Z_i\ (i \in N),\ ^{-}, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, (,)\}$, используя пункты 1, 2 определения 7, очевидно, можно выяснить, является оно формулой или нет.

Замечание 2. Соглашение о скобках. Для упрощения записи формул разрешается не писать:

а) внешние скобки;

б) скобки с учетом силы (приоритета) операции: самая сильная операция – отрицание (выполняется в первую очередь), затем в порядке следования $-$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$.

Формулу, зависящую от переменных высказываний $X_1, X_2, ..., X_n$, будем обозначать $F(X_1, X_2, ..., X_n)$.

Определение 8. ***Интерпретацией*** формулы $F(X_1,\ X_2, ..., X_n)$ называется высказывание $F(a_1,\ a_2, ..., a_n)$, которое получается из заданной формулы после подстановки в нее вместо переменных $X_1,\ X_2, ..., X_n$ соответственно конкретных высказываний $a_1,\ a_2, ..., a_n$.

1.3. Классификация формул. Равносильные формулы

Определение 9. Формула $F(X_1,\ X_2, ..., X_n)$ называется ***выполнимой*** (***опровержимой***), если существует ее истинная (ложная) интерпретация.

Определение 10. Формула $F(X_1,\ X_2, ..., X_n)$ называется ***тавтологией*** (***противоречием***), если любая ее интерпретация истинна (ложна). Если формула $F(X_1,\ X_2, ..., X_n)$ является тавтологией, то пишут $\models F(X_1,\ X_2, ..., X_n)$.

Нахождение всех возможных интерпретаций формулы $F(X_1,\ X_2, ..., X_n)$ связано с построением ее ***таблицы истинности***. Таблица истинности формулы $F(X_1,\ X_2, ..., X_n)$ строится следующим образом. Сначала выписываются слева все переменные высказывания $X_1,\ X_2, ..., X_n$, от которых зависит формула. Далее под ними выписываются все возможные наборы значений $X_1,\ X_2, ..., X_n$. Обычно эти наборы выписываются в естественном порядке, то есть в порядке чисел, двоичными кодами которых являются соответствующие наборы. Построив, таким образом левый столбец, переходим к вычислению правого столбца, который обозначается через $F(X_1,\ X_2, ..., X_n)$. Итак, таблица истинности формулы $F(X_1,\ X_2, ..., X_n)$ выглядит следующим образом:

$X_1\ \ X_2 \ldots X_n$	$F(X_1,\ X_2, \ldots, X_n)$
0 0 ... 0	$F(0,\ \ 0,\ \ \ldots,\ \ 0)$
…	…
$A_1\ \ A_2 \ldots A_n$	$F(A_1,\ A_2, \ldots, A_n)$
…	…
1 1 ... 1	$F(1,\ \ 1,\ \ \ldots,\ \ 1)$

На наборе $A_1,\ A_2, \ldots, A_n$ справа выписывается интерпретация формулы $F(X_1,\ X_2, \ldots, X_n)$ для конкретных высказываний, имеющих соответственно значения $A_1,\ A_2, \ldots, A_n$. На практике обычно таблица истинности формулы $F(X_1,\ X_2, \ldots, X_n)$ строится постепенно в соответствии с ее структурой, то есть по мере выполнения соответствующих операций в формуле.

Пример. Построить таблицу истинности для формулы $F(X_1,\ X_2) = \overline{X_1} \to X_2 \vee X_1$.

Решение.

$X_1 X_2$	$\overline{X_1}$	$X_1 \vee X_2$	$\overline{X_1} \to X_2 \vee X_1$
0 0	1	0	0
0 1	1	1	1
1 0	0	1	1
1 1	0	1	1

Можно сформулировать следующую задачу: дать способ, позволяющий для каждой формулы конечным числом действий определить ее тип по приведенной (см. определения 9, 10) классификации. Поставленная задача носит название "***проблемы разрешимости***". Эта проблема, очевидно, легко решается построением соответствующей таблицы истинности для формулы $F(X_1,\ X_2, \ldots, X_n)$, хотя число действий может оказаться очень большим, но оно конечно, в силу конечности (конечное число переменных и конечное число операций) формулы.

Определение 11. Две формулы $F(X_1,\ X_2, ..., X_n)$, $G(X_1,\ X_2, ..., X_n)$ называют ***равносильными***, если для любых конкретных высказываний $A_1,\ A_2, ..., A_n$ их интерпретации совпадают, то есть $F(A_1,\ A_2, ..., A_n) = G(A_1,\ A_2, ..., A_n)$.

Очевидно, равносильные формулы имеют одинаковые таблицы истинности. Бинарное отношение равносильности на множестве формул обозначают $\cong$.

Основные равносильности

1. Законы нуля и единицы

$$x \wedge 1 \cong x, \qquad x \vee 0 \cong x,$$

$$x \wedge 0 \cong 0, \qquad x \vee 1 \cong 1.$$

2. Закон двойного отрицания

$$\bar{\bar{x}} \cong x.$$

3. Коммутативные (переместительные) законы

$$x \vee y \cong y \vee x, \qquad x \wedge y \cong y \wedge x.$$

4. Ассоциативные (сочетательные) законы

$$x \vee (y \vee z) \cong (x \vee y) \vee z,$$

$$x \wedge (y \wedge z) \cong (x \wedge y) \wedge z.$$

5. Дистрибутивные (распределительные) законы

$$x \wedge (y \vee z) \cong (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

$$x \vee (y \wedge z) \cong (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

6. Законы де Моргана

$$\overline{x \vee y} \cong \bar{x} \wedge \bar{y}, \qquad \overline{x \wedge y} \cong \bar{x} \vee \bar{y}.$$

7. Законы идемпотентности (одинаковости)

$$x \vee x \cong x, \qquad x \wedge x \cong x.$$

8. Законы поглощения

$$x \vee x \wedge y \cong x, \qquad x \wedge (x \vee y) \cong x,$$

$$x \vee \bar{x} \wedge y \cong x \vee y, \qquad x \wedge (\bar{x} \vee y) \cong x \wedge y.$$

9. Закон исключенного третьего

$$x \vee \bar{x} \cong 1.$$

10. Закон противоречия

$$x \wedge \bar{x} \cong 0.$$

Справедливость этих равносильностей легко проверяется с помощью сравнения таблиц истинности. Второй распределительный закон не имеет аналога в обычной алгебре, поэтому его часто называют «чудо-законом».

Упражнение 1. Доказать равносильности:

а) $x \to y = \bar{x} \vee y$;

б) $x \leftrightarrow y = (x \to y) \wedge (y \to x)$;

в) $x \leftrightarrow y = (\bar{x} \vee y) \wedge (\bar{y} \vee x)$;

г) $x \leftrightarrow y = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})$;

Лемма (***о замене***). Пусть $F(X_1,...,X_{i-1},X_i,X_{i+1},...,X_n)$ - произвольная формула и $G(Y_1,...,Y_s) \cong H(Y_1,...,Y_s)$.

Тогда

$$F(X_1,...,X_{i-1},G(Y_1,...,Y_s),X_{i+1},...,X_n \cong F(X_1,...,X_{i-1},H(Y_1,...,Y_s),X_{i+1},...,X_n)$$

Доказательство проводится непосредственным использованием определения равносильности формул. Эта лемма на практике позволяет осуществлять равносильные преобразования формул.

Признак равносильности формул

Теорема 1. *Две формулы F и G алгебры высказываний равносильны тогда и только тогда, когда формула $F \leftrightarrow G$ является тавтологией:*

$$F \cong G \iff \models F \leftrightarrow G.$$

Доказательство следует непосредственно из определений 5, 11.

Закон двойственности

Определение 12. Пусть $f(x_1,..,x_n)$ – формула логики высказываний. Двойственной к ней называют формулу, определенную следующим образом

$$f^*(x_1,..,x_n)=\overline{f(\overline{x_1},..,\overline{x_n})}$$

Замечание 3. Из закона двойного отрицания следует, что $(f^*)^*=f$:

$$(f^*)^*=\overline{\overline{f(\overline{\overline{x_1}},..,\overline{\overline{x_n}})}}=f(x_1,..,x_n)$$

Теорема 2. Формулы f и g ***равносильны*** тогда, и только тогда, когда ***двойственные*** им формулы f^* и g^* тоже ***равносильны***.

$$f(x_1,..,x_n)\cong g(x_1,..,x_n)\Leftrightarrow f^*(x_1,..,x_n)\cong g^*(x_1,..,x_n), \quad (1)$$

Доказательство. Пусть $f(x_1,..,x_n), g(x_1,..,x_n)$ – равносильны, а $x_1,..,x_n$ – пропозициональные переменные, входящие в эти формулы.

Из равносильности f и g следует:

$$f(\overline{x_1},..,\overline{x_n})\cong g(\overline{x_1},..,\overline{x_n}), \quad (2)$$

Из (2) следует

$$\overline{f}(\overline{x_1},..,\overline{x_n})\cong \overline{g}(\overline{x_1},..,\overline{x_n}), \quad (3)$$

Отсюда

$$f^*(x_1,..,x_n)\cong g^*(x_1,..,x_n)\text{, ч.т.д.}$$

Замечание 4. Пусть формула g получается из формулы f на основании первого дистрибутивного закона. Тогда переход от f^* к g^* осуществляется на основании второго ***дистрибутивного закона***.

Определение 13. Переход от f^* к g^* называется преобразованием, двойственным преобразованию, переводящему f в g.

Теорема 3 (*Принцип двойственности*). Двойственная к булевой формуле может быть получена заменой констант 0 на 1, 1 на 0, $\vee$ на $\wedge$, $\wedge$ на $\vee$ и ***сохранением структуры формулы***

(то есть соответствующего порядка действий).

1.4. НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Введем обозначения

$$x^{\alpha} = \begin{cases} x, если \quad \alpha = 1, \\ \overline{x}, если \quad \alpha = 0. \end{cases}$$

Пусть имеется набор пропозициональных переменных $x_1, x_2, ..., x_n$.

Определение 14. Формула $K = x_{i_1}^{m_1} \wedge x_{i_2}^{m_2} \wedge ... \wedge x_{i_k}^{m_k}$, где $m_i \in \{0,1\}, i_j \in \{1,2,...,n\}$, называется ***конъюнктивным одночленом*** (КО) или ***элементарной конъюнкцией***.

Определение 15. Дизъюнкция КО $K_1 \vee K_2 \vee ... \vee K_m$ называется ***дизъюнктивной нормальной формой*** (ДНФ).

Определение 16. Формула $D = x_{i_1}^{m_1} \vee x_{i_2}^{m_2} \vee ... \vee x_{i_k}^{m_k}$, где $m_i \in \{0,1\}, i_j \in \{1,2,...,n\}$, называется ***дизъюнктивным одночленом*** (ДО) или ***элементарной дизъюнкцией***.

Определение 17. Конъюнкция КО $D_1 \wedge D_2 \wedge ... \wedge D_m$ называется ***конъюнктивной нормальной формой*** (КНФ).

В определениях 14-16 никакие ограничения на переменные не накладываются, некоторые переменные могут отсутствовать или повторяться.

Примеры ДНФ, КНФ.

$\overline{x_1} \wedge x_2 \vee x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ – ДНФ

$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)$ – КНФ

Конъюнктивный одночлен, дизъюнктивный одночлен называют еще ***элементарным произведением*** *и* ***элементарной суммой***.

Всякую формулу можно выразить через ***конъюнкцию***, ***дизъюнкцию*** и ***отрицание***. Используя законы ***де Моргана*** и

свойство дистрибутивности конъюнкции относительно дизъюнкции можно преобразовать равносильным образом получаемое выражение ***ДНФ***. Если же к исходному выражению применить свойство дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции, то его можно свести к ***КНФ***. Таким образом, справедлива теорема.

Теорема 4. ***Любая формула*** равносильными преобразованиями может быть приведена к ***ДНФ*** и ***КНФ***.

Теорема 5. Формула $F(x_1,...,x_n)$ является ***тавтологией*** (противоречием) тогда и только тогда, когда в ее ***КНФ*** (*ДНФ*) ***в каждом ДО*** (*КО*) некоторая переменная встречается вместе со своим отрицанием.

Совершенные нормальные формы

Среди нормальных форм важную роль играют ***совершенные нормальные формы.***

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма

Определение 18. ***Совершенной дизъюнктивной нормальной формой*** (СДНФ) формулы $f(x_1,\dots,x_n)$, содержащей n различных переменных, называется ее ДНФ, удовлетворяющая следующим условиям:

1) в ней нет ***двух одинаковых слагаемых***;
2) ни одно ***слагаемое*** не содержит ***двух одинаковых множителей***;
3) никакое ***слагаемое*** не содержит ***переменной вместе с ее отрицанием***;
4) в каждом слагаемом в качестве множителя ***содержится либо переменная $\boldsymbol{x_i}$, либо ее отрицание $\overline{\boldsymbol{x_i}}$*** $\left(i=\overline{1,n}\right)$.

Условия определения 18 позволяют получить правила, с помощью которых можно приводить формулу к СДНФ. Опишем эти правила.

Пусть дана произвольная формула $f(x_1,\dots,x_n)$. ***Процедура приведения к СДНФ***:

1) Сначала приведём её к ДНФ. Пусть ДНФ для f – это формула g (то есть $g = \bigvee_{i=1}^{n} g_i$).

2) Затем, если какое-нибудь слагаемое g_i не содержит переменной x_j, то добавим недостающую переменную:

$$g_i = 1 \cdot g_i = \left(x_j \vee \overline{x_j}\right) \cdot g_i = x_j \cdot g_i \vee \overline{x_j} \cdot g_i,$$

Тогда условие 4) будет выполнено.

3) Если в полученном выражении окажутся одинаковые слагаемые, то, удалив все, кроме одного из них, получим равносильное выражение (используем закон идемпотентности $x + x + x + \cdots + x = x$):

$$g_i + g_i = g_i$$

4) Если в некоторых слагаемых окажется несколько одинаковых множителей, то лишние множители можно удалить (используем закон $x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x = x$):

$$x_j \cdot x_j = x_j$$

5) Удалим все слагаемые, которые содержат какую-либо переменную вместе с ее отрицанием ($\overline{x_k} \cdot x_k \cdot \ldots = 0 \Rightarrow$ такие слагаемые тождественно ложны). Если бы все слагаемые оказались таковыми, то вся сумма тождественно ложна. Тогда и формула f – тождественно ложна. В таком случае f не имеет СДНФ.

После выполнения указанных действий 1), 2), 3), 4), 5) получим СДНФ.

Замечание 5. При приведении к СДНФ нет необходимости знать заранее, является ли формула тождественно ложной или нет. Если выполняя операции пункта 5), будут удалены все слагаемые, то не получим СДНФ.

Таким образом, справедливо:

Свойство 1. У противоречий не существует СДНФ.

Пример. Привести формулу к СДНФ:

$f = (x \to y) \cdot z;$

$f = (x \to y) \cdot z = (\overline{x} + y) \cdot z = \overline{x} \cdot z + y \cdot z$ – ДНФ;

$$\bar{x}\cdot z=\bar{x}\cdot z\cdot 1=\bar{x}\cdot z\cdot(y+\bar{y})=\bar{x}\cdot z\cdot y+\bar{x}\cdot z\cdot\bar{y}=\bar{x}yz+\bar{x}\bar{y}z\ ;$$

$$y\cdot z=y\cdot z\cdot 1=y\cdot z\cdot(x+\bar{x})=x\cdot y\cdot z+\bar{x}\cdot y\cdot z=xyz+\bar{x}yz$$

$$f=\bar{x}yz+\bar{x}\bar{y}z+xyz+\bar{x}yz=\bar{x}yz+\bar{x}\bar{y}z+xyz-\text{СДНФ}.$$

Совершенная конъюнктивная нормальная форма

Аналогичным образом определяется СКНФ. Определение дается в терминах, двойственных тем, которые были использованы в ***определении 18.***

Определение 19. ***Совершенной конъюнктивной нормальной формой*** (СКНФ) формулы $f(x_1,\ldots,x_n)$, содержащей n различных переменных, называется ее КНФ, удовлетворяющая следующим условиям:

1) в ней нет ***двух одинаковых множителей***;
2) ни один ***множитель*** не содержит ***двух одинаковых слагаемых***;
3) никакой ***множитель*** не содержит какой-нибудь ***переменной вместе с ее отрицанием;***
4) каждый множитель содержит в себе в качестве слагаемых ***либо переменную*** $\boldsymbol{x_i}$***, либо ее отрицание*** $\overline{\boldsymbol{x_i}}$ $\big(i=$ *1,n.*

Правила приведения к СКНФ аналогичны тем, которые описаны выше для нахождения СДНФ, и выражаются в двойственных терминах (то есть конъюнкцию меняем на дизъюнкцию, дизъюнкцию на конъюнкцию, 0 на 1, 1 на 0).

Замечание 6. Если множители содержат какую-нибудь переменную вместе с ее отрицанием ($\overline{x_k}+x_k+\cdots=1\Rightarrow$ истина), то их удаляем. Если все множители такие, то всё произведение тождественно истинно; следовательно формула не имеет СКНФ.

Таким образом, справедливо:

Свойство 2. У тавтологий не существует СКНФ.

Пример. Привести формулу к СКНФ:

$f=(x\to y)\cdot z\ ;$

$$f = (x \to y) \cdot z = (\overline{x} + y) \cdot z$$ – КНФ;

$$\overline{x} + y = \overline{x} + y + 0 = \overline{x} + y + z \cdot \overline{z} =$$
$$= (\overline{x} + y + z) \cdot (\overline{x} + y + \overline{z});$$

$$z = z + 0 = z + x \cdot \overline{x} = (z + x) \cdot (z + \overline{x}) = (x + z) \cdot (\overline{x} + z) = (x + z + y \cdot \overline{y}) \cdot (\overline{x} + z + y \cdot \overline{y}) = (x + z + y) \cdot (x + z + \overline{y}) \cdot (\overline{x} + z + y) \cdot (\overline{x} + z + \overline{y}) = (x + y + z) \cdot (x + \overline{y} + z) \cdot (\overline{x} + y + z) \cdot (\overline{x} + \overline{y} + z);$$

$$f = (\overline{x} + y + z) \cdot (\overline{x} + y + \overline{z}) \cdot (x + y + z) \cdot (x + \overline{y} + z) \cdot (\overline{x} + y + z) \cdot (\overline{x} + \overline{y} + z) = (\overline{x} + y + z) \cdot (\overline{x} + y + \overline{z}) \cdot (x + y + z) \cdot (x + \overline{y} + z) \cdot (\overline{x} + \overline{y} + z)$$ – СКНФ.

Свойство 3. Каждая формула алгебры высказываний, не являющаяся тавтологией или противоречием, имеет СКНФ и СДНФ, причем единственные.

Доказательство. Существование СКНФ, СДНФ для формулы, не являющейся тавтологией или противоречием, следует из свойств 1,2. Доказательство единственности проводится методом от противного.

Можно дать следующее определение СКНФ, СДНФ:

Определение 20. Конъюнктивная (дизъюнктивная) НФ называется ***совершенной***, если выполняются условия:

1) каждая переменная из полного набора содержится во всех элементарных дизъюнкциях (конъюнкциях) ровно один раз с отрицанием или без;

2) среди элементарных дизъюнкций (конъюнкций) нет одинаковых.

Совершенные нормальные формы позволяют дать критерий равносильности двух произвольных формул f и g. Каковы бы ни были формулы f и g, можно предположить, что они содержат одни и те же переменные. Если, например, формула f не содержит переменной V, то можно ее заменить равносильной формулой:

$$f = f \cdot (V + \overline{V}).$$

Любые две формулы можно заменить равносильными им формулами, содержащими одинаковые переменные. Эти формулы надо привести к СКНФ или СДНФ.

Если формулы f и g равносильны, то в силу единственности СНФ должны совпадать. Таким образом, сравнение СНФ формул f и g решает вопрос об их равносильности.

Построение СДНФ, СКНФ на основе таблиц истинности

СДНФ: На основе 5-го пункта процедуры приведения к СДНФ слагаемые, равные 0, отбрасываются, то есть в СДНФ входят слагаемые, соответствующие наборам переменных, при которых формула имеет значение 1. Следовательно, можно предложить **следующую процедуру получения СДНФ**:

1) по каждому набору переменных, при которых формула принимает значение **1**, составить ***элементарные конъюнкции*;**
2) в эти ***элементарные конъюнкции*** записать ***без инверсии*** переменные, заданные 1 в наборе, и ***с инверсией*** – переменные, заданные 0;
3) соединить ***элементарные конъюнкции*** знаком ***дизъюнкции***.

Процедура получения СКНФ:

1) по каждому набору переменных, при которых формула принимает значение **0**, составить ***элементарные дизъюнкции***;
2) в ***элементарные дизъюнкции*** записать ***без инверсии*** переменные, заданные 0 в наборе, и ***с инверсией*** – переменные, заданные 1;
3) элементарные дизъюнкции соединить знаком конъюнкции.

Пример. Привести к СДНФ, СКНФ с помощью таблицы истинности

$$f = (x \to y) \cdot z \ ;$$

x	y	z	$(x \to y) \cdot z$	СДНФ	СКНФ
0	0	0	0		$x + y + z$
0	0	1	1	$\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z$	
0	1	0	0		$x + \overline{y} + z$
0	1	1	1	$\overline{x} \cdot y \cdot z$	
1	0	0	0		$\overline{x} + y + z$
1	0	1	0		$\overline{x} + y + \overline{z}$
1	1	0	0		$\overline{x} + \overline{y} + z$
1	1	1	1	$x \cdot y \cdot z$	

СДНФ: $f = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z + \overline{x} \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot z$;

СКНФ:

$$f = (x + y + z) \cdot (x + \overline{y} + z) \cdot (\overline{x} + y + z) \cdot (\overline{x} + y + \overline{z}) \cdot (\overline{x} + \overline{y} + z) \cdot$$

Другое определение совершенных нормальных форм

Определения 18, 20 можно объединить.

ДО или **КО** называется ***совершенным***, если в нем каждая переменная встречается один раз с отрицанием или без отрицания. Они имеют следующий вид:

СДО: $x_1^{m_1} \vee x_2^{m_2} \vee \ldots \vee x_n^{m_n}$

СКО: $x_1^{m_1} \wedge x_2^{m_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{m_n}$

Определение 21. КНФ (ДНФ) называется совершенной, если в ней все **ДО (КО)** являются совершенными.

1.5. Логическое следование

Определение 22. Формула $G(x_1,\ x_2, \ldots, x_n)$ называется ***логическим следствием формулы*** $F(x_1,\ x_2, \ldots, x_n)$, если для любых конкретных высказываний $A_1,\ A_2, \ldots, A_n$ из истинности $F(A_1,\ A_2, \ldots, A_n)$ следует истинность $G(A_1,\ A_2, \ldots, A_n)$.

Если формула G является логическим следствием формулы

F, то используется обозначение $F \models G$.

Теорема 6. $F \models G \;\Leftrightarrow\; \models F \to G$.

Доказательство следует непосредственно из определений.

Определение 23. Формула G называется ***логическим следствием формул*** $F_1, F_2, ..., F_m$, если для любых конкретных высказываний $A_1, A_2, ..., A_n$ из одновременной истинности формул $F_1, F_2, ..., F_m$ $(F_1(A_1, ..., A_n)=1, ..., F_m(A_1, ..., A_n)=1)$ следует истинность формулы G $(G(A_1, ..., A_n)=1)$.

Если G является логическим следствием $F_1, F_2, ..., F_m$, то это обстоятельство обозначается через $F_1, F_2, ..., F_m \models G$. Формулы $F_1, F_2, ..., F_m$ называются ***посылками***, а G – ***следствием*** этих посылок.

Теорема 7. *Следующие утверждения*

1) $F_1, F_2, ..., F_m \models G$,

2) $F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_m \models G$,

3) $\models F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_m \to G$

являются равносильными.

В связи с понятием логического следования можно сформулировать следующие ***прямую*** и ***обратную задачи***.

1. Даны посылки $F_1, F_2, ..., F_m$. Требуется найти все возможные следствия из этих посылок.

2. Дано следствие, то есть формула G, найти все возможные посылки, из которых G является следствием.

Сформулированные задачи можно решить, используя таблицы истинности заданных формул. При решении прямой задачи строим таблицы истинности для формул $F_1, F_2, ..., F_m$ и отмечаем в таблице все строки, в которых $F_1, F_2, ..., F_m$ одновременно истинны. Очевидно, поскольку искомые G должны быть следствиями посылок $F_1, F_2, ..., F_m$, то G в отмеченных строках обязаны принимать значение 1, а в остальных какие угодно значения. Перебирая все возможные варианты значений в неотмеченных строках, мы получим все искомые следствия.

Пример. Пусть таблицы истинности для посылок $F_1(x_1, x_2)$ $F_2(x_1, x_2)$ уже построены. Представленная ниже таблица отражает описанный процесс нахождения всех возможных следствий из F_1, F_2.

X_1X_2	F_1	F_2	G_1	G_2	G_3	G_4
0 0	0	1	0	0	1	1
0 1	1	1	1	1	1	1
1 0	1	0	0	1	0	1
1 1	1	1	1	1	1	1

Пусть наоборот дано следствие *G*. Требуется найти все возможные посылки, из которых следует *G*. При решении обратной задачи строим таблицу истинности *G* и отмечаем строки, в которых *G* ложно, то есть принимает значение 0. Очевидно, если *G* является следствием некоторой посылки *F*, то *F* в отмеченных строках обязана принимать значение 0. В остальных строках *F* может принимать любые значения. Посредством перебора всех вариантов значений *F* в неотмеченных строках построим все возможные посылки для *G*.

Пример. Пусть таблица истинности для следствия $G(x_1, x_2)$ задана. Представленная ниже таблица отражает описанный процесс нахождения всех возможных посылок для *G*.

X_1X_2	G	F_1	F_2	F_3	F_4
0 0	0	0	0	0	0
0 1	1	0	0	1	1
1 0	0	0	0	0	0
1 1	1	0	1	0	1

Сформулированные выше задачи могут быть решены также с использованием следующей теоремы, доставляющей критерий логического следования.

Теорема 8. *Для того чтобы формула G, не являющаяся тавтологией, была логическим следствием формул* $F_1, F_2, ..., F_m$, *из которых, по крайней мере, одна не является тавтологией, необходимо и достаточно, чтобы в СКНФ формулы G все дизъюнк-*

тивные одночлены были из СКНФ формулы $F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_m$.

Покажем, как с использованием этой теоремы решаются сформулированные выше прямая и обратная задачи.

Очевидно, для решения ***прямой задачи***, то есть для нахождения всех возможных следствий из посылок $F_1,\ F_2, ..., F_m$ необходимо построить СКНФ формулы $F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_m$ и затем из ее дизъюнктивных одночленов $D_1,\ D_2, ..., D_t$ построить всевозможные их конъюнкции, которые и будут искомыми следствиями. Очевидно, число таких следствий будет $2^t - 1$, то есть число подмножеств без единицы из множества $\{D_1,\ D_2, ..., D_t\}$.

При решении ***обратной задачи*** строим СКНФ для заданной формулы следствия $G \cong D_1 \wedge D_2 \wedge ... \wedge D_t$.

Поскольку общее число совершенных дизъюнктивных одночленов от n переменных равно 2^n, то, добавляя к имеющимся в СКНФ $D_1 \wedge D_2 \wedge ... \wedge D_r$ дизъюнктивным одночленам всевозможные подмножества дизъюнктивных одночленов из множества остальных $2^n - r$ дизъюнктивных одночленов, мы получим таким образом все искомые посылки.

1.6. Правила вывода

Если в процессе дедуктивного рассуждения некоторое утверждение G выводится из утверждений $F_1,\ F_2, ..., F_m$, то говорят, что справедливо правило вывода

$$\frac{F_1,\ F_2, ..., F_m}{G}.$$

Это равносильно тому, что $F_1,\ F_2, ..., F_m \vdash G$.

Основные правила вывода

$\boxed{\dfrac{A,\ A \to B}{B}}$ – правило заключения (*modus pones*, MP);

$$\boxed{\frac{A \to B,\ B \to C}{A \to C}}$$ – правило цепного заключения;

$$\boxed{\frac{A \to B}{\overline{B} \to \overline{A}}}$$ – закон контрапозиции;

$$\boxed{\frac{A \wedge B \to C}{A \to (B \to C)},\ \frac{A \to (B \to C)}{A \wedge B \to C}}$$ – правила разъединения и объединения посылок;

$$\boxed{\frac{\overline{A \wedge B}}{\overline{A} \vee \overline{B}},\ \frac{\overline{A \vee B}}{\overline{A} \wedge \overline{B}},\ \frac{\overline{A} \vee \overline{B}}{\overline{A \wedge B}},\ \frac{\overline{A} \wedge \overline{B}}{\overline{A \vee B}}}$$ – законы Моргана;

$$\boxed{\frac{A \to B,\ A \to \overline{B}}{\overline{A}}}$$ – правило сведения к абсурду;

$$\boxed{\frac{A \wedge B}{A},\ \frac{A \wedge B}{B},\ \frac{A,\ B}{A \wedge B}}$$ – правила удаления и введения конъюнкции.

Пример . Проверить правильность умозаключения: "Если формула является выполнимой, то она является тавтологией или не является противоречием. Если формула – тавтология, то она не является противоречием. Следовательно, если формула выполнимая, то она не является противоречием".

Прежде всего, запишем все фигурирующие в рассуждениях высказывания в символической форме. Для этого выделим простые высказывания и обозначим их буквами.

"Формула является выполнимой" – A, "Формула является тавтологией" – B, "Формула является противоречием" – C. Тогда наши рассуждения выглядят следующим образом:

$$\frac{A \to (B \vee \overline{C}),\ B \to \overline{C}}{A \to \overline{C}}.$$

$A\ B\ C$	$B\vee\overline{C}$	$A\to B\vee\overline{C}$	$B\to\overline{C}$	$A\to\overline{C}$
0 0 0	1	$\underline{1}$	$\underline{1}$	1
0 0 1	0	$\underline{1}$	$\underline{1}$	1
0 1 0	1	$\underline{1}$	$\underline{1}$	1
0 1 1	1	1	0	1
1 0 0	1	$\underline{1}$	$\underline{1}$	1
1 0 1	0	0	1	0
1 1 0	1	$\underline{1}$	$\underline{1}$	1
1 1 1	1	1	0	0

Поскольку в подчеркнутых строках $A\to\overline{C}$ истинно, то умозаключение сделано правильно, или рассуждения логически правильны.

Упражнения

1. Пусть *A* и *B* обозначают соответственно "Сергей – студент" и "Юра – студент". Записать приведенные ниже высказывания в символической форме, то есть используя только обозначения для высказываний (*A*, *B*), символы $^{-}$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$:

а) "Сергей – студент" и "Юра не студент";

б) "Юра – студент", а "Сергей не студент";

в) "Юра и Сергей оба не студенты";

г) "Ни Юра, ни Сергей не студенты";

д) "Либо Юра, либо Сергей студент";

е) "Неверно, что Юра и Сергей оба студенты";

ж) "Если Юра студент, то Сергей не студент";

з) "Сергей студент тогда и только тогда, когда Юра студент".

2. Для тех же высказываний *A* и *B*, что в упр. 1, сформулируйте словесно каждое из следующих высказываний:

а) $A\vee\overline{B}$; **б)** $\overline{A\wedge B}$;

в) $\overline{A\vee B}$; **г)** $\overline{\overline{A}\vee\overline{B}}$;

д) $A\wedge\overline{B}\vee B\wedge\overline{A}$; **е)** $A\wedge B\to B$;

ж) $\overline{A \to B}$; **з)** $\overline{A} \wedge B \leftrightarrow B$.

3. Построить таблицы истинности для формул и определить тип формулы:

а) $X \wedge \overline{Y} \vee Z$; **б)** $X \vee Y \wedge Z$;

в) $\overline{X} \to Y \vee Z$; **г)** $X \leftrightarrow Y \wedge \overline{Z}$.

4. Для следующих формул найти равносильные им ДНФ:

а) $(X \to Y) \wedge Z$; **б)** $(X \to Y) \vee \overline{X} \wedge Z$;

в) $X \leftrightarrow Y \wedge \overline{X}$; **г)** $(X \leftrightarrow Y) \vee Z$;

д) $X \vee Y \to Z$; **е)** $(X \to Y) \wedge Y \to X$;

ж) $X \vee Y \to (Z \to \overline{Y})$; **з)** $X \wedge Y \to X \vee Z$.

5. Для следующих формул найти равносильные им КНФ:

а) $X \to ((X \to Y) \to Y)$;

б) $((X \to Y) \wedge (Z \to T)) \wedge (X \wedge Z \to Y \wedge T)$;

в) $(X \to Y) \to (X \wedge Z \to X \wedge Z)$;

г) $((X \to Y) \vee (X \to Z)) \to (X \to X \vee Z)$.

6. Определить, являются ли заданные формулы выполнимыми:

а) $\overline{X \vee Z} \wedge (X \to Y)$; **б)** $(X \leftrightarrow Y) \wedge \overline{Z \to T}$;

в) $X \to Y \leftrightarrow \overline{X} \vee Y$; **г)** $X \wedge Y \vee \overline{X} \to Y \vee Z$.

7. Найти совершенные ДНФ и КНФ для формул:

а) $X \to Y \leftrightarrow Z$; **б)** $X \vee Y \to \overline{Z}$;

в) $(X \vee Y) \wedge (\overline{Z} \vee T)$; **г)** $X \leftrightarrow Y \wedge \overline{X}$;

д) $(X \to Y) \vee (\overline{X} \wedge Z)$; **е)** $(X \to Y) \wedge Y \to X$.

8. Для следующих формул найти все вытекающие из них следствия.

а) $X, X \to Y$; **б)** $X \wedge Y, \overline{Y}$;

в) $X \to Y, \overline{Y}$; **г)** $\overline{X} \to Y, Y \to Z, \overline{Z} \to X$.

9. Выяснить, являются ли следующие рассуждения логически правильными, то есть проверить, является ли заключение логическим следствием из посылок.

а) Если 6 – составное число, то 12 – составное число; если 12 – составное число, то существует простое число, большее 12; если существует простое число большее 12, то существует составное число большее 12; если 6 делится на 2, то 6 – составное число; число 12 – составное. Следовательно, 6 – составное число.

б) Если число *a* делится на 8, то оно делится на 4 и если число *a* делится на 9, то оно делится на 3; если число *a* делится на 3 и на 8, то оно делится на 24; число *a* не делится на 24. Следовательно, число *a* не делится на 4 или не делится на 3.

2. ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

2.1. Функции алгебры логики

Функции алгебры логики называют ***булевыми функциями*** в честь английского математика *Джорджа Буля* (1815–1864).

Определение 1. ***Булевой функцией*** $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ от *n* аргументов называется функция *f*, заданная на множестве $\{0, 1\}^n$ и принимающая значения в двухэлементном множестве $\{0, 1\}$. Другими словами, булева функция от *n* аргументов сопоставляет каждому упорядоченному набору, составленному из элементов 0 и 1, либо 0, либо 1.

Здесь $\{0, 1\}^n$ – есть *n*-я декартова степень множества $\{0, 1\}$.

Теорема 1. *Число всех различных функций алгебры логики* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *от n переменных равно* 2^{2^n}.

Всякая функция алгебры логики $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ может быть задана с помощью таблицы истинности.

Определение 2. Говорят, функция алгебры логики $f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)$ несущественно зависит от переменной x_i, если для любых двух наборов $(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n)$, $(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n)$ из области определения

$f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет место

$$f(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n) = f(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n).$$

Например, функция $f(x_1, x_2)$ от двух переменных, заданная таблицей

$X_1\ X_2$	$F(X_1, X_2)$
0 0	1
0 1	0
1 0	1
1 1	0

несущественно зависит от переменной x_1 а именно, $f(0, 0) = f(1, 0)$ и $f(0, 1) = f(1, 1)$.

Очевидно, множество всех функций алгебры логики $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ от *n* переменных наряду с функциями, которые существенно зависят от всех *n* переменных, содержат все функции, которые несущественно зависят от некоторой части своих переменных.

Среди функций алгебры логики, зависящих от одной и двух переменных, выделим функции, представленные в таблице:

$X_1\ X_2$	$\overline{X}_1$	$X_1 \wedge X_2$	$X_1 \vee X_2$	$X_1 \to X_2$	$X_1 \leftrightarrow X_2$	$X_1 + X_2$	$X_1 \mid X_2$	$X_1 \downarrow X_2$
0 0	1	0	0	1	1	0	1	1
0 1	1	0	1	1	0	1	1	0
1 0	0	0	1	0	0	1	1	0
1 1	0	1	1	1	1	0	0	0

Функция, представленная во втором столбце, называется ***отрицанием*** соответствующей переменной, а функции, представленные в остальных столбцах – соответственно ***конъюнкцией***, ***дизъюнкцией***, ***импликацией***, ***эквивалентностью***, ***суммой по модулю* 2**, ***штрихом Шеффера***, ***стрелкой Пирса*** переменных X_1, X_2.

Заимствуя соответствующие результаты из алгебры высказываний, для функций алгебры логики можно сформулировать аналогичные теоремы.

Теорема 2. *Любая функция алгебры логики*

$f(x_1, x_2, ..., x_n)$, *не равная тождественно нулю, имеет СДНФ:*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \cong \bigvee_{f(\sigma_1, ..., \sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge ... \wedge x_n^{\sigma_n}.$$

Теорема 3. *Любая функция алгебры логики* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, *не равная тождественно единице, имеет СКНФ:*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \cong \bigwedge_{f(\sigma_1, ..., \sigma_n)=0} x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee ... \vee x_n^{\bar{\sigma}_n}.$$

Определение 3. Если $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, $g_1(y_{11}, y_{12}, ..., y_{1m_1})$, $g_2(y_{21}, y_{22}, ..., y_{2m_2}), ...,$ $g_n(y_{n1}, y_{n2}, ..., y_{nm_n})$ – функции алгебры логики соответственно от n, $m_1, m_2, ..., m_n$ переменных, то функция

$$f(g_1(y_{11}, ..., y_{1m_1}), g_2(y_{21}, ..., y_{2m_2}), ..., g_n(y_{n1}, ..., y_{nm_n}))$$

называется суперпозицией функций $g_1(y_{11}, ..., y_{1m_1})$, $g_2(y_{21}, ..., y_{2m_2})$, ..., $g_n(y_{n1}, ..., y_{nm_n})$ в функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Таким образом, имея в наличии некоторые функции алгебры логики, мы с помощью суперпозиций имеющихся функций можем строить новые функции.

Например, пусть заданы таблицей функции

X_1 X_2	$f(X_1, X_2)$	$g_1(X_1, X_2)$	$g_2(X_1, X_2)$
0 0	1	1	0
0 1	1	0	0
1 0	0	0	1
1 1	1	1	1

Образовав их суперпозицию $f(g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2))$, получим новую функцию от переменных x_1, x_2, таблица которой имеет вид

X_1 X_2	$f(g_1(X_1, X_2), g_2(X_1, X_2))$
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	1

О п р е д е л е н и е 4. ***Множество функций*** алгебры логики R называется ***замкнутым***, если любая суперпозиция функций из множества R принадлежит множеству R.

О п р е д е л е н и е 5. ***Система функций*** алгебры логики $S=\{f_1, f_2, ..., f_s, ...\}$ называется ***полной***, если для любой функции алгебры логики $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ найдется суперпозиция функций из S, совпадающая с $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Примеры.

1. Система функций алгебры логики $S_1=\{\bar{x}, x_1 \wedge x_2, x_1 \vee x_2\}$ является полной. Полнота указанной системы следует из того, что любая функция алгебры логики имеет либо СДНФ, либо СКНФ, а каждая СДНФ и СКНФ представляет собой суперпозицию функций из S_1.

2. Система функций $S_2=\{\bar{x}, x_1 \wedge x_2\}$ является полной. Полнота этой системы следует из полноты предыдущей системы, если учесть, что $x_1 \vee x_2 = \overline{\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2}$.

Вообще справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 4. *Пусть S и S' – две системы функций алгебры логики, о которых известно следующее: система S является полной и каждая функция из S выражается через суперпозицию функций из S'. Тогда система S' также является полной.*

Так, система $S=\{1, x_1 \wedge x_2, x_1 + x_2\}$ является полной системой, так как любая функция полной системы $S_2=\{\bar{x}, x_1 \wedge x_2\}$ выражается через функции системы S. Именно,

$$\bar{x} = 1 + x.$$

Используя полноту системы S, можно показать, что любая функция алгебры логики $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет однозначное с точностью до перестановки членов представление

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{(i_1, ..., i_k) \subseteq (1, ..., n)} a_{(i_1, i_2, ..., i_k)} \wedge x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge ... \wedge x_{i_k},$$

где $\sum$ – сумма по модулю 2, а $a_{\{i_1, i_2, ..., i_k\}} \in \{0, 1\}$.

Это представление функции называется ***полиномом Жегалкина***.

В теории функций алгебры логики проблема полноты заключается в следующем: по заданной системе функций алгебры логики нужно эффективно ответить на вопрос, является заданная система функций полной или нет.

Проблема полноты функций алгебры логики была решена Постом на языке предполных замкнутых классов функций алгебры логики.

2.2. Специальные замкнутые классы функций алгебры логики

Определение 6. Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ алгебры логики принадлежит ***классу функций*** T_0, сохраняющих константу 0, тогда и только тогда, когда $f(0, 0, ..., 0) = 0$.

Определение 7. Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ алгебры логики принадлежит ***классу функций*** T_1, сохраняющих константу 1, тогда и только тогда, когда $f(1, 1, ..., 1) = 1$.

Определение 8. Функция $f^*(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется ***двойственной*** к функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, если для любого набора $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$

$$f^*(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \overline{f}(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, ..., \overline{\alpha}_n).$$

Определение 9. Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется ***самодвойственной***, если $f^*(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Класс всех самодвойственных функций обозначим через S.

Теорема 5 (*признак самодвойственности*). *Функция является самодвойственной тогда и только тогда, когда на любых противоположных наборах она принимает противоположные значения.*

На множестве двоичных наборов введем отношение частичного порядка "$\preceq$" по следующему принципу:

$$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \preceq (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_i \le \beta_i, \, i = \overline{1, n}.$$

Полагается, что $0 \le 0,\ 0 \le 1,\ 1 \le 1$.

В соответствии с введенным отношением порядка дадим следующее определение монотонной функции алгебры логики.

Определение 10. Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ алгебры логики принадлежит ***классу монотонных функций*** алгебры логики M тогда и только тогда, когда для любых двух наборов $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $\overline{\beta} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ таких, что $\overline{\alpha} \preceq \overline{\beta}$, имеет место $f(\overline{\alpha}) \le f(\overline{\beta})$.

Определение 11. Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ алгебры логики принадлежит ***классу линейных функций*** алгебры логики L тогда и только тогда, когда

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n,$$

где $a_i \in \{0, 1\}$, а "+" есть сумма по модулю 2.

Нетрудно показать, что все перечисленные выше классы функций алгебры логики являются ***замкнутыми классами функций***. Более того, любой замкнутый класс функций алгебры логики принадлежит, по крайней мере, одному из перечисленных классов, то есть указанные выше классы являются ***максимальными замкнутыми классами функций*** алгебры логики.

Теперь сформулируем теорему Поста.

Теорема 6 (***теорема Поста***). *Система $F = \{f_1, f_2, ..., f_m\}$ булевых функций является полной тогда и только тогда, когда для каждого из классов T_0, T_1, S, M, L в системе F найдется функция, не принадлежащая этому классу.*

Согласно теореме Поста для разрешения вопроса полноты относительно некоторой системы функций $F = \{f_1, f_2, ..., f_m\}$ достаточно заполнить следующую таблицу с двумя входами

	T_0	T_1	S	M	L
f_i	(+ или –)	(+ или –)	(+ или –)	(+ или –)	(+ или –)
…	…	…	…	…	…

В соответствующей клетке таблицы ставится "+", если функция, отмеченная в строке, принадлежит классу, отмеченному в столбце и "–" в противном случае. Очевидно, рассматриваемая система функций F будет полной, если в каждом столбце построенной таблицы будет, по крайней мере, один минус.

Пример. Рассмотрим систему $F = \{x \mid y\}$, состоящую из одной функции Шеффера, и проверим, является ли она полной.

1. Согласно таблице истинности функции Шеффера, она не сохраняет ни ноль, ни единицу, то есть $(0 \mid 0) = 1,\ (1 \mid 1) = 0$.

2. $(x \mid y)$ не является самодвойственной, так как $(0 \mid 1) = 1,\ (1 \mid 0) = 1$.

3. $(x \mid y)$ не является монотонной, так как, например, $(0 \mid 0) = 1 > (1 \mid 1) = 0$.

4. $(x \mid y)$ не является линейной, так как отлична от линейных функций от двух переменных: $0, 1, x, x+1, y, y+1, x+y, x+y+1$.

Таким образом, соответствующая таблица для $(x \mid y)$ имеет во всех столбцах минусы. Поэтому система $F = \{x \mid y\}$ является полной.

Определение 12. Система булевых функций называется ***базисом***, если она полна, а удаление любой функции из этой системы делает ее неполной.

Теорема 7. *Каждый базис содержит не более четырех булевых функций.*

Упражнение. Доказать, что следующие системы булевых функций являются базисами:

$$\{\wedge, \neg\}, \{\vee, \neg\}, \{\to, \neg\}, \{\downarrow\}, \{\mid\}, \{\leftrightarrow, \vee, 0\}, \{+, \wedge, \leftrightarrow\}.$$

2.3. Приложение булевых функций к анализу и синтезу релейно-контактных схем

Булевы функции широко применяются при описании работы дискретных управляющих систем, при исследовании некоторых электрических цепей, так называемых релейно-контактных схем.

Под ***релейно-контактной схемой*** (РКС) понимается устройство из проводников и двухпозиционных контактов. Оно может быть предназначено, например, для соединения или разъединения полюсов источника тока с некоторым потребителем. Контакты РКС могут быть двух типов: ***замыкающие*** и ***размыкающие***. Каждый контакт подключен к некоторому реле (переключателю). Когда реле срабатывает, все подключенные к нему замыкающие контакты замкнуты, а размыкающие контакты разомкнуты; в противном случае наоборот. Каждому реле ставится в соответствие своя булева переменная x, которая принимает значение 1, если реле срабатывает, и 0 в противном случае.

Замыкающие контакты, подключенные к реле x, обозначаются символом x, а размыкающие – символом $\bar{x}$. Это означает, что при срабатывании реле x все его замыкающие контакты x проводят ток и им сопоставляется 1, а все размыкающие контакты $\bar{x}$ не проводят ток и им сопоставляется 0. При отключении реле создается противоположная ситуация.

Всей схеме ставится в соответствие булева переменная f, которая равна 1, если схема проводит ток, и 0 в противном случае. Переменная f, соответствующая схеме, очевидно, является функцией от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, соответствующих реле. Эта функция называется ***функцией проводимости схемы***, а ее таблица – ***условиями работы схемы***. Две РКС называются ***равносильными***, если они обладают одинаковыми функциями проводимости. Из двух равносильных схем более простой считается та, которая содержит меньшее число контактов.

При рассмотрении РКС возникают два типа задач: анализ и синтез. ***Задача анализа*** состоит в описании работы схемы. ***Задачей синтеза*** является построение РКС по заданному описанию работы. При решении этих задач успешно используется аппарат функций алгебры логики. Последовательное соединение контактов записывают как ***конъюнкцию*** соответствующих переменных, а параллельное соединение двух контактов как ***дизъюнкцию*** этих переменных. Это вполне согласуется с обычным пониманием проводимости между полюсами.

Пример. По заданной РКС найти ее функцию проводимости.

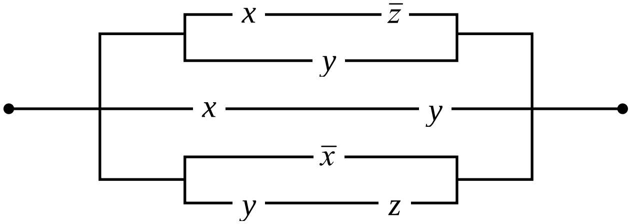


Схема состоит из трех параллельных ветвей. Первая ветвь, в свою очередь, состоит из двух параллельных ветвей, в одной из которых последовательно соединены два контакта x и $\bar{z}$, а в другой имеется один контакт y. Поэтому первая параллельная ветвь имеет следующую функцию проводимости: $x \wedge \bar{z} \vee y$.

Вторая параллельная ветвь РКС состоит из двух последовательно соединенных контактов x и y и поэтому имеет функцию проводимости: $x \wedge y$.

Третья параллельная ветвь состоит из двух параллельных ветвей, в одной из которых один контакт $\bar{x}$, а в другой последовательно соединены y и z. Поэтому функция проводимости следующая: $\bar{x} \vee y \wedge z$.

Для нахождения функции проводимости всей схемы нужно построить дизъюнкцию найденных функций:

$$f(x, y, z) = (x \wedge \bar{z} \vee y) \vee (x \wedge y) \vee (\bar{x} \vee y \wedge z).$$

Поскольку всякая булева функция может быть выражена через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание, то и всякая функция может быть реализована с помощью РКС, то есть может быть построена такая схема, для которой данная функция служит функцией проводимости.

3. ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Применительно к ***алгебре высказываний*** (АВ) аксиоматический подход состоит в следующем. Из всех формул алгебры высказываний выделяется некоторая часть. Формулы из этой части объявляются ***аксиомами***. Определяется некоторое правило, по которому из одних формул можно получать новые формулы. Аксиомы выделяются, и правило определяется так, что по нему из аксиом могут быть получены все тавтологии алгебры высказываний. Таким образом, тавтологии алгебры высказываний оказываются теоремами аксиоматической теории. В результате получаем ***аксиоматическое построение алгебры высказываний***.

В качестве системы аксиом могут быть выбраны разные части совокупности всех формул АВ. То же относится к правилам получения новых формул. В зависимости от выбора получаются различные аксиоматизации АВ. Общим для них является то, что все они обладают одним и тем же множеством теорем – это совокупность всех тавтологий АВ.

Рассмотрим одну из возможных ***аксиоматизаций***.

Сначала дадим общее определение аксиоматической теории.

Определение 1. Будем считать, что ***аксиоматическая теория*** T задана, если выполнены следующие условия:

1) задано некоторое множество символов теории T; причем конечные последовательности символов называются ***выражениями*** теории T;

2) определено некоторое подмножество выражений, называемых ***формулам***;

3) выделено некоторое подмножество формул, называемых ***аксиомами*** теории T;

4) имеется некоторое множество правил, которые позволяют из одних формул теории T получать другие.

Определение 2. ***Выводом*** в T называется последовательность формул $A_1, A_2, ..., A_n$ такая, что для любого i формула A_i есть либо аксиома теории T, либо непосредственное следствие каких-либо предыдущих формул по одному из правил вывода.

Определение 3. Формула A теории T называется ***теоремой*** (или ***выводимой формулой***), если существует вывод в T, в котором последней формулой является формула A.

Определение 4. Формула A называется ***следствием*** множества формул F в T тогда и только тогда, когда существует такая последовательность формул $A_1, A_2, ..., A_n$, что A_n совпадает с A и для любого i A_i есть либо аксиома, либо элемент F, либо непосредственное следствие некоторых предыдущих формул. Элементы F называются ***гипотезами*** вывода.

В дальнейшем для сокращения утверждения "A есть следствие F" мы будем употреблять обозначение $F \vdash A$. В частности, $\vdash A$ служит сокращением утверждения "A есть теорема".

Введем теперь аксиоматическую теорию L для *исчисления высказываний.*

1. Символами L являются $^{-}$, $\to$, (,) и буквы латинского алфавита с целыми положительными числами в качестве индексов. Символы $^{-}$, $\to$ называются ***логическими связками***, а буквы латинского алфавита с индексами – ***пропозициональными переменными***.

2. Каждая пропозициональная переменная есть формула. Если A, B – формулы, то $\overline{A}$ и $A \to B$ – тоже формулы.

3. Каковы бы ни были формулы A, B и C теории L, следующие формулы суть аксиомы L:

(A1) $\left(A \to \left(B \to A\right)\right)$;

(A2) $\left(A \to \left(B \to C\right)\right) \to \left(\left(A \to B\right) \to \left(A \to C\right)\right)$;

(A3) $\left(\overline{B} \to \overline{A}\right) \to \left(\left(\overline{B} \to A\right) \to B\right)$.

4. Правилами вывода служат ***правило подстановки*** и ***правило заключения*** (или *modus ponens*, или сокращенно MP). ***Правило подстановки*** заключается в следующем. Пусть F – формула, содержащая букву A. Тогда, если F выводимая формула, то, заменив в ней букву A всюду, где она входит, произвольной формулой G, мы также получим выводимую формулу. Согласно ***правилу заключения***, если $F \to G$ и F – выводимые формулы, то G – также выводимая формула.

Пример 1. Покажем, что $A \to A$ выводимая формула.

(1) $(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$ (в аксиоме (A2) мы подставили вместо формул *A, B, C* соответственно формулы $(A, A \to A, A)$;

(2) $A \to ((A \to A) \to A)$ (в аксиоме (A1) вместо формулы B подставлена формула $A \to A$);

(3) $(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$ (из (1) и (2) по правилу MP)

(4) $(A \to (A \to A))$ (в аксиоме (A1) вместо *B* подставлена формула *A*);

(5) $A \to A$ (из (3) и (4) по MP).

Пример 2. Покажем, что $A \to B, \quad B \to C \vdash A \to C$.

(1) $A \to B$ (гипотеза);

(2) $B \to C$ (гипотеза);

(3) $(B \to C) \to (A \to (B \to C))$ (подстановка в аксиому (A1) вместо формул *A, B* соответственно формул $B \to C, \quad A$);

(4) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ (Аксиома (A2));

(5) $A \to (B \to C)$ (из (1) и (3) по правилу MP);

(6) $(A \to B) \to (A \to C)$ (из (4) и (5) по правилу MP);

(7) $A \to C$ (из (1) и (6) по правилу MP).

Процесс доказательства формул в аксиоматической теории высказываний значительно упрощается благодаря следующей теореме, которая называется теоремой о дедукции.

Теорема 1. *Если* $F_1, ..., F_{n-1}, F_n \vdash G$, *то* $F_1, ..., F_{n-1} \vdash F_n \to G$. *В частности, если* $F \vdash G$, *то* $\vdash F \to G$.

Рассмотрим несколько примеров, где используется теорема о дедукции.

Пример 3. Покажем, что $A \to (B \to C), B \vdash A \to C$. Покажем сначала, что $A \to (B \to C), B, A \vdash C$.

(1) *B* (гипотеза);

(2) *A* (гипотеза);

(3) $A \to (B \to C)$ (гипотеза);

(4) $B \to C$ (из (2) и (3) по MP);

(5) *C* (из (1) и (4) по правилу MP).

Итак, $A \to (B \to C), B, A \vdash C$, отсюда на основании теоремы о дедукции заключаем, что $A \to (B \to C), B \vdash A \to C$.

Пример 4. Покажем, что $A \to B, B \to C \vdash A \to C$. Установим сначала, что $A \to B, B \to C, A \vdash C$.

(1) $A \to B$ (гипотеза);

(2) $B \to C$ (гипотеза);
(3) A (гипотеза);
(4) B (из (1) и (3) по правилу MP);
(5) C (из (2) и (4) по правилу MP).

Поскольку $A \to B, B \to C, A \vdash C$, то на основании теоремы о дедукции мы заключаем, что $A \to B, B \to C \vdash A \to C$.

Пример 5. Покажем, что формула $(\overline{B} \to \overline{A}) \to (A \to B)$ является теоремой. Покажем сначала, что $\overline{B} \to \overline{A},\ A \vdash B$.

(1) $\overline{B} \to \overline{A}$ (гипотеза);
(2) A (гипотеза);
(3) $(\overline{B} \to \overline{A}) \to ((\overline{B} \to A) \to B)$ (аксиома (A3));
(4) $(\overline{B} \to A) \to B$ (из (1) и (3) по правилу MP);
(5) $A \to (\overline{B} \to A)$ (аксиома(A1));
(6) $A \to B$ (из (4) и (5) согласно примеру 4);
(7) B (из (2) и (6) согласно правилу MP).

Итак, $\overline{B} \to \overline{A},\ A \vdash B$. Применив теперь дважды теорему о дедукции, получаем требуемый результат.

Отметим ряд важнейших свойств аксиоматической теории высказываний: полноту, разрешимость, непротиворечивость.

Теорема 2. (***о полноте аксиоматической теории высказываний***). *Формула тогда и только тогда является теоремой аксиоматической теории высказываний, когда она является тавтологией алгебры высказываний.*

Определение 5. Аксиоматическая теория называется ***непротиворечивой***, если ни для какого утверждения A, сформулированного в терминах этой теории, само утверждение A и его отрицание $\overline{A}$ не могут быть теоремами данной теории. Если для некоторого утверждения A теории оба утверждения A и $\overline{A}$ – теоремы этой теории, то аксиоматическая теория называется ***противоречивой***.

Заметим, что в противоречивой аксиоматической теории любая формула является теоремой.

Теорема 3. *Аксиоматическая теория высказываний есть непротиворечивая аксиоматическая теория.*

Определение 6. Аксиоматическая теория называется ***разрешимой,*** если существует алгоритм, позволяющий для любой формулы этой теории, ответить на вопрос, будет или нет эта формула теоремой этой теории.

Так как, используя таблицу истинности, мы можем для данной формулы эффективно определить, является ли она тавтологией или нет, то, как следствие теоремы 2, получаем следующие утверждение.

Теорема 4. *Аксиоматическая теория высказываний есть разрешимая аксиоматическая теория.*

Введем следующую важную характеристику аксиом аксиоматической теории.

Определение 7. Аксиома A данной аксиоматической теории называется ***независящей*** от остальных аксиом этой теории, если она не может быть выведена с помощью правил вывода из всех остальных аксиом. Система аксиом аксиоматической теории называется ***независимой***, если каждая ее аксиома не зависит от остальных.

Теорема 5. *Система аксиом* (А1), (А2), (А3) *аксиоматической теории высказываний независима.*

Упражнение. Используя результаты настоящего раздела показать, что следующие формулы являются теоремами аксиоматической теории высказываний:

(1) $\overline{A} \to (A \to B)$; (3) $(A \to B) \to ((\overline{A} \to B) \to B))$;

(2) $A \to (\overline{B} \to \overline{(A \to B)})$; (4) $((A \to B) \to A) \to A$.

4. ПРАВИЛО РЕЗОЛЮЦИЙ

Автор данного правила – американский математик Робинсон, 1965 год.

Правило резолюций: $x \vee A, y \vee \overline{A} \vdash (x \vee y)$.

Введем новые понятия. ***Атом*** – это логическая переменная. Под ***дизъюнктом*** понимается элементарная дизъюнкция, то есть это дизъюнкция различных атомов или их отрицаний.

Это правило позволяет соединить две формулы, в одной из которых находится атом (А), а в другой отрицание атома ($\overline{A}$). Получается новая формула без этого атома.

Доказательство. В логике высказываний имеет место тавтология:

$$\models ((x \vee A) \wedge (y \vee \overline{A})) \rightarrow (x \vee y)$$

По теореме о равносильных утверждениях отсюда получаем

$$x \vee A, y \vee \overline{A} \vdash (x \vee y).$$

Частные случаи: 1) $A, y \vee \overline{A} \vdash \quad y, (x = 0)$

2) $x \vee \overline{A}, \overline{A} \vdash \quad x, (y = 0)$

3) $A, \overline{A} \quad \vdash$ □ , $(x = y = 0)$ где □ – пустой дизъюнкт (т.е. ложь).

Процесс доказательства методом резолюций.

Используется доказательство методом от противного. Отрицание заключения принимается в качестве дополнительной посылки.

1. Все посылки и отрицания заключения привести к нормальной форме. Для этого используются следующие равносильности:

$x \rightarrow y = \overline{x} + y$

$x \leftrightarrow y = x \cdot y + \overline{x} \cdot \overline{y} = (\overline{x} + y)(\overline{y} + x)$

При необходимости применяются законы де Моргана:

$$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y},\ \overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}.$$

2. Все полученные в 1–м пункте дизъюнкты записываются с новой строки (включая отрицание заключения). В результате получается ***последовательность формул*** или последовательность дизъюнктов.

3. В полученной последовательности находим любые две формулы, в одной из которых находится атом, а в другой отрицание атома. Положение атомов в формуле роли не играет. Эти

две формулы соединяем с помощью правила резолюций и получаем новую формулу без этого атома.

4. Затем ищут следующую пару формул аналогичным образом, в одной из которых атом, а в другой отрицание, и соединяют эти две формулы с помощью правила резолюций и т.д.

Аналогичным образом продолжают до тех пор, пока не появится пустой дизъюнкт □, который и выражает противоречие.

***Преимущества использования правила резолюций*:**

1) В этом методе используется лишь одно правило – это правило резолюций. Не надо запоминать многочисленные правила вывода и теоремы классического исчисления высказываний.

2) В процессе доказательства не надо использовать различные равносильности для проведения простых преобразований.

3) Метод прост в реализации.

Замечание. На основе этого правила разработан язык логического программирования – Пролог.

Пример. $P \vee Q, P \to R, Q \to S \vdash R \vee S$. Доказать выводимость.

$\overline{R \vee S} = \overline{R} \cdot \overline{S}$ $\overline{R \vee S} = \overline{R} \cdot \overline{S}$

1) $P \to R = \overline{P} \vee R$; $Q \to S = \overline{Q} \vee S$;

2) $P \vee Q, \overline{P} \vee R, \overline{Q} \vee S, \overline{R}, \overline{S}$ – гипотезы

Дизъюнкты: 1. $P \vee Q$;

2. $\overline{P} \vee R$;

3. $\overline{Q} \vee S$;

4. $\overline{R}$;

5. $\overline{S}$;

3) 6. $\overline{P} \vee R, \overline{R} \vdash \overline{P}$ (2, 4)

7. $\overline{Q} \vee S, \overline{S} \vdash \overline{Q}$ (3, 5)

8. $P \vee Q, \overline{P} \vdash Q$ (1, 6)

9 $Q, \overline{Q} \vdash \square$ – ложь.

При практической реализации этого метода, несмотря на простоту метода доказательства, может возникнуть ряд проблем. Последовательность может содержать большое количество формул. Возникает проблема, какие формулы соединить с помощью правила резолюции и как быстрее достичь цели. Для решения этих проблем разработаны специальные методики поиска.

5. ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

5.1. Определение предиката

Понятие предиката обобщает понятие высказывания, а логика предикатов представляет собой дальнейшее развитие логики высказываний.

Определение 1. *n–**местным предикатом***, заданным на множестве $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ называется выражение, содержащее n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, которое становится высказыванием при подстановке вместо этих переменных элементов $a_1, a_2, ..., a_n$, из множеств $M_1, M_2, ..., M_n$ соответственно.

Предикаты обозначаются как $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и представляют собой отображения $P: M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n \to \{0,1\}$. То есть, упорядоченному набору элементов $(a_1, a_2, ..., a_n)$ из множества $M_1 \times \ldots \times M_n$ ставится в соответствие один из элементов множества $\{0,1\}$, причем 0, если $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ – ложное высказывание и 1, если истинное. Переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ называются ***предметными***, а элементы из множеств $M_1, M_2, \ldots, M_n$, которые эти переменные пробегают – ***конкретными предметами***. ***Местностью предиката*** называется число различных аргументов, от которых зависит предикат. Предикат является функцией многих переменных.

Примеры

1. Предложение "x – четное число" представляет собой одноместный предикат, заданный на множестве целых чисел, то есть

P: $\mathbf{Z} \to \{0, 1\}$. Областью определения предиката P является множество целых чисел $\mathbf{Z}$, областью значений – множество $\{0, 1\}$.

2. Отношения "$x < y$" и "x делится на y" представляют собой двуместные предикаты, заданные на множествах $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ и $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ соответственно.

Определение 2. ***Множеством истинности*** предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданного на множестве $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$, называется совокупность таких упорядоченных наборов элементов $(a_1, a_2, ..., a_n)$ из $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$, для которых высказывание $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ является истинным.

Обозначение: $P^+ = \{(a_1, a_2, ..., a_n): \lambda(P(a_1, a_2, ..., a_n)) = 1\}$.

Примеры.

1. Множеством истинности двухместного предиката $P(x, y)$: "x делится на y", заданного на множестве $M \times M$, где $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, является следующее множество $P^+ = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1), (4, 2), (6, 2), (6,3)\}$.

2. Множество истинности двуместного предиката $P(x,y)$: "$x < y$", заданного на множестве $M_1 \times M_2$, где $M_1 = \{1, 2, 3\}$, $M_2 = \{2, 4, 6\}$, равно $P^+ = \{(1,2), (1,4), (1,6), (2,4), (2,6), (3,4), (3,6)\}$.

Определение 3. Два предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданные на одном и том же множестве $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$, называются ***равносильными***, если оба предиката принимают истинные значения на одних и тех же наборах $(a_1, a_2, ..., a_n)$ из множества $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$, то есть, если $P^+ = Q^+$. Предикат $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданный на множестве $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ называется ***следствием*** предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданного на том же множестве, если он становится истинным высказыванием при всех значениях переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ из соответствующих множеств $M_1, M_2, ..., M_n$, при которых истинным высказыванием становится предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, то есть, если $P^+ \subseteq Q^+$.

5.2. Логические операции над предикатами

Определение 4. ***Отрицанием*** предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданного на множестве $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$, называется новый предикат $\overline{P}(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданный на том же множестве, который становится истинным высказыванием при таких значениях $(a_1, a_2, ..., a_n)$ из множества $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$, при которых $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ является ложным высказыванием и становится ложным высказыванием, если $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ является истинным высказыванием.

Например, отрицанием одноместного предиката $P(x)$: "x делится на 3", заданного на множестве $\mathrm{M} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ будет предикат $\overline{P}$: "x не делится на 3". Множествами истинности предикатов P и $\overline{P}$ являются следующие множества $P^+ = \{0, 3, 6, 9\}$, $(\overline{P})^+ = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$.

Множество истинности предиката $\overline{P}$ является дополнением множества P^+, то есть $P^+ \cup (\overline{P})^+ = M$ (M – область определения предиката).

Определение 5. ***Конъюнкцией*** двух n–местных предикатов $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданных на множестве $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$, называется новый n–местный предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n) \wedge Q(x_1, x_2, ..., x_n)$, который становится истинным высказыванием только для таких элементов $(a_1, a_2, ..., a_n)$ из множества $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$, для которых $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ и $Q(a_1, a_2, ..., a_n)$ являются истинными высказываниями.

Определение 6. ***Дизъюнкцией*** двух n–местных предикатов $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданных на множестве $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$, называется новый n–местный предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n) \vee Q(x_1, x_2, ..., x_n)$, который становится ложным высказыванием только для таких элементов $(a_1, a_2, ..., a_n)$ из множества $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$, для которых $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ и $Q(a_1, a_2, ..., a_n)$ являются ложными высказываниями.

Определение 7. ***Импликацией*** двух n–местных предикатов $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданных на множестве $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$, называется новый n–местный предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n) \to Q(x_1, x_2, ..., x_n)$, который становится ложным высказыванием только для таких элементов $(a_1, a_2, ..., a_n)$ из множества $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$, для которых $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ является истинным высказыванием, а $Q(a_1, a_2, ..., a_n)$ является ложным. В остальных случаях – истинным.

Определение 8. ***Эквивалентностью*** двух n–местных предикатов $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданных на множестве $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$, называется новый n–местный предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n) \leftrightarrow Q(x_1, x_2, ..., x_n)$, который становится истинным высказыванием только для таких элементов $(a_1, a_2, ..., a_n)$ из множества $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$, для которых высказывания $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ и $Q(a_1, a_2, ..., a_n)$ либо одновременно являются истинными, либо ложными. В остальных случаях – ложным.

Если предикаты $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Q(y_1, y_2, ..., y_m)$ заданы на разных множествах, то в результате применения операций конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквивалентности к этим предикатам, получим $(n + m – k)$–местный предикат, где k – число переменных, общих для обоих предикатов.

Кванторные операции

Кроме операций отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквивалентности в логике предикатов имеются ***две кванторные операции***: ***квантор всеобщности*** $(\forall x)$ и ***существования*** $(\exists x)$. Если *P(x)* одноместный предикат, заданный на некотором множестве М, то в результате применения кванторов к предикату *P(x)* получим новые предикаты $\forall x P(x)$ и $\exists x P(x)$, означающие соответственно "все *x* из М обладают свойством *P*" и "некоторые *x* из М обладают свойством *P*".

Пример 1. Пусть *P(x)* одноместный предикат "*x* делится на 7", заданный на множестве целых чисел **Z**. Применяя к этому предикату кванторы получим следующие предикаты: "все *x* из **Z** делятся на число 7" и "существуют x из **Z**, которые делятся на число 7". То есть, в результате применения кванторов ($\forall x$) и ($\exists x$) к одноместному предикату $P(x)$ получили высказывания, причем первое из них ложное, а второе – истинное. Высказывания являются нульместными предикатами.

Применение кванторов к предикатам понижает местность исходного предиката на единицу. Если $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ n–местный предикат, то в результате применения кванторов получим новые предикаты $Q(x_2, ..., x_n)=\forall x_1\ P(x_1, x_2, ..., x_n)$, $R(x_2, ..., x_n)=\exists x_1\ P(x_1, x_2, ..., x_n)$, которые зависят только от переменных $x_2, x_2, ..., x_n$, то есть являются $(n-1)$–местными предикатами.

Предметная переменная, которая связывается квантором, то есть входит в предикат и в квантор, называется ***связанной***. Предметная переменная, не связанная никаким квантором, называется ***свободной переменной***.

Пример 2. Пусть $P(x, y)$ двухместный предикат, заданный неравенством "$x^2 + y^2 \leq 1$" на множестве **R**×**R**. Множеством истинности предиката $P(x, y)$ является множество всех точек координатной плоскости, расположенных внутри окружности радиуса 1, включая точки окружности. Найдем множества истинности предикатов $Q(y) = \forall x\, P(x, y)$, $R(x) = \exists y\, P(x, y)$, $S = \forall x\ \exists y\, P(x, y)$. Множеством истинности предиката $Q(y)$ является множество таких y, для которых данное неравенство выполняется при любых x из **R**. Однако таких y не существует. Следовательно, множество истинности предиката Q не содержит ни одного элемента, то есть $Q^+ =\varnothing$. Множеству истинности предиката $R(x)$ принадлежат все такие x, для которых можно найти число y, удовлетворяющее данному неравенству. Такие значения x лежат в промежутке $[-1, 1]$. Следовательно, этот промежуток и будет множеством истинности предиката R. Предикат S – нульместный, то есть является высказыванием. В высказывании S говорится, что для любых x можно найти такое y, для которой выполняется данное неравенство. Однако это не верно. Например, для x, лежащих вне отрезка $[-1, 1]$, такое y не существует. Тогда S – ложное высказывание.

5.3. Теоретико–множественный смысл предикатов

При определении множества истинности предиката, составленного из нескольких предикатов при помощи логических связок, можно воспользоваться соотношениями для их множеств истинности. Для двух n–местных предикатов $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$ заданных на множестве $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$, верны следующие соотношения для их множеств истинности:

1) множество истинности отрицания предиката P равно дополнению множества истинности этого предиката, то есть $\left(\overline{P}\right)^+ = \left(\overline{P^+}\right)$;

2) множество истинности конъюнкции двух предикатов P и Q равно пересечению множеств истинности P^+ и Q^+, то есть $(P \wedge Q)^+ = P^+ \cap Q^+$;

3) множество истинности дизъюнкции двух предикатов P и Q равно объединению множеств истинности P^+ и Q^+, то есть $(P \vee Q)^+ = P^+ \cup Q^+$;

4) множество истинности импликации двух предикатов P и Q равно $(P \to Q)^+ = (\overline{P})^+ \cup Q^+$;

5) множество истинности эквивалентности двух предикатов P и Q равно $(P \leftrightarrow Q)^+ = ((\overline{P})^+ \cup Q^+) \cap ((\overline{Q})^+ \cup P^+)$.

Пример 1. Пусть предикаты $P(x)$: "x кратно двум" и $Q(x)$: "x кратно трем", заданы на множестве $\text{M} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Их множествами истинности являются следующие множества: $P^+ = \{2, 4, 6, 8\}$, $Q^+ = \{3, 6\}$. Тогда, по соотношениям (1)–(5) получим

а) $(\overline{P})^+ = \{1, 3, 5, 7\}$, $(\overline{Q})^+ = \{l, 2, 4, 5, 7, 8\}$;

б) $(P \wedge Q)^+ = \{2, 4, 6, 8\} \cap \{3, 6\} = \{6\}$;

в) $(P \vee Q)^+ = \{2, 4, 6, 8\} \cup \{3,6\} = \{2, 3, 4, 6, 8\}$;

г) $(P \to Q)^+ = \{1, 3, 5, 7\} \cup \{3,6\} = \{1, 3, 5, 6, 7\}$;

д) $(P \leftrightarrow Q)^+ = \{1, 3, 5, 6, 7\} \cup \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\} = \{1,5,6,7\}$.

Пример 2. Найти множества истинности предикатов а) $P(x,y) \to Q(x,y)$; б) $\forall x P(x,y)$; в) $\exists y Q(x,y)$, где $P(x,y)$: «$x^2+y^2>1$»; $Q(x,y)$: «$xy<0$».

Решение. а) Найдем сначала множества истинности предикатов P и Q. По определению, множества истинности P^+ и Q^+ соответственно равны множествам всех решений неравенств $x^2+y^2>1$ и $xy<0$. Следовательно, P^+ - это множество всех точек плоскости, которые лежат вне окружности радиуса 1 с центром в начале координат, а Q^+ - это множество всех точек плоскости, принадлежащих второй и четвертой координатной четверти. По свойствам множеств истинности

$$(P \to Q)^+ = \overline{P^+} \cup Q^+, \ (\overline{P})^+ = \overline{P^+}.$$

Тогда множество истинности предиката $\overline{P}$ - это все точки внутри окружности. Объединение этого множества с точками второй и четвертой координатной четверти дает множество истинности $(P \to Q)^+$.

б) Предикат $\forall x P(x,y)$ одноместный от переменной y. Множеством его истинности будет множество таких $b \in R$, что неравенство $x^2+b^2>1$ выполняется для всех $x \in R$. Такими будут все действительные числа, принадлежащие интервалам $(-\infty;-1)$ и $(1;+\infty)$. Тогда искомым множеством истинности будет $(-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$.

в) Предикат $\exists y Q(x,y)$ одноместный предикат от переменной x. Множеством истинности этого предиката будут все $a \in R$, для которых найдется $y \in R$ такое, что $ay<0$. Но такие $y \in R$ найдутся для всех $a \in R$, за исключением $a=0$. Следовательно, множеством истинности данного предиката будет множество $R \setminus \{0\}$.

5.4. Классификация предикатов

Определение 9. Предикат $P(x_1, x_2, \dots x_n)$, заданный на множестве $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$, называется ***тождественно истинным***, если для всех элементов $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ из множества $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ высказывания $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ будут истинными и ***тождественно ложным***, если для всех элементов $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ из множества $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$, высказывания $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ будут ложными. Предикат $P(x_1, x_2, \dots x_n)$, заданный на множестве $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$, называется ***выполнимым***, если существует хотя бы один элемент $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ из множества $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$, для которого высказывание $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ будет истинным и ***опровержимым***, если хотя бы для одного элемента $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ из множества $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ высказывание $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ будет ложным.

В соответствии с классификацией предикатов истинность нульместных предикатов, содержащих кванторы, можно определить следующим образом. Высказывание $\forall x\, P(x)$ будет истинным, если предикат $P(x)$ является тождественно истинным предикатом. В противном случае – ложным. Высказывание $\exists x\, P(x)$ будет истинным, если предикат $P(x)$ – является выполнимым и будет ложным в противном случае.

5.5. Формулы логики предикатов. Равносильность формул

Определение формулы логики предикатов имеет индуктивный характер. Сначала задается алфавит символов, из которых составляются формулы:

– предметные переменные: x, y, z, x_i, y_i, z_i $(i \in N)$;

– нульместные предикатные переменные: P, Q, R, P_i, Q_i, R_i, $(i \in N)$;

– n–местные $(n \geq 1)$ предикатные переменные: $P(, \dots,)$, $Q(, \dots,)$,

$R(, ...,)$, $P_i(, ...,)$, $Q_i(, ...,)$, $R_i(, ...,)$ $(i \in N)$ с указанием числа свободных мест в них;

– символы логических операций: $\bar{\ }$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$;

– кванторы: $\forall$, $\exists$;

– вспомогательные символы: (,) – скобки; , – запятая.

Определение 10. (***формулы логики предикатов***).

1. Каждая нульместная предикатная переменная есть формула.

2. Любой n–местный предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ есть формула.

3. Если F, G – формулы, не содержащие предметных переменных, которые связаны квантором в одной формуле и свободны в другой, то выражения $(\overline{F})$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$, $(F \leftrightarrow G)$ также являются формулами.

4. Если F формула, а x – предметная переменная, входящая свободно в F, то выражения $\forall x\, F(x)$ и $\exists x\, F(x)$ также являются формулами.

5. Никаких других формул в логике предикатов нет.

Формулы, в которых нет свободных переменных, называются ***замкнутыми***, а формулы, содержащие свободные переменные, – ***открытыми***.

Из определения формулы логики предикатов следует, что все формулы алгебры высказываний являются также формулами логики предикатов.

Определение 11. Две формулы F и G называются ***равносильными***, если при подстановке в эти формулы вместо предикатных переменных конкретных предикатов, а вместо предметных переменных конкретных элементов, эти формулы преобразуются в высказывания с одинаковыми логическими значениями, то есть либо оба в истинные высказывания, либо оба в ложные.

Все ***основные равносильности логики высказываний*** верны также и для формул логики предикатов. Кроме них, в логике предикатов имеются равносильности, связанные с кванторами:

1. Законы отрицания: $\overline{\forall x P(x)} \equiv \exists x \overline{P(x)}$, $\overline{\exists x P(x)} \equiv \forall x \overline{P(x)}$.

2. Законы дистрибутивности:

$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$;

$\exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$.

3. Если предикат Q не зависит от переменной x, то верны следующие законы:

$\forall x(P(x) \wedge Q) \equiv \forall x P(x) \wedge Q$, $\forall x(P(x) \vee Q) \equiv \forall x P(x) \vee Q$;

$\exists x(P(x) \wedge Q \equiv \exists x P(x) \wedge Q$, $\exists x(P(x) \vee Q \equiv \exists x P(x) \vee Q$.

4. Законы переименования связанных переменных:

$\forall x P(x) \equiv \forall y P(y)$, $\exists x P(x) \equiv \exists y P(y)$.

5. Законы перестановки кванторов:

$\forall x \forall y P(x,y) \equiv \forall y \forall x P(x,y)$, $\exists x \exists y P(x,y) \equiv \exists x \exists y P(x,y)$.

5.6. Классификация формул логики предикатов

Определение 12. Формула F логики предикатов называется ***выполнимой (опровержимой)*** на множестве М, если можно найти такие конкретные предикаты, заданные на том же множестве, при подстановке которых вместо предикатных переменных, она преобразуется в ***выполнимый (опровержимый)*** предикат. Формула логики предикатов называется ***тождественно истинной (тождественно ложной)*** на множестве М, если при подстановке вместо предикатных переменных любых конкретных предикатов, заданных на этом же множестве, она преобразуется в ***тождественно истинный (тождественно ложный)*** предикат. Формула логики предикатов называется ***тавтологией (противоречием),*** если при подстановке вместо предикатных переменных любых конкретных предикатов, заданных на любом множестве, она преобразуется в ***тождественно истинный (тождественно ложный)*** предикат.

Критерием равносильности формул F и G является тавтологичность формулы *(F↔ G).*

Пример 1. Вычислить значение формулы $\forall x \exists y\, P(x,y) \rightarrow \exists x \forall y\, P(x,y)$, если предикат $P(x,y)$ имеет значение $P^0(x,y)$ –

«число x меньше числа y» и определен на множестве $M = N \times N$, N=$\{1,2,3, \dots\}$.

Так как при указанном значении предиката $P(x, y)$ высказывание $\forall x \exists y\, P(x, y)$ означает утверждение, что «для любого натурального числа x найдется натуральное число y, большее числа x», то это высказывание истинно. Высказывание $\exists x \forall y\, P(x, y)$ означает утверждение, что «существует натуральное число x, которое меньше любого натурального числа y». Это высказывание ложно. Поэтому получаем, что исходная формула ложна.

Пример 2. Доказать, что формула $A \equiv \exists x \forall y\, P(x, y)$ выполнима.

Для доказательства выполнимости формулы A достаточно найти область определения двухместного предиката $P(x, y)$ и такое его значение, что в этой области формула принимает истинные значения. Такой областью определения предиката, в частности, будет множество $M = N \times N$. Действительно, если $P(x, y)$ - предикат «$y< x$», то формула A тождественно истинна в области M, и, следовательно, выполнима в этой области. Однако, если в качестве предиката $P(x, y)$ взять предикат «$x< y$», то формула A будет тождественно ложной в области M и, следовательно, невыполнимой в области M. При этом ясно, что формула A не общезначима.

Пример 3. Доказать, что формула $A \equiv \forall x(P(x) \to \overline{Q(x)}) \to \overline{\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)}$ является общезначимой.

Считая, что формула A определена на любой области M, проведем равносильные преобразования:

$$A \equiv \forall x\left(P(x) \to \overline{Q(x)}\right) \to \overline{\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)} \equiv$$

$$\equiv \overline{\forall x\left(P(x) \to \overline{Q(x)}\right)} \vee \overline{\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)} \equiv$$

$$\equiv \exists x\left(\overline{\overline{P(x)} \vee \overline{Q(x)}}\right) \vee \overline{\exists x P(x)} \vee \overline{\forall x Q(x)} \equiv$$

$$\equiv \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vee \overline{\exists x P(x)} \vee \exists x \overline{Q(x)} \equiv$$

$$\equiv \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vee \exists x\overline{Q(x)} \vee \overline{\exists x P(x)} \equiv$$
$$\equiv \exists x(P(x) \wedge Q(x) \vee \overline{Q(x)}) \vee \overline{\exists x P(x)} \equiv$$
$$\equiv \exists x(P(x) \vee \overline{Q(x)}) \vee \overline{\exists x P(x)} \equiv$$
$$\equiv (\exists x P(x) \vee \overline{\exists x P(x)}) \vee \exists x\overline{Q(x)} \equiv 1 \vee \exists x\overline{Q(x)} \equiv 1.$$

То есть формула A тождественно истинна для любых одноместных предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ и в любой области.

Пример 4. Доказать, что формула $A \equiv \exists x(\Big(F(x) \to$ $Fx \wedge Fx \to Fx)$ тождественно ложна.

Так как формула $\Big(F(x) \to \overline{F(x)}\Big) \wedge \Big(\overline{F(x)} \to F(x)\Big) \equiv$ $F(x) \leftrightarrow \overline{F(x)}$, а формула $F(x) \leftrightarrow \overline{F(x)}$, очевидно, тождественно ложна, то ложна и формула A.

Определение 13. Формула F', равносильная F, называется ее ***приведенной*** формой, если F' из логических связок содержит только отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию, а отрицание относится только к предикатным переменным и к высказываниям. ***Предваренной нормальной*** формой (ПНФ) формулы F называется такая ее приведенная форма, в которой все кванторы вынесены в начало формулы, а область действия каждого квантора распространяется до конца формулы.

ПНФ – это формула вида $K_1 x_1 ... K_m x_m F(x_1, ..., x_n)$, где K_i – один из кванторов $\forall$ или $\exists$ ($i = 1, 2, ..., m;\ m \le n$), а формула F не содержит кванторов и является приведенной формой.

Для формул логики предикатов справедлива следующая теорема.

Теорема. *Для каждой формулы логики предикатов существует равносильная ей ПНФ.*

Предваренные нормальные формы формул в логике предикатов используются для выяснения равносильности формул и для решения проблемы классификации формул.

Одной из задач классификации формул является проблема ***разрешимости,*** которая состоит в следующем. Необходимо найти алгоритм, при помощи которого для произвольной формулы логики предикатов можно определить, будет она тавтологией или нет. В отличие от алгебры высказываний, для формул логики предикатов общего алгоритма не существует. Это было доказано в 1936 году американским математиком *А. Чёрчем*. Несмотря на отсутствие алгоритма в общем случае, в некоторых частных случаях такой алгоритм существует. Например, для формул, содержащих только одноместные предикаты.

6. ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ (ИП)

Понятие формулы в ИП вводится так же, как оно вводилось в логике предикатов.

Аксиоматическая теория начинается с выбора системы аксиом. Как и в случае высказываний, этот выбор может быть осуществлен по-разному. Одной из таких систем аксиом может служить система, состоящая из трех аксиом рассмотренного выше формализованного исчисления высказываний и двух дополнительных аксиом (схем аксиом):

(P1) $\forall x F(x) \to F(t)$;

(P2) $F(t) \to \exists x F(x)$,

где формула t не содержит свободной переменной x.

К правилу вывода ***modus pones*** (MP) добавляются еще два ***правила вывода***:

$$\boxed{\dfrac{F \to G(x)}{F \to \forall x G(x)}}$$ – правило введения квантора общности ($\forall$–правило);

$$\boxed{\dfrac{G(x) \to F}{\exists x G(x) \to F}}$$ – правило введения квантора существования ($\exists$– правило),

где x не входит свободно в формулу F.

Понятия вывода и теоремы определяются аналогично соответствующим понятиям исчисления высказываний.

Возможны и другие системы аксиом и правил вывода.

Рассмотрим пример вывода в исчислении предикатов.

Пример. Доказать, что

$$\forall y(G \to F(y)) \vdash G \to \forall x F(x).$$

Решение. Построим вывод второй формулы из первой:

(1) $\forall y F(y) \to F(x)$ (*аксиома* $P1$);

(2) $\forall y F(y) \to \forall x F(x)$ ((1), $\forall -$*правило*);

(3) $\forall y(G \to F(y))$ (*гипотеза*);

(4) $\forall y(G \to F(y)) \to (G \to F(y))$ (*аксиома* $P1$);

(5) $G \to F(y)$ ((3),(4), *правило* MP);

(6) $G \to \forall y F(y)$ ((5), $\forall -$*правило*);

(7) $[\forall y F(y) \to \forall x F(x)] \to [G \to (\forall y F(y) \to \forall x F(x))]$
(*аксиома* $A1$);

(8) $G \to [\forall y F(y) \to \forall x F(x)]$ ((2),(7), *правило* MP);

(9) $[G \to (\forall y F(y) \to \forall x F(x)] \to [(G \to \forall y F(y)) \to (G \to \forall x F(x))]$
(*аксиома* $A2$);

(10) $[G \to \forall y F(y)] \to [G \to \forall x F(x)]$ ((8),(9), *правило* MP);

(11) $G \to \forall x F(x)$ ((6),(10), *правило* MP).

7. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

З а д а ч а 1

Решить системы логических уравнений:

1. **а)** $\begin{cases} a \leftrightarrow b \vee c = 0, \\ a \vee b \leftrightarrow c = 1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} a \,\&\, b \leftrightarrow c = 0, \\ a \to b \,\&\, c = 1. \end{cases}$

2. **а)** $\begin{cases} a \,\&\, b \leftrightarrow c = 1, \\ a \to b \,\&\, c = 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \overline{a} \vee b \to c = 0, \\ \overline{a} \to b \,\&\, c = 0. \end{cases}$

3. **а)** $\begin{cases} \overline{a} \,\&\, b \leftrightarrow c = 0, \\ \overline{a} \vee b \to c = 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} a \vee b \to c = 1, \\ a \,\&\, (b \to c) = 1. \end{cases}$

4. **а)** $\begin{cases} a \,\&\, b \leftrightarrow c = 1, \\ a \leftrightarrow b \,\&\, c = 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} a \,\&\, (c \to b) = 1, \\ a \to b \,\&\, c = 0. \end{cases}$

5. **а)** $\begin{cases} a \leftrightarrow b \vee c = 1, \\ a \vee b \to c = 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \overline{a} \vee b \leftrightarrow c = 0, \\ \overline{a} \to b \,\&\, c = 0. \end{cases}$

6. **а)** $\begin{cases} a \leftrightarrow b \vee c = 1, \\ a \vee b \leftrightarrow c = 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} a \,\&\, b \leftrightarrow \overline{c} = 0, \\ a \to b \vee \overline{c} = 0. \end{cases}$

7. **а)** $\begin{cases} a \vee b \leftrightarrow c = 0, \\ a \vee b \to c = 1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \overline{a} \vee b \to c = 0, \\ \overline{a} \leftrightarrow b \,\&\, c = 0. \end{cases}$

8. **а)** $\begin{cases} a \vee b \leftrightarrow c = 0, \\ a \leftrightarrow b \,\&\, c = 1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} a \leftrightarrow b \vee c = 0, \\ a \vee b \to c = 1. \end{cases}$

9. **а)** $\begin{cases} a \vee b \to \overline{c} = 0, \\ a \leftrightarrow b \,\&\, \overline{c} = 1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \overline{a} \vee b \to c = 0, \\ b \,\&\, (\overline{a} \to c) = 0. \end{cases}$

10. **а)** $\begin{cases} \overline{a} \to b \,\&\, c = 0, \\ \overline{a} \leftrightarrow b \vee c = 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \overline{a} \vee b \leftrightarrow c = 0, \\ \overline{a} \leftrightarrow b \,\&\, c = 0. \end{cases}$

11. **а)** $\begin{cases} a \vee b \leftrightarrow \overline{c} = 1, \\ a \to b \,\&\, \overline{c} = 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \overline{a} \,\&\, b \leftrightarrow c = 1, \\ \overline{a} \,\&\, (b \to c) = 0. \end{cases}$

12. **а)** $\begin{cases} a \leftrightarrow b \,\&\, c = 0, \\ a \to b \,\&\, c = 1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} a \vee b \leftrightarrow c = 1, \\ a \,\&\, (b \to c) = 1. \end{cases}$

13. **а)** $\begin{cases} a \vee b \to \bar{c} = 1, \\ a \to b \,\&\, \bar{c} = 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \bar{a} \to b \,\&\, c = 1, \\ (\bar{a} \to b) \,\&\, c = 0. \end{cases}$

14. **а)** $\begin{cases} \bar{a} \to b \,\&\, c = 0, \\ \bar{a} \vee b \leftrightarrow c = 1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \bar{a} \vee b \to c = 0, \\ b \,\&\, (\bar{a} \leftrightarrow c) = 0. \end{cases}$

15. **а)** $\begin{cases} a \vee b \to \bar{c} = 0, \\ a \to b \,\&\, \bar{c} = 1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} a \,\&\, (c \leftrightarrow b) = 1, \\ a \leftrightarrow b \,\&\, c = 0. \end{cases}$

16. **а)** $\begin{cases} a \,\&\, (b \to c) = 1, \\ (a \to b) \,\&\, c = 1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \bar{a} \,\&\, b \leftrightarrow c = 1, \\ \bar{a} \,\&\, (b \leftrightarrow c) = 0. \end{cases}$

17. **а)** $\begin{cases} a \vee b \leftrightarrow c = 0, \\ (a \to b) \,\&\, c = 1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} a \vee (b \leftrightarrow c) = 1, \\ a \vee b \leftrightarrow c = 0. \end{cases}$

18. **а)** $\begin{cases} a \,\&\, (b \leftrightarrow c) = 0, \\ (a \leftrightarrow b) \,\&\, c = 1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \bar{a} \leftrightarrow b \,\&\, c = 1, \\ (\bar{a} \to b) \,\&\, c = 0. \end{cases}$

19. **а)** $\begin{cases} a \,\&\, b \leftrightarrow c = 0, \\ (a \leftrightarrow b) \,\&\, c = 1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} a \vee (b \leftrightarrow c) = 1, \\ a \vee b \to c = 0. \end{cases}$

20. **а)** $\begin{cases} a \,\&\, (b \to c) = 1, \\ a \vee b \leftrightarrow c = 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \bar{a} \vee b \leftrightarrow c = 0, \\ \bar{a} \leftrightarrow b \,\&\, c = 0. \end{cases}$

21. **а)** $\begin{cases} a \,\&\, (b \leftrightarrow c) = 1, \\ (a \leftrightarrow b) \,\&\, c = 1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} a \,\&\, b \leftrightarrow c = 0, \\ (a \to b) \,\&\, c = 1. \end{cases}$

22. **а)** $\begin{cases} a \,\&\, b \leftrightarrow \bar{c} = 0, \\ a \vee (b \leftrightarrow \bar{c}) = 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} \bar{a} \leftrightarrow b \,\&\, c = 1, \\ (\bar{a} \leftrightarrow b) \,\&\, c = 0. \end{cases}$

23. **а)** $\begin{cases} a \,\&\, b \leftrightarrow c = 1, \\ (a \leftrightarrow b) \,\&\, c = 1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} a \leftrightarrow b \vee c = 1, \\ a \,\&\, (b \to c) = 1. \end{cases}$

24. **а)** $\begin{cases} a \,\&\, (b \leftrightarrow c) = 1, \\ (a \leftrightarrow b) \,\&\, c = 0; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} a \,\&\, (b \to c) = 0, \\ (a \to b) \,\&\, c = 1. \end{cases}$

25. **а)** $\begin{cases} a \vee b \leftrightarrow c = 0, \\ (a \leftrightarrow b) \,\&\, c = 1; \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} (a \leftrightarrow b) \vee c = 1, \\ a \,\&\, (b \to c) = 1. \end{cases}$

Пример. Решить систему логических уравнений:

$$\begin{cases} a \to b \,\&\, c = 1; \\ a \lor b \leftrightarrow c = 0. \end{cases}$$

Решение: *Первый способ.* Решаем первое уравнение системы. Отыскав все решения первого уравнения, выбираем из них те, которые удовлетворяют второму уравнению.

$a \to b \,\&\, c = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 0,\ b \,\&\, c = 0; \quad a = 0,\ b \,\&\, c = 1; \quad a = 1,\ b \,\&\, c = 1.$

Отсюда решениями первого уравнения будут

1) $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$; 2) $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$;
3) $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$; 4) $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$;
5) $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$.

Подставив найденные решения во второе уравнение, найдем решение системы

1) $0 \lor 0 \leftrightarrow 0 = 1 \neq 0$; 2) $0 \lor 0 \leftrightarrow 1 = 0 = 0$;
3) $0 \lor 1 \leftrightarrow 0 = 0 = 0$; 4) $0 \lor 1 \leftrightarrow 1 = 1 \neq 0$;
5) $1 \lor 1 \leftrightarrow 1 = 1 \neq 0$.

Таким образом, решениями системы будут второе и третье решения первого уравнения, то есть

$$a = 0,\ b = 0,\ c = 1; \quad a = 0,\ b = 1,\ c = 0.$$

Второй способ. Строим таблицы истинности для левых частей первого и второго уравнений и подчеркиваем строки, в которых их значения совпадают с соответствующими значениями правых частей уравнений.

a	b	c	(1) $b \,\&\, c$	$a \to (1)$	(2) $a \lor b$	$(2) \leftrightarrow b$
0	0	0	0	1	0	1
$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{1}$	0	1	0	0
$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\underline{0}$	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	1

1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

Решения: $a = 0,\ b = 0,\ c = 1;\ \ a = 0,\ b = 1,\ c = 0.$

Задача 2

Найти КНФ формул F. Являются ли формулы F тавтологиями?

1. а) $F = (a \& b \leftrightarrow a) \vee (a \vee b \leftrightarrow \overline{b})$; **б)** $F = (a \vee b \leftrightarrow c) \rightarrow (\overline{a} \& \overline{b} \leftrightarrow \overline{c})$.

2. а) $F = (a \& b \leftrightarrow b) \vee (a \vee b \leftrightarrow \overline{a})$; **б)** $F = (a \& b \leftrightarrow c) \rightarrow (\overline{a} \vee \overline{b} \leftrightarrow \overline{c})$.

3. а) $F = (a \& b \leftrightarrow a) \vee (\overline{a} \vee \overline{b} \leftrightarrow b)$; **б)** $F = (\overline{a} \& \overline{b} \leftrightarrow \overline{c}) \rightarrow (a \vee b \leftrightarrow c)$.

4. а) $F = (a \& b \leftrightarrow b) \vee (\overline{a} \vee \overline{b} \leftrightarrow a)$; **б)** $F = (\overline{a} \vee \overline{b} \leftrightarrow \overline{c}) \rightarrow (a \& b \leftrightarrow c)$.

5. а) $F = (a \& b \leftrightarrow \overline{a}) \vee (a \vee b \leftrightarrow b)$; **б)** $F = ((a \rightarrow b) \leftrightarrow c) \rightarrow (a \& \overline{b} \leftrightarrow \overline{c})$.

6. а) $F = (a \& b \leftrightarrow \overline{b}) \vee (a \vee b \leftrightarrow a)$; **б)** $F = (a \& \overline{b} \leftrightarrow \overline{c}) \rightarrow ((a \rightarrow b) \leftrightarrow c)$.

7. а) $F = (a \& b \leftrightarrow \overline{a}) \vee (\overline{a} \& \overline{b} \leftrightarrow \overline{b})$; **б)** $F = (a \leftrightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (\overline{a} \leftrightarrow b \leftrightarrow \overline{c})$.

8. а) $F = (a \& b \leftrightarrow \overline{b}) \vee (\overline{a} \vee \overline{b} \leftrightarrow \overline{a})$; **б)** $F = (\overline{a} \leftrightarrow b \& \overline{c}) \rightarrow (a \leftrightarrow (b \rightarrow c))$.

9. а) $F = (\overline{a} \vee \overline{b} \leftrightarrow a) \vee (a \vee b \leftrightarrow b)$; **б)** $F = (a \leftrightarrow b \& c) \rightarrow (a \rightarrow b \vee c)$.

10. а) $F = (\overline{a} \vee \overline{b} \leftrightarrow b) \vee (a \vee b \leftrightarrow a)$; **б)** $F = (a \leftrightarrow b \& c) \rightarrow (a \& b \rightarrow c)$.

11. а) $F = (\overline{a} \& \overline{b} \leftrightarrow a) \vee (\overline{a} \& \overline{b} \leftrightarrow \overline{b})$; **б)** $F = (a \vee b \leftrightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow b \vee c)$.

12. а) $F = (\overline{a} \vee \overline{b} \leftrightarrow b) \vee (\overline{a} \& \overline{b} \leftrightarrow \overline{a})$; **б)** $F = (a \vee b \leftrightarrow c) \rightarrow (a \& b \rightarrow c)$.

13. а) $F = (\overline{a} \& \overline{b} \leftrightarrow \overline{a}) \vee (a \vee b \leftrightarrow \overline{b})$; **б)** $F = (a \& b \leftrightarrow c) \rightarrow (c \rightarrow a \vee b)$.

14. а) $F = (a \leftrightarrow b) \vee (\overline{a} \leftrightarrow b)$; **б)** $F = (a \& b \leftrightarrow c) \rightarrow (b \& c \rightarrow a)$.

15. а) $F = (a \leftrightarrow b) \vee (a \leftrightarrow \overline{b})$; **б)** $F = (a \& b \leftrightarrow c) \rightarrow (a \& c \rightarrow b)$.

16. а) $F = (a \leftrightarrow b) \rightarrow (\overline{a} \leftrightarrow \overline{b})$; **б)** $F = (a \vee b \leftrightarrow c) \vee (a \vee b \leftrightarrow \overline{c})$.

17. а) $F = (\overline{a} \leftrightarrow \overline{b}) \rightarrow (a \leftrightarrow b)$; **б)** $F = (a \& b \leftrightarrow c) \vee (a \& b \leftrightarrow \overline{c})$.

18. а) $F = (a \& b \leftrightarrow a) \rightarrow (a \vee b \leftrightarrow b)$; **б)** $F = (a \leftrightarrow b \vee c) \vee (\overline{a} \leftrightarrow b \vee c)$.

19. а) $F = (a \vee b \leftrightarrow b) \rightarrow (a \& b \leftrightarrow a)$; **б)** $F = (a \leftrightarrow b \& c) \vee (\overline{a} \leftrightarrow b \& c)$.

20. а) $F=(a\&b\leftrightarrow b)\to(a\vee b\leftrightarrow a)$; **б)** $F=(a\vee b\leftrightarrow c)\vee(\overline{a}\&\overline{b}\leftrightarrow c)$.

21. а) $F=(a\vee b\leftrightarrow a)\to(a\&b\leftrightarrow b)$; **б)** $F=(a\&b\leftrightarrow c)\vee(\overline{a}\vee\overline{b}\leftrightarrow c)$.

22. а) $F=(a\&b\leftrightarrow\overline{a})\to(a\vee b\leftrightarrow\overline{b})$; **б)** $F=(a\&\overline{b}\leftrightarrow c)\vee(\overline{a}\vee b\leftrightarrow c)$.

23. а) $F=(a\vee b\leftrightarrow\overline{b})\to(a\&b\leftrightarrow\overline{a})$; **б)** $F=(\overline{a}\vee b\leftrightarrow c)\vee(a\&\overline{b}\leftrightarrow c)$.

24. а) $F=(a\&b\leftrightarrow\overline{b})\to(a\vee b\leftrightarrow\overline{a})$; **б)** $F=((a\to b)\leftrightarrow c)\vee((a\to b)\leftrightarrow\overline{c})$.

25. а) $F=(a\vee b\leftrightarrow\overline{a})\to(a\&b\leftrightarrow\overline{b})$; **б)** $F=(a\leftrightarrow(b\to c))\vee(a\leftrightarrow b\&\overline{c})$.

Пример. Найти КНФ формулы *F*: $F=(x\leftrightarrow y)\&(\overline{z\to t})$. Является ли формула *F* тавтологией?

Решение

$$F=(x\leftrightarrow y)\&(\overline{z\to t})\cong((\overline{x}\vee y)\&(\overline{y}\vee x))\&(\overline{\overline{z}\to t})\cong$$
$$\cong((\overline{x}\vee y)\&(\overline{y}\vee x))\&z\&\overline{t}=(\overline{x}\vee y)\&(\overline{y}\vee x)\&z\&\overline{t}.$$

Последнее выражение является КНФ, так как представляет собой конъюнкцию дизъюнктивных одночленов $Д_1=(\overline{x}\vee y)$, $Д_2=(\overline{y}\vee x)$, $Д_3=z$, $Д_4=\overline{t}$. Очевидно, формула *F* не является тавтологией, так как условие теоремы 5 (из раздела 1.4) не выполняется.

Задача 3

Найти ДНФ заданной формулы *F*. Является ли формула *F* противоречием?

1. а) $F=(a\&b\leftrightarrow a)\&(a\vee b\leftrightarrow\overline{b})$; **б)** $F=(a\&b\leftrightarrow\overline{b})\&(b\&c\leftrightarrow\overline{c})$.

2. а) $F=(a\&b\leftrightarrow b)\&(a\vee b\leftrightarrow\overline{a})$; **б)** $F=(a\leftrightarrow b\&c)\&(a\vee b\leftrightarrow\overline{b})$.

3. а) $F=(a\&b\leftrightarrow a)\&(\overline{a}\vee\overline{b}\leftrightarrow b)$; **б)** $F=(a\&c\leftrightarrow\overline{a})\&(b\&c\leftrightarrow\overline{c})$.

4. а) $F=(a\&b\leftrightarrow b)\&(\overline{a}\&\overline{b}\leftrightarrow a)$; **б)** $F=(a\leftrightarrow b\vee c)\&(a\&b\leftrightarrow\overline{b})$.

5. а) $F=(a\&b\leftrightarrow\overline{a})\&(a\vee b\leftrightarrow b)$; **б)** $F=(a\leftrightarrow b\vee c)\&(a\vee c\leftrightarrow\overline{c})$.

6. а) $F=(a\&b\leftrightarrow\overline{b})\&(a\vee b\leftrightarrow a)$; **б)** $F=(a\&b\leftrightarrow\overline{a})\&(b\&c\leftrightarrow\overline{b})$.

7. а) $F=(a\&b\leftrightarrow\overline{a})\&(\overline{a}\&\overline{b}\leftrightarrow\overline{b})$; **б)** $F=(a\leftrightarrow b\vee c)\&(a\&c\leftrightarrow\overline{c})$.

8. а) $F=\left(a\,\&\,b\leftrightarrow\overline{b}\right)\&\left(\overline{a}\,\&\,\overline{b}\leftrightarrow\overline{a}\right)$; **б)** $F=\left(\overline{a}\leftrightarrow b\,\&\,c\right)\&\left(a\,\&\,\overline{b}\leftrightarrow b\right)$.

9. а) $F=\left(\overline{a}\vee\overline{b}\leftrightarrow a\right)\&\left(a\vee b\leftrightarrow b\right)$; **б)** $F=\left(a\,\&\,b\leftrightarrow\overline{b}\right)\&\left(a\,\&\,c\leftrightarrow\overline{a}\right)$.

10. а) $F=\left(\overline{a}\vee\overline{b}\leftrightarrow b\right)\&\left(a\vee b\leftrightarrow a\right)$; **б)** $F=\left(a\leftrightarrow b\,\&\,c\right)\&\left(\overline{a}\,\&\,\overline{b}\to b\right)$.

11. а) $F=\left(\overline{a}\vee\overline{b}\leftrightarrow a\right)\&\left(\overline{a}\,\&\,\overline{b}\leftrightarrow\overline{b}\right)$; **б)** $F=\left(\overline{a}\leftrightarrow b\vee c\right)\&\left(a\vee\overline{b}\leftrightarrow b\right)$.

12. а) $F=\left(\overline{a}\vee\overline{b}\leftrightarrow b\right)\&\left(\overline{a}\,\&\,\overline{b}\leftrightarrow\overline{a}\right)$; **б)** $F=\left(a\,\&\,c\leftrightarrow\overline{c}\right)\&\left(b\,\&\,c\to\overline{b}\right)$.

13. а) $F=\left(\overline{a}\vee\overline{b}\leftrightarrow\overline{a}\right)\&\left(a\vee b\leftrightarrow\overline{b}\right)$; **б)** $F=\left(\overline{a}\leftrightarrow b\,\&\,c\right)\&\left(a\,\&\,\overline{c}\leftrightarrow c\right)$.

14. а) $F=\left(a\leftrightarrow b\right)\&\left(\overline{a}\leftrightarrow b\right)$; **б)** $F=\left(a\leftrightarrow b\vee c\right)\&\left(\overline{a}\vee\overline{b}\leftrightarrow b\right)$.

15. а) $F=\left(a\leftrightarrow b\right)\&\left(a\leftrightarrow\overline{b}\right)$; **б)** $F=\left(a\,\&\,b\leftrightarrow\overline{a}\right)\&\left(a\,\&\,c\leftrightarrow\overline{c}\right)$.

16. а) $F=\left(a\vee b\leftrightarrow\overline{b}\right)\leftrightarrow\left(a\to b\right)$; **б)** $F=\left(a\vee b\leftrightarrow c\right)\&\left(a\vee b\leftrightarrow\overline{c}\right)$.

17. а) $F=\left(a\,\&\,b\leftrightarrow\overline{b}\right)\leftrightarrow\left(b\to a\right)$; **б)** $F=\left(a\,\&\,b\leftrightarrow c\right)\&\left(a\,\&\,b\leftrightarrow\overline{c}\right)$.

18. а) $F=\left(\left(b\to a\right)\leftrightarrow\overline{b}\right)\leftrightarrow\left(a\,\&\,b\right)$; **б)** $F=\left(a\leftrightarrow b\vee c\right)\&\left(\overline{a}\leftrightarrow b\vee c\right)$.

19. а) $F=\left(\left(a\to b\right)\leftrightarrow\overline{b}\right)\leftrightarrow\left(a\vee b\right)$; **б)** $F=\left(a\leftrightarrow b\,\&\,c\right)\&\left(\overline{a}\leftrightarrow b\,\&\,c\right)$.

20. а) $F=\left(\left(b\to\overline{a}\right)\leftrightarrow b\right)\leftrightarrow\left(b\to a\right)$; **б)** $F=\left(a\vee b\leftrightarrow c\right)\&\left(\overline{a}\,\&\,\overline{b}\leftrightarrow c\right)$.

21. а) $F=\left(a\vee b\leftrightarrow\overline{a}\right)\leftrightarrow\left(b\to a\right)$; **б)** $F=\left(a\,\&\,b\leftrightarrow c\right)\&\left(\overline{a}\vee\overline{b}\leftrightarrow c\right)$.

22. а) $F=\left(a\,\&\,b\leftrightarrow\overline{a}\right)\leftrightarrow\left(a\to b\right)$; **б)** $F=\left(a\,\&\,\overline{b}\leftrightarrow c\right)\&\left(\overline{a}\vee b\leftrightarrow c\right)$.

23. а) $F=\left(\left(a\to b\right)\leftrightarrow\overline{a}\right)\leftrightarrow\left(a\,\&\,b\right)$; **б)** $F=\left(\overline{a}\vee b\leftrightarrow c\right)\&\left(a\,\&\,\overline{b}\leftrightarrow c\right)$.

24. а) $F=\left(\left(b\to a\right)\leftrightarrow\overline{a}\right)\leftrightarrow\left(a\vee b\right)$; **б)** $F=\left(\left(a\to b\right)\leftrightarrow c\right)\&\left(\left(a\to b\right)\leftrightarrow\overline{c}\right)$.

25. а) $F=\left(\left(a\to\overline{b}\right)\leftrightarrow\overline{a}\right)\leftrightarrow\left(a\to b\right)$; **б)** $F=\left(a\leftrightarrow\left(b\to c\right)\right)\&\left(a\leftrightarrow b\,\&\,\overline{c}\right)$.

Пример. Найти ДНФ формулы *F*:

$$F=\left(\left(x\,\&\,\overline{y}\right)\vee\left(x\,\&\,\overline{z}\right)\right)\leftrightarrow\left(\left(x\to y\right)\&\left(x\to z\right)\right).$$

Является ли формула *F* противоречием?

Решение

$$
\begin{gathered}
((x \& \bar{y}) \vee (x \& \bar{z})) \leftrightarrow ((x \to y) \& (x \to z)) \cong \Big(\overline{((x \& \bar{y}) \vee (x \& \bar{z}))} \vee \\
\vee ((\bar{x} \vee y) \& (\bar{x} \vee z))\Big) \& \Big(\overline{((\bar{x} \vee y) \& (\bar{x} \vee z))} \vee ((x \& \bar{y}) \vee (x \& \bar{z}))\Big) \cong \\
\cong (((\bar{x} \vee y) \& (\bar{x} \vee z)) \vee ((\bar{x} \vee y) \& (\bar{x} \vee z))) \& (((x \& \bar{y}) \vee (x \& \bar{z})) \vee \\
\vee ((x \& \bar{y}) \vee (x \& \bar{z}))) \cong ((\bar{x} \& \bar{x} \vee \bar{x} \& z \vee y \& \bar{x} \vee y \& z) \vee \\
\vee (\bar{x} \& \bar{x} \vee \bar{x} \& z \vee y \& \bar{x} \vee y \& z)) \& (x \& \bar{y} \vee x \& \bar{z} \vee x \& \bar{y} \vee x \& \bar{z}) \cong \\
\cong (\bar{x} \& \bar{x} \vee \bar{x} \& z \vee y \& \bar{x} \vee y \& z \vee \bar{x} \& \bar{x} \vee \bar{x} \& z \vee y \& \bar{x} \vee y \& z) \& \\
\& (x \& \bar{y} \vee x \& \bar{z} \vee x \& \bar{y} \vee x \& \bar{z}) \cong \bar{x} \& \bar{x} \& x \& \bar{y} \vee \bar{x} \& \bar{x} \& x \& \\
\& \bar{z} \vee \bar{x} \& \bar{x} \& x \& \bar{y} \vee \bar{x} \& \bar{x} \& x \& \bar{z} \vee \bar{x} \& z \& x \& \bar{y} \vee \bar{x} \& z \& \\
\& x \& \bar{z} \vee \bar{x} \& z \& x \& \bar{y} \vee \bar{x} \& z \& x \& \bar{z} \vee y \& \bar{x} \& x \& \bar{y} \vee y \& \\
\& \bar{x} \& x \& \bar{z} \vee y \& \bar{x} \& x \& \bar{y} \vee y \& \bar{x} \& x \& \bar{z} \vee y \& z \& x \& \bar{y} \vee y \& \\
\& z \& x \& \bar{z} \vee y \& z \& x \& \bar{y} \vee y \& z \& x \& \bar{z} \vee \bar{x} \& \bar{x} \& x \& \bar{y} \vee \bar{x} \& \\
\& \bar{x} \& x \& \bar{z} \vee \bar{x} \& \bar{x} \& x \& \bar{y} \vee \bar{x} \& \bar{x} \& x \& \bar{z} \vee \bar{x} \& z \& x \& \bar{y} \vee \bar{x} \& \\
\& z \& x \& \bar{z} \vee \bar{x} \& z \& x \& \bar{y} \vee \bar{x} \& z \& x \& \bar{z} \vee y \& \bar{x} \& x \& \bar{y} \vee y \& \\
\& \bar{x} \& x \& \bar{z} \vee y \& \bar{x} \& x \& \bar{y} \vee y \& \bar{x} \& x \& \bar{z} \vee y \& z \& x \& \bar{y} \vee y \& \\
\& z \& x \& \bar{z} \vee y \& z \& x \& \bar{y} \vee y \& z \& x \& \bar{z} \cong 0.
\end{gathered}
$$

Поскольку полученная формула является дизъюнкцией конъюнктивных одночленов, то это ДНФ. Согласно теореме 5 (из раздела 1.4), она равносильна 0, то есть является противоречием.

Следует заметить, что самый быстрый переход от ДНФ к КНФ и обратно осуществляется на основе «***чудо - закона***».

Задача 4

Доказать равносильность формул: 1) составлением таблиц истинности; 2) приведением формул к СДНФ или СКНФ с помощью равносильных преобразований.

1. а) $a \leftrightarrow (a \to b) = b \leftrightarrow (b \to a)$; **б)** $(a \leftrightarrow b) \vee c = a \vee c \leftrightarrow b \vee c$.

2. а) $(a \leftrightarrow b) \to b = (a \leftrightarrow b) \to a$; **б)** $a \& (b \leftrightarrow c) = a \& b \leftrightarrow \bar{a} \vee c$.

3. а) $a \to (a \leftrightarrow b) = \bar{b} \to (a \leftrightarrow b)$; **б)** $a \to (b \leftrightarrow c) = a \& b \leftrightarrow a \& c$.

4. а) $\bar{a} \leftrightarrow (b \to a) = \bar{b} \leftrightarrow (a \to b)$; **б)** $(a \leftrightarrow b) \to c = (\bar{a} \to c) \leftrightarrow (b \to c)$.

5. а) $a \leftrightarrow (b \to a) = b \leftrightarrow (a \to b)$; **б)** $c \to (a \leftrightarrow b) = (c \to a) \leftrightarrow (c \to b)$.

6. а) $b \to (a \leftrightarrow b) = \bar{a} \to (a \leftrightarrow b)$; **б)** $a \& b \leftrightarrow c = (a \leftrightarrow c) \leftrightarrow (a \to b)$.

7. а) $a \vee b \leftrightarrow b = a \rightarrow (a \leftrightarrow b)$; **б)** $(a \leftrightarrow b) \vee c = (a \rightarrow b) \leftrightarrow (b \rightarrow c)$.

8. а) $\overline{a} \leftrightarrow (a \rightarrow b) = \overline{b} \leftrightarrow (b \rightarrow a)$; **б)** $(a \leftrightarrow b) \& c = a \vee \overline{c} \leftrightarrow b \& c$.

9. а) $a \leftrightarrow a \& b = a \vee b \leftrightarrow b$; **б)** $c \rightarrow (a \leftrightarrow b) = \overline{a} \& c \leftrightarrow \overline{b} \& c$.

10. а) $(a \leftrightarrow b) \rightarrow \overline{b} = (a \leftrightarrow b) \rightarrow \overline{a}$; **б)** $\overline{a} \rightarrow (b \leftrightarrow c) = (b \rightarrow a) \leftrightarrow (c \rightarrow a)$.

11. а) $(\overline{a} \leftrightarrow b) \rightarrow b = a \rightarrow (a \leftrightarrow b)$; **б)** $a \rightarrow (b \leftrightarrow c) = (a \rightarrow \overline{b}) \leftrightarrow (a \rightarrow \overline{c})$.

12. а) $a \& b \leftrightarrow b = a \leftrightarrow a \vee b$; **б)** $a \vee b \leftrightarrow c = (a \leftrightarrow c) \leftrightarrow (b \rightarrow a)$.

13. а) $a \leftrightarrow a \& b = a \rightarrow (a \leftrightarrow b)$; **б)** $a \vee (b \leftrightarrow c) = a \vee \overline{b} \leftrightarrow a \vee \overline{c}$.

14. а) $(\overline{a} \leftrightarrow b) \rightarrow a = b \rightarrow (a \leftrightarrow b)$; **б)** $b \& (a \leftrightarrow c) = a \vee \overline{b} \leftrightarrow b \& c$.

15. а) $\overline{b} \leftrightarrow (\overline{b} \rightarrow a) = \overline{a} \leftrightarrow a \& b$; **б)** $a \& b \leftrightarrow c = (b \leftrightarrow c) \leftrightarrow (b \rightarrow a)$.

16. а) $b \rightarrow (a \leftrightarrow b) = a \& b \leftrightarrow b$; **б)** $(a \leftrightarrow c) \rightarrow b = (a \rightarrow b) \leftrightarrow (\overline{c} \rightarrow b)$.

17. а) $a \vee b \leftrightarrow \overline{a} = \overline{b} \leftrightarrow a \& b$; **б)** $b \rightarrow (a \leftrightarrow c) = (a \rightarrow \overline{b}) \leftrightarrow (c \rightarrow \overline{b})$.

18. а) $\overline{b} \rightarrow (a \leftrightarrow b) = a \leftrightarrow a \& b$; **б)** $(a \rightarrow b) \leftrightarrow c = (\overline{a} \leftrightarrow c) \leftrightarrow (a \rightarrow \overline{b})$.

19. а) $\overline{a} \rightarrow (a \leftrightarrow b) = a \& b \leftrightarrow b$; **б)** $b \vee (a \leftrightarrow c) = (a \& \overline{b}) \leftrightarrow (\overline{b} \& c)$.

20. а) $a \& b \leftrightarrow \overline{a} = \overline{b} \leftrightarrow a \vee b$; **б)** $(b \leftrightarrow c) \& \overline{a} = \overline{a} \& \overline{b} \leftrightarrow a \vee \overline{c}$.

21. а) $b \leftrightarrow (\overline{b} \rightarrow a) = \overline{a} \leftrightarrow (a \rightarrow \overline{b})$; **б)** $a \vee b \leftrightarrow c = (b \leftrightarrow c) \leftrightarrow (a \rightarrow b)$.

22. а) $b \rightarrow (a \leftrightarrow b) = a \leftrightarrow a \vee b$; **б)** $\overline{a} \leftrightarrow (b \rightarrow c) = (a \leftrightarrow b) \leftrightarrow (b \rightarrow \overline{c})$.

23. а) $\overline{b} \rightarrow (a \leftrightarrow b) = a \vee b \leftrightarrow b$; **б)** $a \leftrightarrow b \& c = (a \leftrightarrow c) \leftrightarrow (c \rightarrow b)$.

24. а) $\overline{a} \leftrightarrow (\overline{a} \rightarrow b) = \overline{b} \leftrightarrow a \& b$; **б)** $(b \rightarrow a) \leftrightarrow c = (a \leftrightarrow c) \leftrightarrow (\overline{a} \rightarrow b)$.

25. а) $\overline{a} \rightarrow (a \leftrightarrow b) = a \leftrightarrow a \vee b$; **б)** $(\overline{a} \leftrightarrow \overline{b}) \& \overline{c} = a \vee c \leftrightarrow b \& \overline{c}$.

Пример. Доказать равносильность формул

$$F = (P \rightarrow Q) \& (Q \rightarrow \overline{P}) \& (R \rightarrow P) \cong \overline{P} \& \overline{R} = G$$

с помощью: 1) таблиц истинности; 2) равносильных преобразований.

Решение: *Первый способ*. Строим таблицы истинности для формул F и G:

P	Q	R	(1) $P \to Q$	(2) $Q \to \overline{P}$	(3) $R \to P$	F (1)&(2)&(3)	G $\overline{P} \,\&\, \overline{R}$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	0	0
I	1	0	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	1	0	0

Из построенных таблиц для F и G видно, что их значения для конкретных высказываний совпадают.

Второй способ. Приведём формулу F равносильными преобразованиями к формуле G.

$$F = (P \to Q) \,\&\, \left(Q \to \overline{P}\right) \,\&\, (R \to P) \overset{(1)}{\cong} \left(\overline{P} \vee Q\right) \,\&\, \left(\overline{Q} \vee \overline{P}\right) \,\&\, \left(\overline{R} \vee P\right) \overset{(2)}{\cong}$$

$$\overset{(2)}{\cong} \left(\left(\overline{P} \,\&\, \overline{Q}\right) \vee \left(\overline{P} \,\&\, \overline{P}\right) \vee \left(Q \,\&\, \overline{Q}\right) \vee \left(Q \,\&\, \overline{P}\right)\right) \,\&\, \left(\overline{R} \vee P\right) \overset{(3)}{\cong} \overline{P} \,\&\, \left(\overline{R} \vee P\right) \overset{(4)}{\cong}$$

$$\overset{(4)}{\cong} \overline{P} \,\&\, \overline{R} \vee \overline{P} \,\&\, P \cong \overline{P} \,\&\, \overline{R} = G.$$

Преобразование (1) осуществляется с использованием равносильности $x \to y = \overline{x} \vee y$. Преобразование (2) осуществляется с использованием дистрибутивности операции & относительно $\vee$ к двум первым скобкам.

Преобразование (3) осуществляется с использованием следующих равносильностей:

а) $x \,\&\, x \cong x$; б) $x \,\&\, (x \vee y) \cong x$;

в) $x \,\&\, \overline{x} \cong 0$; г) $x \vee 0 \cong x$.

Преобразование (4) осуществляется с использованием дистрибутивности операции & относительно $\vee$. Преобразование (5) осуществляется с использованием равносильностей в), г), использованных при преобразовании (3).

Задача 5

Проверить правильность умозаключений методом от противного:

1. **а)** Если противоположные стороны четырехугольника попарно параллельны, то он является параллелограммом. Если четырехугольник – ромб, то его противоположные стороны попарно параллельны. Следовательно, если четырехугольник – ромб, то он – параллелограмм.

б) Матрица обладает обратной тогда и только тогда, когда она является невырожденной и ее определитель отличен от нуля. Матрица является невырожденной тогда и только тогда, когда ее определитель отличен от нуля. Следовательно, матрица обладает обратной тогда и только тогда, когда она является невырожденной.

2. **а)** Четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его противоположные стороны попарно равны и параллельны. Если противоположные стороны четырехугольника попарно параллельны, то они равны. Следовательно, четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его противоположные стороны попарно параллельны.

б) Если система векторов содержит нулевой вектор или два одинаковых вектора, то она является линейно зависимой. Данная система векторов линейно независима. Следовательно, система не содержит ни нулевого вектора, ни одинаковых векторов.

3. **а)** Если формула является выполнимой, то она является тавтологией или не является противоречием. Если формула – тавтология, то она не является противоречием. Следовательно, если формула – выполнимая, то она не является противоречием.

б) Если матрица A – невырожденная, то ее определитель отличен от нуля, а ее строки образуют линейно независимую систему векторов. Если определитель отличен от нуля, то матрица A – невырожденная и ее строки образуют линейно независимую систему векторов. Следовательно, матрица A – невырожденная тогда и только тогда, когда ее определитель отличен от нуля.

4. **а)** Если число векторов совпадает с рангом системы, то система векторов линейно независима и является базисом. Если система векторов линейно независима или является базисом, то число векторов в системе совпадает с ее рангом. Следовательно, система векторов является базисом тогда и только тогда, когда число векторов в ней совпадает с рангом системы.

б) Если я приду в институт и получу стипендию, то я пойду на занятия. Если я приду в институт и не пойду на занятия, то я все равно получу стипендию. Следовательно, я пойду на занятия или не приду в институт.

5. **а)** Если последовательность монотонная и ограниченная, то она имеет предел. Если последовательность монотонная и имеет предел, то она ограничена. Данная последовательность монотонная. Следовательно, монотонная последовательность имеет предел тогда и только тогда, когда она ограничена.

б) Параллелограмм является прямоугольником тогда и только тогда, когда его диагонали или все его углы равны. Диагонали параллелограмма равны тогда и только тогда, когда все его углы равны между собой. Следовательно, параллелограмм является прямоугольником тогда и только тогда, когда его диагонали равны.

6. **а)** Если данный параллелограмм имеет равные диагонали, то он является прямоугольником или квадратом. Данный параллелограмм не является квадратом. Следовательно, если данный параллелограмм имеет равные диагонали, то он является прямоугольником.

б) Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр в десятичной записи делится на 3 или на 9. Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр в десятичной записи делится на 3. Следовательно, если сумма цифр в десятичной записи делится на 9, то число делится на 3.

7. **а)** Матрица обладает обратной тогда и только тогда, когда она является невырожденной и ее определитель отличен от нуля. Матрица является невырожденной тогда и только тогда, когда ее определитель отличен от нуля. Следовательно, матрица обладает обратной тогда и только тогда, когда ее определитель отличен от нуля.

б) Если четырехугольник – параллелограмм, то его противоположные стороны попарно параллельны. Если четырехугольник – ромб, то две его противоположные стороны попарно параллельны. Следовательно, если четырехугольник – ромб, то он – параллелограмм.

8. **а)** Треугольник является равнобедренным тогда и только тогда, когда его боковые стороны и углы при основании равны. Треугольник является равнобедренным тогда и только тогда, когда его боковые стороны равны. Следовательно, если боковые стороны треугольника равны, то равны и углы при основании.

б) Четырехугольник является квадратом или ромбом тогда и только тогда, когда все его стороны равны. Если четырехугольник – квадрат, то он является и ромбом. Следовательно, четырехугольник является ромбом тогда и только тогда, когда все его стороны равны.

9. **а)** Если матрица A – невырожденная, то ее определитель отличен от нуля, а ее строки образуют линейно независимую систему векторов. Если определитель отличен от нуля, то матрица A – невырожденная и ее строки образуют линейно независимую систему векторов. Следовательно, если матрица A – невырожденная и ее определитель отличен от нуля, то строки этой матрицы образуют линейно независимую систему векторов.

б) Четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его противоположные стороны равны и параллельны. Данный четырехугольник имеет равные противоположные стороны. Следовательно, данный четырехугольник будет параллелограммом тогда и только тогда, когда его противоположные стороны параллельны.

10. **а)** Целое число делится на 6 тогда и только тогда, когда оно делится на 2 и на 3. Данное число не делится на 6. Следовательно, если данное число делится на 2, то оно не делится на 3.

б) Если число векторов совпадает с рангом системы, то система векторов линейно независима и является базисом. Если система векторов линейно независима или является базисом, то число векторов в системе совпадает с ее рангом. Следовательно, система векторов является базисом тогда и только тогда, когда она линейно независима.

11. **а)** Параллелограмм является прямоугольником тогда и только тогда, когда его диагонали или все его углы равны. Диагонали параллелограмма равны тогда и только тогда, когда все его углы равны между собой. Следовательно, параллелограмм является прямоугольником тогда и только тогда, когда все его углы равны.

б) Если функция дифференцируемая и ее производная положительна, то функция монотонно возрастающая. Если функция дифференцируемая и монотонно возрастающая, то производная функции положительна. Следовательно, если функция дифференцируемая, то она является монотонно возрастающей тогда и только тогда, когда ее производная положительна.

12. **а)** Если волки будут сыты, а овцы целы, то пастухи будут довольны. Если волки не будут сыты, то пастухи будут довольны тогда и только тогда, когда овцы целы. Следовательно, если пастухи довольны, то волки сыты или овцы целы.

б) Число является четным тогда и только тогда, когда оно делится на 2 или на 4. Число является четным тогда и только тогда, когда оно делится на 2. Следовательно, если число делится на 4, то оно четное и делится на 2.

13. **а)** Неверно, что если Анри украл машину, то Луи и Том видели это. Луи видел, как Анри украл машину. Следовательно, Анри украл машину, но Том не видел этого.

б) Число делится на 5 тогда и только тогда, когда оно оканчивается нулем или цифрой 5. Данное число не оканчивается цифрой 5. Следовательно, данное число делится на 5 тогда и только тогда, когда оно оканчивается нулем.

14. **а)** Если целое число делится на 2 и на 3, то оно делится на 6. Если целое число делится на 2 и не делится на 3, то оно не делится на 6. Следовательно, если целое число делится на 2, то оно делится на 6 тогда и только тогда, когда оно делится на 3.

б) Треугольник является равнобедренным тогда и только тогда, когда его боковые стороны и углы при основании равны. Если боковые стороны треугольника равны, то равны и углы при основании. Следовательно, треугольник является равнобедренным тогда и только тогда, когда его боковые стороны равны.

15. **а)** Подсистема векторов является базисом исходной системы тогда и только тогда, когда она линейно независима и любой вектор исходной системы линейно выражается через векторы этой подсистемы. Данная подсистема векторов является линейно независимой. Следовательно, данная подсистема векторов является базисом исходной системы тогда и только тогда, когда любой вектор исходной системы линейно выражается через векторы этой подсистемы.

б) Если сторож выходил на работу и у преступника был ключ, то ограбление произошло в субботу. Если у преступника был ключ, и ограбление произошло в субботу, то сторож не выходил на работу. Следовательно, если сторож выходил на работу, то у преступника не было ключа.

16. **а)** Если число векторов совпадает с рангом системы, то система векторов линейно независима и является базисом. Если система векторов линейно независима или является базисом, то число векторов в системе совпадает с ее рангом. Следовательно, система векторов линейно независима тогда и только тогда, когда число векторов в ней совпадает с рангом системы.

б) Целое число делится на 6 тогда и только тогда, когда оно делится на 2 и на 3. Если данное число делится на 2, то оно не делится на 3. Следовательно, данное число не делится на 6.

17. **а)** Если производная функции в точке равна нулю и при переходе через нее меняет знак с плюса на минус, то данная точка является точкой максимума функции. Если производная в точке равна нулю и эта точка является точкой максимума функции, то производная при переходе через нее меняет знак с плюса на минус. Следовательно, если производная в точке равна нулю, то точка является точкой максимума тогда и только тогда, когда производная при переходе через нее меняет знак с плюса на минус.

б) Параллелограмм является прямоугольником тогда и только тогда, когда его диагонали равны. Диагонали параллелограмма равны тогда и только тогда, когда все его углы равны между собой. Следовательно, параллелограмм является прямоугольником тогда и только тогда, когда диагонали или все его углы равны.

18. **а)** Система линейных уравнений разрешима и имеет единственное решение тогда и только тогда, когда число неизвестных совпадает с рангом системы. Число неизвестных данной системы линейных уравнений не совпадает с рангом системы. Следовательно, если система линейных уравнений разрешима, то она имеет неединственное решение.

б) Если музыкант принесет ноты, то мы пойдем на его концерт, если инструмент будет настроен. Если инструмент будет настроен, то музыкант принесет ноты, если мы придем на его концерт. Инструмент будет настроен. Следовательно, мы придем на концерт тогда и только тогда, когда музыкант принесет ноты.

19. **а)** Параллелограмм является ромбом тогда и только тогда, когда все его стороны равны. Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то этот параллелограмм – ромб. Следовательно, параллелограмм является ромбом, если все его стороны равны или диагонали перпендикулярны.

б) Известно, что свидетель ошибся или злоумышленник не уехал в экипаже. Если злоумышленник имел сообщника, то он уехал в экипаже. У злоумышленника не было ни сообщника, ни ключа или у него был сообщник и был ключ. Следовательно, если у злоумышленника был ключ, то свидетель ошибся.

20. **а)** Треугольник является равнобедренным тогда и только тогда, когда его боковые стороны равны. Если боковые стороны треугольника равны, то равны и углы при основании. Следовательно, треугольник является равнобедренным тогда и только тогда, когда его боковые стороны и углы при основании равны.

б) Если я сдам все зачеты и экзамен по логике, то пойду на свидание. Если я сдам экзамен по логике и не пойду на свидание, то я сдам все зачеты. Следовательно, либо я пойду на свидание, либо не сдам экзамен по логике.

21. **а)** Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр в десятичной записи делится на 3. Если число делится на 9, то оно делится на 3, Следовательно, если число делится на 9, то сумма его цифр в десятичной записи делится на 3.

б) Если функция дифференцируемая и ее производная монотонно возрастает, то функция является выпуклой вниз. Если функция дифференцируемая и является выпуклой вниз, то ее производная монотонно возрастает. Следовательно, если функция дифференцируемая, то она является выпуклой вниз тогда и только тогда, когда ее производная монотонно возрастает.

22. **а)** Четырехугольник является квадратом или ромбом тогда и только тогда, когда все его стороны равны. Четырехугольник не является квадратом. Следовательно, четырехугольник является ромбом тогда и только тогда, когда все его стороны равны.

б) Если матрица A – невырожденная, то ее определитель отличен от нуля, а ее строки образуют линейно независимую систему векторов. Если определитель отличен от нуля, то матрица A – невырожденная и ее строки образуют линейно независимую систему векторов. Следовательно, определитель отличен от нуля тогда и только тогда, когда матрица A является невырожденной и ее строки образуют линейно независимую систему векторов.

23. **а)** Четырехугольник является ромбом тогда и только тогда, когда он является квадратом или когда все его стороны равны. Если четырехугольник является квадратом, то все его стороны равны. Следовательно, четырехугольник является ромбом тогда и только тогда, когда все его стороны равны.

б) Если последовательность монотонная и ограниченная, то она имеет предел. Если последовательность монотонная и имеет предел, то она ограничена. Следовательно, если последовательность монотонная, то она ограничена тогда и только тогда, когда имеет предел.

24. **а)** Четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его противоположные стороны попарно параллельны. Четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его диагонали в точке пересечения делятся пополам. Следовательно, четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его противоположные стороны попарно параллельны или когда его диагонали в точке Пересечения делятся пополам.

б) Система линейных уравнений разрешима и имеет единственное решение тогда и только тогда, когда число неизвестных совпадает с рангом системы. Данная система линейных уравнений имеет неединственное решение. Следовательно, число неизвестных данной системы не совпадает с рангом.

25. **а)** Если прямая l перпендикулярна прямым a и b, то прямые a и b параллельны. Если l перпендикулярна прямой b и прямые a и b параллельны, то l перпендикулярна a. Следовательно, если l перпендикулярна прямой b, то прямые a и b параллельны тогда и только тогда, когда l перпендикулярна прямой a.

б) Два множества равны друг другу тогда и только тогда, когда они состоят из одних и тех же элементов. Следовательно, два множества не равны друг другу тогда и только тогда, когда они не состоят из одних и тех же элементов.

Формула H является ***логическим следствием*** формул $F_1, F_2, ..., F_m$, если из одновременной истинности формул $F_1, F_2, ..., F_m$ следует истинность формулы H. Таким образом, если построить таблицу истинности формул $F_1, F_2, ..., F_m$, H, то в строках таблицы, в которых все формулы $F_1, F_2, ..., F_m$ одновременно истинны, формула H, если она является следствием $F_1, F_2, ..., F_m$, обязана также быть истинной. В этом случае пишут $F_1, F_2, ..., F_m \vdash H$.

При дедуктивных рассуждениях, когда из некоторых суждений выводится умозаключение, говорят, что ***умозаключение правильное***, если оно является логическим следствием данных суждений.

Проверить правильность умозаключения можно ***методом от противного***. Мы предполагаем, что H не является логическим следствием $F_1, F_2, ..., F_m$. Тогда должна быть ситуация, при которой $H = 0$, а $F_1, F_2, ..., F_m$ все одновременно истинны. Если во всех случаях, при которых $H = 0$, по крайней мере, одна из формул $F_1, F_2, ..., F_m$ ложная, то мы приходим к ***противоречию***, и ***умозаключение правильное***. Если же хотя бы в одном случае мы найдём, что все $F_1, F_2, ..., F_m$ истинны, то умозаключение не является правильным.

Пример. Проверить правильность умозаключения методом от противного:

"Если завтра будет холодно, то я надену теплое пальто, если рукав будет починен. Завтра будет холодно, а рукав не будет починен. Следовательно, я не надену теплое пальто".

Решение. Используя аппарат алгебры высказываний, запишем наши высказывания в виде выражений, использующих обозначения логических операций и простых высказываний. *Обозначения*:

1) завтра будет холодно – a;

2) я надену тёплое пальто – b;

3) рукав пальто будет починен – c.

Заданные суждения: $F_1 = a \to (b \to c)$, $F_2 = a \,\&\, \bar{c}$.

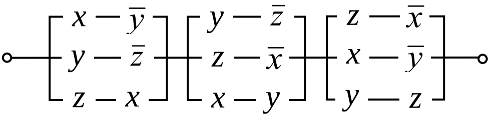
Умозаключение: $H = \bar{b}$.

Пусть $H = \bar{b} = 0 \Rightarrow b = 1$. Если $F_2 = a \,\&\, \bar{c} = 1$, то $a = 1$, $c = 0$. Тогда $F_1 = a \to (b \to c) = 1 \to (1 \to 0) = 0$.

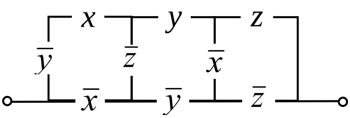
Отсюда следует, что умозаключение правильное.

Задача 6

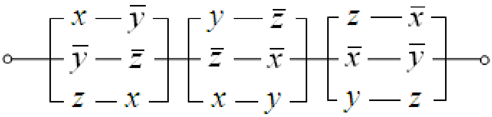
Упростите РКС так, чтобы она содержала не более N контактов.

1. а) 

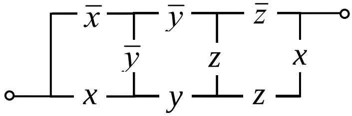
$N = 3$

б) 

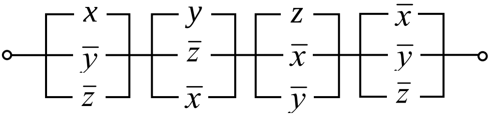
$N = 5$

2. а) 

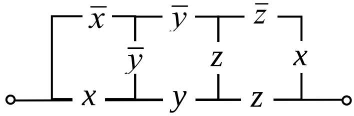
$N = 6$

б) 

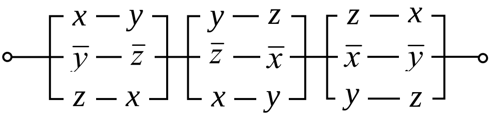
$N = 4$

3. а) 

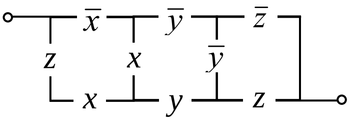
$N = 5$

б) 

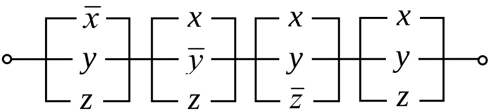
$N = 5$

4. а) 

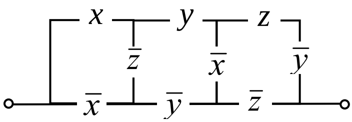
$N = 6$

б) 

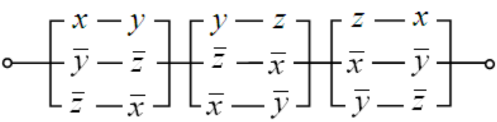
$N = 4$

5. а) 

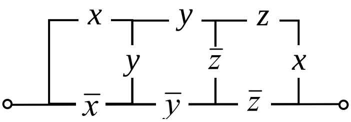
$N = 5$

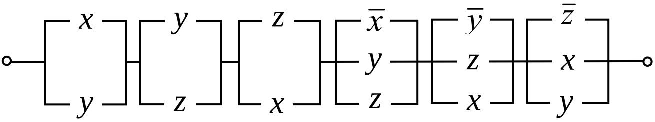
б) 

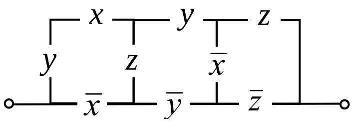
$N = 5$

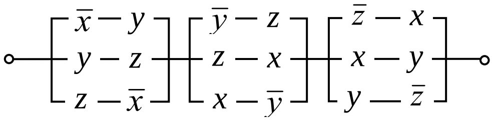
6. а) 

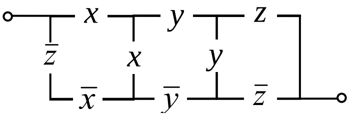
$N = 6$

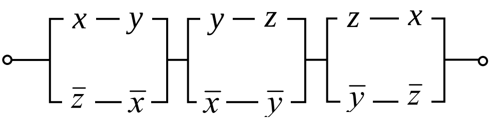
б)  $N = 4$

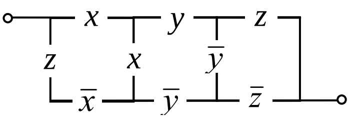
7. а)  $N = 5$

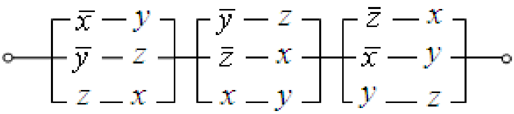
б)  $N = 4$

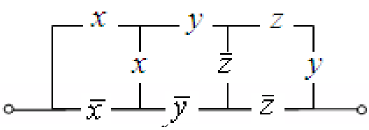
8. а)  $N = 3$

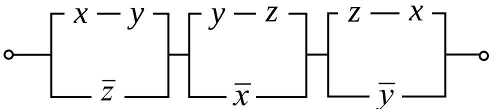
б)  $N = 4$

9. а)  $N = 6$

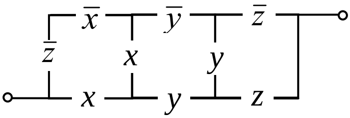
б)  $N = 5$

10. а)  $N = 3$

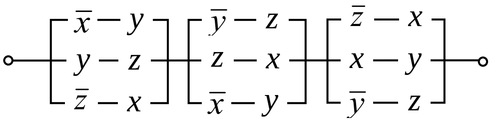
б)  $N = 4$

11. а) 

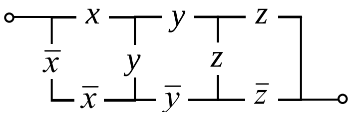
$N = 6$

б) 

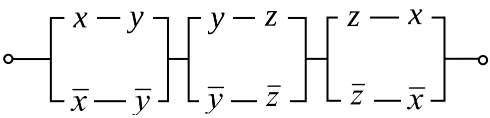
$N = 4$

12. а) 

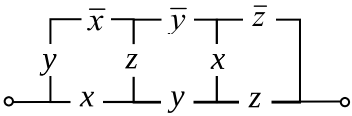
$N = 3$

б) 

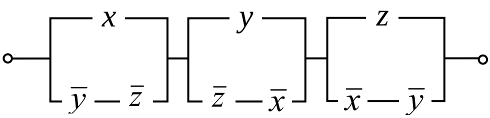
$N = 4$

13. а) 

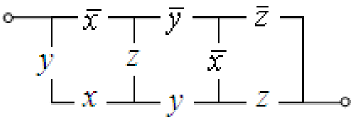
$N = 6$

б) 

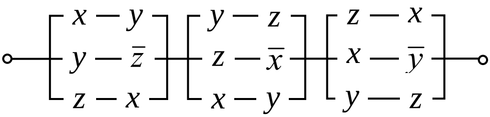
$N = 5$

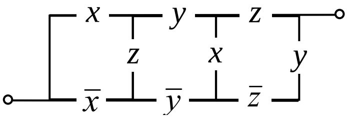
14. а) 

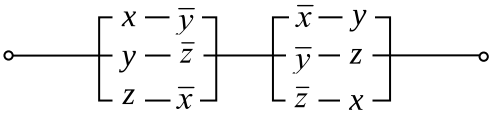
$N = 6$

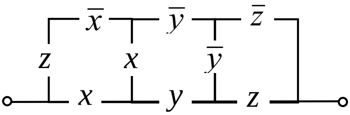
б) 

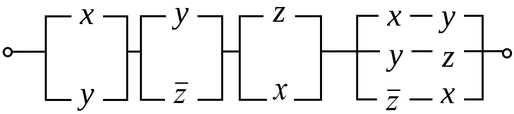
$N = 4$

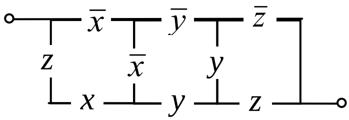
15. а)  $N = 3$

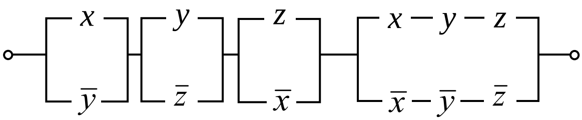
б)  $N = 5$

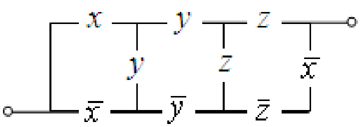
16. а)  $N = 6$

б)  $N = 5$

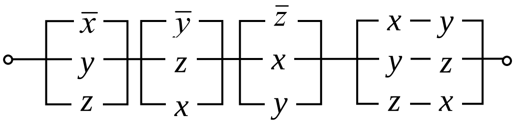
17. а)  $N = 4$

б)  $N = 4$

18. а)  $N = 6$

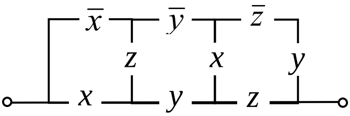
б)  $N = 4$

19. а)



$N = 5$

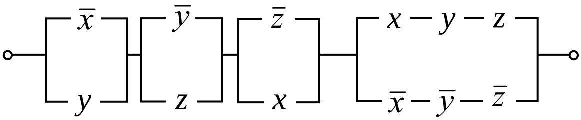
б)



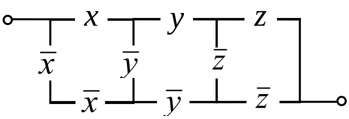
$N = 5$

20. а)

$N = 6$

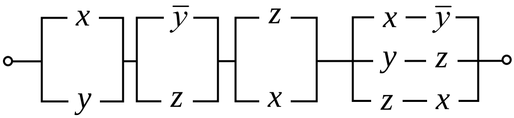


б)



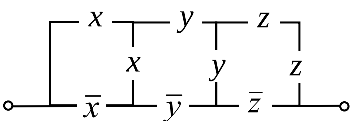
$N = 4$

21. а)



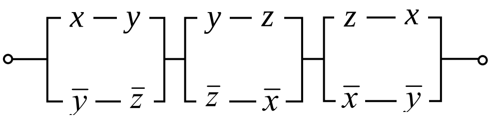
$N = 4$

б)



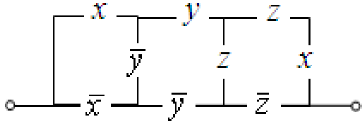
$N = 4$

22. а)

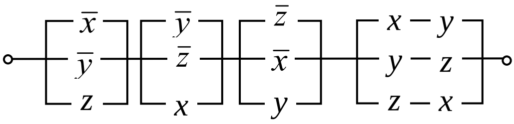


$N = 6$

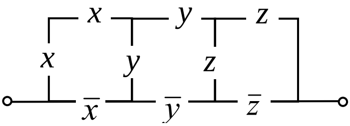
б)



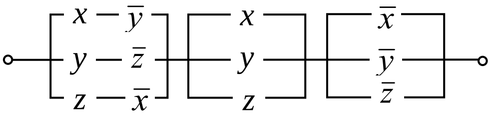
$N = 4$

23. а) 

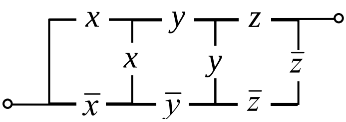
$N = 3$

б) 

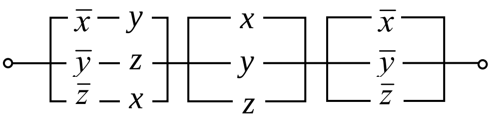
$N = 4$

24. а) 

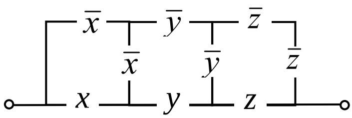
$N = 6$

б) 

$N = 4$

25. а) 

$N = 6$

б) 

$N = 4$

З а д а ч а 7

Найти все неравносильные между собой следствия из посылок.

1. **а)** Если целое число делится на 2, то оно делится на 6 тогда и только тогда, когда оно делится на 3. Если целое число делится на 3, то оно делится на 6 тогда и только тогда, когда оно делится на 2.

б) Если система векторов линейно зависима, то один из векторов линейно выражается через остальные векторы. Если ранг равен числу векторов системы, то система векторов линейно независима.

2. **а)** Если сумма двух слагаемых – четное число, то оба слагаемых – четные числа или оба – нечетные числа. Если оба слагаемых – нечетные числа, то сумма – четное число.

б) Если боковые стороны треугольника равны, то этот треугольник – равнобедренный. Если углы при основании треугольника равны, то этот треугольник – равнобедренный.

3. **а)** Если в треугольнике боковые стороны и углы при основании равны, то этот треугольник является равнобедренным. Если в треугольнике углы при основании равны, то равны и его боковые стороны.

б) Если a делится на c и b делится на c, то $a + b$ делится на c. Если $a + b$ делится на c, то a делится на c тогда и только тогда, когда b делится на c.

4. **а)** Если параллелограмм имеет равные диагонали, то он является прямоугольником или квадратом. Если параллелограмм является квадратом, то он является и прямоугольником.

б) Если система векторов содержит нулевой вектор, то она линейно зависима. Если система векторов линейно независима, то она не содержит двух одинаковых векторов и нулевого вектора.

5. **а)** Если диагонали параллелограмма не равны, то он не является квадратом. Если диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны, то он является квадратом тогда и только тогда, когда его диагонали равны.

б) Если в треугольнике медиана является высотой и биссектрисой, то этот треугольник – равнобедренный. Если медиана является высотой, то медиана является и биссектрисой.

6. **а)** Если целое число делится на 2 и не делится на 3, то оно не делится на 6. Если целое число делится на 6, то оно делится на 2.

б) Если противоположные стороны четырехугольника попарно равны, то этот четырехугольник – параллелограмм. Если противоположные стороны четырехугольника попарно параллельны, то этот четырехугольник – параллелограмм.

7. **а)** Если формула является выполнимой, то она является тавтологией или не является противоречием. Если формула – тавтология, то она не является противоречием.

б) Если прямые a и b параллельны друг другу, то a будет параллельна плоскости α тогда и только тогда, когда b будет параллельна плоскости α. Если прямые a и b параллельны плоскости α, то они параллельны друг другу.

8. **а)** Если матрица является невырожденной и ее определитель отличен от нуля, то матрица обладает обратной. Если матрица невырожденная, то ее определитель отличен от нуля.

б) Если две прямые в пространстве не пересекаются и не параллельны, то они являются скрещивающимися. Если прямые скрещиваются, то они не пересекаются.

9. **а)** Если система векторов линейно независимая и является базисом, то число векторов в системе совпадает с ее рангом. Если система векторов линейно зависима, то она не является базисом.

б) Если все стороны треугольника равны, то этот треугольник – равносторонний. Если все углы треугольника равны, то этот треугольник – равносторонний.

10. **а)** Если целое число оканчивается нулем, то оно делится на 5. Если целое число оканчивается цифрой 5, то оно делится на 5.

б) Если параллелограмм имеет равные диагонали, то он является прямоугольником или квадратом. Если параллелограмм является квадратом, то он является и прямоугольником.

11. **а)** Если целое число делится на 2 и на 3, то оно делится и на 6. Если число не делится на 3, то оно не делится на 6.

б) Если прямые a и b параллельны друг другу, то a

перпендикулярна плоскости α тогда и только тогда, когда b перпендикулярна плоскости α. Если прямые a и b перпендикулярны плоскости α, то они параллельны друг другу.

12. **а)** Если плоскости α и β параллельны и прямая a перпендикулярна α, то a перпендикулярна и плоскости β. Если плоскости α и β параллельны и прямая a перпендикулярна β, то a перпендикулярна и плоскости α. Если прямая a перпендикулярна плоскостям α и β, то плоскости α и β параллельны.

б) Если функция дифференцируема, то она является выпуклой вниз тогда и только тогда, когда производная монотонно возрастает. Если функция не является выпуклой вниз, то ее производная не является монотонно возрастающей функцией.

13. **а)** Если A и B – квадратные матрицы порядка n (то есть имеют n строк и n столбцов), то $A \cdot B$ – также квадратная матрица порядка n. Если A – квадратная матрица порядка n, то $A \cdot B$ является квадратной тогда и только тогда, когда B – квадратная матрица порядка n.

б) Если треугольник – равнобедренный, то углы при его основании равны. Если треугольник –- равнобедренный, то его боковые стороны равны друг другу тогда и только тогда, когда равны углы при основании.

14. **а)** Если противоположные стороны четырехугольника попарно равны и параллельны, то этот четырехугольник – параллелограмм. Если противоположные стороны четырехугольника параллельны, то они равны.

б) Если определитель системы из n линейных уравнений с n неизвестными равен нулю, то система неразрешима или имеет бесконечное множество решений. Если система из n линейных уравнений с n неизвестными неразрешима, то ее определитель равен нулю.

15. **а)** Если прямые a и b параллельны друг другу, то прямая l будет параллельна a тогда и только тогда, когда l будет параллельна b. Если b параллельна a, то l параллельна b тогда и только тогда, когда прямые a и b параллельны друг другу

б) Если все данные посылки – тавтологии, то формула F является логическим следствием из этих посылок тогда и только тогда, когда F – тавтология. Если формула F – тавтология, то она является логическим следствием из данных посылок.

16. **а)** Если $a \cdot b$ – четное и a – нечетное число, то b – четное число. Если a – нечетное число, то $a \cdot b$ является четным тогда и только тогда, когда b – четное число.

б) Если две строки определителя совпадают или отличаются только знаком, то определитель равен нулю. Если определитель отличен от нуля, то он не содержит двух одинаковых строк.

17. **а)** Если прямые a и b параллельны друг другу и a параллельна плоскости α, то и b параллельна плоскости α. Если прямые a и b параллельны плоскости α, то они параллельны между собой. Если прямые a и b параллельны друг другу и b параллельна плоскости α, то a параллельна плоскости α.

б) Если целое число делится на 6, то оно делится на 2 и на 3. Если целое число не делится на 2, то оно не делится на 6.

18. **а)** Если функция дифференцируема, то она монотонно возрастает тогда и только тогда, когда ее производная положительна. Если производная функции положительна, то эта функция является монотонно возрастающей.

б) Если a и b – целые числа, то $a + b$ – целое число. Если a – целое, то $a + b$ является нецелым числом тогда и только тогда, когда b – нецелое число.

19. **а)** Если прямая перпендикулярна к диаметру окружности и проходит через его конец, то она является касательной к окружности. Если прямая не перпендикулярна к диаметру, то она не является касательной к окружности.

б) Если два числа равны или отличаются знаком, то их модули совпадают. Если модули двух чисел не совпадают, то эти числа не равны друг другу.

20. **а)** Если треугольник – равнобедренный, то его боковые стороны равны. Если треугольник – равнобедренный, то углы при его основании равны.

б) Если a делится на c или b делится на c, то произведение $a \cdot b$ делится на c. Если a делится на c, то произведение $a \cdot b$ делится на c.

21. **а)** Если оба слагаемых являются одновременно четными числами или одновременно нечетными числами, то их сумма – четное число. Если сумма не является четным числом, то оба слагаемых не могут быть одновременно четными числами.

б) Если четырехугольник – параллелограмм, то он является ромбом тогда и только тогда, когда его диагонали взаимно перпендикулярны. Если диагонали четырехугольника не взаимно перпендикулярны, то он – не ромб.

22. **а)** Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы между этими сторонами равны, то такие треугольники подобны. Если треугольники подобны, то две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника.

б) Если определитель системы из n линейных уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то система имеет единственное решение. Если ранг системы совпадает с числом неизвестных, то система линейных уравнений имеет единственное решение.

23. **а)** Если целое число делится на 2 и на 3, то оно делится на 6. Если целое число делится на 2 и не делится на 3, то оно не делится на 6. Если целое число делится на 3 и не делится на 2, то оно не делится на 6.

б) Если плоскости α и β параллельны, то прямая a будет перпендикулярна α тогда и только тогда, когда прямая a будет перпендикулярна β. Если плоскости α и β не параллельны друг другу, то прямая a не может быть одновременно перпендикулярной α и β.

24. **а)** Если треугольник – равнобедренный, то высота, опущенная на основание, является медианой. Если треугольник – равнобедренный, то высота, опущенная на основание, является биссектрисой.

б) Если подсистема векторов линейно независима, то она является базисом тогда и только тогда, когда каждый вектор исходной системы линейно выражается через векторы этой подсистемы. Если каждый вектор исходной системы линейно выражается через векторы подсистемы, то эта подсистема является базисом тогда и только тогда, когда она линейно независима.

25. **а)** Если диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны или делят его углы пополам, то этот параллелограмм – ромб. Если параллелограмм – не ромб, то его диагонали не делят углы пополам.

б) Если последовательность монотонная и ограниченная, то она имеет предел. Если последовательность имеет предел, то она ограничена.

Пример. Найти все неравносильные между собой следствия из посылки:

"Если у четырёхугольника две противоположные стороны параллельны и они же равны, то этот четырёхугольник – параллелограмм. У данного четырёхугольника две противоположные стороны равны или параллельны".

Решение. Используя аппарат алгебры высказываний, запишем данные посылки F_1, F_2 в виде сложных высказываний. *Обозначим*:

1) у четырёхугольника две противоположные стороны параллельны – a;

2) у четырёхугольника эти же противоположные стороны равны – b;

3) четырёхугольник является параллелограммом – c.

Заданные посылки: $F_1 = a \& b \to c, \quad F_2 = b \vee a$.

$$F_1 \& F_2 = ((a \& b) \to c) \& (b \vee a) \cong (\overline{a \& b} \vee c) \& (b \vee a) \cong$$
$$\cong (\bar{a} \vee \bar{b} \vee c) \& (b \vee a) \cong (\bar{a} \vee \bar{b} \vee c) \& (a \vee b \vee c) \& (a \vee b \vee \bar{c}).$$

Отсюда логическими следствиями из заданных посылок F_1, F_2 будут:

$$H_1 = \bar{a} \vee \bar{b} \vee c, \quad H_2 = a \vee b \vee c, \quad H_3 = a \vee b \vee \bar{c},$$
$$H_4 = (\bar{a} \vee \bar{b} \vee c) \& (a \vee b \vee c),$$
$$H_5 = (\bar{a} \vee \bar{b} \vee c) \& (a \vee b \vee \bar{c}),$$
$$H_6 = (a \vee b \vee c) \& (a \vee b \vee \bar{c}),$$
$$H_7 = (\bar{a} \vee \bar{b} \vee c) \& (a \vee b \vee c) \& (a \vee b \vee \bar{c}).$$

Задача 8

При помощи теоремы о дедукции доказать выводимость следующих формул из данных гипотез.

1. $(a \to b) \to a, \ a \to c \vdash (a \to b) \to c$.

2. $(a \to a) \to b, \ a \to (b \to c) \vdash a \to c$.

3. $a \to (a \to b), \ b \to c \vdash a \to c$.

4. $a, \ b \to c \vdash (a \to b) \to c$.

5. $(a \to a) \to a, \ b \to c \vdash (a \to b) \to c$.

6. $a \to (b \to c), \ (b \to c) \to b \vdash a \to c$.

7. $(b \to c) \to a, \ a \to b \vdash (b \to c) \to c$.

8. $(a \to a) \to a, \ a \to b \vdash (b \to c) \to c$.

9. $a \to b, \ b \to (b \to c) \vdash a \to c$.

10. $a \to (a \to b), \ b \to (a \to c) \vdash a \to c$.

11. $(a \to a) \to a, \ b \to (b \to c), \ a \vdash (a \to b) \to c$.

12. $a,\ b \to (b \to c) \vdash (a \to b) \to c$.

13. $(a \to a) \to (a \to b),\ b \to c \vdash a \to c$.

14. $a \to (a \to b),\ b \to (b \to c) \vdash a \to c$.

15. $a \to b,\ b \to ((a \to a) \to c) \vdash a \to c$.

16. $a \to ((a \to a) \to b),\ b \to c \vdash a \to c$.

17. $a \to (a \to b),\ a \to (b \to c) \vdash a \to c$.

18. $(a \to a) \to (a \to b),\ a \to (b \to c) \vdash a \to c$.

19. $a \to b,\ (a \to a) \to (b \to c) \vdash a \to c$.

20. $a \to (a \to (a \to b)) \vdash a \to c$.

21. $b,\ a \to (a \to (b \to c)) \vdash a \to c$.

22. $a \to (b \to (a \to c)),\ (b \to (a \to c)) \to b \vdash a \to c$.

23. $a \to b,\ a \to (a \to (b \to c)) \vdash a \to c$.

24. $a \to (a \to (b \to c)),\ (a \to (b \to c)) \to b \vdash a \to c$.

25. $b \to c,\ a \to (a \to (a \to b)) \vdash a \to c$.

Пример. При помощи теоремы о дедукции доказать выводимость следующей формулы из данных гипотез.

$$a \to (b \to c),\ a \to b \vdash a \to c.$$

Решение. Сначала к гипотезам $a \to (b \to c)$ и $a \to b$ добавим новую гипотезу a и получим вывод функции c. То есть построим последовательность формул, которая будет выводом формулы c:

1) $a \to (b \to c)$ – гипотеза;

2) $(a \to b)$ – гипотеза;

3) a – новая гипотеза;

4) $(b \to c)$ – получена из (3) и (1) по ПВ;

5) b – получена из (2) и (3) по ПВ;

6) c – получена из (5) и (4) по ПВ.

Таким образом, построили вывод формулы c из данных гипотез и новой гипотезы a, то есть доказали выводимость

$$a \to (b \to c),\ a \to b,\ a \vdash c.$$

Тогда, применяя теорему о дедукции, получим доказуемую выводимость

$$a \to (b \to c),\ a \to b\ \vdash a \to c.$$

Вывод формулы c можно также изобразить в виде дерева вывода:

$$\dfrac{\dfrac{a,\ a \to b}{b} \quad \dfrac{a,\ a \to (b \to c)}{b \to c}}{c}.$$

З а д а ч а 9

При помощи законов двойного отрицания и теоремы о дедукции доказать, что следующие формулы являются теоремами исчисления высказываний.

1. $\vdash (a \to b) \to \left(\overline{\overline{a}} \to b\right).$

2. $\vdash b \to \left((b \to a) \to \overline{\overline{a}}\right).$

3. $\vdash \overline{\overline{a}} \to \left(\left(a \to \overline{\overline{b}}\right) \to b\right).$

4. $\vdash \left(\overline{\overline{\overline{a}} \to a}\right).$

5. $\vdash (a \to b\ ) \to (\ \overline{\overline{a}} \to \overline{\overline{b}}\ ).$

6. $\vdash (\ (a \to b) \to (b \to \overline{\overline{c}}) \to (a \to c)\ .$

7. $\vdash (a \to (b \to c)) \to \left(\left(a \to \overline{\overline{b}}\right) \to (a \to c)\right).$

8. $\vdash (a \to b) \to \left(\left(a \to \left(b \to \overline{\overline{c}}\right)\right) \to \left(\overline{\overline{a}} \to c\right)\right).$

9. $\vdash (b \to a) \to \left((b \to (a \to c)) \to \left(b \to \overline{\overline{c}}\right)\right).$

10. $\vdash \overline{\overline{a}} \to \left(\overline{\overline{b}} \to a\right).$

11. $\vdash (a \to b) \to (\bar{\bar{a}} \to \bar{\bar{b}})$.

12. $\vdash \bar{\bar{a}} \to ((a \to \bar{\bar{b}}) \to b)$.

13. $\vdash b \to (\bar{\bar{a}} \to \bar{a})$.

14. $\vdash (a \to (b \to c)) \to (\bar{\bar{b}} \to (a \to \bar{\bar{c}}))$.

15. $\vdash (a \to (\bar{\bar{b}} \to \bar{\bar{c}})) \to (\bar{\bar{a}} \to (b \to c))$.

16. $\vdash (a \to (b \to \bar{\bar{c}})) \to ((a \to b) \to (\bar{\bar{a}} \to c))$.

17. $\vdash (b \to \bar{\bar{a}}) \to (b \to a)$.

18. $\vdash (\bar{\bar{a}} \to b) \to (a \to b)$.

19. $\vdash b \to ((b \to \bar{\bar{a}}) \to a)$.

20. $\vdash a \to ((\bar{\bar{a}} \to b) \to b)$.

21. $\vdash a \to ((\bar{\bar{a}} \to b) \to \bar{\bar{b}})$.

22. $\vdash (a \to \bar{\bar{b}}) \to (b \to \bar{\bar{c}}) \to (\bar{\bar{a}} \to c)$.

23. $\vdash (\bar{\bar{a}} \to b) \to (b \to \bar{\bar{c}}) \to (a \to c)$.

24. $\vdash (a \to b) \to (b \to \bar{\bar{c}}) \to (\bar{\bar{a}} \to c)$.

25. $\vdash (\bar{\bar{a}} \to (\bar{\bar{b}} \to \bar{\bar{c}})) \to (b \to (a \to c))$.

Пример. При помощи законов двойного отрицания и теоремы о дедукции доказать, что следующая формула является теоремой исчисления высказываний:

$$(b \to a) \to (b \to \bar{\bar{a}}).$$

Решение. Сначала докажем, что из гипотез $(b \to a)$ и b выводима формула $\bar{\bar{a}}$:

1) $(b \to a)$ – гипотеза;

2) b – гипотеза;

3) a – получена из (1) и (2) по ПВ;

4) $a \to \overline{\overline{a}}$ – теорема, закон двойного отрицания;

5) $\overline{\overline{a}}$ – получена из (3) и (4) по ПВ.

Таким образом, получили вывод формулы $\overline{\overline{a}}$, то есть доказали выводимость $(b \to a),\ b \vdash \overline{\overline{a}}$.

Применяя дважды теорему о дедукции, получим сначала выводимость

$$(b \to a) \vdash (b \to \overline{\overline{a}}),$$

затем $\vdash (b \to a) \to (b \to \overline{\overline{a}})$.

Задача 10

При помощи закона контрапозиции и теоремы о дедукции доказать следующие теоремы:

1. $\vdash (a \to b) \to ((\overline{c} \to b) \to (a \to \overline{\overline{c}}))$.

2. $\vdash (a \to b) \to ((a \to (\overline{c} \to \overline{b})) \to (a \to c))$.

3. $\vdash (a \to b) \to ((a \to (c \to \overline{b})) \to (a \to \overline{c}))$.

4. $\vdash (\overline{b} \to a) \to ((b \to c) \to (\overline{a} \to c))$.

5. $\vdash (\overline{b} \to a) \to (\overline{a} \to b)$.

6. $\vdash (\overline{b} \to \overline{a}) \to (\overline{\overline{a}} \to b)$.

7. $\vdash (\overline{b} \to \overline{a}) \to ((b \to c) \to (\overline{\overline{a}} \to c))$.

8. $\vdash (b \to \overline{a}) \to ((\overline{b} \to c) \to (\overline{\overline{a}} \to c))$.

9. $\vdash (a \to (b \to c)) \to ((\overline{b} \to \overline{a}) \to (\overline{\overline{a}} \to c))$.

10. $\vdash (a \to (\overline{c} \to \overline{b})) \to ((\overline{b} \to \overline{a}) \to (\overline{\overline{a}} \to c))$.

11. $\vdash (\overline{b} \to a) \to ((\overline{c} \to \overline{b}) \to (\overline{\overline{a}} \to c))$.

12. $\vdash (\overline{c} \to \overline{b}) \to ((b \to a) \to (\overline{\overline{a}} \to c))$.

13. $\vdash (\overline{c} \to \overline{b}) \to ((\overline{\overline{a}} \to b) \to (a \to c))$.

14. $\vdash \left(\overline{c} \to b\right) \to \left(\left(a \to \overline{b}\right) \to \left(a \to \overline{\overline{c}}\right)\right).$

15. $\vdash \left(a \to \left(\overline{c} \to \overline{b}\right)\right) \to \left(\left(a \to b\right) \to \left(\overline{\overline{a}} \to c\right)\right).$

16. $\vdash \left(a \to \left(c \to \overline{b}\right)\right) \to \left(\left(\overline{\overline{a}} \to b\right) \to \left(a \to \overline{c}\right)\right).$

17. $\vdash \left(b \to \overline{\overline{c}}\right) \to \left(\left(\overline{b} \to a\right) \to \left(\overline{a} \to c\right)\right).$

18. $\vdash \overline{a} \to \left(\left(\overline{b} \to a\right) \to b\right).$

19. $\vdash \overline{\overline{a}} \to \left(\left(\overline{b} \to \overline{a}\right) \to b\right).$

20. $\vdash (b \to c) \to \left(\left(\overline{b} \to \overline{a}\right) \to \left(\overline{\overline{a}} \to c\right)\right).$

21. $\vdash \left(\overline{b} \to c\right) \to \left(\left(b \to \overline{a}\right) \to \left(a \to \overline{\overline{c}}\right)\right).$

22. $\vdash \left(\overline{b} \to \overline{a}\right) \to \left(\left(a \to (b \to c)\right) \to \left(\overline{\overline{a}} \to c\right)\right).$

23. $\vdash a \to \left(\left(\overline{b} \to \overline{a}\right) \to \overline{\overline{b}}\right).$

24. $\vdash a \to \left(\left(b \to \overline{a}\right) \to \overline{b}\right).$

25. $\vdash \left(a \to \overline{b}\right) \to \left(\left(c \to b\right) \to \left(\overline{\overline{a}} \to \overline{c}\right)\right).$

Пример. При помощи закона контрапозиции и теоремы о дедукции доказать следующую теорему:

$$\vdash (a \to b) \to \left(\left(\overline{c} \to \overline{b}\right) \to \left(\overline{\overline{a}} \to c\right)\right).$$

Решение. Построим сначала вывод формулы c из гипотез $(a \to b)$, $\overline{c} \to \overline{b}$, $\overline{\overline{a}}$:

1) $(a \to b)$ – гипотеза;

2) $\left(\overline{c} \to \overline{b}\right)$ – гипотеза;

3) $\overline{\overline{a}}$ – гипотеза;

4) $\overline{\overline{a}} \to a$ – заключение двойного отрицания;

5) a из (3) и (4) по ПВ;

6) b из (1) и (5) по ПВ;

7) $\left(\overline{c} \to \overline{b}\right) \to (b \to c)$ – заключение контрапозиции;

8) $(b \to c)$ – из (2) и (7) по ПВ;

9) c – из (6) и (8) по ПВ.

Таким образом, получили, вывод формулы c, то есть доказали выводимость

$$(a \to b),\ \bar{c} \to \bar{b},\ \bar{\bar{a}} \vdash c.$$

Применяя последовательно теорему о дедукции, получим:

$$(a \to b),\ (\bar{c} \to \bar{b}) \vdash \bar{\bar{a}} \to c; \qquad (a \to b) \vdash (\bar{c} \to \bar{b}) \to (\bar{\bar{a}} \to c);$$

$$\vdash (a \to b) \to ((\bar{c} \to \bar{b}) \to (\bar{\bar{a}} \to c)).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лихтарников Л.М., Сукачева Т.Г. Математическая логика. Курс лекций. Задачник – практикум и решения: Учебное пособие. 3 – е изд., испр. – СПб.:Издательство «Лань», 2008. – 288 с.

2. Дискретная математика: Теория, задачи, приложения / Я.М. Ерусалимский. – 7-е изд. – М.: Вузовская книга, 2005. – 268 с.: ил.

3. Игошин В.И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов: учеб.пособие для студ. высш.учеб.заведений / В.И.Игошин. – 2-е изд.,стер. –М. : Издательский центр «Академия», 2006. – 304 с.

4. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов: Учеб. пособие для студ. высш.учеб.заведений / В.И.Игошин. –М. : Издательский центр «Академия», 2004. – 448 с.

5. Успенский В.А., Верещагин Н.К., Плиско В.Е. Вводный курс математической логики. – 2-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 128 с.

Садыков Айдар Вагизович
кандидат технических наук, доцент

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ООО «Свое издательство»
199053, Санкт-Петербург, 4-я линия В.О., 5.
Телефон: +7812-900-21-45
Почта: editor@isvoe.ru
Сайт: http://isvoe.ru
Подписано в печать: 07.05.2018
Тираж 50 экз.
Гарнитура таймс.
Усл. печ. л. 5,88
Заказ № 00621.

Отпечатано с оригинал-макета
РИО НХТИ (филиал) ФГБОУ ВО «КНИТУ»
г. Нижнекамск, 423570, пр.Химиков, 18