МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Нижнекамский химико-технологический институт (филиал)
Федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Казанский национальный исследовательский технологический университет»

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Учебное пособие

Нижнекамск, 2016

УДК 519.21

С 23

Печатается по решению редакционно-издательского совета Нижнекамского химико-технологического института (филиал) ФГБОУ ВО «КНИТУ»

Рецензенты

доктор педагогических наук, доцент **Яковлева Е.В.**

кандидат физико-математических наук, доцент **Гайфутдинов А.Н.**

С 23 Сборник задач по теории вероятностей. Случайные величины: учебное пособие / сост. Т.Г. Макусева, О.В. Шемелова. – Нижнекамск: Нижнекамский химико-технологический институт (филиал) ФГБОУ ВО «КНИТУ», 2016. – 89 с.

Сборник задач предназначен для закрепления теоретических положений курса «Теория вероятностей и математическая статистика» на практических занятиях, для самостоятельного решения задач по основным темам, для проверки знаний студентов.

ТЕМА 1. Дискретные случайные величины.
Контрольные вопросы

1. Определение дискретной случайной величины. Примеры.

2. Числовые характеристики дискретной случайной величины (математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение).

3. Закон распределения дискретной случайной величины.

4. Функция распределения дискретной случайной величины. Ее свойства.

Практические задания по теме

1. *Задача с решением.* Дано распределение дискретной случайной величины X. Найти математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение.

x_i	-2	1	3	5
p_i	0,1	0,3	0,4	0,2

Решение. Математическое ожидание определяется по формуле

$$M(X)=\sum_{k=1}^{n} x_k p_k = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n .$$

Таким образом, получаем $M(X)=-2\cdot 0{,}1+1\cdot 0{,}3+3\cdot 0{,}4+5\cdot 0{,}2=2{,}3$.

Чтобы найти среднее квадратичное отклонение, определим дисперсию. Для определения дисперсии воспользуемся формулой: $D(X)=M\left(X^2\right)-[M(X)]^2$.

Составим закон распределения случайной величины X^2:

X^2	4	1	9	25
p	0,1	0,3	0,4	0,2

Найдем математическое ожидание $M\left(X^2\right)$:

$$M\left(X^2\right)=4\cdot 0{,}1+1\cdot 0{,}3+9\cdot 0{,}4+25\cdot 0{,}2=9{,}3.$$

Тогда дисперсия: $D(X)=M\left(X^2\right)-[M(X)]^2=9{,}3-2{,}3^2=9{,}3-5{,}29=4{,}01$.

Определим среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma(x)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{4{,}01}\approx 2{,}0025.$$

2. *Задача с решением*. Вероятность появления события в одном испытании постоянна и равна $p=0{,}1$. Написать закон распределения случайной величины X – числа появления события в $n=3$ испытаниях. Построить многоугольник распределения. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, Дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ случайной величины.

Решение. Дискретная случайная величина X (число появлений события) имеет следующие возможные значения: $x_1 = 0$ (ни одного появления), $x_2 = 1$ (одно появление события), $x_3 = 2$ (два появления), $x_3 = 3$ (все три появления некоторого события).

Появление события в каждом испытании независимо одно от другого, вероятности этих появлений равны между собой, поэтому применима формула Бернулли $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$. Строим биномиальное распределение. Учитывая, что, по условию, $n=3$, $p=0{,}1$, тогда $q=1-0{,}1=0{,}9$, получим:

$$P(X=0)=P_3(0)=C_3^0 p^0 q^3=q^3=0{,}9^3=0{,}729;$$

$$P(X=1)=P_3(1)=C_3^1 p^1 q^2=\frac{3!}{1!\cdot 2!}\cdot 0{,}1^1\cdot 0{,}9^2=3\cdot 0{,}1\cdot 0{,}81=0{,}243;$$

$$P(X=2)=P_3(2)=C_3^2 p^2 q^1=\frac{3!}{2!\cdot 1!}\cdot 0{,}1^2\cdot 0{,}9^1=3\cdot 0{,}01\cdot 0{,}9=0{,}027;$$

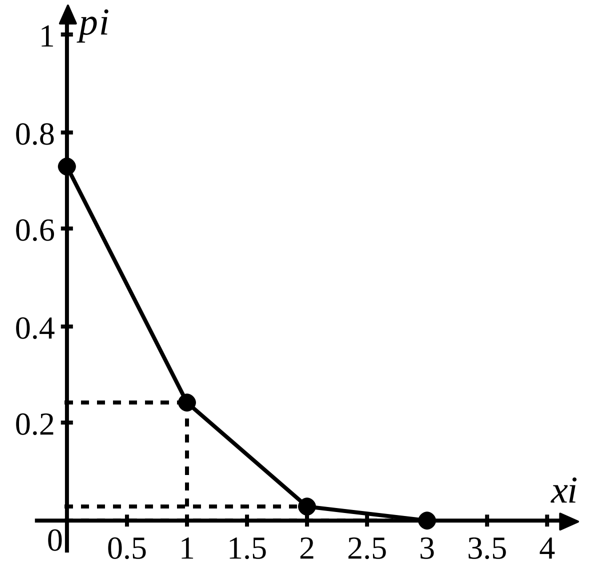
$$P(X=3)=P_3(3)=C_3^3 p^3 q^0=0{,}1^3=0{,}001.$$

Напишем искомый биномиальный закон распределения *X*:

X	0	1	2	3
p	0,729	0,243	0,027	0,001

Контроль: $0{,}729+0{,}243+0{,}027+0{,}001=1$.

Построим многоугольник распределения:



По полученному закону распределения определим математическое ожидание.

Способ I.

$$M(X)=\sum_{k=1}^{n} x_k p_k=0\cdot 0{,}729+1\cdot 0{,}243+$$
$$+2\cdot 0{,}027+3\cdot 0{,}001=0{,}3.$$

Способ II. Для биномиального распределения математическое ожидание можно найти по формуле: $M(X)=np=3\cdot 0{,}1=0{,}3$

Определим дисперсию:

Способ I. Для определения дисперсии воспользуемся формулой:

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2.$$

Составим закон распределения случайной величины X^2:

X^2	0	1	4	9
p	0,729	0,243	0,027	0,001

Найдем математическое ожидание $M(X^2)$:

$$M(X^2)=0\cdot 0{,}729+1\cdot 0{,}243+4\cdot 0{,}027+9\cdot 0{,}001=0{,}36.$$

Тогда дисперсия:

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=0{,}36-0{,}3^2=0{,}36-0{,}09=0{,}27.$$

Способ II. Для биномиального распределения дисперсию можно определить по формуле: $D(X)=npq=3\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9=0{,}27$.

Определим среднеквадратическое отклонение:

$\sigma(x)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}27}\approx 0{,}5196$.

3. Случайная величина *X* задана рядом распределения

X	-1	0,7	1,5	4
P	0,2	0,4	0,1	…

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z^2 = 2X^2 - 1{,}5X$. Постройте многоугольник распределения.

4. *Задача с решением.* Две независимые случайные величины X и Y заданы своими рядами распределений:

x_i	2	4
p_i	0,7	0,3

y_i	– 1	0	15
p_i	0,4	0,1	0,5

Составить закон распределения их суммы – случайной величины $Z = X + Y$ и проверить выполнение свойства математического ожидания: $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$.

Решение. Составим закон распределения $Z = X + Y$. Найдем возможные значения $Z_{ij} = X_i + Y_j$:

$$z_{11} = x_1 + y_1 = 2 + (-1) = 1;$$
$$z_{12} = x_1 + y_2 = 2 + 0 = 2;$$
$$z_{13} = x_1 + y_3 = 2 + 15 = 17;$$
$$z_{21} = x_2 + y_1 = 4 + (-1) = 3;$$
$$z_{22} = x_2 + y_2 = 4 + 0 = 4;$$
$$z_{23} = x_2 + y_3 = 4 + 15 = 19.$$

Находим вероятности этих значений:

$$p_1 = P(Z=1) = P(X=2, Y=-1) = P(X=2)\cdot P(Y=-1) = 0{,}7\cdot 0{,}4 = 0{,}28;$$
$$p_2 = P(Z=2) = P(X=2, Y=0) = P(X=2)\cdot P(Y=0) = 0{,}7\cdot 0{,}1 = 0{,}07;$$
$$p_3 = P(Z=3) = P(X=4, Y=-1) = P(X=4)\cdot P(Y=-1) = 0{,}3\cdot 0{,}4 = 0{,}12;$$
$$p_4 = P(Z=4) = P(X=4, Y=0) = P(X=4)\cdot P(Y=0) = 0{,}3\cdot 0{,}1 = 0{,}03;$$
$$p_5 = P(Z=17) = P(X=2, Y=15) = P(X=2)\cdot P(Y=15) = 0{,}7\cdot 0{,}5 = 0{,}35;$$
$$p_6 = P(Z=19) = P(X=4, Y=15) = P(X=4)\cdot P(Y=15) = 0{,}3\cdot 0{,}5 = 0{,}15.$$

В итоге получаем закон распределения $Z = X + Y$:

z_i	1	2	3	4	17	19
p_i	0,28	0,07	0,12	0,03	0,35	0,15

Контроль: $\sum_{i=1}^{6} p_i = 0{,}28 + 0{,}07 + 0{,}12 + 0{,}03 + 0{,}35 + 0{,}15 = 1$.

Вычислим математические ожидания для каждого из законов распределения.

По закону распределения случайной величины X

x_i	2	4
p_i	0,7	0,3

вычислим $M(X) = 2\cdot 0{,}7 + 4\cdot 0{,}3 = 2{,}6$.

По закону распределения случайной величины Y

y_i	– 1	0	15
p_i	0,4	0,1	0,5

вычислим $M(Y) = -1\cdot 0{,}4 + 0\cdot 0{,}1 + 15\cdot 0{,}5 = 7{,}1$.

Аналогично по закону распределения случайной величины $Z = X + Y$

z_i	1	2	3	4	17	19
p_i	0,28	0,07	0,12	0,03	0,35	0,15

вычислим

$$M(Z)=M(X+Y)=1\cdot 0{,}28+2\cdot 0{,}07+3\cdot 0{,}12+4\cdot 0{,}03+17\cdot 0{,}35+19\cdot 0{,}15=9{,}7.$$

Очевидно, что $M(X)+M(Y)=2{,}6+7{,}1=9{,}7=M(Z)$.

5. Две независимые случайные величины X и Y заданы своими рядами распределений:

X	-1	0	1
P	0,5	p_1	0,1

Y	-2	-1	0
P	0,1	0,1	p_2

Написать закон распределения случайной величины $Z=X+2Y$, вычислить $M(Z)$, $D(Z)$, $M(3+4X)$, $D(Y-X+3)$, $M(X^2)$.

6. Случайная величина X задана таблицей:

X	-3	-2	0	3	4
P	p	0,1	0,2	0,1	0,5

Вычислить: p, $M(X)$, $D(X)$, $P(-3<X\le 2)$. Построить график $F(x)$.

7. Известен закон распределения дискретной случайной величины X :

X	-5	-4	-2	0	1
P	0,2	0,2	0,1	0,3	0,2

Определить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, вероятность попадания X в интервал $(-3{,}0)$: $P(-3<X\le 0)$. Поострить график интегральной функции распределения $F(x)$.

8. Составьте ряд распределения случайной величины X – числа попаданий при 5 выстрелах, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,4.

9. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрываются 1 выигрыш в 500 р. и 10 выигрышей по 10 р. Найдите закон распределения случайного выигрыша X для владельца одного лотерейного билета и найдите математическое ожидание выигрыша X. Постройте функцию распределения.

10. *Задача с решением.* Предприниматель может получить кредиты в трех независимо работающих друг от друга банках. В первом банке он может получить 35 млн. руб. с вероятностью $\frac{1}{4}$, во втором банке – 15 млн. руб. с вероятностью $\frac{1}{2}$, в третьем банке – 25 млн. руб. с вероятностью $\frac{1}{3}$. *Необходимо:* **а)** найти закон распределения случайной величины X – возможной суммы кредитов и построить многоугольник распределения; **б)** найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение дискретной случайной величины X; **в)** найти функцию распределения дискретной случайной величины X, построить ее график и найти вероятность того, что предприниматель получит кредит в размере от 35 до 50 млн. руб.

Решение. **а)** Пусть событие A_i – получение кредита в i-ом банке, $i=1,2,3$. Тогда по условию $P(A_1)=\frac{1}{4}$, $P(A_2)=\frac{1}{2}$, $P(A_3)=\frac{1}{3}$.

Поскольку банки работают независимо друг от друга (события A_1, A_2, A_3 – независимы), то предприниматель может получить кредиты как в одном банке, так и в нескольких одновременно, следовательно, возможные суммы кредитов (x_i млн. руб.): 0; 15; 25; 35; 40; 50; 60; 75. Найдем вероятности p_i получения этих сумм, $i=\overline{0,7}$.

$$p_0 = P(X=0) = P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_3) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{4};$$

$$p_1 = P(X=15) = P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A}_3) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{4};$$

$$p_2 = P(X=25) = P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(A_3) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{8};$$

$$p_3 = P(X=35) = P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_3) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{12};$$

$$p_4 = P(X=40) = P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{8};$$

$$p_5 = P(X=50) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A}_3) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{12};$$

$$p_6 = P(X=60) = P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(A_3) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{24};$$

$$p_7 = P(X=75) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{24}.$$

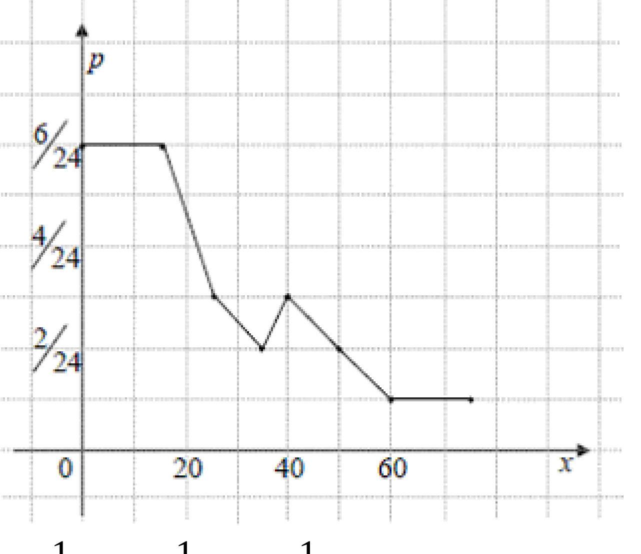
Тогда закон распределения случайной величины X – возможной суммы кредитов – имеет вид:

x_i	0	15	25	35	40	50	60	75
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$

где x_i – возможные значения случайной величины X, p_i – соответствующие этим значениям вероятности.

Проверим условие нормировки:

$$\sum_{i=0}^{7} p_i = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}+ +\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{24}=1.$$



Многоугольник распределения – ломаная линия, соединяющая точки с координатами $(x_i; p_i)$, $i=\overline{0,n}$.

б) Математическое ожидание дискретной случайной величины:

$$M(X)=\sum_{i=0}^{7} x_i p_i = 0\cdot\frac{1}{4}+15\cdot\frac{1}{4}+25\cdot\frac{1}{8}+35\cdot\frac{1}{12}+40\cdot\frac{1}{8}+50\cdot\frac{1}{12}+$$

$$+60\cdot\frac{1}{24}+75\cdot\frac{1}{24}=24\frac{7}{12}\approx 24{,}58.$$

Дисперсия:

$$D(X)=M\left(X^2\right)-M^2(X)=0^2\cdot\frac{1}{4}+15^2\cdot\frac{1}{4}+25^2\cdot\frac{1}{8}+35^2\cdot\frac{1}{12}+40^2\cdot\frac{1}{8}+$$

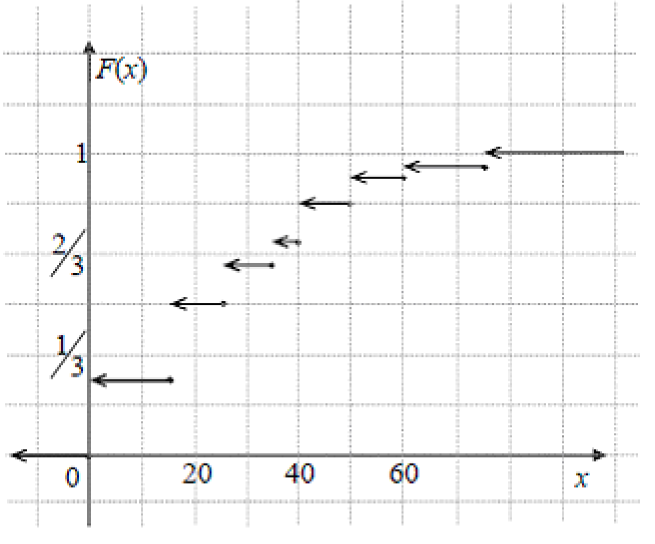
$$+50^2\cdot\frac{1}{12}+60^2\cdot\frac{1}{24}+75^2\cdot\frac{1}{24}-\left(24\frac{7}{12}\right)^2\approx 424{,}83.$$

Среднее квадратичное отклонение: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{424{,}83}\approx 20{,}61$.

Ответ: $M(X)=24{,}58$ млн.руб., $D(X)=424{,}83$, $\sigma(X)=20{,}61$ млн. руб.

в) Функция распределения дискретной случайной величины определяется формулой $F(X)=P(X<x)$. На основе закона распределения случайной величины X – возможной суммы кредитов, получаем функцию распределения, график которой изображен на рисунке.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 1/4, & 0<x\le 15,\\ 1/2, & 15<x\le 25,\\ 5/8, & 25<x\le 35,\\ 17/24, & 35<x\le 40,\\ 20/24, & 40<x\le 50,\\ 22/24, & 50<x\le 60,\\ 23/24, & 60<x\le 75,\\ 1, & x>75.\end{cases}$$



Вероятность того, что предприниматель получит кредит в размере от 35 до 50 мл. руб. найдем с помощью функции распределения:

$$P(35\le X\le 50)=P(35\le X<60)=F(60)-F(35)=\frac{22}{24}-\frac{5}{8}=\frac{7}{24}.$$

Ответ: вероятность того, что предприниматель получит кредит в размере от 35 до 50 мл. руб. составляет $\frac{7}{24}$.

11. Проводятся 2 выстрела с вероятностями попадания в цель, равными $p_1=0{,}4$, $p_2=0{,}3$. Найдите математическое ожидание общего числа попаданий.

12. *Задача с решением.* Известно, что 20 % собранных шампиньонов контроль отправляет на переработку в консервное производство. На конвейер поступили пять грибов. Случайная величина X – количество шампиньонов (из этих пяти штук), отправленных в переработку. Определить тип распределения случайной величины. **а)** Составить таблицу распределения X. **б)** Найти математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$. **в)** Построить график функции распределения $y=F(x)$. **г)** Найти вероятность $P(X>3)$.

Решение. **а)** Дискретная случайная величина X (число шампиньонов, отправленных на переработку) имеет следующие возможные значения: $x_1 = 0$ (ни одного шампиньона), $x_2 = 1$ (один гриб), $x_3 = 2$ (два гриба), $x_4 = 3$ (три гриба), $x_5 = 4$ (четыре гриба) и $x_6 = 5$ (все пять шампиньонов отправлены на переработку).

Появление события (гриб отправлен на переработку) в каждом испытании независимо одно от другого, вероятности этих появлений равны между собой, поэтому применима формула Бернулли $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$. Такой закон распределения называется ***биномиальным***. Учитывая, что, по условию, $n = 5$, $p = 0{,}2$, тогда $q = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$, получим:

$$P(X = 0) = P_5(0) = C_5^0 p^0 q^5 = q^5 = 0{,}8^5 = 0{,}32768;$$

$$P(X = 1) = P_5(1) = C_5^1 p^1 q^4 = \frac{5!}{1! \cdot 4!} \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^4 = 5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}4096 = 0{,}4096;$$

$$P(X = 2) = P_5(2) = C_5^2 p^2 q^3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^3 = 10 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}512 = 0{,}2048;$$

$$P(X = 3) = P_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^2 = 10 \cdot 0{,}008 \cdot 0{,}64 = 0{,}0512;$$

$$P(X = 4) = P_5(4) = C_5^4 p^4 q^1 = \frac{5!}{4! \cdot 1!} \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^1 = 5 \cdot 0{,}0016 \cdot 0{,}8 = 0{,}0064;$$

$$P(X = 5) = P_5(5) = C_5^5 p^5 q^0 = 0{,}2^5 = 0{,}00032.$$

Напишем искомый биномиальный закон распределения *X*:

X	0	1	2	3	4	5
p	0,32768	0,4096	0,2048	0,0512	0,0064	0,00032

Контроль: $0{,}32768 + 0{,}4096 + 0{,}2048 + 0{,}0512 + 0{,}0064 + 0{,}00032 = 1$.

б) По полученному закону распределения определим математическое ожидание.

Способ I.

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k = 0 \cdot 0{,}32768 + 1 \cdot 0{,}4096 + 2 \cdot 0{,}2048 + 3 \cdot 0{,}0512 + \\ + 4 \cdot 0{,}0064 + 5 \cdot 0{,}00032 = 1.$$

Способ II. Для биномиального распределения математическое ожидание можно найти по формуле: $M(X) = np = 5 \cdot 0{,}2 = 1$

Определим дисперсию:

Способ I. Для определения дисперсии воспользуемся формулой:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Составим закон распределения случайной величины X^2:

X^2	0	1	4	9	16	25
p	0,32768	0,4096	0,2048	0,0512	0,0064	0,00032

Найдем математическое ожидание $M(X^2)$:

$$M(X^2) = 0 \cdot 0{,}32768 + 1 \cdot 0{,}4096 + 4 \cdot 0{,}2048 + 9 \cdot 0{,}0512 + \\ + 16 \cdot 0{,}0064 + 25 \cdot 0{,}00032 = 1{,}8.$$

Тогда дисперсия:

$$D(X)=M\left(X^2\right)-[M(X)]^2=1{,}8-1^2=1{,}8-1=0{,}8.$$

Способ II. Для биномиального распределения дисперсию можно определить по формуле: $D(X)=npq=5\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8=0{,}8$.

в) По определению функции распределения находим:

если $x\le 0$, то $F(x)=P(X<x)=0$;

если $0<x\le 1$, то $F(x)=P(X<x)=P(X=0)=0{,}32768$;

если $1<x\le 2$, то

$$F(x)=P(X=0)+P(X=1)=0{,}32768+0{,}4096=0{,}73728;$$

если $2<x\le 3$, то

$$F(x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0{,}32768+0{,}4096+0{,}2048=0{,}94208;$$

если $3<x\le 4$, то

$$F(x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=$$
$$=0{,}32768+0{,}4096+0{,}2048+0{,}0512=0{,}99328;$$

если $4<x\le 5$, то

$$F(x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=$$
$$=0{,}32768+0{,}4096+0{,}2048+0{,}0512+0{,}0064=0{,}99968;$$

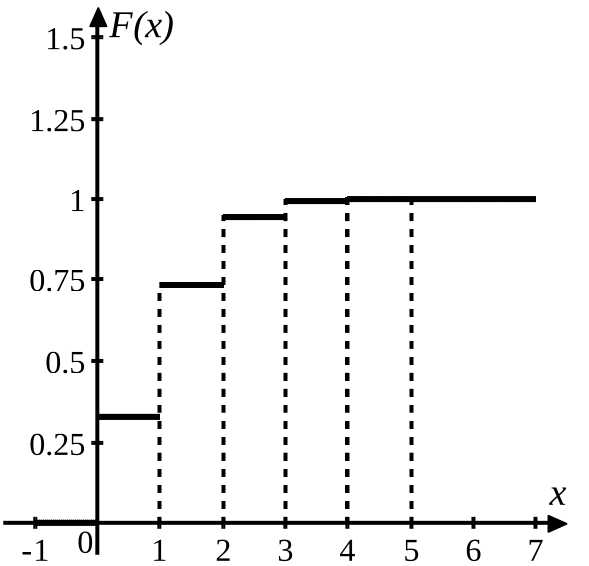
если $x>5$, то

$$F(x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=$$
$$=0{,}32768+0{,}4096+0{,}2048+0{,}0512+0{,}0064+0{,}00032=1.$$

Итак, функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 0,\\ 0{,}32768, & \text{если } 0<x\le 1,\\ 0{,}73728, & \text{если } 1<x\le 2,\\ 0{,}94208, & \text{если } 2<x\le 3,\\ 0{,}99328, & \text{если } 3<x\le 4,\\ 0{,}99968 & \text{если } 4<x\le 5,\\ 1, & \text{если } x>5.\end{cases}$$

Построим график функции $F(x)$.



г) Найдем вероятность $P(X>3)$. Для этого суммируем все вероятности, для которых справедливо неравенство $X>3$, т.е.

$P(X>3)=P(X=4)+P(X=5)=0{,}0064+0{,}00032=0{,}00672$.

13. Кафе обслуживают четыре автоматические установки. Каждая из них в течение дня может выйти из строя с вероятностью $p=0{,}3$. Пусть X – число установок, проработавших до конца дня. Составьте закон распределения случайной величины *X*. Найдите *M* (*X*), *D* (*X*). Постройте многоугольник распределения.

14. Монета подбрасывается 5 раз. Случайная величина X – число выпадений герба. Составить закон распределения случайной величины X. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X. Найти вероятности событий A, B, C. Событие A состоит в том, что $X \geq 3$, событие B состоит в том, то $X < 3$, C состоит в том, что $1 \leq X \leq 5$.

15. Партия из 100 изделий содержит 90% изделий I сорта и 10% изделий II сорта. Найти закон распределения и числовые характеристики случайной величины X, равной числу изделий I сорта среди трех просмотренных изделий (после просмотра изделия возвращали в партию).

16. *Задача с решением.* Завод получает сырье на автомашинах от трех независимо работающих поставщиков. Вероятность прибытия автомашины от первого поставщика равна 0,2, от второго – 0,3 и от третьего – 0,1. Составить распределение числа прибывших автомашин. Найти математическое ожидание и дисперсию полученной величины. Построить график функции распределения $F(x)$.

Решение. Случайная величина X – число прибывших машин, имеет следующие возможные значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$. Известны вероятности прибытия автомашин от каждого из трех поставщиков $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}3$, $p_3 = 0{,}1$. Тогда $q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$, $q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$, $q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$.

$P(X = k)$ вычисляем по следующим формулам

$$P(X = 0) = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}504;$$

$$P(X = 1) = p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 + q_1 \cdot p_2 \cdot q_3 + q_1 \cdot q_2 \cdot p_3 = 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 + 0{,}8 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}9 + \\ + 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1 = 0{,}126 + 0{,}216 + 0{,}056 = 0{,}398;$$

$$P(X = 2) = p_1 \cdot p_2 \cdot q_3 + p_1 \cdot q_2 \cdot p_3 + q_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}9 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1 + \\ + 0{,}8 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}054 + 0{,}014 + 0{,}024 = 0{,}092;$$

$$P(X = 3) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}006.$$

Напишем искомый закон распределения X:

X	0	1	2	3
p	0,504	0,398	0,092	0,006

Контроль: $0{,}504 + 0{,}398 + 0{,}092 + 0{,}006 = 1$.

По полученному закону распределения определим математическое ожидание.

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k = 0 \cdot 0{,}504 + 1 \cdot 0{,}398 + 2 \cdot 0{,}092 + 3 \cdot 0{,}006 = 0{,}6.$$

Определим дисперсию. Для определения дисперсии воспользуемся формулой:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Составим закон распределения случайной величины X^2:

X^2	0	1	4	9
p	0,504	0,398	0,092	0,006

Найдем математическое ожидание $M(X^2)$:

$$M(X^2) = 0 \cdot 0{,}504 + 1 \cdot 0{,}398 + 4 \cdot 0{,}092 + 9 \cdot 0{,}006 = 0{,}82.$$

Тогда дисперсия:

$$D(X)=M\left(X^2\right)-\left[M(X)\right]^2=0{,}82-0{,}6^2=0{,}82-0{,}36=0{,}46.$$

По определению функции распределения находим:

если $x\le 0$, то $F(x)=P(X<x)=0$;

если $0<x\le 1$, то $F(x)=P(X<x)=P(X=0)=0{,}504$;

если $1<x\le 2$, то

$$F(x)=P(X=0)+P(X=1)=0{,}504+0{,}398=0{,}902;$$

если $2<x\le 3$, то

$$F(x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0{,}504+0{,}398+0{,}092=0{,}994;$$

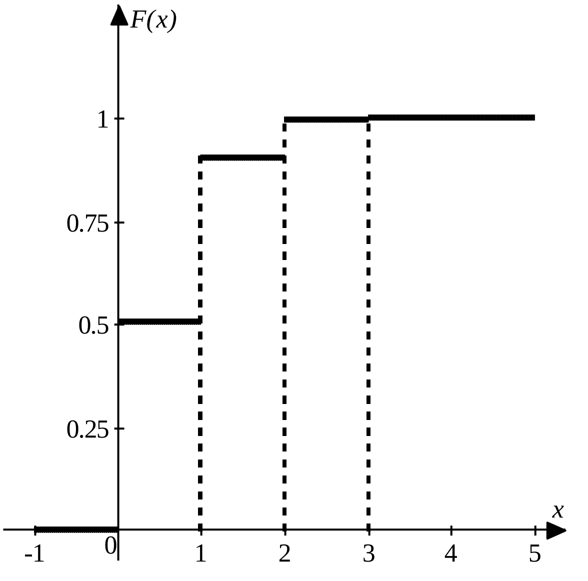
если $x>3$, то

$$F(x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=$$
$$=0{,}504+0{,}398+0{,}092+0{,}006=1.$$

Итак, функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x\le 0,\\ 0{,}504, & \text{если} \quad 0<x\le 1,\\ 0{,}904, & \text{если} \quad 1<x\le 2,\\ 0{,}994, & \text{если} \quad 2<x\le 3,\\ 1, & \text{если} \quad x>3.\end{cases}$$

Построим график функции $F(x)$.



17. Ткачиха обслуживает три станка. Вероятность того, что в течении часа станок потребует внимания ткачихи равна для первого станка – 0,3, для второго – 0,3, для третьего – 0,2. Пусть *X* – число станков, не потребовавших внимания ткачихи в течение часа. Составьте закон распределения случайной величины *X*. Найдите *M* (*X*), *D* (*X*). Постройте функцию распределения.

18. *Задача с решением.* Для подготовки к экзамену студенту нужна определенная книга, которая может находиться в каждой из 4-х доступных студенту библиотек с вероятностью 0,38. Составить закон распределения дискретной случайной величины *X* – числа посещённых библиотек. Обход прекращается после получения нужной книги или посещения всех четырех библиотек. Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Решение. Случайная величина X – число посещенных студентом библиотек – может принимать значения 1, 2, 3, 4. Обозначим события A_i – студент посетил i-ю библиотеку $(i=1,2,3,4)$. Тогда вероятность того, что студент посетил первую библиотеку, $P(X=1)=P(A_1)=0{,}38$.

Студент пойдет во вторую библиотеку при условии, что он не получит нужную книгу в первой библиотеке, т.е.

$$P(X=2)=P\left(\overline{A}_1A_2\right)=P\left(\overline{A}_1\right)P(A_2)=(1-0{,}38)\cdot 0{,}38=0{,}2356.$$

Аналогично

$$P(X=3)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)=(1-0{,}38)^2\cdot 0{,}38=0{,}1461.$$

Посещение студентом четвертой библиотеки при любом исходе – последнее (он может получить в четвертой библиотеке книгу или нет). Поэтому

$$P(X=4)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4+\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)P(A_4)+$$
$$+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)P(\overline{A}_4)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)(P(A_4)+P(\overline{A}_4))=$$
$$=(1-0{,}38)^3=0{,}2383.$$

Тогда закон распределения случайной величины X – число посещенных студентом библиотек – имеет вид:

x_i	1	2	3	4
p_i	0,38	0,2356	0,1461	0,2383

Контроль: $0{,}38+0{,}2356+0{,}1461+0{,}2383=1$.

Математическое ожидание определяется по формуле

$$M(X)=\sum_{k=1}^{n}x_k p_k=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n.$$

Таким образом, получаем

$$M(X)=1\cdot 0{,}38+2\cdot 0{,}2356+3\cdot 0{,}1461+4\cdot 0{,}2383=2{,}2427.$$

Для определения дисперсии воспользуемся формулой:

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2.$$

Составим закон распределения случайной величины X^2:

X^2	1	4	9	16
p	0,38	0,2356	0,1461	0,2383

Найдем математическое ожидание $M(X^2)$:

$$M(X^2)=1\cdot 0{,}38+4\cdot 0{,}2356+9\cdot 0{,}1461+16\cdot 0{,}2383=6{,}4501.$$

Тогда дисперсия:

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=6{,}4501-2{,}2427^2=1{,}4204.$$

Ответ: $M(X)=2{,}2427$; $D(X)=1{,}4204$.

19. Охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более четырёх выстрелов. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6. Пусть X – число выстрелов, произведённых охотником. Составьте закон распределения случайной величины X. Найдите $M(X)$, $D(X)$.

20. Вероятность изготовления нестандартного изделия при налаженном технологическом процессе постоянна и равна 0,1. Для проверки качества изготовленных изделий ОТК берет из партии не более трех деталей. При обнаружении нестандартного изделия вся партия задерживается. Составить закон распределения числа изделий, проверяемых из каждой партии. Найти математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение этой величины. Найти и построить функцию указанного распределения.

21. Из четырёх одинаково упакованных ящиков только один содержит изделие нужного вида. Ящики вскрывают один за другим до обнаружения нужного изделия. Пусть X – число вскрытых ящиков. Составьте закон распределения случайной величины X. Найдите $M(X)$, $D(X)$. Постройте многоугольник распределения.

22. *Задача с решением.* В урне 3 шара с номером 1, 4 шара с номером 2, 5 шаров с номером 3, 4 шара с номером 4. Случайная величина равна номеру вынутого из урны шара. Найти распределение этой случайной величины.

Решение. Случайная величина X – номер вынутого из урны шара – имеет следующие возможные значения $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$. Найдем вероятности возможных значений.

Случайная величина принимает значение $x_1 = 1$, когда из урны с $3 + 4 + 5 + 4 = 16$ шарами извлекается шар с номером 1. Вычислим вероятность: $P(X=1) = \frac{C_3^1}{C_{16}^1} = \frac{3}{16}$.

Случайная величина принимает значение $x_2 = 2$, когда из урны с 16 шарами извлекается шар с номером 2. Вычислим вероятность: $P(X=2) = \frac{C_4^1}{C_{16}^1} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

Случайная величина принимает значение $x_3 = 3$, когда из урны с 16 шарами извлекается шар с номером 3. Вычислим вероятность: $P(X=3) = \frac{C_5^1}{C_{16}^1} = \frac{5}{16}$.

Случайная величина принимает значение $x_4 = 4$, когда из урны с 16 шарами извлекается шар с номером 4. Вычислим вероятность: $P(X=4) = \frac{C_4^1}{C_{16}^1} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

Составим искомый закон распределения.

X	1	2	3	4
p	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{4}$

Контроль: $\frac{3}{16} + \frac{1}{4} + \frac{5}{16} + \frac{1}{4} = 1$

23. Из урны, в которой 4 белых шара и 6 черных, вынимают 7 шаров. Найти распределение случайной величины, равной числу оставшихся в урне черных шаров.

24. В партии из 20 радиоприёмников имеется два неисправных. Для проверки случайным образом отбираются три приёмника. Пусть X – число исправных приёмников среди трёх отобранных. Составьте закон распределения случайной величины X. Найдите $M(X)$, $D(X)$.

25. *Задача с решением.* Среди 17 часов, поступивших в ремонт, 2 с поломками оси. Наудачу взяты 3 часов. Составить ряд распределения числа часов с поломками оси среди взятых трех. Найти функцию распределения дискретной случайной величины. Построить ее график.

Решение. Случайная величина X – число часов с поломками оси – имеет следующие возможные значения $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Найдем вероятности возможных значений.

Случайная величина принимает значение $x_1 = 0$, когда среди трех взятых часов не окажется часов с поломками оси (все трое часов исправны). Вычислим вероятность:

$$P(X=0)=\frac{C_2^0 C_{15}^3}{C_{17}^3}=\frac{1\cdot\frac{15!}{3!\cdot 12!}}{\frac{17!}{3!\cdot 14!}}=\frac{\frac{12!\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{12!\cdot 2\cdot 3}}{\frac{14!\cdot 15\cdot 16\cdot 17}{14!\cdot 2\cdot 3}}=\frac{13\cdot 7\cdot 5}{5\cdot 8\cdot 17}=\frac{91}{136}=\frac{91}{136}.$$

Случайная величина принимает значение $x_2 = 1$, когда среди трех взятых часов одни часы с поломками оси (двое часов исправны). Вычислим вероятность:

$$P(X=1)=\frac{C_2^1 C_{15}^2}{C_{17}^3}=\frac{2\cdot\frac{15!}{2!\cdot 13!}}{\frac{17!}{3!\cdot 14!}}=\frac{2\cdot\frac{13!\cdot 14\cdot 15}{13!\cdot 2}}{\frac{14!\cdot 15\cdot 16\cdot 17}{14!\cdot 2\cdot 3}}=\frac{14\cdot 15}{5\cdot 8\cdot 17}=\frac{7\cdot 3}{4\cdot 17}=\frac{21}{68}.$$

Случайная величина принимает значение $x_3 = 2$, когда среди трех взятых часов оказалось двое часов с поломками оси (одни часы оказались исправными). Вычислим вероятность:

$$P(X=2)=\frac{C_2^2 C_{15}^1}{C_{17}^3}=\frac{1\cdot 15}{\frac{17!}{3!\cdot 14!}}=\frac{15}{\frac{14!\cdot 15\cdot 16\cdot 17}{14!\cdot 2\cdot 3}}=\frac{15}{5\cdot 8\cdot 17}=\frac{3}{8\cdot 17}=\frac{3}{136}.$$

Составим искомый закон распределения.

X	0	1	2
p	$\frac{91}{136}$	$\frac{21}{68}$	$\frac{3}{136}$

Контроль: $\frac{91}{136}+\frac{21}{68}+\frac{3}{136}=\frac{91+42+3}{136}=\frac{136}{136}=1.$

По определению функции распределения находим:

– если $x \le 0$, то $F(x)=P(X<x)=0$;

– если $0 < x \le 1$, то $F(x)=P(X<x)=P(X=0)=\frac{91}{136}$;

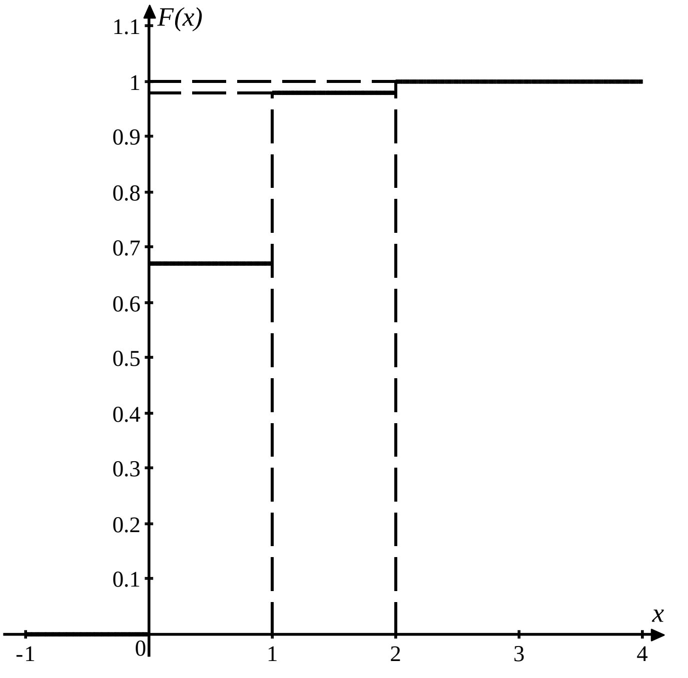
– если $1 < x \le 2$, то $F(x)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{91}{136}+\frac{21}{68}=\frac{91+42}{136}=\frac{133}{136}$;

– если $x > 2$, то $F(x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=\frac{91}{136}+\frac{21}{68}+\frac{3}{136}=1.$

Итак, функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 0,\\ \dfrac{91}{136}, & \text{если } 0<x\le 1,\\ \dfrac{133}{136}, & \text{если } 1<x\le 2,\\ 1, & \text{если } x>2.\end{cases}$$

Построим график функции $F(x)$.



26. Студент знает ответы на пять экзаменационных вопросов из восьми в списке. На экзамене студенту наудачу предлагают 2 вопроса из списка. Случайная величина *X* принимает значение числа вопросов, на которые студент знает ответ. Найти математическое ожидание *X*.

27. Студент записан в четыре библиотеки. Вероятность того, что в какой-то из библиотек свободна необходимая студенту книга, равна 0,4. Пусть *X* – число библиотек, которые посетит студент в поисках книги. Составьте закон распределения случайной величины *X*. Найдите *M* (*X*), *D* (*X*).

28. На конноспортивных соревнованиях необходимо преодолеть четыре препятствия с вероятностями, соответственно равными 0,9; 0,8; 0,7; 0,6. При первой неудаче спортсмен в дальнейших соревнованиях не участвует. Составить закон распределения дискретной случайной величины *Y* – числа взятых препятствий. Найти и построить функцию указанного распределения.

29. Партия из 50 изделий содержит 5 бракованных. Из партии наугад взято 3 изделия. Пусть *X* – число бракованных изделий среди трёх взятых. Составьте закон распределения случайной величины *X*. Найдите *M* (*X*), *D* (*X*).

30. На сборку поступило 12 деталей, среди которых 4 с браком. Случайным образом берут 5 деталей. Составить закон распределения числа бракованных деталей среди отобранных. Построить график функции распределения.

31. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины, заданной законом распределения, постройте функцию распределения:

X	– 2	– 1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

32. К случайной величине прибавили постоянную a. Как при этом изменяется ее: **a)** математическое ожидание; **b)** дисперсия?

33. Независимые случайные величины *X* и *Y* заданы следующими законами распределения:

X	2	4	5
P	0,1	0,3	0,6

и

Y	7	9
P	0,8	0,2

Найдите: **a)** математическое ожидание случайной величины XY; **b)** математическое ожидание и дисперсию случайной величины $X + Y$.

34. Распределение дискретной случайной величины X имеет вид:

X	1	3	5	7	9
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Найти распределение случайной величины $Z = 5X + 1$, ее математическое ожидание и дисперсию.

35. Известны числовые характеристики независимых дискретных случайных величин X и Y: $MX = 2$, $MY = 5$, $DX = 7$, $DY = 1$. Найти $M(5X - 7Y)$, $D(2X - 4Y)$.

36. Пусть известны законы распределения двух взаимно независимых случайных величин X и Y:

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

Y	1000	2000
P	0,7	0,3

Требуется: **1)** Найти числовые характеристики величины X: $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

2) Найти числовые характеристики величины Y: $M(Y)$, $D(Y)$, $\sigma(Y)$.

3) Найти $M(2X - Y)$, $D(Y - X)$ по свойствам математического ожидания и дисперсии.

37. Вероятность выигрыша по одному билету лотереи равна 1/6. Составить закон распределения случайной величины X – числа выигрышных билетов из четырех.

38. В круг радиуса 9 вписан равносторонний треугольник. Четыре раза наугад ставим точку внутри круга. Построить закон распределения случайной величины X – случайного числа попаданий точки в треугольник, вычислить $M(X)$, $D(X)$, написать выражение функции распределения $F(X)$, вычислить вероятность событий $X \in [-2;1{,}3]$ и $X \in [3;8]$.

39. В первой студенческой группе из 24 человек 4 отличника, во второй из 22 человек 3 отличника, в третьей из 24 – 6 отличников и в четвертой из 20 – 2 отличника. Случайная величина X – число отличников, приглашенных на конференцию, при условии, что из каждой группы выделили случайным образом по одному человеку. Составить закон распределения случайной величины.

40. Вероятность выхода из строя каждого из трех блоков прибора в течение гарантийного срока равна 0,3. Случайная величина X – число блоков, вышедших из строя в течение гарантийного срока. Составить закон распределения случайной величины. Найти числовые характеристики.

41. Вероятность того, что деталь с первого автомата удовлетворяет стандарту, равна 0,9, для второго автомата – 0,8, для третьего – 0,7. Случайная величина X – число деталей, удовлетворяющих стандарту, при условии, что с каждого автомата взято наугад по одной детали. Составить закон распределения случайной величины.

42. Вероятности поражения цели каждым из трех стрелков равны соответственно 0,7; 0,8; 0,6. Случайная величина X – число поражений цели при условии, что каждый из стрелков сделал по одному выстрелу. Составить закон распределения случайной величины. Найти числовые характеристики.

43. Вероятность попадания мячом в корзину при каждом броске для данного баскетболиста равна 0,4. Случайная величина X – число попаданий при четырех бросках. Составить закон распределения случайной величины. Построить многоугольник распределения.

44. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины Z, если известны математические ожидания величин X и Y: $M(X)=5, M(Y)=3$.

а) $Z=2X-5$;

б) $Z=2X+Y$;

в) $Z=3X-2Y$.

45. *Задача с решением.* Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	1	x_2	x_3	8
P	0,1	p_2	0,5	0,1

Найти x_2, x_3, p_2, если известно, что $M(X) = 4$, $M(X^2) = 20{,}2$. Построить многоугольник этого распределения.

Решение. Определим значение вероятности p_2 из условия $\sum p_i = 1$. Т.е.

$$0{,}1+p_2+0{,}5+0{,}1=1;$$
$$0{,}7+p_2=1;$$
$$p_2=1-0{,}7;$$
$$p_2=0{,}3.$$

Математическое ожидание определяется по формуле

$$M(X)=\sum_{k=1}^{n} x_k p_k = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n.$$

Величина $M\left(X^2\right)=\sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \ldots + x_n^2 p_n$.

Используя эти формулы, составим систему:

$$\begin{cases} M(X)=1\cdot 0{,}1+x_2\cdot 0{,}3+x_3\cdot 0{,}5+8\cdot 0{,}1=4, \\ M\left(X^2\right)=1^2\cdot 0{,}1+x_2^2\cdot 0{,}3+x_3^2\cdot 0{,}5+8^2\cdot 0{,}1=20{,}2, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0{,}3x_2+0{,}5x_3+0{,}9=4, \\ 0{,}3x_2^2+0{,}5x_3^2+6{,}5=20{,}2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}3x_2+0{,}5x_3=3{,}1, \\ 0{,}3x_2^2+0{,}5x_3^2=13{,}7, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_2+5x_3=31, \\ 3x_2^2+5x_3^2=137, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3=6{,}2-0{,}6x_2, \\ 3x_2^2+5\cdot(6{,}2-0{,}6x_2)^2=137, \end{cases}$$

$$3x_2^2+5\cdot\left(38{,}44-7{,}44x_2+0{,}36x_2^2\right)-137=0,$$

$$3x_2^2+192{,}2-37{,}2x_2+1{,}8x_2^2-137=0,$$

$$4{,}8x_2^2-37{,}2x_2+55{,}2=0,$$

$$48x_2^2-372x_2+552=0,$$

$$D=372^2-4\cdot 48\cdot 552=32400=180^2>0,$$

$$x_{2(1)} = \frac{372+180}{2\cdot 48} = \frac{552}{96} = 5{,}75, \qquad x_{2(2)} = \frac{372-180}{2\cdot 48} = \frac{192}{96} = 2.$$

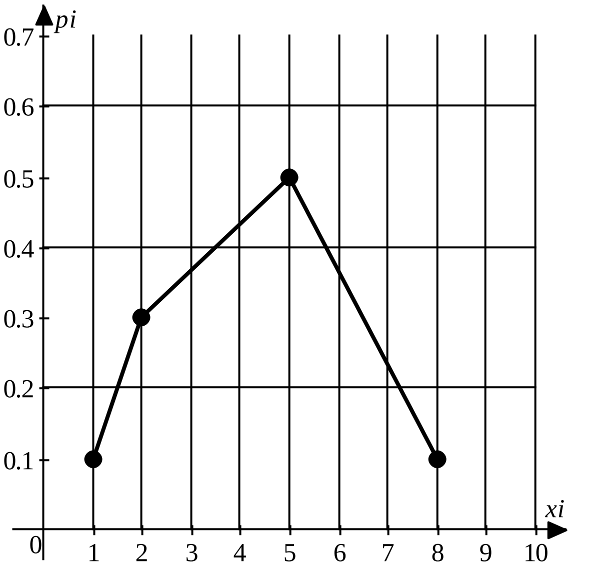
Тогда, учитывая что $x_3 = 6{,}2 - 0{,}6x_2$, получим

$$x_{3(1)} = 6{,}2 - 0{,}6\cdot 5{,}75 = 2{,}75, \qquad x_{3(2)} = 6{,}2 - 0{,}6\cdot 2 = 5.$$

Так как в законе распределения дискретной случайной величины X все ее возможные значения должны располагаться в порядке возрастания, то из двух вариантов выбираем тот, где $x_2 < x_3$, т.е. $x_2 = 2$ и $x_3 = 5$. Получим следующий закон распределения:

X	1	2	5	8
P	0,1	0,3	0,5	0,1

Построим многоугольник распределения.



46. Дискретная случайная величина X принимает три возможных значения: $x_1 = 4$ с вероятностью $p_1 = 0{,}5$, $x_2 = 6$ с вероятностью $p_2 = 0{,}3$ и x_3 с вероятностью p_3. Найти x_3 и p_3, зная, что $M(X) = 8$.

47. Дан перечень значений дискретной случайной величины X: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, а также известны математические ожидания самой этой величины и её квадрата: $M(X) = 0{,}1$; $M(X^2) = 0{,}9$. Найти вероятности p_1, p_2, p_3.

48. Дискретная случайная величина X имеет только два возможных значения x_1 и x_2, причём $x_2 > x_1$. Найти закон распределения величины X, если $p_1 = 0{,}6$; $M(X) = 1{,}4$; $D(X) = 0{,}24$.

49. Дискретная случайная величина X имеет только два возможных значения x_1 и x_2, причём $x_2 > x_1$. Найти закон распределения величины X, если $p_1 = 0{,}2$; $M(X) = 2{,}6$; $D(X) = 0{,}24$.

50. Дискретная случайная величина X имеет только три возможных значения x_1, x_2 и x_3 причём $x_1 < x_2 < x_3$. Найти закон распределения величины X, если $p_1 = 0{,}3$; $p_2 = 0{,}2$; $M(X) = 2{,}2$; $D(X) = 0{,}76$.

51. *Задача с решением*. Дискретная случайная величина имеет закон распределения

X	– 2	0	2	4
P	0,4	0,2	0.3	0,1

Найти закон распределения $Y = 9 - X^2$.

Решение. Вероятность возможного значения $y_1 = 9 - 4^2 = -7$ равна вероятности события $X = 4$, т.е. $p_1 = 0{,}1$. Вероятность возможного значения

$y_2 = 9 - 2^2 = 9 - (-2)^2 = 5$ равна сумме вероятностей несовместных событий $X = -2$ и $X = 2$, т.е. $p_2 = 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}7$. Вероятность значения $y_3 = 9 - 0^2 = 9$ равна $p_3 = P(X = 0) = 0{,}2$. Искомый закон распределения примет вид

Y	-7	5	9
P	0,1	0,7	0,2

ТЕМА 2. Непрерывные случайные величины

Контрольные вопросы

1. Какую случайную величину называют непрерывной?

2. Что называется функцией распределения и плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины? Каковы их свойства?

3. Как связаны между собой функции распределения и плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины?

4. Как определить вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал?

5. Какими числовыми характеристиками характеризуется непрерывная случайная величина?

Практические задания по теме

52. *Задача с решением.* Случайная величина X задана функцией распределения (интегральной функцией) $F(X)$ в следующем виде:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \in (-\infty; -1), \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2} & \text{при} \quad x \in [-1;\, 1], \\ 1 & \text{при} \quad x \in [1; +\infty] \end{cases}$$

Требуется: **а)** найти плотность вероятности (дифференциальную функцию) $f(x)$; **б)** найти математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$; **в)** построить графики функции распределения $F(X)$ и плотности вероятности $f(x)$; **г)** найти вероятность попадания случайной величины в заданный интервал $P(0 \le X < 1)$.

Решение. **а)** Для того, чтобы найти плотность вероятности (дифференциальную функцию) $f(x)$, необходимо найти производную от функции распределения $F(x)$: $f(x) = F'(x)$.

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\in(-\infty;-1),\\ \dfrac{1}{2} & \text{при} \quad x\in[-1;\,1],\\ 0 & \text{при} \quad x\in[1;+\infty]\end{cases}$$

б) Математическое ожидание непрерывной случайной величины определяется формулой: $M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx$. В данном случае получаем

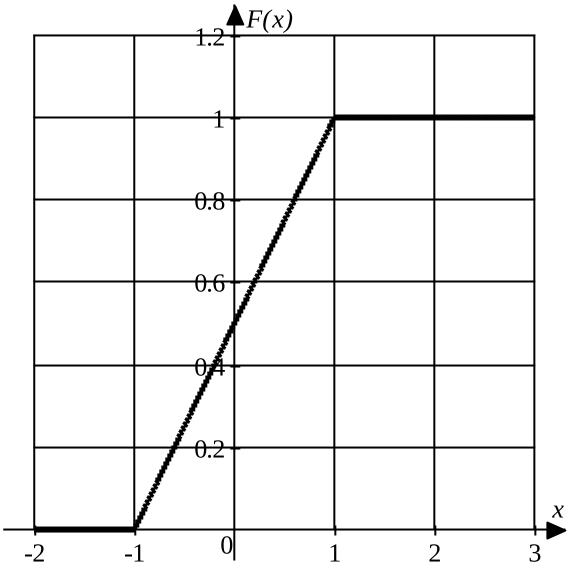
$$M(X)=\int\limits_{-1}^{1} x\cdot\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} x\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{1}{4}\cdot\left(1^2-(-1)^2\right)=0\,.$$

Дисперсию непрерывной случайной величины можно определить по формуле: $D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)dx-[M(X)]^2$.

$$D(X)=\int\limits_{-1}^{1} x^2\cdot\frac{1}{2}dx-0=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} x^2\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{1}{6}\cdot\left(1^3-(-1)^3\right)=\frac{1}{6}\cdot(1+1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

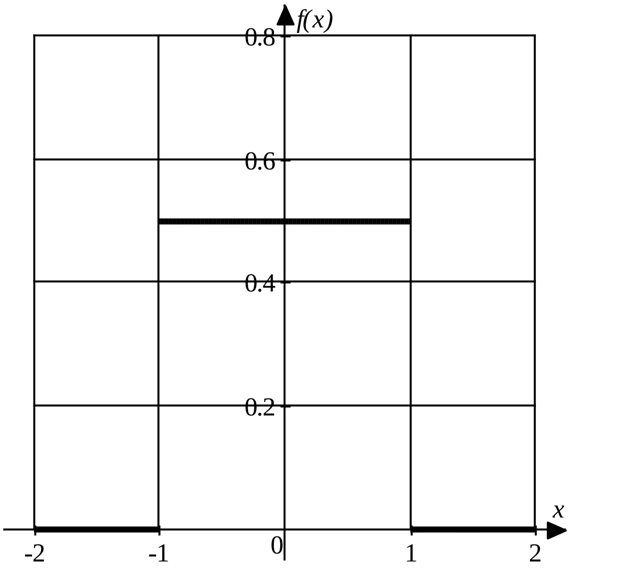
в) Построим график функции распределения $F(x)$.

$$F(X)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\in(-\infty;-1),\\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2} & \text{при} \quad x\in[-1;\,1],\\ 1 & \text{при} \quad x\in[1;+\infty]\end{cases}$$



Построим график плотности распределения вероятностей $f(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\in(-\infty;-1),\\ \dfrac{1}{2} & \text{при} \quad x\in[-1;1],\\ 0 & \text{при} \quad x\in[1;+\infty]\end{cases}$$



г) Для определения попадания случайной величины в заданный интервал воспользуемся формулой $P(\alpha\le X<\beta)=\int\limits_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$. Таким образом, получаем

$$P(0\le X<1)=\int\limits_0^1\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx=\frac{1}{2}x\Big|_0^1=\frac{1}{2}\cdot(1-0)=\frac{1}{2}=0{,}5.$$

53. *Задача с решением.* Случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 0,\\ \dfrac{1}{8}(A+3x), & \text{если } 0<x\le 2,\\ 0, & \text{если } x>2.\end{cases}$$

Требуется определить: **1)** параметр A; **2)** функцию распределения $F(x)$; **3)** математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$; **4)** моду $Mo(X)$ и медиану $Me(X)$ случайной величины X; **5)** вероятность $P(1<X<4)$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$. Показать на графиках вероятность, найденную в пункте 5.

54. *Задача с решением.* Случайная величина Y задана дифференциальной функцией

$$f(y)=\begin{cases}0, & y\le 0;\\ \dfrac{4}{a^2}\cdot y, & 0<y\le\sqrt{a};\\ 0, & y>\sqrt{a}.\end{cases}$$

Найти: **а)** $F(y)$; **б)** вероятность попадания случайной величины в интервал $(\ln 2;2\ln 2)$; **в)** изобразить графики $f(y)$ и $F(y)$ и показать на графиках искомую вероятность.

Решение. Для начала определим параметр a в заданной дифференциальной функции из условия $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$.

Имеем

$$\int\limits_0^{\sqrt{a}} \frac{4}{a^2} \cdot x\,dx = 1;$$

$$\frac{4}{a^2} \int\limits_0^{\sqrt{a}} x\,dx = 1;$$

$$\frac{4}{a^2} \cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\sqrt{a}} = 1;$$

$$\frac{4}{a^2} \cdot \frac{a}{2} = 1;$$

$$\frac{2}{a} = 1; \qquad \Rightarrow \qquad a = 2.$$

Таким образом, получаем дифференциальную функцию (плотность распределения случайной величины)

$$f(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0; \\ y, & 0 < y \le \sqrt{2}; \\ 0, & y > \sqrt{2}. \end{cases}$$

а) Для того чтобы составить функцию распределения используем формулу:

$$F(y) = \int\limits_{-\infty}^{y} f(y)dy,$$

Если $x \le 0$, то $f(y) = 0$, следовательно,

$$F(y) = \int\limits_{-\infty}^{y} 0\,dy = 0.$$

Если $0 < y \le \sqrt{2}$, то

$$F(y) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dy + \int\limits_0^y y\,dy = 0 + \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^y = \frac{1}{2}y^2.$$

Если $y > \sqrt{2}$, то

$$F(y) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dy + \int\limits_0^{\sqrt{2}} y\,dy + \int\limits_{\sqrt{2}}^{y} 0\,dy = \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{\sqrt{2}} = 1.$$

Итак, искомая функция распределения:

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0; \\ \frac{1}{2}y^2, & 0 < y \le \sqrt{2}; \\ 1, & y > \sqrt{2}. \end{cases}$$

б) Для определения вероятности попадания случайной величины Y в заданный интервал воспользуемся формулой

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

В данном случае получаем

$$P(\ln 2 < Y < 2\ln 2) = \int_{\ln 2}^{2\ln 2} y\,dy = \left.\frac{y^2}{2}\right|_{\ln 2}^{2\ln 2} = \frac{1}{2}\cdot\left(4\ln^2 2 - \ln^2 2\right) = \frac{\ln^2 2}{2}\cdot(4-1) =$$

$$= \frac{3}{2}\ln^2 2 \approx 0{,}721.$$

в) Построим графики. График дифференциальной функции (плотности распределения вероятностей):

$$f(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0; \\ y, & 0 < y \le \sqrt{2}; \\ 0, & y > \sqrt{2}. \end{cases}$$

На этом графике искомая вероятность заштрихована – площадь фигуры, расположенная под графиком плотности распределения вероятностей.

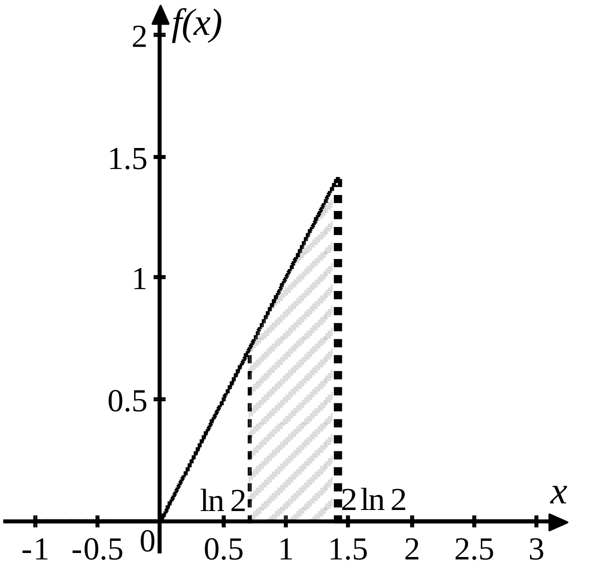
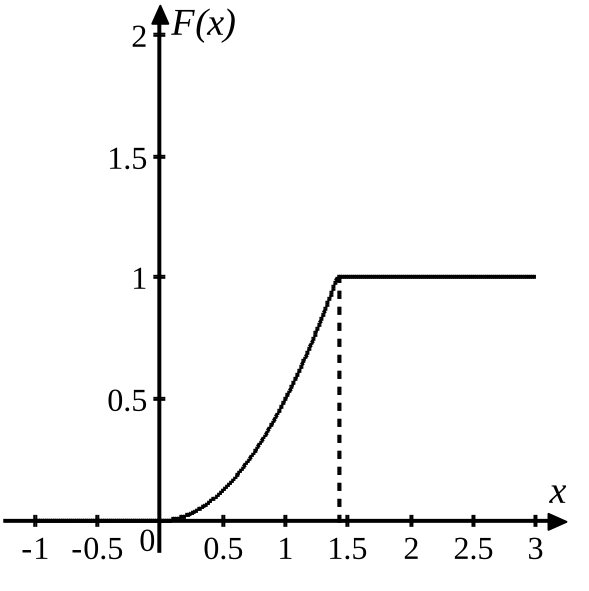


График функции распределения имеет вид:

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0; \\ \frac{1}{2}y^2, & 0 < y \le \sqrt{2}; \\ 1, & y > \sqrt{2}. \end{cases}$$



55. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 2, \\ \frac{x}{2} - 1, & \text{при } 2 < x \le 4, \\ 1, & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (2; 3). Постройте график интегральной функции.

56. Задана неотрицательная функция

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ c\left(x^2+1\right), & -1<x<1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

и промежуток $[-2;0)$. *Найти:* **(1)** параметр c, при котором $f(x)$ является плотностью случайной величины X; **(2)** функцию распределения $F(x)$ исходя из $f(x)$ с учетом найденного c; **(3)** вероятность $P(a\le X<b)$ исходя из $f(x)$; **(4)** дисперсию X.

57. *Задача с решением.* Задана функция распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{1-\cos x}{2}, & 0<x\le\pi,\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$$

и интервал $\left[\dfrac{\pi}{2};2\pi\right)$. *Найти:* **(1)** плотность распределения $f(x)$; **(2)** вероятность $P(a\le X<b)$ исходя из $F(x)$; **(3)** математическое ожидание X.

Решение. **(1)** Плотность распределения равна первой производной от функции распределения:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{1}{2}\cdot\sin x, & 0<x\le\pi,\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$$

(2) Вероятность того, что X примет значение, заключенное в интервале $(a;b)$, равна приращению функции распределения на этом интервале: $P(a<X<b)=F(b)-F(a)$.

В данном случае имеем

$$P\left(\frac{\pi}{2}\le X<2\pi\right)=F(2\pi)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{1-\cos\frac{\pi}{2}}{2}=1-\frac{1-0}{2}=\frac{1}{2}.$$

(3) Математическое ожидание непрерывной случайной величины определяется формулой: $MX=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx$. В данном случае получаем

$$M(X)=\int\limits_0^{\pi}x\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin x\,dx=\left|\begin{matrix}u=x; & du=dx;\\ dv=\dfrac{1}{2}\sin x\,dx; & v=-\dfrac{1}{2}\cos x\end{matrix}\right|=x\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos x\right)\Bigg|_0^{\pi}-$$

$$-\int\limits_0^{\pi}-\frac{1}{2}\cos x\,dx=\left(-\frac{1}{2}x\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)\Bigg|_0^{\pi}=\left(-\frac{\pi}{2}\cdot\cos\pi+\frac{1}{2}\sin\pi\right)-$$

$$-\left(-\frac{1}{2}\cdot 0\cdot\cos 0+\frac{1}{2}\cdot\sin 0\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Ответ: **(1)** $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \frac{1}{2}\cdot\sin x, & 0<x\le\pi,\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$ **(2)** $P\left(\frac{\pi}{2}\le X<2\pi\right)=\frac{1}{2}$; **(3)** $M(X)=\frac{\pi}{2}$.

58. *Задача с решением.* Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ A\cos^2 x, & 0\le x\le\pi/2,\\ 0, & x>\pi/2.\end{cases}$$

Найти неизвестный коэффициент A, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, интегральную функцию распределения $F(x)$ и вероятность попадания X в интервал (α,β).

Решение. Параметр A определим, исходя из следующего свойства плотности распределения непрерывной случайной величины:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1.$$

В данном случае запишем

$$\int_{0}^{\pi/2} A\cdot\cos^2 x\,dx=1.$$

Вычислим интеграл и разрешим выражение относительно параметра A.

$$\frac{A}{2}\cdot\int_{0}^{\pi/2}(1+\cos 2x)dx=1;$$

$$\frac{A}{2}\cdot\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=1;$$

$$\frac{A}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\pi-0+\frac{1}{2}\sin 0\right)=1;$$

$$\frac{A}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot 0-0+\frac{1}{2}\cdot 0\right)=1;$$

$$\frac{\pi}{4}\cdot A=1;\quad\Rightarrow\quad A=\frac{4}{\pi}.$$

Тогда функция плотности распределения случайной величины имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{4}{\pi}\cos^2 x, & 0\le x\le\pi/2,\\ 0, & x>\pi/2\end{cases}$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины определяется формулой: $M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx$. В данном случае получаем

$$M(X)=\int_0^{\pi/2} x\cdot\frac{4}{\pi}\cdot\cos^2 x\,dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 2x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\,dx+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\cos 2x\,dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=x; & du=dx; \\ dv=\cos 2x\,dx; & v=\frac{1}{2}\sin 2x \end{matrix}\right|=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi/2}+\frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{2}x\sin 2x\bigg|_0^{\pi/2}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2x\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-0^2\right)+\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\sin\pi-0\cdot\sin 0\right)-\frac{1}{\pi}\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\bigg|_0^{\pi/2}=$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0-0\right)+\frac{1}{2\pi}\cdot(\cos\pi-\cos 0)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{\pi}\cdot 0+\frac{1}{2\pi}\cdot(-1-1)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{\pi}=\frac{\pi^2-4}{4\pi}.$$

Дисперсию непрерывной случайной величины можно определить по формуле: $D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)dx-[M(X)]^2$.

$$D(X)=\int_0^{\pi/2} x^2\cdot\frac{4}{\pi}\cdot\cos^2 x\,dx-\left(\frac{\pi^2-4}{4\pi}\right)^2=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} x^2\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 2x)dx-\left(\frac{\pi^2-4}{4\pi}\right)^2=$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi/2}\left(x^2+x^2\cos 2x\right)dx-\left(\frac{\pi^2-4}{4\pi}\right)^2=\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi/2} x^2\,dx+\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi/2} x^2\cos 2x\,dx-\left(\frac{\pi^2-4}{4\pi}\right)^2=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=x^2; & du=2x\,dx; \\ dv=\cos 2x\,dx; & v=\frac{1}{2}\sin 2x \end{matrix}\right|=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^{\pi/2}+\frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{2}x^2\sin 2x\bigg|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2} x\sin 2x\,dx\right)-$$

$$-\left(\frac{\pi^2-4}{4\pi}\right)^2=\frac{2}{3\pi}\cdot\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^3-0^3\right)-\left(\frac{\pi^2-4}{4\pi}\right)^2+\frac{1}{\pi}\cdot\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\sin\pi-0^2\cdot\sin 0\right)-\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi/2} x\sin 2x\,dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=x; & du=dx; \\ dv=\sin 2x\,dx; & v=-\frac{1}{2}\cos 2x \end{matrix}\right|=\frac{\pi^2}{6}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{\pi}\right)^2+\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{\pi^2}{4}\cdot 0-0\right)-$$

$$-\frac{2}{\pi}\cdot\left(-\frac{1}{2}x\cos 2x\bigg|_0^{\pi/2}+\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\pi/2}\cos 2x\,dx\right)=\frac{\pi^2}{6}-\left(\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi^2}\right)+\frac{1}{\pi}\cdot 0+$$

$$+\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\cos\pi-0\cdot\cos 0\right)-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin 2x\bigg|_0^{\pi/2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{\pi}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}-0\right)-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\cdot(\sin\pi-\sin 0)=\frac{8\pi^2-3\pi^2}{48}+\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi^2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2\pi}\cdot(0-0)=\frac{5\pi^2}{48}-\frac{1}{\pi^2}.$$

Для того чтобы составить функцию распределения непрерывной случайной величины X используем формулу:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx,$$

Если $x \le 0$, то $f(x) = 0$, следовательно,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0.$$

Если $0 < x \le \dfrac{\pi}{2}$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{x} \frac{4}{\pi} \cdot \cos^2 x\,dx = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_{0}^{x} (1 + \cos 2x)dx = \frac{2}{\pi} \cdot \left(x + \frac{1}{2}\sin 2x \right)\Bigg|_{0}^{x} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \left(x + \frac{1}{2}\sin 2x - 0 + \frac{1}{2}\sin 0 \right) = \frac{2}{\pi} \cdot \left(x + \frac{1}{2}\sin 2x \right).$$

Если $x > \dfrac{\pi}{2}$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi/2} \frac{4}{\pi} \cdot \cos^2 x\,dx + \int_{\pi/2}^{x} 0\,dx = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_{0}^{\pi/2} (1 + \cos 2x)dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \left(x + \frac{1}{2}\sin 2x \right)\Bigg|_{0}^{\pi/2} = \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi - 0 - \frac{1}{2}\sin 0 \right) = \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot 0 \right) = 1.$$

Итак, искомая функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \dfrac{2}{\pi}\left(x + \dfrac{1}{2}\sin 2x \right), & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}; \\ 1, & x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Для определения вероятности попадания непрерывной случайной величины X в заданный интервал воспользуемся формулой

$$P(a \le X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Определим вероятность попадания в интервал $\left(0; \dfrac{\pi}{4} \right)$. В данном случае получаем

$$P\left(0 < X < \frac{\pi}{4} \right) = \int_{0}^{\pi/4} \frac{4}{\pi} \cdot \cos^2 x\,dx = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_{0}^{\pi/4} (1 + \cos 2x)dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \left(x + \frac{1}{2}\sin 2x \right)\Bigg|_{0}^{\pi/4} = \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0 + \frac{1}{2}\sin 0 \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot 1 \right) = \frac{\pi + 2}{2\pi} \approx 0{,}818.$$

59. Дана дифференциальная функция распределения непрерывной случайной величины X

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0,\\ \cos x, & \text{при } 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \text{при } x>\pi/2.\end{cases}$$

Найдите интегральную функцию распределения $F(x)$. Постройте графики интегральной и дифференциальной функций.

60. Плотность распределения непрерывной случайной величины X задана на всей действительной оси OX равенством

$$f(x)=\begin{cases}cx, & 17\le x\le 18,\\ 0, & x>18,\ x<17.\end{cases}$$

а) Найти параметр c

б) Вычислить математическое ожидание $M(X)$

в) Вычислить дисперсию $D(X)$ и среднее квадратичное отклонение σ_x

г) найти вероятность P попадания случайной величины X в промежуток $(17{,}5;17{,}75)$.

61. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, заданной плотностью распределения $f(x)$; найти параметр a. Найдите интегральную функцию распределения, постройте графики $f(x)$, $F(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0,\\ ax, & \text{при } 0<x\le 4,\\ 0, & \text{при } x>4.\end{cases}$$

62. Пусть случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le -1,\\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{4}, & \text{при } -1<x\le 3,\\ 1, & \text{при } x>3.\end{cases}$$

Найдите вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее полуинтервалу [0; 2).

63. Задана функция распределения вероятностей $F(x)$ непрерывной случайной величины X.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ Ax^4, & 0\le x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}\qquad \alpha=1,\beta=2.$$

Требуется:

1) Найти функцию плотности распределения вероятностей $f(x)$;

2) Найти коэффициент A;

3) Схематично построить графики $F(x)$, $f(x)$;

4) Найти математическое ожидание и дисперсию X;

5) Найти вероятность того, что X примет значение из интервала $(1;2)$.

64. *Задача с решением.* При исследовании некоторого непрерывного признака ξ экспериментатор предположил, что этот признак подчиняется закону распределения с плотностью

$$p(x)=\begin{cases}\frac{x}{8}, \text{ если } 0\le x\le 2\\ C, \text{ если } 2<x\le 5\\ 0, \text{ если } x\notin[0;5]\end{cases}$$

1) При каком значении C экспериментатор будет прав? Построить график плотности распределения.

2) Найти функцию распределения с.в. ξ и построить её график.

3) Вычислить математическое ожидание (среднее значение) Mξ, дисперсию Dξ и среднее квадратическое (стандартное) отклонение рассматриваемой случайной величины

4) Во сколько раз число опытов, в которых экспериментатор будет получать результат больше среднего значения, превышает число опытов, в которых результат будет меньше среднего значения?

Решение. **1)** Параметр C определим, исходя из следующего свойства плотности распределения непрерывной случайной величины:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx=1.$$

В данном случае запишем

$$\int_0^2 \frac{x}{8}dx+\int_2^5 C\,dx=1.$$

Вычислим интегралы и разрешим выражение относительно параметра C.

$$\frac{1}{8}\cdot\int_0^2 x\,dx+C\cdot\int_2^5 dx=1;$$

$$\left.\left(\frac{1}{8}\cdot\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^2+\left.(C\cdot x)\right|_2^5=1;$$

$$\frac{1}{16}\cdot\left(2^2-0^2\right)+C\cdot(5-2)=1;$$

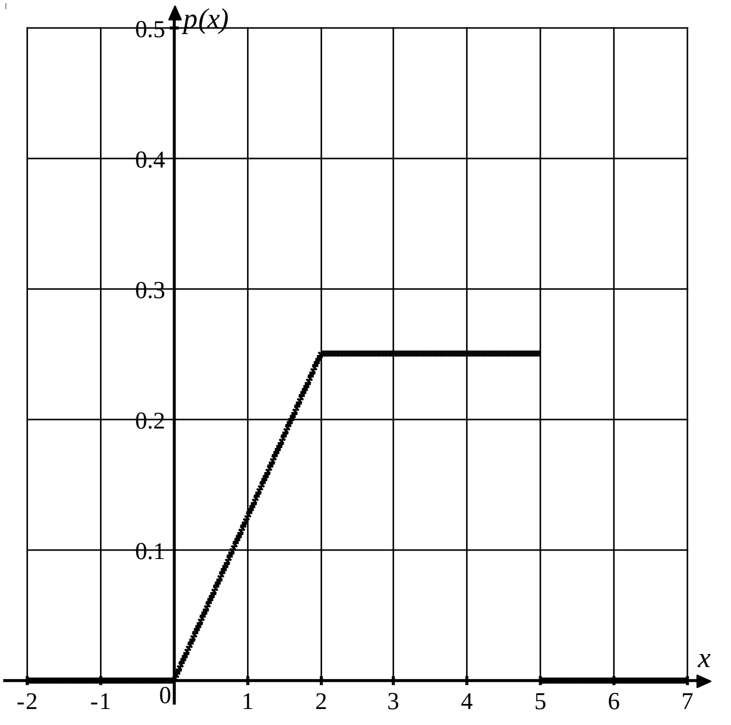
$$\frac{1}{4}+3C=1;$$

$$3C=\frac{3}{4}; \quad\Rightarrow\quad C=\frac{1}{4}.$$

Тогда функция плотности распределения случайной величины имеет вид:

$$p(x)=\begin{cases} 0, & \text{если} \quad x<0, \\ \dfrac{x}{8}, & \text{если} \quad 0 \le x \le 2, \\ \dfrac{1}{4}, & \text{если} \quad 2<x\le 5 \\ 0, & \text{если} \quad x>5. \end{cases}$$

Построим график плотности распределения вероятностей.



2) Для того чтобы составить функцию распределения непрерывной случайной величины X используем формулу:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(x)dx,$$

Если $x<0$, то $p(x)=0$, следовательно,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0\,dx=0.$$

Если $0 \le x \le 2$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int_{0}^{x}\frac{x}{8}dx=\frac{1}{8}\cdot\int_{0}^{x} x\,dx=\left.\left(\frac{1}{8}\cdot\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^x=\frac{1}{16}x^2.$$

Если $2<x\le 5$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int_{0}^{2}\frac{x}{8}dx+\int_{2}^{x}\frac{1}{4}dx=\frac{1}{8}\cdot\int_{0}^{2} x\,dx+\frac{1}{4}\cdot\int_{2}^{x} dx=\left.\left(\frac{1}{8}\cdot\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^2+\left.\left(\frac{1}{4}\cdot x\right)\right|_2^x=$$

$$=\frac{1}{16}\cdot\left(2^2-0^2\right)+\frac{1}{4}\cdot(x-2)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}x-\frac{2}{4}=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}.$$

Если $x>5$, то

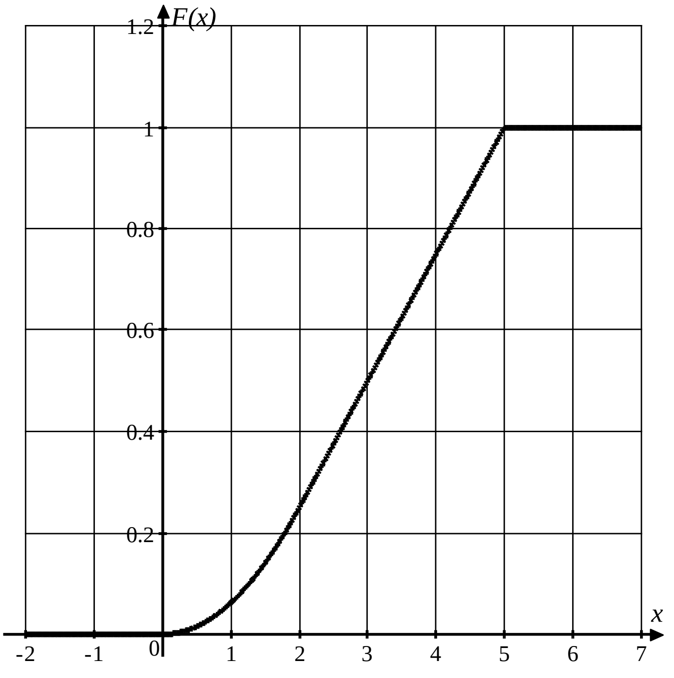
$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0\,dx+\int_{0}^{2}\frac{x}{8}dx+\int_{2}^{5}\frac{1}{4}dx+\int_{5}^{x} 0\,dx=\frac{1}{8}\cdot\int_{0}^{2} x\,dx+\frac{1}{4}\cdot\int_{2}^{5} dx=$$

$$=\left.\left(\frac{1}{8}\cdot\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^2+\left.\left(\frac{1}{4}\cdot x\right)\right|_2^5=\frac{1}{16}\cdot\left(2^2-0^2\right)+\frac{1}{4}\cdot(5-2)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1.$$

Итак, искомая функция распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<0,\\ \dfrac{1}{16}x^2, & \text{если} \quad 0\le x\le 2,\\ \dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{4}, & \text{если} \quad 2<x\le 5\\ 1, & \text{если} \quad x>5.\end{cases}$$

Построим график функции распределения случайной величины.



3) Математическое ожидание непрерывной случайной величины определяется формулой: $M\xi=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\cdot p(x)dx$. В данном случае получаем

$$M\xi=\int\limits_0^2 x\cdot\frac{x}{8}dx+\int\limits_2^5 x\cdot\frac{1}{4}dx=\frac{1}{8}\int\limits_0^2 x^2\,dx+\frac{1}{4}\int\limits_2^5 x\,dx=\left(\frac{1}{8}\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2+\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_2^5=$$

$$=\frac{1}{24}\cdot\left(2^3-0^3\right)+\frac{1}{8}\cdot\left(5^2-2^2\right)=\frac{1}{3}+\frac{21}{8}=\frac{71}{24}=2\frac{23}{24}.$$

Дисперсию непрерывной случайной величины можно определить по формуле: $D\xi=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot p(x)dx-[M\xi]^2$.

$$D\xi=\int\limits_0^2 x^2\cdot\frac{x}{8}dx+\int\limits_2^5 x^2\cdot\frac{1}{4}dx-\left(\frac{71}{24}\right)^2=\frac{1}{8}\int\limits_0^2 x^3\,dx+\frac{1}{4}\int\limits_2^5 x^2\,dx-\left(\frac{71}{24}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{1}{8}\cdot\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2+\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_2^5-\left(\frac{71}{24}\right)^2=\frac{1}{32}\cdot\left(2^4-0^2\right)+\frac{1}{12}\cdot\left(5^3-2^3\right)-\left(\frac{71}{24}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{117}{12}-\left(\frac{71}{24}\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{39}{4}-\frac{5041}{576}=\frac{288+5616-5041}{576}=\frac{863}{576}=1\frac{287}{576}.$$

Среднее квадратическое отклонение определим по формуле:

$$\sigma\xi=\sqrt{D\xi}=\sqrt{\frac{863}{576}}=\frac{\sqrt{863}}{24}\approx 1{,}224.$$

4) Пусть Y – число опытов, тогда $Y\cdot P(X<M\xi)$ – число опытов с результатом меньше среднего, а $Y\cdot P(X>M\xi)$ – опытов с результатом больше среднего. Тогда отношение $\dfrac{Y\cdot P(X>M\xi)}{Y\cdot P(X<M\xi)}=\dfrac{P(X>M\xi)}{P(X<M\xi)}$ показывает во столько раз число опытов с результатом больше среднего, больше числа опытов с результатом меньше среднего. Определим нужные вероятности.

Для определения вероятности попадания непрерывной случайной величины X в заданный интервал воспользуемся формулой

$$P(a \le X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Определим вероятность попадания в интервал $X > M\xi$. В данном случае получаем

$$P\left(X > \frac{71}{24}\right) = \int_{71/24}^{5} \frac{1}{4}dx = \frac{1}{4}\cdot\int_{71/24}^{5} dx = \left(\frac{1}{4}\cdot x\right)\Bigg|_{71/24}^{5} = \frac{1}{4}\cdot\left(5 - \frac{71}{24}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{49}{24} = \frac{49}{96}.$$

Тогда $P\left(X < \frac{71}{24}\right) = 1 - \frac{49}{96} = \frac{47}{96}$.

Определим искомое отношение $\dfrac{P(X > M\xi)}{P(X < M\xi)} = \dfrac{49/96}{47/96} = \dfrac{49}{47} = 1{,}04$. Таким образом, в 1,04 раз число опытов с результатом больше среднего, больше числа опытов с результатом меньше среднего.

65. Пусть случайная величина *X* задана функцией плотности распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{x}{2}, & \text{при } 0 < x \le 2, \\ 0, & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Определите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение величины *X*.

66. Случайная величина *X* задана функцией распределения $F(x)$. Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

а) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ x^2 & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$ **б)** $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 1, \\ \dfrac{(x^2 - x)}{2} & \text{при} \quad 1 < x \le 2, \\ 1 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$

67. Случайная величина *X* задана функцией распределения *F(x)*. Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию случайной величины *X*.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ x^3 & \text{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

68. Случайная величина *X* задана интегральной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0,\ x\le\dfrac{\pi}{4}\ ; \\ -\cos 2x,\ \ \dfrac{\pi}{4}<x\le\dfrac{\pi}{2}\ ; \\ 1,\ x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

1. Найти функцию плотности *f(x)*.

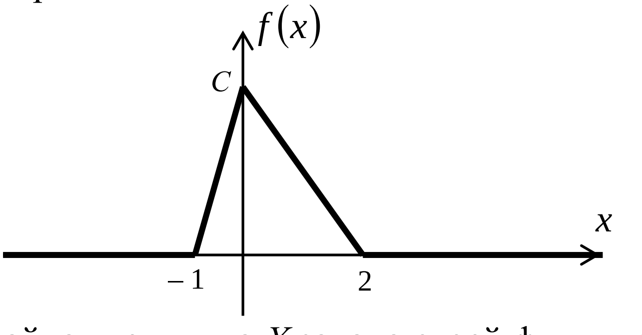
2. Построить графики функций *F(x)* и *f(x)*.

3. Найти вероятность того, что случайная величина *X* примет значения $a)\ X<\dfrac{\pi}{3};\quad b)\ X\ge\dfrac{\pi}{3};\quad c)\ -2<X\le\dfrac{\pi}{3}\ ;\ d)\ \dfrac{\pi}{3}\le X<2\pi.$

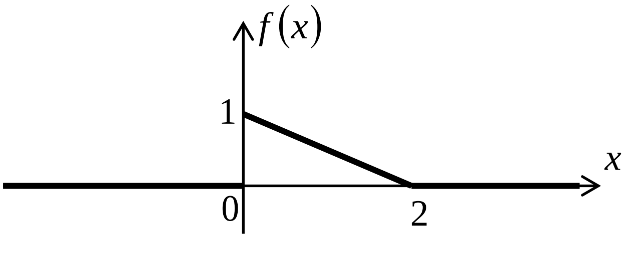
4. Найти MX; DX; σX.

69. Плотность распределения вероятности непрерывной случайной величины равна $f(x)=Ce^{4x},\ x\in(-\infty;0)$. Найти нормировочный множитель *C*, математическое ожидание *M* (*X*) и дисперсию *D* (*X*).

70. Задан график функции плотности непрерывной случайной величины *X* (рисунок). Найти параметр *C*.



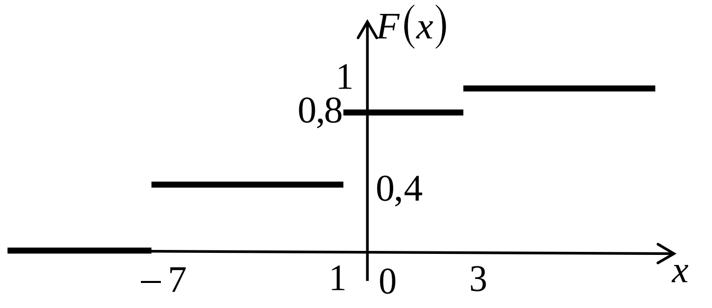
71. Непрерывная случайная величина *X* задана своей функцией плотности, график которой изображен на рисунке. Найти среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.



72. Задан график функции распределения $F(x)$ дискретной случайной величины *X* (рисунок).

1) Написать закон распределения дискретной случайной величины *X*.

2) Найти математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины *X*.



ТЕМА 3. Основные законы распределения дискретных случайных величин

Контрольные вопросы

1. Какие распределения может иметь дискретная случайная величина?

2. В каком случае дискретная случайная величина имеет биномиальное распределение?

3. Как определяются математическое ожидание и дисперсия случайной величины, имеющей биномиальное распределение?

4. В каком случае дискретная случайная величина имеет распределение Пуассона?

5. Как определяются математическое ожидание и дисперсия случайной величины, имеющей распределение Пуассона?

6. При каких условиях вероятность, определяемая по формуле Бернулли, стремится к вероятности, определяемой по формуле Пуассона?

7. В каком случае закон распределения Пуассона является хорошим приближением биномиального закона?

Практические задания по теме

73. 30% изделий, выпускаемых данным предприятием, нуждается в дополнительной регулировке. Наудачу отобрано 200 изделий. Найти среднее значение и дисперсию случайной величины X – числа изделий в выборке, нуждающихся в регулировке.

74. В партии 10% нестандартных деталей. Наудачу отобраны 400 деталей. Найти среднее значение и дисперсию случайной величины X – числа нестандартных деталей в выборке.

75. Автоматическая телефонная станция получает в среднем за час 300 вызовов. Какова вероятность того, что за данную минуту она получит точно два вызова?

76. В среднем в магазин приходит 3 покупателя в минуту. Найти вероятности того, что магазин посетят за минуту 1, 4 и 10 посетителей.

77. В цехе работают четыре станка. Вероятность остановки в течение часа каждого из них равна 0,8. **1)** Найти закон распределения случайной величины X – числа станков, остановившихся в течение часа. **2)** Найти вероятность остановки в течение часа: **а)** более двух станков; **б)** от одного до трех станков.

78. В партии 10% нестандартных деталей. Наудачу отобраны четыре детали. Написать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных.

79. Случайная величина X подчинена закону Пуассона с математическим ожиданием $a = 3$. Построить многоугольник распределения и функцию распределения случайной величины X. Найти: **а)** вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее, чем ее математическое ожидание; **б)** вероятность того, что величина X примет положительное значение.

ТЕМА 4. Основные законы распределения непрерывных случайных величин

Контрольные вопросы

1. Какие распределения может иметь непрерывная случайная величина?

2. В каком случае непрерывная случайная величина имеет равномерный закон распределение?

3. По какой формуле определяется функция распределения для равномерно распределенной случайной величины?

4. Как определяются математическое ожидание и дисперсия случайной величины, имеющей равномерное распределение?

5. По какой формуле определяется вероятность попадания равномерно распределенной случайной величины X на интервал ?

6. В каком случае непрерывная случайная величина имеет показательный закон распределения?

7. Как определяются функция распределения и важнейшие числовые характеристики показательного распределения?

8. Как найти вероятность того, что случайная величина X, имеющая показательный закон распределения, примет значение, принадлежащее интервалу (a, b)?

9. В каком случае непрерывная случайная величина имеет нормальный закон распределения?

10. Как определяются важнейшие числовые характеристики случайной величины, имеющей нормальное распределение?

11. Как определить вероятность попадания в интервал (a,b) случайной величины X, подчиненной нормальному закону?

Практические задания по теме

80. Написать функцию плотности и функцию распределения показательного закона, если параметр $\lambda = 0{,}2$. Построить графики этих функций.

81. Найти математическое ожидание и дисперсию показательного распределения, заданного при $x \geq 0$:

а) функцией плотности $f(x) = 5e^{-5x}$;

б) функцией распределения $F(x) = 1 - e^{-0{,}1x}$.

82. *Задача с решением.* Дана функция $F(x) = \begin{cases} a \cdot e^{-2x} + 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$ где a – параметр. Найти такое значение параметра a, чтобы функция $f(x) = F'(x)$ была плотностью распределения вероятностей. Вычислить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины X. Найти вероятности событий A, B, C, где A: $X < 1$, B: $X \geq 1$, C: $0 \leq X \leq 2$.

Решение. Для того, чтобы найти плотность распределения вероятностей $f(x)$, необходимо найти производную от функции распределения $F(x)$: $f(x) = F'(x)$.

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} -2a \cdot e^{-2x} & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Значение параметра a находим из условия

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

В данном случае имеем

$$\int_{0}^{+\infty} -2ae^{-2x}\, dx = 1;$$

$$-2a \int_{0}^{+\infty} e^{-2x}\, dx = -2a \cdot \lim_{b \to +\infty} \int_{0}^{b} e^{-2x}\, dx = -2a \cdot \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right)\Bigg|_{0}^{b} =$$
$$= a \cdot \lim_{b \to +\infty} \left(e^{-2b} - 1\right) = a \cdot \lim_{b \to +\infty} e^{-2b} - a = a \cdot 0 - a = -a;$$
$$-a = 1; \qquad \Rightarrow \qquad a = -1.$$

Таким образом, функцию распределения можно записать в виде

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

а плотность распределения вероятностей имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2x} & x\ge 0,\\ 0 & x<0.\end{cases}$$

Таким образом, получили показательное распределение с параметром $\lambda=2$.

<u>I способ.</u> Математическое ожидание показательного распределения находится по формуле: $M(X)=\dfrac{1}{\lambda}=\dfrac{1}{2}$. Дисперсия показательного распределения находится по формуле: $D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}=\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{4}$.

<u>II способ.</u> Математическое ожидание можно найти по формуле

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}x\cdot 2e^{-2x}\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b x\cdot 2e^{-2x}\,dx=$$

$$=\begin{vmatrix}u=x; & du=dx;\\ dv=2e^{-2x}\,dx; & v=-e^{-2x}\end{vmatrix}=\lim_{b\to+\infty}\left(\left(-x\cdot e^{-2x}\right)\Big|_0^b+\int_0^b e^{-2x}\,dx\right)=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(-b\cdot e^{-2b}+0-\left(\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Bigg|_0^b\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(-be^{-2b}-\frac{1}{2}e^{-2b}+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=-\lim_{b\to\infty}\frac{b}{e^{2b}}-\frac{1}{2}\cdot\lim_{b\to+\infty}e^{-2b}+\frac{1}{2}=-\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2e^{2b}}-\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Дисперсию можно также определить по формуле:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x)dx-(M(X))^2=\int_0^{+\infty}x^2\cdot 2e^{-2x}\,dx-\left(\frac{1}{2}\right)^2=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b x^2\cdot 2e^{-2x}\,dx-\frac{1}{4}=\begin{vmatrix}u=x^2; & du=2x\,dx;\\ dv=2e^{-2x}\,dx; & v=-e^{-2x}\end{vmatrix}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(\left(-x^2e^{-2x}\right)\Big|_0^b+\int_0^b 2xe^{-2x}\,dx\right)-\frac{1}{4}=\begin{vmatrix}u=x; & du=dx;\\ dv=2e^{-2x}\,dx; & v=-e^{-2x}\end{vmatrix}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(\left(-x^2e^{-2x}-xe^{-2x}\right)\Big|_0^b+\int_0^b e^{-2x}\,dx\right)-\frac{1}{4}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(-x^2e^{-2x}-xe^{-2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Bigg|_0^b-\frac{1}{4}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(-b^2e^{-2b}-be^{-2b}-\frac{1}{2}e^{-2b}+0+0+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}=$$

$$=-\lim_{b\to+\infty}\frac{b^2}{e^{2b}}-\lim_{b\to+\infty}\frac{b}{e^{2b}}-\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=-\lim_{b\to+\infty}\frac{2b}{2e^{2b}}-\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2e^{2b}}+\frac{1}{4}=$$

$$=-\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2e^{2b}}-0+\frac{1}{4}=-0+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

Тогда среднее квадратическое отклонение будет

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}.$$

Вероятность попадания в интервал (a,b) непрерывной случайной величины X, распределенной по показательному закону, находим по формуле:

$$P(a<X<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}.$$

В данном случае имеем:

$$P(X<1)=P(0<X<1)=e^{-2\cdot 0}-e^{-2\cdot 1}=1-e^{-2}=0{,}8647;$$
$$P(X\ge 1)=P(1\le X<+\infty)=e^{-2\cdot 1}-e^{-2\cdot\infty}=e^{-2}-0=0{,}1353;$$
$$P(0\le X\le 2)=e^{-2\cdot 0}-e^{-2\cdot 2}=e^{0}-e^{-4}=1-e^{-4}=0{,}9817.$$

83. Плотность распределения вероятности непрерывной случайной величины равна $f(x)=Ce^{2x}$, $x\in(-\infty;0)$. Найти нормировочный множитель C, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

84. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному функцией плотности $f(x)=4e^{-4x}$ при $x\ge 0$; при $x<0$ $f(x)=0$.

1) Найти вероятность того, что в результате испытания X попадает в интервал (0,1; 0,5).

2) Найти вероятность, что в 3 испытаниях непрерывная случайная величина X ни разу не попадет в интервал (0,1; 0,5).

85. Непрерывная случайная величина X имеет показательное распределение с $\lambda=2$. Найти вероятность, что $X>M(X)$.

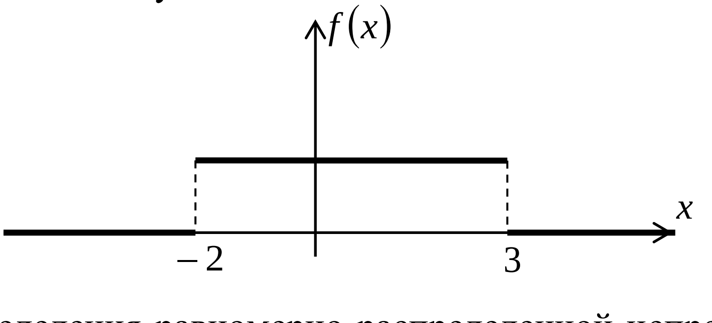
86. Функция плотности $f(x)$ равномерного распределения изображена на рисунке.

1) Найти параметр C и записать аналитическое выражение функции плотности $f(x)$.

2) Записать функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

3) Найти вероятность, что непрерывная случайная величина X примет отрицательное значение.

4) Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины X.



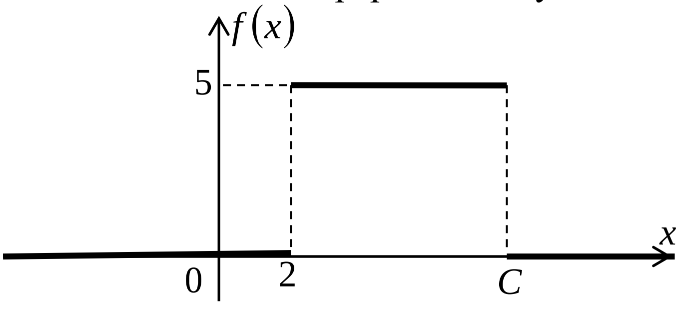
87. Функция распределения равномерно распределенной непрерывной случайной величины X имеет вид $F(x)=\dfrac{x+1}{4}$, где $x\in(-1;3)$.

1) Построить график функции $F(x)$.

2) Найти функцию плотности и построить ее график.

3) Найти вероятность, что в 500 независимых испытаниях случайная величина X не менее 150 раз попадет в интервал $(-1;0)$.

88. Функция плотности $f(x)$ равномерного распределения изображена на рисунке. Найти математическое ожидание непрерывной случайной величины *X*.



89. *Задача с решением.* Непрерывная случайная величина имеет нормальное распределение. Ее математическое ожидание равно $M_x = 20$, среднее квадратичное отклонение равно $\sigma_x = 2$. Найти вероятность того. Что в результате испытания случайная величина примет значение в интервале $(17;22)$.

Решение. Вероятность попадания случайной величины X, распределенной по нормальному закону, в интервал (a,b), определяется по формуле:

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b - M_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{a - M_x}{\sigma_x}\right),$$

где значения функций $\Phi(x)$ определяются по таблице приложений.

В данном случае получаем:

$$P(17 < X < 22) = \Phi\left(\frac{22-20}{2}\right) - \Phi\left(\frac{17-20}{2}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1{,}5) = \Phi(1) + \Phi(1{,}5) =$$
$$= 0{,}3413 + 0{,}4332 = 0{,}7745.$$

Ответ: $P(17 < X < 22) = 0{,}7745.$

90. Случайная величина *X* распределена по нормальному закону. Математическое ожидание $M(X) = 5$; дисперсия $D(X) = 0{,}64$. Найти вероятность того, что в результате испытания *X* примет значение в интервале (4; 7).

91. *Задача с решением.* Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания a генеральной совокупности с заданной надежностью $\gamma = 0{,}9660$, если среднее квадратическое отклонение нормально распределенной генеральной совокупности равно $\sigma = 1{,}2$, выборочная средняя равна $\overline{x}_в = 4$, объем выборки равен $n = 10$.

Решение. Интервальной оценкой (с надежностью γ) неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X по выборочной средней $\overline{x}_в$ при известном среднем квадратическом отклонении σ генеральной совокупности служит доверительный интервал

$$\overline{x}_в - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_в + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

где t – значение аргумента функции Лапласа $\Phi(t)$, при котором $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$, t определяется по таблицам приложений.

Найдем значение t из соотношения $\Phi(t)=\frac{0{,}9660}{2}=0{,}483$. По таблице приложений находим $t=2{,}12$. Подставляем все значения в формулу:

$$4-2{,}12\cdot\frac{1{,}2}{\sqrt{10}}<a<4+2{,}12\cdot\frac{1{,}2}{\sqrt{10}};$$
$$4-0{,}804<a<4+0{,}804;$$
$$3{,}196<a<4{,}804.$$

Итак, искомый доверительный интервал $3{,}196<a<4{,}804$.

92. *Задача с решением.* Найти минимальный объем выборки n, при котором с заданной надежностью $\gamma=0{,}9660$ точность оценки математического ожидания a генеральной совокупности по выборочной средней будет равна $\delta=0{,}3$, если известно среднее квадратическое отклонение $\sigma=1{,}2$ нормально распределенной генеральной совокупности.

Решение. Воспользуемся формулой, определяющей точность оценки математического ожидания генеральной совокупности по выборочной средней: $\delta=t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Из этой формулы выразим n – объем выборки:

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{\delta}{t}\quad\Rightarrow\quad\sqrt{n}=\frac{\sigma t}{\delta}\quad\Rightarrow\quad n=\frac{\sigma^2t^2}{\delta^2}.$$

По условию, $\gamma=0{,}9660$; следовательно, $\Phi(t)=\frac{0{,}9660}{2}=0{,}483$. По таблице приложений найдем $t=2{,}12$. Таким образом, искомый объем выборки:

$$n=\frac{1{,}2^2\cdot2{,}12^2}{0{,}3^2}=\frac{6{,}471936}{0{,}09}=71{,}9104=72.$$

93. Диаметр деталей, изготовленных заводом, является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Стандартная длина диаметра $a=2{,}5$ см, среднее квадратическое отклонение $\sigma=0{,}01$. В каких границах можно практически гарантировать длину диаметра этой детали, если за достоверное принимается событие, вероятность которого равна 0,9973?

94. Считается, что отклонение длины изготавливаемых деталей от стандарта является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Стандартная длина (математическое ожидание) $a=40$ см, среднее квадратическое отклонение $\sigma=0{,}4$ см. Найти вероятность того, что отклонение длины от стандартной составит по абсолютной величине не более 0,6 см.

95. *Задача с решением.* Известно, что до реорганизации телефонной сети большого города средний срок оплаты квитанций за междугородние, международные разговоры составлял 45 дней со средним квадратическим отклонением 10 дней. Найти вероятность того, что квитанция, оформленная 1 апреля, будет оплачена **а)** между 13 мая и 18 мая; **б)** не позднее 25 мая.

Решение. Итак, в данной задаче рассматривается нормальное распределение с математическим ожиданием $m_x=45$ и средним квадратическим отклонением $\sigma=10$.

а) Нужно найти вероятность попадания случайной величины X в интервал $43 \le X \le 48$, поскольку с 1 апреля до 13 мая проходит 43 дня, а с 1 апреля по 18 мая – 48 дней.

Вероятность попадания случайной величины X, распределенной по нормальному закону, в интервал (a, b), определяется по формуле:

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b - m_x}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - m_x}{\sigma}\right),$$

где m_x – математическое ожидание, а значения функций $\Phi(x)$ определяется по таблице приложений.

В данном случае получаем:

$$P(43 \le X \le 48) = \Phi\left(\frac{48 - 45}{10}\right) - \Phi\left(\frac{43 - 45}{10}\right) = \Phi(0{,}3) - \Phi(-0{,}2) =$$

$$= \Phi(0{,}3) + \Phi(0{,}2) = 0{,}1179 + 0{,}0793 = 0{,}1972.$$

б) Нужно найти вероятность попадания случайной величины X в интервал $0 \le X \le 55$, поскольку не позднее 25 мая означает с 1 апреля до 25 мая, до 25 мая проходит 55 дней.

В данном случае получаем:

$$P(0 \le X \le 55) = \Phi\left(\frac{55 - 45}{10}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 45}{10}\right) = \Phi(1) - \Phi(-4{,}5) =$$

$$= \Phi(1) + \Phi(4{,}5) = 0{,}3413 + 0{,}499997 = 0{,}841297.$$

Ответ: **а)** 0,1972; **б)** 0,8413.

96. *Задача с решением.* Предполагается, что косая длина туловища X телок (см) является нормально распределенной случайной величиной с заданными параметрами $a = 131$ и $\sigma = 10{,}8$. Требуется определить: 1) процент животных, для которых косая длина туловища будет принадлежать интервалу $(125; 135)$; 2) диапазон изменения косой длины туловища.

Решение. Найдем вероятность, с которой случайная величина (косая длина туловища) принимает значение в интервале $(125; 135)$. Для этого воспользуемся формулой, позволяющей вычислить вероятность попадания нормально распределенной величины в заданный интервал $(\alpha; \beta)$:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

В данном случае имеем $a = 131$, $\sigma = 10{,}8$, $\alpha = 125$, $\beta = 135$. Таким образом,

$$P(125 < X < 135) = \Phi\left(\frac{135 - 131}{10{,}8}\right) - \Phi\left(\frac{125 - 131}{10{,}8}\right) = \Phi(0{,}37) - \Phi(-0{,}56) =$$

$$= \Phi(0{,}37) + \Phi(0{,}56) = 0{,}1443 + 0{,}2123 = 0{,}3566,$$

т.е. 36% телок имеют косую длину туловища в пределах от 125 см до 131 см.

Правило «трех сигм» позволяет утверждать следующее: практически достоверно, что значения любой нормально распределенной случайной величины X расположены в интервале $(a - 3\sigma; a + 3\sigma)$. В данной задаче

$a-3\sigma=131-3\cdot10{,}8=98{,}6$; $a+3\sigma=131+3\cdot10{,}8=163{,}4$. Таким образом, для телок косая длина туловища будет колебаться от 98,6 см до 163,4 см.

97. *Задача с решением.* В нормально распределенной совокупности 23% значений ***X*** меньше 19 и 53% значений ***X*** больше 25. Найти параметры этой совокупности (μ, σ).

Решение. По условию задачи $\alpha_1=-\infty$; $\beta_1=19$; $P(X<19)=0{,}23$; $\alpha_2=25$; $\beta_2=+\infty$; $P(X>25)=0{,}53$.

Используем формулу для расчета вероятности попадания в заданный интервал нормально распределенной случайной величины:

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right).$$

В первом случае при $\alpha_1=-\infty$; $\beta_1=19$; $P(X<19)=0{,}23$ получаем

$$P(-\infty<X<19)=\Phi\left(\frac{19-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-\infty-\mu}{\sigma}\right)=0{,}23;$$

$$\Phi\left(\frac{19-\mu}{\sigma}\right)+\Phi(\infty)=0{,}23;$$

$$\Phi\left(\frac{19-\mu}{\sigma}\right)+0{,}5=0{,}23;$$

$$-\Phi\left(\frac{\mu-19}{\sigma}\right)=0{,}23-0{,}5;$$

$$\Phi\left(\frac{\mu-19}{\sigma}\right)=0{,}27.$$

По таблице приложений найдем, $\frac{\mu-19}{\sigma}=0{,}74$.

С другой стороны, имеем, что при $\alpha_2=25$; $\beta_2=+\infty$; $P(X>25)=0{,}53$ получаем

$$P(25<X<+\infty)=\Phi\left(\frac{+\infty-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{25-\mu}{\sigma}\right)=0{,}53;$$

$$\Phi(+\infty)-\Phi\left(\frac{25-\mu}{\sigma}\right)=0{,}53;$$

$$0{,}5-\Phi\left(\frac{25-\mu}{\sigma}\right)=0{,}53;$$

$$\Phi\left(\frac{\mu-25}{\sigma}\right)=0{,}53-0{,}5;$$

$$\Phi\left(\frac{\mu-25}{\sigma}\right)=0{,}03.$$

По таблице приложений найдем, $\frac{\mu-25}{\sigma}=0{,}08$.

Решим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\mu-19}{\sigma}=0{,}74; \\ \dfrac{\mu-25}{\sigma}=0{,}08; \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \mu-19=0{,}74\sigma; \\ \mu-25=0{,}08\sigma; \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \mu=0{,}74\sigma+19; \\ 0{,}74\sigma+19-25=0{,}08\sigma; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \mu=0{,}74\sigma+19; \\ 0{,}66\sigma=6; \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \mu=25{,}7273; \\ \sigma=9{,}0909. \end{cases}$$

Ответ: $\mu=25{,}7273$; $\sigma=9{,}0909$.

98. *Задача с решением.* Непрерывная случайная величина распределена нормально с математическим ожиданием $m_x=\dfrac{19}{18}$ и средним квадратическим отклонением $\sigma_x=\dfrac{1}{18}$: **а)** Сравнить вероятности $P_1\left(1<x<\dfrac{19}{18}\right)$, $P_2\left(\dfrac{19}{18}<x<\dfrac{21}{18}\right)$, **б)** Найти β, если известно, что $P(\alpha<x<\beta)=0{,}3$, $\alpha=\dfrac{17}{18}$.

Решение. **а)** Вероятность попадания случайной величины X, распределенной по нормальному закону, в интервал (a,b), определяется по формуле:

$$P(a<X<b)=\Phi\left(\frac{b-M_x}{\sigma_x}\right)-\Phi\left(\frac{a-M_x}{\sigma_x}\right),$$

где значения функций $\Phi(x)$ определяются по таблице приложений.

В данном случае получаем:

$$P_1\left(1<X<\frac{19}{18}\right)=\Phi\left(\frac{\frac{19}{18}-\frac{19}{18}}{\frac{1}{18}}\right)-\Phi\left(\frac{1-\frac{19}{18}}{\frac{1}{18}}\right)=\Phi(0)-\Phi(-1)=\Phi(0)+\Phi(1)=$$

$$=0+0{,}3413=0{,}3413.$$

$$P_2\left(\frac{19}{18}<X<\frac{21}{18}\right)=\Phi\left(\frac{\frac{21}{18}-\frac{19}{18}}{\frac{1}{18}}\right)-\Phi\left(\frac{\frac{19}{18}-\frac{19}{18}}{\frac{1}{18}}\right)=\Phi(2)-\Phi(0)=$$

$$=0{,}4772-0=0{,}4772.$$

Отсюда видно, что $P_2>P_1$.

б) Найти β, если известно, что $P(\alpha<x<\beta)=0{,}3$, $\alpha=\dfrac{17}{18}$.

Исходя из выше записанной формулы, выпишем равенство:

$$P\left(\frac{17}{18}<X<\beta\right)=0{,}3;$$

$$P\left(\frac{17}{18} < X < \beta\right) = \Phi\left(\frac{\beta - \frac{19}{18}}{\frac{1}{18}}\right) - \Phi\left(\frac{\frac{17}{18} - \frac{19}{18}}{\frac{1}{18}}\right) = \Phi(18\beta - 19) - \Phi(-2) =$$

$$= \Phi(18\beta - 19) + \Phi(2) = \Phi(18\beta - 19) + 0{,}4772 = 0{,}3;$$

$$\Phi(18\beta - 19) = -0{,}1772;$$

$$\Phi(19 - 18\beta) = 0{,}1772;$$

$$19 - 18\beta = 0{,}46;$$

$$18\beta = 19 - 0{,}46;$$

$$18\beta = 18{,}54;$$

$$\beta = \frac{18{,}54}{18} = 1{,}03.$$

99. *Задача с решением.* Заданы математическое ожидание $a = 5$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 6$ нормально распределенной случайной величины X. *Требуется:* **1)** Написать функцию плотности распределения вероятностей $f(x)$ и схематично построить ее график; **2)** Найти вероятность того, что X примет значение из интервала (4, 9).

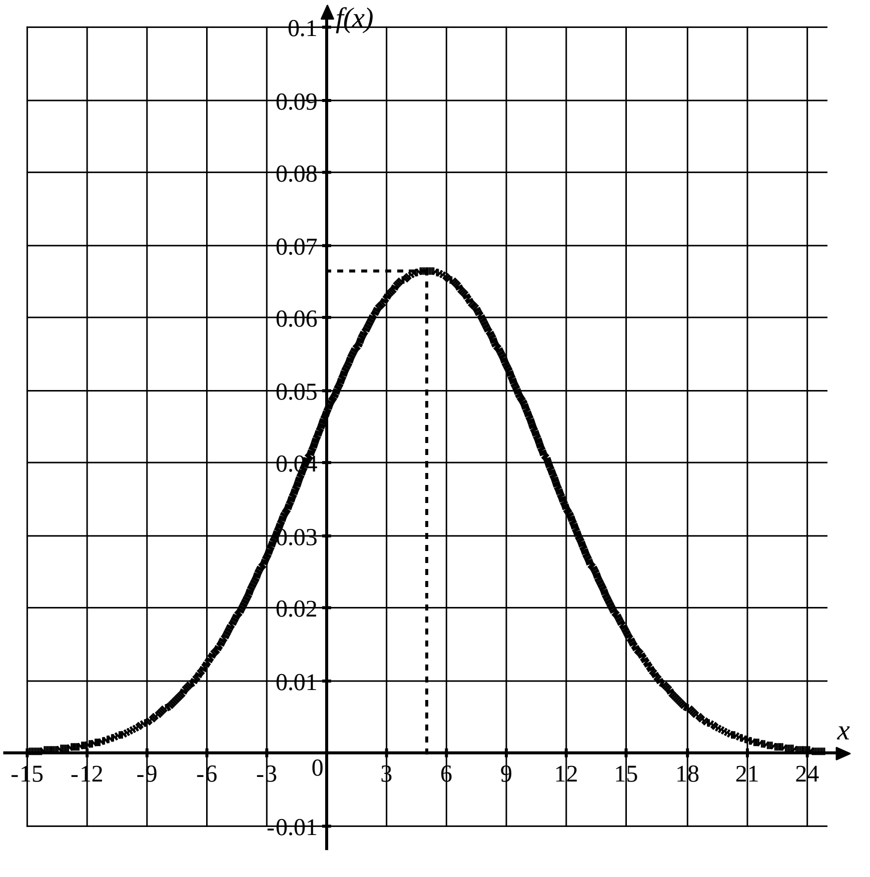
Решение. **1)** Функция плотности распределения вероятностей нормально распределенной случайной величины имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

В данном случае имеем

$$f(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-5)^2}{72}}.$$

Схематично построим график. Максимальное значение функции плотности распределения соответствует точке $\left(5; \frac{1}{6\sqrt{2\pi}}\right)$ или $(5; 0{,}066)$.



2) Вероятность попадания случайной величины X, распределенной по нормальному закону, в интервал (α, β), определяется по формуле:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $a = M(X)$, а значения функций $\Phi(x)$ определяется по таблице приложений.

В данном случае получаем:

$$P(4 < X < 9) = \Phi\left(\frac{9-5}{6}\right) - \Phi\left(\frac{4-5}{6}\right) = \Phi\left(\frac{4}{6}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{6}\right) =$$
$$= \Phi(0{,}667) + \Phi(0{,}167) = 0{,}2486 + 0{,}0675 = 0{,}3161.$$

Ответ: **1)** $f(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-5)^2}{72}}$; **2)** $P(4 < X < 9) = 0{,}3161$.

100. Длина стебля пшеницы нормально распределенная случайная величина X. Известно, что $M(X) = 80$ см, $\sigma = 10$ см. Найти вероятности того, что значения случайной величины принадлежат интервалам (70; 90) и (50; 70).

101. По условию задачи 56 найти значение длины стебля, ниже которого находятся 30% стеблей пшеницы.

102. Вес поросенка есть случайная величина, распределенная по нормальному закону. Установлено, что математическое ожидание этой случайной величины равно 50 кг, а дисперсия равна 25 кг^2. Какой процент от общего количества поросят на ферме имеет вес: **а)** ниже 40 кг; **б)** выше 55 кг.

103. По условию задачи 101 найти значение веса, выше которого находятся только 10% поросят.

104. Значения веса одной груши распределены по нормальному закону, при этом математическое ожидание веса и его среднее квадратическое отклонение равны 150 г и 20 г соответственно. Найти вероятности того, что вес наугад взятой груши: **а)** больше 200 г; **б)** меньше 120 г.

105. По условию задачи 105 найти значение веса, ниже которого находятся только 20% общего количества груш.

106. Глубина посева семян является нормально распределенной случайной величиной. Средняя глубина посева составляет 3 см, дисперсия глубины посева составляет 1 см^2. Найти доли семян посеянных на глубину: **а)** не менее двух сантиметров; **б)** не более одного сантиметра.

107. По условию задачи 107 указать какая глубина посева не будет превышена с вероятностью 0,95.

108. Суммарный вес плодов, находящихся в одном ящике в среднем составляет 10 кг, а дисперсия этого веса составляет 0,64 кг^2. Найти вероятности того, что в 100 ящиках окажется: **а)** менее 900 кг; **б)** более 1050 кг.

109. По условию задачи 109 найти вероятность того, что в 150 ящиках окажется от 1400 кг до 1560 кг плодов.

Дополнительные задачи

Нормальное распределение (распределение Гаусса). Правило трех сигм

110. Случайная величина X нормально распределена с параметрами $a=-2$, $\sigma=7$. С точностью до одной сотой найти: **1)** $P(X<-1)$, **2)** $P(X>-1)$, **3)** $P(X\in[-3;1])$, **4)** $P(X\notin[-3;1])$, **5)** $P(2X+2>0)$, **6)** $P(-3X>3)$, **7)** $P(X^2+2X-3<0)$, 8) $P(X^2+2X-3>0)$.

111. *Задача с решением.* Станок-автомат изготовляет валики, контролируя их диаметр *X*. Считая, что случайная величина *X* распределена нормально с параметрами a = 10 мм, σ = 0,1 мм, найти интервал, в котором с вероятность 0,9973 будут заключены диаметры изготовленных валиков.

Решение. Если случайная величина X распределена по нормальному закону, то

$$P\{|X-a|<3\sigma\}=2\Phi(3)=0{,}9973.$$

Это равенство означает, что практически все (99,73 % испытаний) значения нормальной случайной величины X заключены в интервале $(a-3\sigma, a+3\sigma)$ («правило трех сигм»).

Поэтому интервал, в котором будут заключены диаметры изготовленных валиков, будет

$$(10-3\cdot 0{,}1;10+3\cdot 0{,}1);$$
$$(9{,}7;10{,}3).$$

Ответ: $(9{,}7;10{,}3)$.

112. В нормально распределенной совокупности 23% значений ***X*** меньше 19 и 53% значений ***X*** больше 25. Найти параметры этой совокупности (μ, σ).

113. Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью $f(x)=\dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{32}}$. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

114. *Задача с решением.* Случайные величины ξ_1,ξ_2,ξ_3 имеют равномерное, пуассоновское и показательное распределения соответственно. Известно, что математические ожидания $M\xi_i=4$, а дисперсия $D\xi_1=3$. Найти вероятности: **а)** $P(0\le\xi_1\le 2)$; **б)** $P(0\le\xi_2\le 2)$; **в)** $P(3\le\xi_3\le 4)$.

Решение. **а)** Для равномерного распределения имеем

$$M(\xi)=\frac{a+b}{2}=4;$$

$$D(\xi)=\frac{(b-a)^2}{12}=3.$$

Таким образом, для определения параметров a и b имеем систему:

$$\begin{cases} a+b=8, \\ (b-a)^2=36, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=8-a, \\ (8-a-a)^2=36, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=8-a, \\ (8-2a)^2=36. \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы:

$$(4-a)^2=9;$$
$$16-8a+a^2=9;$$
$$a^2-8a+7=0;$$
$$D=8^2-4\cdot 1\cdot 7=64-28=36=6^2;$$
$$a_1=\frac{8-6}{2}=1; \qquad a_2=\frac{8+6}{2}=7.$$

Тогда $b_1=8-1=7$, $b_2=8-7=1$.

Условиям равномерного распределения удовлетворяет пара $a=1$, $b=7$.

Таким образом, имеем распределение вида:

$$f(\xi)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad \xi\notin(1,7),\\ \dfrac{1}{6}, & \text{при} \quad \xi\in(1,7)\end{cases}$$

Тогда вероятность определим по формуле:

$$P(0\le\xi\le 2)=\int_0^1 0\,d\xi+\int_1^2\frac{1}{6}d\xi=\frac{1}{6}\cdot\xi\Big|_1^2=\frac{2-1}{6}=\frac{1}{6}.$$

б) Для пуассоновского распределения имеем $M(\xi)=\lambda=4$. Составим ряд распределения закона Пуассона.

ξ_i	0	1	2	…	n	…
p_i	e^{-4}	$4e^{-4}$	$\dfrac{4^2e^{-4}}{2}$	…	$\dfrac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$	…

Тогда $P(0\le\xi\le 2)=P(\xi=0)+P(\xi=1)+P(\xi=2)=e^{-4}+4e^{-4}+8e^{-4}=$
$=e^{-4}\cdot(1+4+8)=13\cdot e^{-4}\approx 0{,}2381.$

в) Для показательного распределения имеем $M(\xi)=\dfrac{1}{\lambda}=4$. Отсюда находим параметр $\lambda=\dfrac{1}{4}$.

Вероятность попадания в интервал (a,b) непрерывной случайной величины ξ, распределенной по показательному закону, равна

$$P(a\le\xi\le b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}.$$

Тогда получим

$$P(3\le\xi\le 4)=e^{-\frac{1}{4}\cdot 3}-e^{-\frac{1}{4}\cdot 4}=e^{-3/4}-e^{-1}=0{,}1045.$$

115. Нормально распределённая случайная величина X задана плотностью $f(x)=\dfrac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-8)^2}{50}}$. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

116. Нормально распределенная случайная величина задана плотностью вероятностей $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. Найти вероятность попадания случайной величины в интервал (1, 3).

117. *Задача с решением.* Непрерывная случайная величина X подчиняется нормальному закону распределения с плотностью $f(x)=A\cdot\exp\left\{-(x-2)^2\right\}$. Найти: A, $M(X)$, $D(X)$, $P(1{,}5\le X\le 3)$.

Решение. Плотность распределения непрерывной случайной величины X, распределенной нормально, имеем вид:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

В данном случае имеем

$$f(x)=A\cdot\exp\left\{-(x-2)^2\right\}=A\cdot e^{-(x-2)^2}=A\cdot e^{-\frac{(x-2)^2}{2\cdot\frac{1}{2}}}=A\cdot e^{-\frac{(x-2)^2}{2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}}.$$

Следовательно, имеем величину параметра $\sigma=\frac{1}{\sqrt{2}}$, тогда параметр $A=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2\pi}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Таким образом, функция плотности распределения нормально распределенной случайной величины X в данном случае имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-(x-2)^2}.$$

Если непрерывная случайная величина распределена нормально, то параметры a и σ имеют следующий вероятностный смысл: $a=M(X)$ – математическое ожидание, $\sigma=\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$ – среднее квадратическое отклонение. Тогда в данном случае имеем

Математическое ожидание $M(X)=a=2$,

дисперсия $D(X)=\sigma^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$.

Вероятность попадания случайной величины X, распределенной по нормальному закону, в интервал (α,β), определяется по формуле:

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

где $a=M(X)$, а значения функций $\Phi(x)$ определяется по таблице приложений.

В данном случае получаем:

$$P(1{,}5 \le X \le 3) = \Phi\left(\frac{3-2}{1/\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{1{,}5-2}{1/\sqrt{2}}\right) = \Phi(\sqrt{2}) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$
$$= \Phi(1{,}41) + \Phi(0{,}71) = 0{,}4207 + 0{,}2611 = 0{,}6818.$$

118. Производятся два независимых измерения прибором, имеющим систематическую ошибку 0,5 мм и среднеквадратичное отклонение 6 мм. Какова вероятность того, что из трёх измеренных значений два будут отклоняться от истинного значения не более чем на 15 мм?

119. *Задача с решением.* Суточное потребление электроэнергии исправной печью является случайной величиной (σ), распределенной по нормальному закону со средним 1000 кВт/ч и СКО 45. Если суточное потребление превысит 1100 кВт, то по инструкции печь отключают и ремонтируют. Найти вероятность ремонта печи. Каким должно быть превышение по инструкции, чтобы вероятность ремонта печи была равна 0,02?

Решение. Пусть ξ – производится ремонт печи. Ремонт печи производится, если суточное потребление превысит 1100 кВт. Т.е. $\xi > 1100$. Требуется найти вероятность

$$P\{\xi > 1100\} = P\{1100 < \xi < \infty\} = 1 - P\{\xi \le 1100\} = 1 - P\{0 \le \xi \le 1100\} =$$
$$= 1 - \left(F_\xi(1100) - F_\xi(0)\right)$$

т.к. это нормальное распределение, то функцию распределения можно вычислить либо через функцию $\Phi_0(x)$, либо через $\Phi(x)$, в зависимости от того, таблица какой из функций имеется в наличии:

$$F_\xi(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Тогда искомая вероятность

$$P\{\xi > 1100\} = 1 - \left(F_\xi(1100) - F_\xi(0)\right) = 1 - \left(\Phi\left(\frac{1100-1000}{45}\right) - \Phi\left(\frac{0-1000}{45}\right)\right) =$$
$$= 1 - \left(\Phi(2{,}22) - \Phi(-22{,}22)\right) = 1 - \left(\Phi(2{,}22) + \Phi(22{,}22)\right) =$$
$$= 1 - (0{,}4868 + 0{,}5) = 0{,}0132.$$

То есть вероятность ремонта печи равна приблизительно 0,0132.

Для решения второй части задачи обозначим переменной t превышение суточного потребления по инструкции. Получим неравенство:

$$P\{\xi > t\} = 1 - \left(F_\xi(t) - F_\xi(0)\right) = 1 - \left(\Phi\left(\frac{t-1000}{45}\right) - \Phi\left(\frac{0-1000}{45}\right)\right) =$$
$$= 1 - \left(\Phi\left(\frac{t-1000}{45}\right) + \Phi(22{,}22)\right) = 1 - \Phi\left(\frac{t-1000}{45}\right) - 0{,}5 =$$
$$= 0{,}5 - \Phi\left(\frac{t-1000}{45}\right) = 0{,}02;$$

$$\Phi\left(\frac{t-1000}{45}\right) = 0{,}48.$$

Теперь в таблице функции Ф (x) находим значение, наиболее близкое к 0,48 и определяем аргумент, при котором функция принимает это значение. В данном случае аргумент равен 2,06, т.е.

$$\frac{t-1000}{45}=2{,}06;$$

$$t-1000=92{,}7;$$

$$t=1092{,}7.$$

Таким образом, превышение по инструкции должно быть 1092,7 кВт, чтобы вероятность ремонта печи была равна 0,02.

120. *Задача с решением.* В результате поверки амперметра установлено, что 80% погрешностей результатов измерений, произведенных с его помощью, не превосходит ±20 мА. Считая, что погрешности распределены по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием, найдите симметричный доверительный интервал для погрешности, вероятность попадания в который равна 0,5.

Решение. Известно, что 80% погрешностей не превосходит ±20 мА.

X – случайная величина отвечающая погрешностям.

Так как предполагается, что X – имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $m=0$, то воспользуемся формулой для вычисления попадания случайной величины в заданный интервал:

$$P(|X-m|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right);$$

$$P(|X|<20)=2\cdot\Phi\left(\frac{20}{\sigma}\right)=0{,}8;$$

$$\Phi\left(\frac{20}{\sigma}\right)=0{,}4.$$

По таблице приложений

$$\frac{20}{\sigma}=1{,}28;$$

$$\sigma=\frac{20}{1{,}28}=15{,}625.$$

Зная величину стандартного отклонения, можем найти доверительный интервал для погрешности, используя ту же формулу $P(|X-m|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$.

Симметрический интервал для погрешности, вероятность попадания в который = 0,5 имеет следующий вид:

$$P(|X|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{15{,}625}\right)=0{,}5.$$

Найдем δ.

$$\Phi\left(\frac{\delta}{15{,}625}\right)=0{,}25.$$

По таблицам приложений

$$\frac{\delta}{15{,}625}=0{,}67;$$
$$\delta=10{,}47.$$

Другими словами $|X|<10{,}47$ или $-10{,}47<X<10{,}47$.

121. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $a=12$ и среднеквадратичным отклонением $\sigma=3$. Найти интервал, в который с вероятностью 0,9973 попадет X в результате испытания.

122. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $a=10$ и средним квадратическим отклонением, равным 5. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0,9973 попадет величина X в результате испытания.

123. В нормально распределенной совокупности 10% значений X меньше 11 и 30% значений X больше 15,5. Найти среднее значение и стандартное отклонение данного распределения.

124. Случайная величина распределена по нормальному закону $N(2;1)$. Вычислить вероятности следующих событий: 1) $X\in[0;6]$; 2) из трех испытаний два раза $X\in[0;6]$, а один раз $X\in[-4;0]$; 3) произвели 9 испытаний, не менее одного раза, но не более пяти раз $X\in[-4;0]$.

125. Считая, что X – нормально распределенная величина, которая задается плотностью вероятности $f(x)=A\cdot e^{-\frac{(x+3)^2}{8}}$, найти A, $M(X)$, $D(X)$, $P(-2<X<3)$.

126. Плотность вероятности нормально распределенной случайной величины X имеет вид: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{12\pi}}\cdot e^{-k(x-1)^2}$. Найти коэффициент k, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, интегральную функцию распределения. Построить графики плотности распределения и интегральной функции распределения. Найти $P(-1<x<4)$.

127. *Задача с решением.* Предполагаем, что масса яиц – нормально распределенная случайная величина X, с математическим ожиданием $a=58$ и средним квадратическим отклонением $\sigma=6$. В заготовку принимают яйца от $x_1=55$ до $x_2=65$ граммов. *Определить:* **а)** вероятность того, что наудачу взятое яйцо пойдет в заготовку; **б)** вероятность того, что абсолютная величина отклонения $X-a$ окажется меньше $\delta=6$; **в)** по правилу трех сигм найти наибольшую и наименьшую границы предполагаемой массы яйца.

Решение. **а)** Найдем вероятность того, что наудачу взятое яйцо пойдет в заготовку. Для этого вычислим вероятность того, что случайная величина попадет в интервал от $x_1=55$ до $x_2=65$ граммов. Воспользуемся формулой, позволяющей вычислить вероятность попадания нормально распределенной величины в заданный интервал $(\alpha;\beta)$:

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

В данном случае имеем $a=58$, $\sigma=6$, $\alpha=55$, $\beta=65$. Таким образом,

$$P(55<X<65)=\Phi\left(\frac{65-58}{6}\right)-\Phi\left(\frac{55-58}{6}\right)=\Phi(1{,}17)-\Phi(-0{,}5)=$$

$$=\Phi(1{,}17)+\Phi(0{,}5)=0{,}3790+0{,}1915=0{,}5705,$$

т.е. 57 % яиц попадут в заготовку.

б) Найдем вероятность того, что абсолютная величина отклонения $X-a$ окажется меньше $\delta=6$. Для этого используем формулу:

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

В этой формуле $\delta=6$, $\sigma=6$. Тогда получаем:

$$P(|X-58|<6)=2\cdot\Phi\left(\frac{6}{6}\right)=2\cdot\Phi(1)=2\cdot 0{,}3413=0{,}6826.$$

в) Правило «трех сигм» позволяет утверждать следующее: практически достоверно, что значения любой нормально распределенной случайной величины X расположены в интервале $(a-3\sigma; a+3\sigma)$. В данной задаче $a-3\sigma=58-3\cdot 6=40$; $a+3\sigma=58+3\cdot 6=76$. Таким образом, наибольшая и наименьшая границы предполагаемой массы яйца будет колебаться от 40 г до 76 г.

128. Каким должно быть среднеквадратическое отклонение σ, чтобы толщина X металлического листа, выпускаемого заводом, отличалась от номинала $a=2$ мм не более чем на 5% номинала с вероятностью, не меньшей 0,99? Предполагается. что случайная величина X распределена нормально.

129. Отклонение размера детали от номинала подчинено нормальному закону. Систематической ошибки нет. С вероятностью 0,95 отклонение по абсолютной величине не превышает 2мк. Найдите среднеквадратическую ошибку.

130. Производится измерение диаметра вала. Случайные ошибки измерения X подчинены нормальному закону с $a=10$ мм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 15 мм.

131. Измерительный прибор не имеет систематических ошибок (математическое ожидание равно нулю). Вероятность того, что ошибка не превзойдет по абсолютной величине 12 м равна 0,9358. Найти вероятность того, что ошибки не превзойдут по абсолютной величине 10 м, считая, что ошибки распределены по нормальному закону.

132. Случайные значения массы зерна распределены нормально. Математическое ожидание массы зерна равно 0,2 г, среднее квадратическое отклонение равно 0,05. Нормальные всходы дают зерна, масса которых более 0,17 г. Определить: **1)** процент семян, от которых ожидаются нормальные всходы; **2)** величину, которую не превзойдет масса отдельного зерна с вероятностью 0,96.

133. Автомат изготавливает шарики. Шарик считается годным, если отклонение X диаметра шарика от проектного размера по абсолютной величине менее 0,7 мм. Считая, что непрерывная случайная величина X распределена нормально со средним квадратичным отклонением $\sigma=0{,}4$ мм, найти среднее количество годных шариков среди 100 изготовленных.

134. Цена акции – случайная величина X, которая распределена нормально с математическим ожиданием 90 $ и среднеквадратическим отклонением 4 $. Найти вероятность того, что цена акции будет от 85 до 95 $.

135. Производителю известно, что средний срок работы прибора составляет 1000 часов, а стандартное отклонение срока работы – 120 часов. Считая, что срок работы распределен по нормальному закону, найти вероятность того, что прибор прослужит менее 1100 часов.

136. Величина сопротивления обмотки является случайной величиной, подчиненной нормальному закону со средним значением $R = 28$ Ом и дисперсией $D = 0{,}0441$ Ом^2. Найти: **а)** вероятность того, что сопротивление обмотки лежит в интервале $(27{,}6; 28{,}5)$; **б)** границы интервала, симметричного относительно математического ожидания, в который это сопротивление попадает с вероятностью 0,999.

137. *Задача с решением.* После изготовления 100 одинаковых деталей проходят проверку на соответствие качеству. Вероятность брака для каждой детали одинакова (независимо от других) и равна $p = 0{,}25$. Найти вероятность того, что проверку успешно пройдут от 15 до 30 деталей. Сколько нужно проверить деталей, чтобы вероятность отклонения относительной частоты появления бракованной детали от вероятности этого события менее чем на 0,1 по абсолютной величине, была равна 0,95.

Решение. Имеем схему Бернулли с параметрами $n = 100$ (количество деталей), $p = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$ (вероятность появления качественной детали), $q = 0{,}25$ (вероятность появления брака).

Найдем вероятность того, что проверку успешно пройдут от 15 до 30 деталей. Используем интегральную теорему Лапласа:

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $m_1 = 15$, $m_2 = 30$, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_0^x e^{-z^2/2}\, dz$ – функция Лапласа (значения берутся из таблиц). Подставляем:

$$P_n(15, 30) \approx \Phi\left(\frac{30 - 100 \cdot 0{,}75}{\sqrt{100 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}}\right) - \Phi\left(\frac{15 - 100 \cdot 0{,}75}{\sqrt{100 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}}\right) =$$

$$= \Phi(-10{,}39) - \Phi(-13{,}86) = -\Phi(10{,}39) + \Phi(13{,}86) = -0{,}5 + 0{,}5 = 0.$$

Найдем сколько нужно проверить деталей, чтобы вероятность отклонения относительной частоты появления бракованной детали от вероятности этого события менее чем на 0,1 по абсолютной величине, была равна 0,95. Используем формулу: $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$.

Получаем: $P\left(\left|\frac{m}{n} - 0{,}25\right| \le 0{,}1\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 0{,}95$.

В силу заданных значений

$$2\Phi\left(0{,}1\cdot\sqrt{\frac{n}{0{,}25\cdot 0{,}75}}\right)=0{,}95;$$

$$\Phi\left(0{,}2309\sqrt{n}\right)=0{,}475.$$

По таблице приложений определяем:

$$0{,}2309\sqrt{n}=1{,}96;$$

$$\sqrt{n}=8{,}4885;$$

$$n=73.$$

138. Станок изготовляет детали, отклонение длины которых от нормы подчинено нормальному закону с параметрами (0; σ). Деталь считается годной, если отклонение от нормы не презышает по абсолютной величине 1 мм. Найти σ, если вероятность того, что деталь годная, равна 0,9.

139. Случайная величина имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 28 и средним квадратическим отклонением 14. Найти вероятность того, что ее значение: **а)** будет отрицательным; **б)** будет лежать в пределах от – 1 до 3; **в)** будет отличаться от среднего не более чем на 2.

140. Величина изменения стоимости ценной бумаги к концу торгового дня распределена нормально с параметрами: математическое ожидание 100 руб., среднее квадратическое отклонение 2 руб. Найти вероятность того, что к концу рабочего дня ценная бумага будет иметь стоимость от 96 до 104 руб.

141. В результате измерения массы большого числа яблок некоторого сорта установлено, что масса одного яблока лежит в пределах от 114 до 340 граммов. Считая, что масса яблока – случайная величина, имеющая нормальное распределение, и используя правило «трех сигм», найти математическое ожидание и с.к.о. массы яблока. Найти вероятность того, что масса случайно выбранного яблока больше 214 граммов.

142. Определить параметры распределения, если его функция плотности имеет вид $f(x)=\frac{1}{13\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x+2)^2}{338}}$.

143. Изменение цены акции подчинено нормальному закону с параметрами (20 \$; σ). Найти σ, если наблюдения в течение года показали, что в 80% случаев изменение иены акций колебалось от 18 до 22 \$.

144. Случайная величина X имеет нормальное распределение $N\,(a=12,\ \sigma=20)$. $a=M(X)$, $\sigma=\sqrt{D(X)}$ – среднеквадратичное отклонение. Найти $P(X<1)$, $P(-1<X<1)$, $P(-5<X<5)$, $P(-\sigma<X-a<\sigma)$, $P(-2\sigma<X-a<2\sigma)$.

Равномерное распределение

145. Если соблюдается график движения, то среднее время ожидания пассажиром трамвая равно 3,5 мин. Найти вероятность того, что пассажир, который не знает расписания, будет ждать трамвай от 3 до 6 мин.

146. *Задача с решением.* Случайная величина *X* имеет равномерное распределение на интервале (–2; 3). Найти плотность распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины *X*.

Решение. Для равномерного закона распределения плотность распределения вероятностей имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & \text{если } x\in[a;b];\\ 0, & \text{если } x\notin[a;b].\end{cases}$$

Тогда в данном случае получаем

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}, & \text{если } x\in[-2;3];\\ 0, & \text{если } x\notin[-2;3].\end{cases}$$

Математическое ожидание $M(X)$ и $D(X)$ для равномерного распределения находят по формулам:

$$M(X)=\frac{a+b}{2}, \qquad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Таким образом, получаем

$$M(X)=\frac{-2+3}{2}=\frac{1}{2}, \qquad D(X)=\frac{(3-(-2))^2}{12}=\frac{25}{12}.$$

Ответ: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}, & \text{если } x\in[-2;3];\\ 0, & \text{если } x\notin[-2;3].\end{cases}$ $M(X)=\dfrac{-2+3}{2}=\dfrac{1}{2}$,

$$D(X)=\frac{(3-(-2))^2}{12}=\frac{25}{12}.$$

147. Студент ездит в университет двумя автобусами. Время ожидания перзого равномерно распределено в интервале (0–4 минуты), а второго – (0–9 минут). Какова вероятность того, что суммарное время ожидания окажется в диапазоне от 2 до 8 минут?

148. *Задача с решением.* Непрерывная случайная величина распределена равномерно на отрезке $[A;8]$. Математическое ожидание равно 3,5. Найти параметр распределения *A*, функцию распределения, плотность распределения, построить графики функции распределения и плотности распределения случайной величины. Найти дисперсию случайной величины и вероятность попадания в интервал (1; 11).

Решение. Найдем параметр распределения *A* из условия

$$M(X)=\frac{A+8}{2}=3{,}5,$$

$$A+8=7; \quad \Rightarrow \quad A=-1.$$

Получаем, что X распределена равномерно на интервале $(a,b)=(-1;8)$.

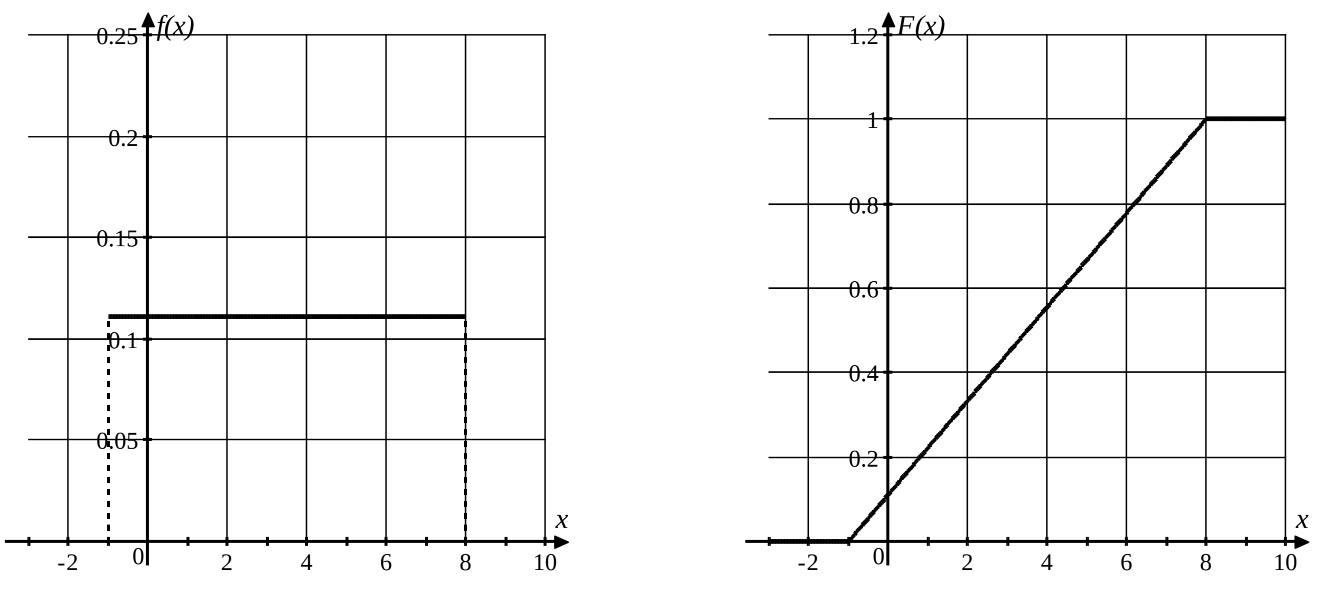
Плотность распределения:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 0, & x>b\end{cases} \Rightarrow \quad f(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \dfrac{1}{9}, & -1\le x\le 8,\\ 0, & x>8.\end{cases}$$

Функция распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 1, & x>b\end{cases} \Rightarrow \quad f(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \dfrac{x+1}{9}, & -1\le x\le 8,\\ 1, & x>8.\end{cases}$$

Графики функций:



Дисперсия $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}=\dfrac{(8+1)^2}{12}=\dfrac{9^2}{12}=\dfrac{27}{4}=6{,}75$.

Найдем вероятность попадания в интервал $(\alpha;\beta)=(1;11)$.

$$P(1<X<11)=F(11)-F(1)=1-\frac{1+1}{9}=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}.$$

149. *Задача с решением.* Случайная величина X – время ожидания дождя в сутках – имеет равномерное распределение на отрезке [0, 3]. Найти математическое ожидание, дисперсию, $P\ (X<5)$, $P\ (3<X)$.

Решение. Математическое ожидание равномерно распределенной случайной величины определяется по формуле:

$$M(X)=\frac{a+b}{2}=\frac{0+3}{2}=\frac{3}{2}.$$

Для дисперсии запишем:

$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(3-0)^2}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}.$$

Функция плотности распределения вероятностей равномерно распределенной на интервале [0, 3] случайной величины имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{3}, & 0\le x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$$

Вероятность попадания равномерно распределенной случайной величины в интервал можно вычислить по формуле:

$$P(x_1 < X < x_2)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx.$$

Тогда вероятность $P(X<5)$ вычислим по формуле:

$$P(X<5)=P(-\infty<X<5)=\int_{-\infty}^{0}0\,dx+\int_{0}^{3}\frac{1}{3}dx+\int_{3}^{5}0\,dx=\frac{1}{3}\cdot\int_{0}^{3}dx=1.$$

Вероятность $P(X>3)$:

$$P(X>3)=P(3<X<+\infty)=\int_{3}^{+\infty}0\,dx=0.$$

150. Найти дисперсию суммы двух независимых случайных величин ξ и η с равномерными законами распределения: ξ в интервале [0; 1], η – в интервале [1; 4].

151. Случайные величины X и Y независимы и распределены равномерно: X – в интервале (–2; 7), Y – в интервале (0; 4). Найти математическое ожидание случайной величины $Z = 3X - 2Y$.

152. Случайные величины X и Y независимы и распределены равномерно: X – в интервале (3; 8), Y – в интервале (1; 5). Найти математическое ожидание случайной величины $Z = XY$.

153. Для случайной величины ξ, распределенной равномерно в интервале $(0,4)$, вычислить $P(-5\le\xi\le 5)$.

154. *Задача с решением.* Величина изменения стоимости ценной бумаги к концу торгового дня распределена равномерно на интервале от – 8% до 8%. Найти вероятность того, что величина изменения стоимости бумаги к концу дня не превысит по абсолютной величине 5%.

Решение. Непрерывная случайная величина X, распределенная равномерно в интервале $(-8,8)$ имеет функцию плотности распределения

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{16}, & \text{при } -8\le x\le 8,\\ 0, & \text{при } x<-8,\ x>8.\end{cases}$$

Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал можно вычислить по формуле:

$$P(x_1\le x\le x_2)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx.$$

В данном случае имеем

$$P(|X<5|)=P(-5\le X\le 5)=\int_{-5}^{5}\frac{1}{16}dx=\frac{1}{16}\int_{-5}^{5}dx=\frac{1}{16}\cdot x\Big|_{-5}^{5}=\frac{1}{16}\cdot(5-(-5))=$$

$$=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}.$$

Ответ: $P(|X<5|)=\frac{5}{8}$.

155. Случайная величина равномерно распределена на отрезке [4, 8]. Найти плотность распределения, функцию распределения, построить их графики. Найти вероятность попадания случайной величины в интервал (5, 7). Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратичное отклонение.

156. Автоматический светофор работает в двух режимах: 1 мин горит зеленый свет и 0,5 мин – красный и т.д. Водитель подъезжает к перекрестку в случайный момент времени. Найти вероятность того, что он проедет перекресток без остановки.

157. Ребро куба *X* измерено приближенно, причем $2<X<3$. Рассматривая длину ребра куба как случайную величину *X*, распределенную равномерно в интервале (2; 3), найти математическое ожидание обьема куба.

158. Минутная стрелка часов перемещается скачком в конце каждой минуты. Найти вероятность того, что в данное мгновение часы покажут время, которое отличается от истинного не более чем на 15 с.

159. Вычислить вероятность того, что из пяти испытаний хотя бы один раз X попадет в интервал $[0;M]$, если распределено по равномерному закону $R[2;8]$.

Показательное (экспоненциальное) распределение

160. Найти плотность распределения, числовые характеристики и вероятность $P(0<X<2)$ случайной величины *X*, закон распределения которой задан функцией распределения $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-2x}, & x\ge 0\end{cases}$

161. *Задача с решением.* Вероятность того, что непрерывная случайная величина ξ, распределенная по показательному закону, принимает значения большие 48, равна e^{-2}. Найти плотность распределения случайной величины ξ, функцию распределения, построить графики этих функций. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ.

Решение. По условию непрерывная случайная величина ξ распределена по показательному закону с параметром λ.

Плотность вероятности имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } x\ge 0, \quad \lambda>0.\end{cases}$$

Функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & \text{при } x\ge 0.\end{cases}$$

По условию известно, что $P(\xi>48)=e^{-2}$. Подставим:

$$P(\xi>48)=1-F(48)=e^{-48\lambda}=e^{-2},$$
$$-48\lambda=-2;$$
$$\lambda=\frac{1}{24}.$$

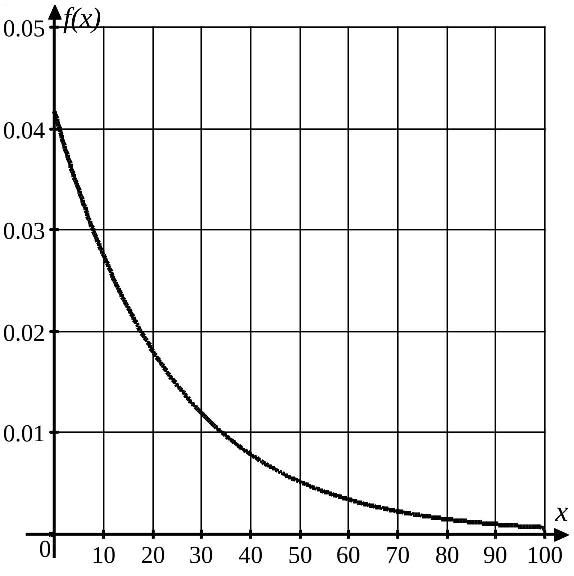
Тогда плотность вероятности имеет вид:

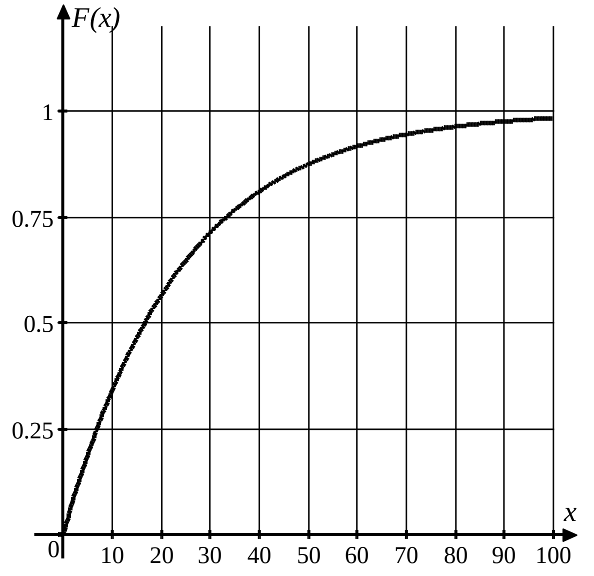
$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0,\\ \frac{1}{24}e^{-\frac{1}{24}x}, & \text{при } x\ge 0.\end{cases}$$

Функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0,\\ 1-e^{-\frac{1}{24}x}, & \text{при } x\ge 0.\end{cases}$$

Построим графики функций.





Найдем математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ по свойствам показательного закона распределения.

Математическое ожидание: $M\xi=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{1/24}=24$.

Дисперсия: $D\xi=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{(1/24)^2}=24^2=576$.

Среднее квадратическое отклонение случайной величины: $\sigma\xi=\sqrt{D\xi}=\sqrt{24^2}=24$.

162. Случайная величина X имеет показательное распределение, дисперсия СВ X равна 0,04. Найти значение параметра распределения.

163. Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если параметр $\lambda = 5$.

164. Непрерывная величина *X* распределена по показательному закону: $p(x) = 0$ при $x < 0$; $p(x) = 2e^{-2x}$ при $x \geq 0$. Найти вероятность попадания значений этой величины в интервал (0,1; 0,7).

165. Случайная величина *X* задана плотностью распределения вероятностей $f(x) = ae^{-11|x|}$. Найти коэффициент a, функцию распределения вероятностей $F(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$, среднеквадратическое отклонение $\sigma(X)$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

166. Случайная величина *X* распределена по показательному закону: $p(x) = 0$ при $x < 0$; $p(x) = 3e^{-3x}$ при $x \geq 0$. Найти вероятность попадания *X* в интервал (0,1; 1).

167. Найти математическое ожидание случайной величины *X*, плотность распределения которой определяется функцией $p(x) = 0{,}2e^{-0{,}2x}$ при $x \geq 0$.

168. Найти математическое ожидание случайной величины *X*, плотность распределения которой определяется функцией $p(x) = 0{,}4e^{-0{,}4x}$ при $x \geq 0$, $p(x) = 0$ при $x < 0$.

169. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*, плотность распределения которой задана функцией $p(x) = 5e^{-5x}$ при $x \geq 0$.

170. Чему равна дисперсия случайной величины *X* с плотностью распределения $p(x) = 4e^{-4x}$ при $x \geq 0$, $p(x) = 0$ при $x < 0$.

171. Найдите среднее квадратическое отклонение случайной величины *X* с плотностью распределения $p(x) = 0{,}5e^{-0{,}5x}$ при $x \geq 0$, $p(x) = 0$ при $x < 0$.

Контрольные задания

Задача 1

Случайная величина X имеет биномиальный закон распределения с параметрами n и p. Найдите закон распределения случайной величины $Y = 4X - X^2$. Найти математическое ожидание величины Y. В нечетных вариантах $n = 3$, в четных $n = 4$.

№	p	№	p	№	p	№	p	№	p	№	p
1	0,1	**6**	0,5	**11**	0,4	**16**	0,7	**21**	0,8	**26**	1/3
2	0,4	**7**	1/3	**12**	0,7	**17**	0,2	**22**	0,6	**27**	0,9
3	0,2	**8**	0,6	**13**	1/4	**18**	3/4	**23**	0,9	**28**	0,3
4	1/4	**9**	0,3	**14**	3/4	**19**	1/6	**24**	2/3	**29**	5/6
5	1/6	**10**	2/3	**15**	0,5	**20**	0,8	**25**	0,1	**30**	0,7

Задача 2

При выполнении задачи общие данные следует заменить своими конкретными. В выражениях для данных используются следующие обозначения: **К** и **М** – предпоследняя и последняя цифры варианта.

В задаче используется следующая операция:

r (mod s) – целый остаток от деления целого числа r на целое число s.

Например, 6 (*mod* 6) = 12 (*mod* 6) = 18 (*mod* 6) = 0;
1 (*mod* 6) = 7 (*mod* 6) = 13 (*mod* 6) = 1;
2 (mod 6) = 8 (*mod* 6) = 14 (*mod* 6) = 2 и т.д.

Для нахождения целого остатка r (*mod* s) рекомендуется делить число r на s уголком. Например,

$$-\begin{array}{r|l} 12 & \underline{\;6\;} \\ \underline{12} & \;2 \\ 0 & \end{array}\;; \qquad -\begin{array}{r|l} 1 & \underline{\;6\;} \\ \underline{0} & \;0 \\ 1 & \end{array}\;; \qquad -\begin{array}{r|l} 14 & \underline{\;6\;} \\ \underline{12} & \;2 \\ 2 & \end{array}\;.$$

На пути движения автомобиля четыре светофора, каждый из которых (независимо от других) запрещает дальнейшее движение автомобиля с вероятностью $0{,}7 - \dfrac{(K+M)(\text{mod}\,3)}{10}$. Рассматривается случайная величина X – число светофоров, пройденных автомобилем без остановки.

1. Составить ряд распределения случайной величины X и представить его графически.

2. Найти функцию распределения случайной величины X и построить её график.

3. Вычислить математическое ожидание (среднее значение) M, дисперсию D и среднее квадратическое (стандартное) отклонение.

Задача 3

Ко всем задачам построить многоугольник и функцию распределения.

1.	Рабочий обслуживает 3 станка. Вероятность того, что в течение часа первый станок не потребует регулировки – 0,9; второй – 0,8; третий – 0,7. Составить закон распределения числа станков, которые в течение часа не потребуют регулировки. Найти его M(X) , D(X), σ(X).
2.	Два стрелка делают по одному выстрелу в одну и ту же цель. Вероятность попадания в цель для первого равна 0,6; для второго – 0,5. Составить закон распределения числа попаданий в мишень. Найти M(X), D(X), σ(X).
3.	Вероятность того, что в библиотеке необходимая студенту книга свободна, равна 0,3. Составить закон распределения числа библиотек, которые посетит студент, если в городе 3 библиотеки. Найти M(X), D(X), σ(X).
4.	Вероятность производства бракованной детали – 5%. В ОТК из проверяемой партии одно за другим берут 3 изделия. Составить закон распределения случайной величины X – числа бракованных деталей из числа деталей, подвергнутых проверке. Найти M(X), D(X), σ(X).
5.	На пути движения автобуса 4 светофора. Каждый из них с вероятностью 0,5 либо разрешает, либо запрещает автобусу движение. Найти закон распределения числа светофоров, пройденных автобусом до первой остановки. Найти M(X), D(X), σ(X).
6.	Игральная кость брошена 3 раза. Написать закон распределения числа появлений шестерки. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.
7.	Имеется 4 лампы, каждая из которых с вероятностью 1/3 имеет дефект. При ввинчивании в патрон дефектная лампа сразу перегорает, и тогда ввинчивается следующая. Составить закон распределения числа ввинченных ламп. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.
8.	У охотника 4 патрона. Он стреляет по зайцу, пока не попадет или пока не кончатся патроны. Составить закон распределения числа выстрелов, если вероятность попадания 0,25. Найти M(X), D(X), σ(X).
9.	Монету подбрасывают три раза. Составить закон распределения числа появлений герба. Найти M(X), D(X), σ(X).
10.	Рабочий обслуживает 3 станка. Вероятность того, что в течение часа первый станок не потребует регулирования – 0,7; второй – 0,9; третий – 0,8. Составить закон распределения числа станков, которое в течение часа не потребует регулировки. Найти M(X), D(X), σ(X).
11.	Составить закон распределения числа попаданий в мишень при 3 выстрелах, если вероятность попадания при одном - 2/3. Найти M(X), D(X), σ(X).
12.	У дежурного гостиницы в кармане 5 ключей от разных комнат. Вынув наугад ключ, он пробует открыть дверь. Составить закон распределения числа опробованных ключей, если проверенный ключ не кладется обратно в карман. Найти M(X), D(X), σ(X).
13.	Срок службы шестерен коробок передач зависит от следующих факторов:

	усталости материала в основании зуба, контактных напряжений и жесткости конструкции. Вероятность отказа каждого фактора в одном испытании 0,1. Составить закон распределения числа отказавших факторов в одном испытании. Найти M(X), D(X), σ(X).
14.	Проводится три испытания. Вероятность появления события в каждом испытании равна 0,9. Составить закон распределения числа появлений событий при этих испытаниях. Найти M(X), D(X), σ(X).
15.	На участке три станка, коэффициент использования которых по времени составляет 0,8. Составить закон распределения числа работающих станков при нормальном ходе производства. Найти M(X), D(X), σ(X).
16.	Автомобиль встретит 3 светофора, каждый из которых пропустит его с вероятностью 0,5. Составить закон распределения числа светофоров, пройденных до первой остановки машины. Найти M(X), D(X), σ(X).
17.	Составить закон распределения числа попаданий мячом в корзину при трех бросках, если вероятность попадания при одном броске 0,3. Найти M(X), D(X), σ(X).
18.	Составить функцию распределения числа попаданий в цель при 5 выстрелах, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,2. Найти M(X), D(X), σ(X).
19.	Производится исследовательское испытание пяти приборов на надежность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надежным. Построить ряд распределения числа случайного числа испытанных приборов, если вероятность выдержать испытание для каждого из них равно 0,9. Найти M(X), D(X), σ(X).
20.	Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятность, что в течение часа первый станок не потребует регулировки – 0,8; второй – 0,9; третий – 0,8 и четвертый – 0,7. Составить закон распределения числа станков, которые в течение часа потребуют регулировки. Найти M(X), D(X), σ(X).
21.	Три стрелка делают по одному выстрелу в одну и ту же цель. Вероятность попадания в цель для первого стрелка 0,6 для второго – 0,5 и для третьего – 0,7. Составить закон распределения числа попаданий в мишень. Найти M(X), D(X), σ(X).
22.	Вероятность производства бракованной детали 3%. В ОТК из проверяемой партии одно за другим берут изделия, но не более 5. Составить закон распределения числа деталей, подвергаемых проверки. Найти M(X), D(X), σ(X).
23.	Игральная кость брошена 4 раза. Найти закон распределения числа появлений пятерки. Найти M(X), D(X), σ(X).
24.	Имеется 5 электрических ламп, каждая из которых с вероятностью 1/4 имеет дефект. При ввинчивании в патрон дефектная лампа сразу перегорает, и тогда ввинчивается следующая. Составить закон распределения числа ввинченных ламп. Найти M(X), D(X), σ(X).
25.	Случайная величина ***X*** равна числу появлений «герба» в серии из 6 бросаний монеты. Найти закон распределения и функцию распределения $F(x)$ этой случайной величины; вычислить ее математическое ожидание ***MX*** и дисперсию ***DX***; построить график $F(x)$.

26.	Производится телефонный опрос потребителей некоторой продукции. Каждый потребитель не зависимо от других может дать положительный отзыв о продукции с вероятностью $\frac{14}{40}$. Составить закон распределения случайной величины X – числа положительных отзывов среди 3-х опрошенных потребителей. Найти математическое ожидание и дисперсию числа положительных отзывов среди 3-х опрошенных.
27.	В каждой из двух урн по пять белых и пять черных шаров. Из второй урны в первую переложили два шара. Случайная величина X – число черных шаров в первой урне после перекладывания. Написать закон распределения X. Найти MX, DX.
28.	Вероятность нормального расхода энергии на предприятии равна 0,75. Случайная величина Y – число ближайших трех дней, в которые был нормальный расход энергии на предприятии. Написать закон распределения Y. Найти MY, DY.
29.	Спиридон, вместо того, чтобы купить грибы в супермаркете, насобирал грибов в лесу. Из 11 собранных подберезовиков 5 – ложных. Его жена Феврония сварила грибной супчик, выбрав из корзинки 4 гриба. Найдите ряд распределения случайной величины ξ – числа ложных подберезовиков в супе, постройте график функции распределения, найдите $M\xi$, $D\xi$.
30.	Случайная величина ξ – число бракованных деталей в партии. Число деталей 7, вероятность брака детали $p_1 = 0{,}1$. Составить ряд распределения случайной величины ξ. Найти математическое ожидание $M\xi$, дисперсию $D\xi$.

Задача 4

По заданному закону распределения дискретной случайной величины ***X*** вычислить: математическое ожидание; дисперсию; среднее квадратическое отклонение. Построить график закона распределения – многоугольник распределения, а также функцию распределения.

1	X	10	13	17	19	22
	P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

2	X	8	11	14	17	20
	P	0,2	0,1	0,3	0,3	0,1

3	X	-4	-2	10	1	2
	P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

4	X	0,05	0,15	0,25	0,35	0,45
	P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

5	X	-6	-1	4	5	6
	P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

6	X	0	2	3	7	9
	P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

7	X	-5	-3	0	5	9
	P	0,3	0,1	0,1	0,4	0,1

8	X	0,5	0,1	0,2	0,5	0,6
	P	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

9	X	1	4	5	6	8
	P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

10	X	-3	-1	3	8	10
	P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

11	X	-8	-4	0	3	6
	P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

12	X	5	10	12	16	18
	P	0,1	0,1	0,3	0,3	0,2

13	X	10	16	20	32	45
	P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

14	X	-5	0	2	6	8
	P	0,1	0,1	0,3	0,3	0,2

15	X	8	10	14	16	18
	P	0,1	0,1	0,3	0,3	0,2

16	X	6	8	12	16	18
	P	0,1	0,1	0,3	0,3	0,2

17	X	5	10	12	16	18
	P	0,14	0,16	0,2	0,3	0,2

18	X	8	11	12	15	18
	P	0,1	0,1	0,35	0,3	0,15

19	X	-12	-10	-6	1	5
	P	0,1	0,1	0,3	0,3	0,2

20	X	5	10	12	16	18
	P	0,15	0,15	0,5	0,1	0,1

21	X	5	10	12	16	18
	P	0,14	0,1	0,36	0,3	0,1

22	X	15	16	17	18	20
	P	0,1	0,15	0,3	0,2	0,25

23	X	5	10	12	16	18
	P	0,12	0,18	0,32	0,28	0,1

24	X	5	7	8	10	11
	P	0,1	0,1	0,3	0,3	0,2

25	X	-3	-2	2	4	5
	P	0,15	0,1	0,35	0,3	0,1

26	X	– 4	– 1	0	2	5
	P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

27	X	– 5	– 1	0	2	4
	P	0,14	0,36	0,1	0,3	0,1

28	X	– 15	– 12	– 9	– 5	0
	P	0,3	0,15	0,1	0,2	0,25

29	X	– 5	– 4	– 1	0	3
	P	0,4	0,2	0,1	0,2	0,1

30	X	5	8	12	16	20
	P	0,1	0,3	0,1	0,4	0,1

Задача 5

Произведено n независимых выстрелов по мишени с вероятностью попадания p. Пусть случайная величина X – число попаданий в цель. Для случайной величины X найти: **1)** закон распределения случайной величины и построить многоугольник распределения; **2)** функцию распределения и построить ее график; **3)** вероятность попадания случайной величины в интервал (α; β); **4)** математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

Вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5
p	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,2	0,3
α	– 1	0,5	1,5	1,5	0,5	1,3	2	1	0,5	– 1
β	0,5	3	2,5	3	2	2	3,5	3	4	0,5
Вар.	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
n	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6
p	0,4	0,5	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
α	0,5	0,5	– 1	0,5	1,5	1,5	0,5	1,3	2	1
β	3	2,5	0,5	3	2,5	3	2	2	3,5	3
Вар.	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
n	6	6	6	6	4	5	6	4	5	6
p	0,2	0,3	0,4	0,5	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
α	0,5	– 1	0,5	0,5	0,5	0	– 1	1,5	2	1
β	4	0,5	3	2,5	1,8	1,9	3	4	4	5

Задача 6

Случайная величина X задана интегральной функцией распределения $F(x)$. Найти: **1)** дифференциальную функцию распределения $f(x)$; **2)** математическое ожидание $M(X)$; **3)** дисперсию $D(X)$.

1.	$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0,\\ x^2 & \text{при} \quad 0\le x\le 1,\\ 1 & \text{при} \quad x>1.\end{cases}$	**2.**	$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<4,\\ x-4 & \text{при} \quad 4\le x\le 5,\\ 1 & \text{при} \quad x>5.\end{cases}$
3.	$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0,\\ \dfrac{x^2}{16} & \text{при} \quad 0\le x\le 4,\\ 1 & \text{при} \quad x>4.\end{cases}$	**4.**	$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0,\\ \dfrac{x^3}{8} & \text{при} \quad 0\le x\le 2,\\ 1 & \text{при} \quad x>2.\end{cases}$
5.	$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<2,\\ x-2 & \text{при} \quad 2\le x\le 3,\\ 1 & \text{при} \quad x>3.\end{cases}$	**6.**	$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0,\\ \dfrac{x^2}{9} & \text{при} \quad 0\le x\le 3,\\ 1 & \text{при} \quad x>3.\end{cases}$
7.	$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0,\\ \dfrac{x^2}{4} & \text{при} \quad 0\le x\le 2,\\ 1 & \text{при} \quad x>2.\end{cases}$	**8.**	$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<1,\\ x-1 & \text{при} \quad 1\le x\le 2,\\ 1 & \text{при} \quad x>2.\end{cases}$

9.	$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0,\\ x & \text{при} \quad 0\le x\le 1,\\ 1 & \text{при} \quad x>1.\end{cases}$	**10.**	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ \frac{1}{4}x-\frac{1}{4}, & -1<x\le 5;\\ 1, & x>5.\end{cases}$
11.	$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0,\\ \frac{x^3}{27} & \text{при} \quad 0\le x\le 3,\\ 1 & \text{при} \quad x>3.\end{cases}$	**12.**	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ \frac{1}{5}x+\frac{1}{5}, & -1<x\le 4;\\ 1, & x>4.\end{cases}$
13.	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{2}, & -2<x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$	**14.**	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{3}, & -1<x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$
15.	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{4}, & -1<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$	**16.**	$F(x)=\begin{cases}0, & x<2;\\ (x-2)^2, & 2\le x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$
17.	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \frac{x^3}{27}, & 0<x<3,\\ 1, & x\ge 3.\end{cases}$	**18.**	$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{x^2}{4}, & 0\le x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$
19.	$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{6}x(x+1), & 0\le x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$	**20.**	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ \frac{1}{4}(x+1)^2, & -1<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$
21.	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ \frac{1}{9}(x+1)^2, & -1<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$	**22.**	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \frac{1}{9}x^2+\frac{4}{5}x, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$
23.	$F(x)=\begin{cases}0, & x<-2,\\ \frac{1}{16}(x+2), & -2\le x\le 14,\\ 1, & x>14.\end{cases}$	**24.**	$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0,\\ \frac{x^3}{8} & \text{при} \quad 0\le x\le 2,\\ 1 & \text{при} \quad x>2.\end{cases}$

25.	$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ x^3+1, & -1\le x\le 0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$	**26.**	$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^3}{4}, & 0\le x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$
27.	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ \dfrac{1}{27}(x-2)^3, & x\in(2;5],\\ 1, & x>5.\end{cases}$	**28.**	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ 0{,}25x^2-x+1, & 2<x\le 4,\\ 1, & x>4.\end{cases}$
29.	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ 0{,}5\cdot(x^2-x), & 1<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$	**30.**	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 3,\\ x^2-6x+9, & 3<x\le 4,\\ 1, & x>4.\end{cases}$

Задача 7

В денежной лотерее выпущено 1000 билетов. Разыгрывается a_1 выигрышей на сумму p_1 тысяч рублей, a_2 выигрышей на сумму p_2 тысяч рублей и a_3 выигрышей на сумму p_3 тысяч рублей. Составить ряд распределения случайной величины X – размер выигрыша по одному купленному билету; найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины; записать функцию распределения и построить ее график.

Варианты (N – номер варианта)

N	a_1	p_1	a_2	p_2	a_3	p_3	N	a_1	p_1	a_2	p_2	a_3	p_3
1.	80	10	70	13	60	17	**2.**	70	8	60	9	50	12
3.	70	8	60	12	50	17	**4.**	50	9	40	11	30	13
5.	40	10	30	13	20	17	**6.**	50	10	40	12	30	15
7.	60	9	50	10	40	15	**8.**	30	7	20	9	10	11
9.	80	8	70	10	60	12	**10.**	70	10	60	11	50	12
11.	30	7	20	8	10	10	**12.**	60	6	50	10	40	15
13.	60	5	50	10	40	12	**14.**	30	5	20	7	10	12
15.	70	6	60	9	50	11	**16.**	60	6	50	9	40	10
17.	80	5	70	10	60	14	**18.**	30	9	20	13	10	16
19.	70	5	60	10	50	14	**20.**	60	10	50	15	40	18
21.	70	10	60	15	50	19	**22.**	50	9	40	13	30	17
23.	50	9	40	10	30	14	**24.**	30	9	20	14	10	18
25.	70	7	60	12	50	13	**26.**	50	6	40	9	30	11
27.	40	8	30	9	20	13	**28.**	60	8	50	11	40	13
29.	80	10	70	12	60	15	**30.**	30	7	20	10	10	11

Задача 8

Пусть X – нормально распределенная случайная величина с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ. Найдите вероятность того, что X примет значение между α и β.

N	a	σ	α	β	**N**	a	σ	α	β	**N**	a	σ	α	β
1.	25	4	17	31	**2.**	35	5	23	43	**3.**	33	6	21	41
4.	25	7	17	32	**5.**	35	5	23	41	**6.**	33	4	21	39
7.	28	4	16	34	**8.**	31	8	22	42	**9.**	44	5	32	55
10.	29	7	21	41	**11.**	39	3	30	49	**12.**	30	2	24	39
13.	45	2	35	53	**14.**	50	6	46	58	**15.**	28	3	20	36
16.	39	4	30	43	**17.**	48	2	42	58	**18.**	38	4	31	48
19.	28	2	16	39	**20.**	24	5	19	33	**21.**	29	4	22	35
22.	20	5	12	26	**23.**	45	8	40	55	**24.**	46	8	35	56
25.	32	5	24	37	**26.**	44	8	32	53	**27.**	40	5	28	48
28.	48	7	42	53	**29.**	28	4	23	32	**30.**	40	2	29	50

Задача 9

Стоимость акции предприятия распределена по нормальному закону с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2. Найти вероятность, что акция будет стоить от a до b (см. данные из таблицы).

N	m	σ^2	a	b	**N**	m	σ^2	a	b
1.	220	38	159	260	**2.**	209	28	1S1	246
3.	372	25	362	381	**4.**	307	41	247	382
5.	249	39	176	293	**6.**	412	44	351	422
7.	422	23	420	449	**8.**	250	47	161	315
9.	419	37	350	469	**10.**	264	26	261	268
11.	276	25	275	279	**12.**	433	25	399	436
13.	490	40	423	563	**14.**	394	26	365	439
15.	474	35	413	524	**16.**	366	39	308	419
17.	247	35	233	306	**18.**	282	31	233	318
19.	211	42	173	237	**20.**	357	31	33S	398
21.	471	26	442	4S9	**22.**	239	46	238	263
23.	492	49	411	510	**24.**	458	39	393	465
25.	365	50	315	411	**26.**	214	44	160	269
27.	424	49	388	443	**28.**	272	49	233	362
29.	2S9	34	273	317	**30.**	216	24	18S	234

Задача 10

Предприниматель может получить кредиты в трех независимо работающих банках. В первом банке он может получить A млн. руб. с вероятностью $\frac{1}{m+1}$, во втором банке – B млн. руб. с вероятностью $\frac{1}{m}$, в третьем – C млн. руб. с вероятностью $\frac{1}{m-1}$. Найти закон распределения случайной величины X – возможной суммы кредитов и построить многоугольник распределения; найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение; найти функцию распределения дискретной случайной величины X, построить ее график; найти вероятность того, что предприниматель получит кредит в размере от 35 до 50 млн. руб.

№	A	B	C	m	№	A	B	C	m
1.	10	25	10	3	**16.**	20	5	25	3
2.	20	10	15	4	**17.**	10	10	5	5
3.	10	10	10	4	**18.**	15	10	25	6
4.	15	5	20	5	**19.**	25	5	20	3
5.	5	10	20	6	**20.**	25	5	15	5
6.	15	15	20	6	**21.**	20	10	10	6
7.	10	20	10	4	**22.**	10	15	5	4
8.	20	15	5	5	**23.**	5	20	15	6
9.	5	10	25	3	**24.**	15	10	5	3
10.	15	15	20	6	**25.**	10	10	15	3
11.	10	20	25	4	**26.**	20	5	15	6
12.	5	15	25	5	**27.**	15	10	5	6
13.	10	20	30	5	**28.**	10	5	10	3
14.	15	10	25	4	**29.**	20	15	10	5
15.	5	15	20	3	**30.**	15	15	5	6

Задача 11

Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятности $f(x)$. Найти:

а) Значение постоянной C, при которой функция будет плотностью вероятности некоторой случайной величины X;

б) Выражение функции распределения $F(x)$;

в) Вычислить вероятность того, что случайная величина X примет значение на отрезке $[a;b]$;

г) Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X;

д) Вычислить медиану этой случайной величины X;

е) Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

1.	$f(x)=\begin{cases} Cx, & x\in[0;3], \\ 0, & x\notin[0;3] \end{cases}$ $a=0$, $b=1$	**2.**	$f(x)=\begin{cases} C(4x+5), & x\in[0;3], \\ 0, & x\notin[0;3] \end{cases}$ $a=1$, $b=2$
3.	$f(x)=\begin{cases} C(3x^2+1), & x\in[0;2], \\ 0, & x\notin[0;2] \end{cases}$ $a=0$, $b=1$	**4.**	$f(x)=\begin{cases} Cx^2, & x\in[0;2], \\ 0, & x\notin[0;2] \end{cases}$ $a=0$, $b=1$
5.	$f(x)=\begin{cases} C\sin 2x, & x\in\left[\frac{3\pi}{4};\pi\right], \\ 0, & x\notin\left[\frac{3\pi}{4};\pi\right] \end{cases}$ $a=\frac{3\pi}{4}$, $b=\frac{5\pi}{6}$	**6.**	$f(x)=\begin{cases} C(3x^2+1), & x\in[0;4], \\ 0, & x\notin[0;4] \end{cases}$ $a=0$, $b=3$
7.	$f(x)=\begin{cases} C(3x^2+8), & x\in[0;4], \\ 0, & x\notin[0;4] \end{cases}$ $a=0$, $b=2$	**8.**	$f(x)=\begin{cases} C(x+1), & x\in[-1;2], \\ 0, & x\notin[-1;2] \end{cases}$ $a=1$, $b=2$
9.	$f(x)=\begin{cases} C(2x+2), & x\in[0;4], \\ 0, & x\notin[0;4] \end{cases}$ $a=0$, $b=1$	**10.**	$f(x)=\begin{cases} C\cos x, & x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right], \\ 0, & x\notin\left[\frac{\pi}{2};\pi\right] \end{cases}$ $a=\frac{\pi}{2}$, $b=\frac{3\pi}{4}$
11.	$f(x)=\begin{cases} Cx^2, & x\in[-1;2], \\ 0, & x\notin[-1;2] \end{cases}$ $a=1$, $b=2$	**12.**	$f(x)=\begin{cases} C(3x+1), & x\in[0;3], \\ 0, & x\notin[0;3] \end{cases}$ $a=0$, $b=2$
13.	$f(x)=\begin{cases} C(x+1), & x\in[0;3], \\ 0, & x\notin[0;3] \end{cases}$ $a=0$, $b=2$	**14.**	$f(x)=\begin{cases} C, & x\in[-1;4], \\ 0, & x\notin[-1;4] \end{cases}$ $a=0$, $b=3$
15.	$f(x)=\begin{cases} C\sin x, & x\in\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right], \\ 0, & x\notin\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right] \end{cases}$ $a=\frac{3\pi}{2}$, $b=\frac{7\pi}{4}$	**16.**	$f(x)=\begin{cases} C(x^2+1), & x\in[0;2], \\ 0, & x\notin[0;2] \end{cases}$ $a=0$, $b=1$
17.	$f(x)=\begin{cases} C(2x-1), & x\in[1;2], \\ 0, & x\notin[1;2] \end{cases}$ $a=1{,}5$, $b=2$	**18.**	$f(x)=\begin{cases} C(2x+1), & x\in[0;2], \\ 0, & x\notin[0;2] \end{cases}$ $a=0$, $b=1$

19.	$f(x)=\begin{cases} C(2x+3), & x\in[0;2], \\ 0, & x\notin[0;2] \end{cases}$ $a=0$, $b=1$	**20.**	$f(x)=\begin{cases} C\sin x, & x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right], \\ 0, & x\notin\left[0;\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$ $a=0$, $b=\frac{\pi}{3}$
21.	$f(x)=\begin{cases} C(x-1), & x\in[1;2], \\ 0, & x\notin[1;2] \end{cases}$ $a=1{,}2$, $b=1{,}5$	**22.**	$f(x)=\begin{cases} C, & x\in[2;4], \\ 0, & x\notin[2;4] \end{cases}$ $a=1$, $b=3$
23.	$f(x)=\begin{cases} C, & x\in[-1;1], \\ 0, & x\notin[-1;1] \end{cases}$ $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$	**24.**	$f(x)=\begin{cases} C\cos x, & x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right], \\ 0, & x\notin\left[0;\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$ $a=0$, $b=\frac{\pi}{6}$
25.	$f(x)=\begin{cases} C(2x-1), & x\in[1;2], \\ 0, & x\notin[1;2] \end{cases}$ $a=1{,}5$, $b=1{,}9$	**26.**	$f(x)=\begin{cases} C, & x\in[0;6], \\ 0, & x\notin[0;6] \end{cases}$ $a=2$, $b=5$
27.	$f(x)=\begin{cases} C\sin x, & x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right], \\ 0, & x\notin\left[\frac{\pi}{2};\pi\right] \end{cases}$ $a=\frac{\pi}{2}$, $b=\frac{5\pi}{6}$	**28.**	$f(x)=\begin{cases} C(x-2), & x\in[2;3], \\ 0, & x\notin[2;3] \end{cases}$ $a=2{,}5$, $b=2{,}8$
29.	$f(x)=\begin{cases} C, & x\in[1;5], \\ 0, & x\notin[1;5] \end{cases}$ $a=2$, $b=4$	**30.**	$f(x)=\begin{cases} C\sin x, & x\in[0;\pi], \\ 0, & x\notin[0;\pi] \end{cases}$ $a=\frac{\pi}{3}$, $b=\frac{\pi}{2}$

Задача 12

1.	Найдите c, $M(X)$, $D(X)$, $F(x)$, $P(8<X<13)$, если плотность распределения $f(x)$ случайной величины X имеет вид: $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{c-9}, & x\in[9;15], \\ 0, & x\notin[9;15]. \end{cases}$

2.	Найдите c, $M(X)$, $D(X)$, $F(x)$, $P(5<X<8)$, если плотность распределения $f(x)$ случайной величины X имеет вид: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{c-4}, & x\in[4;10],\\ 0, & x\notin[4;10].\end{cases}$
3.	Найдите c, $M(X)$, $D(X)$, $F(x)$, $P(-2<X<4)$, если плотность распределения $f(x)$ случайной величины X имеет вид: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{c-3}, & x\in[0;5],\\ 0, & x\notin[0;5].\end{cases}$
4.	Найдите c, $M(X)$, $D(X)$, $F(x)$, $P(4<X<6)$, если плотность распределения $f(x)$ случайной величины X имеет вид: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{c-5}, & x\in[3;7],\\ 0, & x\notin[3;7].\end{cases}$
5.	Найдите c, $M(X)$, $D(X)$, $F(x)$, $P(5<X<10)$, если плотность распределения $f(x)$ случайной величины X имеет вид: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{c-10}, & x\in[4;9],\\ 0, & x\notin[4;9].\end{cases}$
6.	Найдите c, $M(X)$, $D(X)$, $F(x)$, $P(5<X<12)$, если плотность распределения $f(x)$ случайной величины X имеет вид: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{c-6}, & x\in[7;12],\\ 0, & x\notin[7;12].\end{cases}$
7.	Найдите c, $M(X)$, $D(X)$, $F(x)$, $P(0<X<7)$, если плотность распределения $f(x)$ случайной величины X имеет вид: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{c-10}, & x\in[6;9],\\ 0, & x\notin[6;9].\end{cases}$
8.	Найдите c, $M(X)$, $D(X)$, $F(x)$, $P(9<X<13)$, если плотность распределения $f(x)$ случайной величины X имеет вид: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{c-7}, & x\in[10;15],\\ 0, & x\notin[10;15].\end{cases}$
9.	Найдите c, $M(X)$, $D(X)$, $F(x)$, $P(8<X<13)$, если плотность распределения $f(x)$ случайной величины X имеет вид: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{c-20}, & x\in[-5;0],\\ 0, & x\notin[-5;0].\end{cases}$
10.	Найдите c, $M(X)$, $D(X)$, $F(x)$, $P(5<X<11)$, если плотность распределения $f(x)$ случайной величины X имеет вид: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{c-12}, & x\in[3;10],\\ 0, & x\notin[3;10].\end{cases}$
11.	Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=2x$ в интервале $(0;1)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти математическое ожидание ве-

	личины X.
12.	Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=\dfrac{1}{\pi\sqrt{c^2-x^2}}$ в интервале $(-c;c)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти математическое ожидание величины X.
13.	Случайная величина X задана плотностью вероятности (распределение Лапласа) $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{-\lvert x\rvert}$. Найти математическое ожидание величины X.
14.	Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=c(x^2+2x)$ в интервале $(0;1)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти: а) параметр c; б) математическое ожидание величины X.
15.	Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=\dfrac{2x}{25}$ в интервале $(0;5)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти $D(X)$.
16.	Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, распределённой равномерно в интервале $(2;8)$.
17.	Математическое ожидание нормально распределённой случайной величины X равно 3, среднее квадратическое отклонение данной величины равно 2. записать плотность распределения вероятности X.
18.	Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если параметр λ равен 6.
19.	Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение показательного распределения, заданного плотностью распределения $f(x)=10e^{-10x}$, $x\ge 0$.
20.	Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение $F(t)=1-e^{-0{,}01t}, t>0$. Найти вероятность того, что за время длительностью $t=50$ ч: а) элемент откажет; б) элемент не откажет.

Задача 13

Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$. Найти интегральную функцию распределения, построить графики функции распределения и плотности распределения.

1.	$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le -\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{1}{2}\cos x, & \text{при} \quad -\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \text{при} \quad x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$	**2.**	$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le -\dfrac{\pi}{2},\\ -2\sin 2x, & \text{при} \quad -\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{\pi}{4},\\ 0, & \text{при} \quad x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$

3.	$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 0,\\ \sin 2x, & \text{при} \quad 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \text{при} \quad x>\pi/2.\end{cases}$	**4.**	$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 0,\\ 2\cos 2x, & \text{при} \quad 0<x\le\dfrac{\pi}{4},\\ 0, & \text{при} \quad x>\pi/4.\end{cases}$
5.	$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le -\pi/2,\\ -\sin x, & \text{при} \quad -\dfrac{\pi}{2}<x\le 0,\\ 0, & \text{при} \quad x>0.\end{cases}$	**6.**	$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 3\pi/4,\\ -2\sin 2x, & \text{при} \quad \dfrac{3\pi}{4}<x\le\pi,\\ 0, & \text{при} \quad x>\pi.\end{cases}$
7.	$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 2\sin x, & \text{при} \quad \dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{5\pi}{6},\\ 0, & \text{при} \quad x>\dfrac{5\pi}{6}.\end{cases}$	**8.**	$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le -\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{1}{\pi}+\dfrac{1}{2}\cos 2x, & \text{при} \quad -\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \text{при} \quad x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$
9.	$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 0,\\ \sin x, & \text{при} \quad 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \text{при} \quad x>\pi/2.\end{cases}$	**10.**	$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 0,\\ 2\cos x, & \text{при} \quad 0<x\le\dfrac{\pi}{6},\\ 0, & \text{при} \quad x>\pi/6.\end{cases}$
11.	$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le\dfrac{\pi}{6},\\ 3\sin 3x, & \text{при} \quad \dfrac{\pi}{6}<x\le\dfrac{\pi}{3},\\ 0, & \text{при} \quad x>\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$	**12.**	$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le\dfrac{\pi}{3},\\ -3\cos 3x, & \text{при} \quad \dfrac{\pi}{3}<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \text{при} \quad x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$
13.	$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 0,\\ \dfrac{1}{2}\sin x, & \text{при} \quad 0<x\le\pi,\\ 0, & \text{при} \quad x>\pi.\end{cases}$	**14.**	$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 0,\\ \dfrac{1}{\pi}-\dfrac{1}{\pi}\cos 2x, & \text{при} \quad 0<x\le\pi,\\ 0, & \text{при} \quad x>\pi.\end{cases}$
15.	$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le\pi/2,\\ -\cos x, & \text{при} \quad \dfrac{\pi}{2}<x\le\pi,\\ 0, & \text{при} \quad x>\pi.\end{cases}$	**16.**	$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 3\pi/2,\\ -\sin x, & \text{при} \quad \dfrac{3\pi}{2}<x\le 2\pi,\\ 0, & \text{при} \quad x>2\pi.\end{cases}$
17.	$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le\pi/2,\\ \sin x, & \text{при} \quad \dfrac{\pi}{2}<x\le\pi,\\ 0, & \text{при} \quad x>\pi.\end{cases}$	**18.**	$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le -\pi/6,\\ 2\cos x, & \text{при} \quad -\dfrac{\pi}{6}<x\le 0,\\ 0, & \text{при} \quad x>0.\end{cases}$

19.	$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 2\pi,\\ \cos x, & \text{при} \quad 2\pi<x\le \dfrac{5\pi}{2},\\ 0, & \text{при} \quad x>5\pi/2.\end{cases}$	**20.**	$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 0,\\ \dfrac{3}{2}\sin 3x, & \text{при} \quad 0<x\le \dfrac{\pi}{3},\\ 0, & \text{при} \quad x>\pi/3.\end{cases}$
21.	$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 0,\\ 3\cos 3x, & \text{при} \quad 0<x\le \dfrac{\pi}{6},\\ 0, & \text{при} \quad x>\pi/6.\end{cases}$	**22.**	$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le \pi,\\ -\cos x, & \text{при} \quad \pi<x\le \dfrac{3\pi}{2},\\ 0, & \text{при} \quad x>3\pi/2.\end{cases}$
23.	$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le \dfrac{\pi}{3},\\ 2\sin x, & \text{при} \quad \dfrac{\pi}{3}<x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \text{при} \quad x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$	**24.**	$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le -\dfrac{\pi}{6},\\ \dfrac{3}{2}\cos 3x, & \text{при} \quad -\dfrac{\pi}{6}<x\le \dfrac{\pi}{6},\\ 0, & \text{при} \quad x>\dfrac{\pi}{6}.\end{cases}$
25.	$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le \dfrac{\pi}{3},\\ -3\sin 3x, & \text{при} \quad \dfrac{\pi}{3}<x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \text{при} \quad x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$	**26.**	$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le -\dfrac{\pi}{4},\\ \cos 2x, & \text{при} \quad -\dfrac{\pi}{4}<x\le \dfrac{\pi}{4},\\ 0, & \text{при} \quad x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$
27.	$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le \pi,\\ -\sin x, & \text{при} \quad \pi<x\le \dfrac{3\pi}{2},\\ 0, & \text{при} \quad x>3\pi/2.\end{cases}$	**28.**	$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le 0,\\ \cos x, & \text{при} \quad 0<x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \text{при} \quad x>\pi/2.\end{cases}$
29.	$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le -\pi/2,\\ \cos x, & \text{при} \quad -\dfrac{\pi}{2}<x\le 0,\\ 0, & \text{при} \quad x>0.\end{cases}$	**30.**	$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x\le \dfrac{\pi}{2},\\ -2\cos 2x, & \text{при} \quad \dfrac{\pi}{2}<x\le \dfrac{3\pi}{4},\\ 0, & \text{при} \quad x>\dfrac{3\pi}{4}.\end{cases}$

Задача 14

Каждый из двух стрелков делает по 2 выстрела по мишени, вероятность попадания в которую для 1-го стрелка равна $\dfrac{N}{N+7}$, для 2-го – $\dfrac{N}{N+5}$. Составить закон распределения общего числа попаданий. Найти математическое ожидание и дисперсию полученной величины. Построить график функции распределения $F(x)$. **(N – номер вашего варианта)**

Задача 15

Задана функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le N,\\ \dfrac{(x-N)^2}{N^2}, & \text{при } N<x\le 2N,\\ 1, & \text{при } x>2N.\end{cases}$$

Требуется найти: **а)** дифференциальную функцию $f(x)$; **б)** математическое ожидание и дисперсию случайной величины X; **в)** построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$. **(N – номер вашего варианта)**

Задача 16

Случайная величина X – годовой доход наугад взятого лица, облагаемого налогом. Ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le b,\\ a\cdot x^{-1-n}, & \text{при } x>b.\end{cases}$$

Требуется найти: **а)** значение параметра a; **б)** функцию распределения $F(x)$ случайной величины X; **в)** математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение; **г)** размер годового дохода, не ниже которого с вероятностью 0,6 окажется годовой доход случайно выбранного налогоплательщика: **д)** построить графики функций $F(x)$, $f(x)$.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

1.	$b=4$, $n=2{,}4$;	**11.**	$b=5$, $n=2{,}0$;	**21.**	$b=6$, $n=2{,}0$;
2.	$b=2$, $n=2{,}1$;	**12.**	$b=5$, $n=2{,}5$;	**22.**	$b=4$, $n=2{,}6$;
3.	$b=3$, $n=2{,}6$;	**13.**	$b=2$, $n=2{,}3$;	**23.**	$b=4$, $n=2{,}1$;
4.	$b=3$, $n=2{,}3$;	**14.**	$b=6$, $n=2{,}4$;	**24.**	$b=4$, $n=2{,}3$;
5.	$b=5$, $n=2{,}4$;	**15.**	$b=3$, $n=2{,}0$;	**25.**	$b=6$, $n=2{,}2$;
6.	$b=4$, $n=2{,}0$;	**16.**	$b=4$, $n=2{,}5$;	**26.**	$b=3$, $n=2{,}4$;
7.	$b=2$, $n=2{,}2$;	**17.**	$b=2$, $n=2{,}4$;	**27.**	$b=5$, $n=2{,}2$;
8.	$b=6$, $n=2{,}1$;	**18.**	$b=5$, $n=2{,}3$;	**28.**	$b=3$, $n=2{,}1$;
9.	$b=3$, $n=2{,}5$;	**19.**	$b=5$, $n=2{,}1$;	**29.**	$b=3$, $n=2{,}2$;
10.	$b=4$, $n=2{,}2$;	**20.**	$b=2$, $n=2{,}0$;	**30.**	$b=6$, $n=2{,}3$.

Задача 17

Предполагается, что масса яиц – нормально распределенная случайная величина X, с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ. В заготовку принимают яйца от x_1 до x_2 граммов. *Определить:* **а)** вероятность того, что наудачу взятое яйцо пойдет в заготовку; **б)** вероятность того, что абсолютная величина отклонения $X-a$ окажется меньше δ; в) по правилу трех сигм найти наибольшую и наименьшую границы предполагаемой массы яйца.

Номер варианта	a	σ	x_1	x_2	δ
1.	60	7	50	65	10
2.	59	6	50	65	8
3.	59	5	50	60	10
4.	60	6	55	65	5
5.	58	6	55	65	6
6.	58	5	55	60	7
7.	58	7	50	65	9
8.	59	7	55	56	6
9.	60	5	50	70	8
10.	61	7	55	70	8
11.	62	5	55	72	7
12.	62	6	56	70	8
13.	60	5	53	66	7
14.	60	7	55	65	8
15.	59	7	53	65	5

Известно, что рост людей, проживающих в данной местности, есть случайная величина X, распределенная по нормальному закону со средним значением a и средним квадратическим отклонением σ. *Найти:* **а)** вероятность того, что наудачу выбранный человек имеет рост от x_1 до x_2 см; **б)** вероятность того, что абсолютная величина отклонения $X-a$ окажется меньше δ; **в)** по правилу трех сигм найти наибольшую и наименьшую границы предполагаемого роста человека.

Номер варианта	a	σ	x_1	x_2	δ
16.	170	5	160	180	7
17.	170	6	165	185	10
18.	170	7	160	185	10
19.	165	7	155	175	6
20.	165	6	150	170	8
21.	165	5	160	175	9
22.	175	7	165	175	5
23.	175	6	160	180	9
24.	175	5	165	185	4
25.	175	8	170	180	15

26.	174	7	163	180	5
27.	174	6	168	179	7
28.	174	8	165	180	10
29.	176	7	170	180	5
30.	176	8	172	180	7

Тестовые задания по теме «Случайные величины»

1. Какая из перечисленных величин является дискретной?

а) рост человека
б) число детей в семье
в) температура воздуха
г) высота дерева

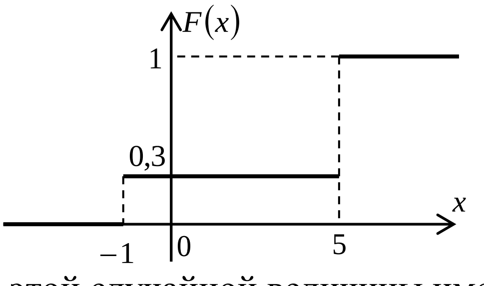
2. Известно среднее квадратическое отклонение случайных величин X и Y: $\sigma(X)=49$, $\sigma(Y)=3$. Тогда $\sigma(X-Y)$ равно…

а) 1 **б)** 7 **в)** 5 **г)** 3

3. Функцией распределения вероятностей $F(x)$ случайной величины X называется функция, равная вероятности того, что величина X примет значение из интервала…

а) $(-\infty;+\infty)$ **б)** $(-\infty;x)$ **в)** $(x;+\infty)$ **г)** $(-\infty;0)$

4. На рисунке изображен график функции распределения дискретной случайной величины X.



Тогда закон распределения этой случайной величины имеет вид…

а)

X	–1	5
p	0,3	0,7

б)

X	–1	5
p	0	0,3

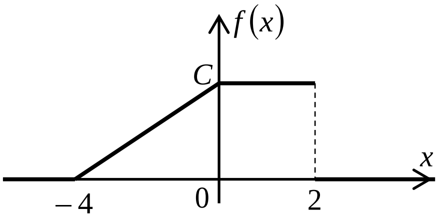
в)

X	–1	5
p	0	1

г)

X	–1	0	5
p	0	0,3	0,7

5. На рисунке изображена функция плотности непрерывной случайной величины X.



Тогда значение параметра C равно…

а) 0,25 **б)** 1 **в)** 2 **г)** 0,5

6. Функция плотности нормального распределения имеет вид $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x+1)^2}{4}}$. Тогда математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение соответственно равны…

а) $a=-1, \sigma=\sqrt{2}$ **б)** $a=1, \sigma=\sqrt{2}$

в) $a=1, \sigma=2$ **г)** $a=-1, \sigma=2$

7. Значение выражения $\varphi(2{,}5)-\varphi(-2{,}5)$ равно…

а) 1 **б)** 0 **в)** – 0,5 **г)** 0,324

8. Значение выражения $\Phi(6{,}5)-\Phi(-6{,}5)$ равно…

а) 1 **б)** 0 **в)** – 0,5 **г)** 0,324

9. Какая из перечисленных случайных величин является непрерывной?

а) количество пассажиров автобуса

б) число девочек среди 100 новорожденных

в) вес новорожденного

г) число отличников в группе

10. Известны математические ожидания случайных величин X и $У$: $M(X)=3,\ M(Y)=-2$. Тогда $M(3X-2Y)$ равно…

а) 5 **б)** – 1 **в)** 19 **г)** 13

11. Практически все возможные значения нормально распределенной случайной величины принадлежат промежутку $(-15;15)$. Тогда дисперсия этой случайной величины приближенно равна…

а) 25 **б)** 9 **в)** – 3 **г)** 5

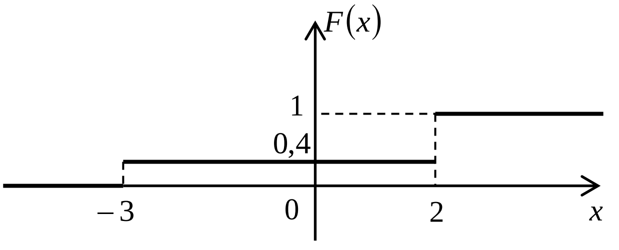
12. Интегральная функция экспоненциально распределенной случайной величины имеет вид $F(x)=1-e^{-5x}$. Тогда функция плотности распределения имеет вид…

а) $-e^{-5x}$ **б)** $\dfrac{1}{5}e^{-5x}$ **в)** $-5e^{5x}$ **г)** $5e^{-5x}$

13. Функция распределения $F(x)$ равна…

а) $\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$ б) $\int\limits_{0}^{x} f(x)dx$ в) $f'(x)$ г) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

14. На рисунке изображен график функции распределения дискретной случайной величины *X*.



Тогда закон распределения этой случайной величины имеет вид…

а)

X	–3	5
p	0	1

б)

X	–3	0	2
p	0,4	0,4	0,2

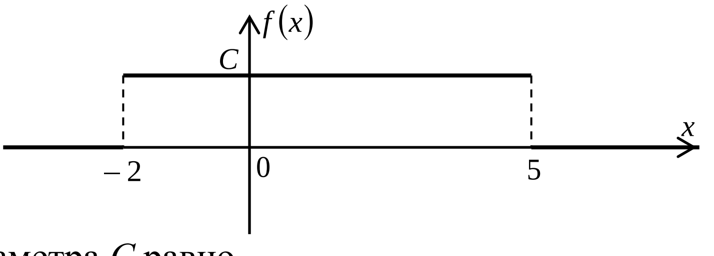
в)

X	–3	2
p	0,4	0,6

г)

X	–3	2
p	0,4	1

15. На рисунке изображена функция плотности непрерывной случайной величины *X*.



Тогда значение параметра *C* равно…

а) $\frac{1}{7}$ **б)** 1 **в)** 7 **г)** 5

16. Функция плотности нормального распределения имеет вид $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+5)^2}{2}}$. Тогда математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение соответственно равны…

а) $a=5, \sigma=1$ **б)** $a=-5, \sigma=1$

в) $a=5, \sigma=2$ **г)** $a=0, \sigma=1$

17. Случайные величины *X* и *Y* заданы законами распределения

X	– 2	2
P	0,6	0,4

Y	– 1	0	1
P	0,6	0,1	0,3

Случайная величина $X-Y$ примет значение 2 с вероятностью, равной …

18. Случайные величины X и Y заданы законами распределения

X	1	2	3
P	0,2	0,3	0,5

Y	– 1	0	1
P	0,6	0,1	0,3

Случайная величина ($X - Y$) примет значение 1 с вероятностью, равной …

19. Случайные величины X и Y заданы законами распределения

X	1	2	3
P	0,4	0,1	0,5

Y	0	1
P	0,7	0,3

Случайная величина ($X + Y$) примет значение 3 с вероятностью, равной …

20. Случайная величина X задана законом распределения

X	– 2	1	2
P	0,5	0,3	0,2

Установите соответствие между случайными величинами и их законами распределения

а) $2X$

b) X^2

1)

X	1	4
P	0,3	0,7

2)

X	-4	2	4
P	0,5	0,3	0,2

3)

X	1	4
P	0,6	0,4

21. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей

X	0	x_2	9
P	0,1	0,5	0,4

Если математическое ожидание $M(X) = 5{,}6$, то значение x_2 равно …

а) 4 **б)** 6 **в)** 5 **г)** 3

22. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей

X	3	4	7
P	0,4	0,1	0,5

Математическое ожидание $M(X)$ равно…

а) 4,67 **б)** 3 **в)** 7 **г)** 5,1

23. Математическое ожидание дискретной случайной величины рассчитывается по формуле …

а) $M(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ **б)** $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i$

в) $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, p_i$ **г)** $M(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

24. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей

X	0	5	x_3
P	0,6	0,1	0,3

Если математическое ожидание $M(X)=3{,}5$, то значение x_3 равно …

а) 10 **б)** 6 **в)** 8 **г)** 12

25. Известно, что $M(X) = 2$, $M(Y) = 3$ и X, Y – независимы. Установите соответствие

A) $M(3)$
B) $M(2X)$
C) $M(X + Y)$
D) $M(X - Y)$
E) $M(X{\cdot}Y)$

1) – 1
2) 0
3) 3
4) 4
5) 5
6) 6

26. Пусть X – дискретная случайная величина, заданная законом распределения вероятностей:

X	– 1	5
P	0,4	0,6

Тогда дисперсия этой случайной величины равна …

а) 15,4 **б)** 8,64 **в)** 2,6 **г)** 2,93

27. Пусть X – дискретная случайная величина, заданная законом распределения вероятностей:

X	– 1	5
P	0,4	0,6

Тогда среднее квадратическое отклонение этой случайной величины примерно равно …

а) 15,4 **б)** 8,64 **в)** 2,6 **г)** 2,93

28. Укажите все формулы, по которым можно рассчитать дисперсию дискретной случайной величины

а) $D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(X))^2\cdot p_i$ **г)** $D(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i$

б) $D(X)=M(X^2)-M(X)^2$ **д)** $D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(X))\cdot p_i$

в) $D(X)=M(X)^2-M(X^2)$

29. Известно $M(X)$ и $M(X^2)$. Установите соответствие между данными $M(X)$, $M(X^2)$ и соответствующим значением или $\sigma(X)$:

A) $M(X)=-0{,}4$; $M(X^2)=4$ **1)** 4,2

B) $M(X)=2{,}1;\ M(X^2)=6{,}3$ **2)** 3,84

3) 1,89

4) 4,4

30. Пусть X – дискретная случайная величина, заданная законом распределения вероятностей:

X	– 1	0	1
P	0,3	0,1	0,6

Тогда дисперсия этой случайной величины равна …

а) 0,3 **б)** 0,09 **в)** 0,6 **г)** 0,81

31. Известно, что $D(X) = 2$, $D(Y) = 3$ и X, Y – независимы. Установите соответствие

A) $D(3)$ **1)** – 1

B) $D(2X)$ **2)** 0

C) $D(X + Y)$ **3)** 3

D) $D(X – Y)$ **4)** 5

5) 8

32. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей

X	– 5	0	5
P	0,1	0,4	0,5

Установите соответствие

A) Математическое ожидание **1)** – 5

B) Мода **2)** 0

C) Медиана **3)** 2

4) 5

33. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей

X	– 1	0	1
P	0,2	0,1	0,7

Значение $M(X^2)$ равно …

34. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается пять выигрышей по 500 рублей, пять выигрышей по 400 рублей и десять выигрышей по 100 рублей. Математическое ожидание выигрыша по одному лотерейному билету равно…

Интегральная и дифференциальная функции распределения случайной величины

35. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей

X	0	2	4
P	0,3	0,1	0,6

Значение $F(2)$ равно …

36. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей

X	0	2	4
P	0,1	0,5	0,4

На промежутке (2; 4] функция распределения случайной величины равна…

а) 0 **в)** 0,4 **д)** 0,6 **ж)** 1
б) 0,1 **г)** 0,5 **е)** 0,9

37. Стрелок стреляет по мишени 5 раз. Случайная величина X – количество попаданий в мишень. Значение $F(6)$ равно …

38. Укажите справедливые утверждения для функции распределения случайной величины

а) $0 \le F(x) \le 1$ **в)** $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$ **д)** $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ **ж)** $F(1) \ge F(2)$
б) $F(x) \ge 0$ **г)** $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$ **е)** $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 1$ **з)** $F(1) \le F(2)$

39. Функция распределения дискретной случайной величины имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 0{,}3, & 1 < x \le 2, \\ 0{,}5, & 2 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Значение $P(1{,}3 \le X < 2{,}3)$ равно …

40. Случайная величина X – рост человека, случайно отобранного из группы людей, см. Значение вероятности $P(X = 176)$ равно …

41. X – непрерывная случайная величина, принимающая значения из промежутка [0; 100]. Значение вероятности $P(X = 50)$ равно …

42. Функция распределения непрерывной случайной величины имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{x}{2}, & 1<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Плотность вероятности этой случайной величины на промежутке $1<x\le 2$ равна …

43. Укажите справедливые утверждения для непрерывной случайной величины ($F(x)$ – интегральная функция распределения, $f(x)$ – дифференциальная функция распределения)

а) $0\le f(x)\le 1$ **в)** $f(1)\ge f(2)$ **д)** $f(x)=F'(x)$

б) $f(x)\ge 0$ **г)** $f(1)\le f(2)$ **е)** $F(x)=f'(x)$

44. Укажите справедливые утверждения для непрерывной случайной величины ($F(x)$ – интегральная функция распределения, $f(x)$ – дифференциальная функция распределения)

а) $P(1\le X\le 2)=\int\limits_1^2 f(x)dx$ **в)** $P(1\le X\le 2)=\int\limits_1^2 F(x)dx$ **д)** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$

б) $P(1\le X\le 2)=1$ **г)** $P(-\infty\le X\le +\infty)=1$ **е)** $0\le f(x)\le 1$

45. Укажите справедливые утверждения для непрерывной случайной величины ($F(x)$ – интегральная функция распределения, $f(x)$ – дифференциальная функция распределения)

а) $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$ **г)** $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

б) $F(x)=\int\limits_{0}^{x} f(x)dx$ **д)** $P(a\le X\le b)=f(b)-f(a)$

в) $P(a\le X\le b)=F(b)-F(a)$ **е)** $P(a\le X<b)=F(b)-F(a)$

46. Укажите функцию, которая может быть плотностью вероятности некоторой непрерывной случайной величины

а) $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ x-0{,}5, & 1<x\le 2\\ 0, & x>2\end{cases}$ **в)** $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ x-0{,}5, & 1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ x-0{,}5, & 1<x\le 4\\ 0, & x>4\end{cases}$ **г)** $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ 0{,}5, & 1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$

47. Укажите функцию, которая может быть интегральной функцией распределения некоторой случайной величины

а) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ x-0{,}5, & 1<x\le 2\\ 0, & x>2\end{cases}$ **в)** $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ 2-x, & 1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$

б) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ 0{,}5, & 1<x\le 4\\ 0, & x>4\end{cases}$ **г)** $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ 0{,}5, & 1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$

48. Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)=2x$ в интервале (0; 1); вне этого интервала $f(x)=0$. Вероятность $P\left(0<X<\frac{1}{2}\right)$ равна …

49. Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)=2x$ в интервале (0; 1); вне этого интервала $f(x)=0$. Математическое ожидание величины X равно …

а) $\frac{1}{2}$ **б)** 1 **в)** $\frac{4}{3}$ **г)** $\frac{2}{3}$

50. Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)=\frac{x}{2}$ в интервале (0; 2); вне этого интервала $f(x)=0$. Математическое ожидание величины X равно …

а) $\frac{1}{2}$ **б)** 1 **в)** $\frac{4}{3}$ **г)** $\frac{2}{3}$

51. Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$ в интервале (0; 1); вне этого интервала $f(x)=0$. Математическое ожидание величины X равно …

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx$ **б)** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ **в)** $\int\limits_{0}^{1} x\cdot f(x)dx$ **г)** $\int\limits_{0}^{1} f(x)dx$

52. Дисперсия непрерывной случайной величины может быть рассчитана по формуле

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx$ **в)** $\sum\limits_{i=0}^{\infty}(x_i-M(X))^2 p_i$

б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^2 f(x)dx$ **г)** $\int\limits_{0}^{1} x\cdot f(x)dx$

53. Непрерывная случайная величина равномерно распределена на отрезке $[-11;\ 20]$. Вероятность $P(X \le 0)$ равна …

а) $\frac{11}{32}$ **б)** $\frac{5}{16}$ **в)** $\frac{10}{31}$ **г)** $\frac{11}{31}$

54. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[1;3]$. Тогда случайная величина $Y = 3X + 1$ имеет …

а) нормальное распределение на отрезке $[3;9]$

б) нормальное распределение на отрезке $[4;10]$

в) другой (кроме равномерного и нормального) вид распределения

г) равномерное распределение на отрезке $[4;10]$

55. Непрерывная случайная величина равномерно распределена на отрезке $[-11;\ 26]$. Вероятность $P(X > -4)$ равна …

а) $\frac{29}{38}$ **б)** $\frac{29}{37}$ **в)** $\frac{30}{37}$ **г)** $\frac{15}{19}$

56. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[-2;1]$. Тогда случайная величина $Y = 2X + 2$ имеет …

а) нормальное распределение на отрезке $[-4;2]$

б) равномерное распределение на отрезке $[-2;4]$

в) нормальное распределение на отрезке $[-2;4]$

г) другой (кроме равномерного и нормального) вид распределения

57. Плотность вероятности равномерно распределенной непрерывной случайной величины имеет вид …

а) $f(x) = \lambda x^{-\lambda x},\ x \ge 0$

в) $f(x) = \dfrac{1}{b-a},\ a \le x \le b$

б) $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$

г) $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}x} e^{-\frac{(\ln x - \ln a)^2}{2\sigma^2}}$

58. Случайная величина X – равномерно распределена на отрезке [0; 15]. Математическое ожидание $M(X)$ равно …

59. Случайная величина X – равномерно распределена на отрезке [0; 3]. Дисперсия $D(X)$ равна …

а) 0,75 **б)** 1,5 **в)** 3 **г)** 6

60. Плотность вероятности нормально распределенной случайной величины имеет вид …

а) $f(x)=\lambda x^{-\lambda x},\ x\geq 0$ **в)** $f(x)=\dfrac{1}{b-a},\ a\leq x\leq b$

б) $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ **г)** $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}x}e^{-\frac{(\ln x-\ln a)^2}{2\sigma^2}}$

61. Плотность вероятности стандартной нормально распределенной случайной величины имеет вид …

а) $f(x)=\lambda x^{-\lambda x},\ x\geq 0$ **в)** $f(x)=\dfrac{1}{b-a},\ a\leq x\leq b$

б) $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ **г)** $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

62. Плотность вероятности нормально распределенной случайной величины X при $M(X)=2$, $D(X)=9$, имеет вид:

а) $f(x)=\dfrac{1}{9\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{18}}$ **в)** $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-9)^2}{8}}$

б) $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ **г)** $f(x)=\dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{18}}$

63. Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. Дисперсия $D(X)$ равна …

64. Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. Математическое ожидание $M(X)$ равно …

65. Функция Лапласа имеет вид $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-z^2/2}\,dz$. Укажите верные соотношения.

а) $\Phi(x)=-\Phi(x)$ **б)** $\Phi(-x)=-\Phi(x)$

в) $\Phi(-x)=\Phi(x)$ **г)** $\Phi(-x)=0{,}5+\Phi(x)$

66. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 15 и 5. Вероятность того, что в результате испытания X примет значение из интервала (5; 20), равна

а) $\Phi(20)-\Phi(5)$

б) $\Phi(20)+\Phi(5)$

в) $\Phi(1)+\Phi(2)$

г) $\Phi(2)-\Phi(1)$

д) $\Phi(1)-\Phi(0)$

е) $\Phi(5)+\Phi(10)$

67. Значение интеграла от плотности распределения стандартной нормально распределенной величины $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ равно …

68. Значение интеграла от плотности распределения стандартной нормально распределенной величины $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ равно …

Список использованной литературы

1. Утяганова, З.З. Теория вероятностей: методические указания по выполнению практических работ для студентов экономических направлений. – Кумертау, Кумертауский филиал ОГУ, 2014. – 45 с.

2. Индивидуальные задания по теории вероятностей и математической статистике / Сост.: Н.Д. Калюкина, М.С. Волошина, С.А. Лактионов: СибГИУ – Новокузнецк, 2005. – 45 с.

3. Павлов, И.В. Задания для практических занятий по дисциплине “Теория вероятностей и математическая статистика” Издательство – РИЦ ВФ МГИУ, Вязьма, 2006. – 24 с.

4. Теория вероятностей: учебно-методическое пособие для практических занятий и самостоятельной работы студентов / Сост.: С.Я. Пономарева, Е.В. Тылюдина. – Ижевск: ФГОУ ВПО Ижевская ГСХА, 2009. – 147 с.

5. Моисеев, С.И. Теория вероятностей и математическая статистика. Методические указания к выполнению контрольной работы для студентов заочной формы, обучающихся по направлениям «Экономика» и «Менеджмент» / С.И. Моисеев. – Воронеж, ВФ МГЭИ, 2012. – 62 с.

6. Крупин, В.Г. Высшая математика. Теория вероятностей, математическая статистика, случайные процессы. Сборник задач с решениями: учебное пособие \ В.Г. Крупин, А.Л. Павлов, Л.Г. Попов. – М.; Издательский дом МЭИ, 2013. – 368 с.

7. Теория вероятностей и математическая статистика: методические указания по изучению дисциплины для студентов, обучающихся по направлению подготовки 080200.62 «Менеджмент» / авт.-сост. Е.Г. Носова, доцент Т.В. Дьякова / Саратовский государственный социально-экономический университет. – Саратов, 2012. – 80 с.

8. Теория вероятностей / М.А. Алексеева, А.И. Батаков, А.Г. Кремлев, О.М. Лисичкина, Л.Н. Столяр, Н.И. Чабанова. – ВИТИ НИЯУ МИФИ. – Волгодонск, 2013. – 66 с.

9. Математика: методические указания к выполнению семестрового задания / составитель Е.И. Назарова. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2009. – Ч.4. – 79 с.