

Министерство образования и науки Российской Федерации
Нижекамский химико-технологический институт (филиал)
Федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего профессионального образования
«Казанский национальный исследовательский технологический
университет»

И.А. Сабанаев, Ф.М. Алмакаева

ДИНАМИКА И ПРОЧНОСТЬ МАШИН

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

**Нижекамск
2014**

УДК 539.3

С 12

Печатается по решению редакционно-издательского совета Нижнекамского химико-технологического института (филиала) ФГБОУ ВПО «КНИТУ».

Рецензенты:

Багоутдинова А.Г., кандидат технических наук, доцент;

Биктагиров В.В., кандидат химических наук, доцент.

Сабанаев, И.А.

С12 Динамика и прочность машин : учебное пособие / И.А. Сабанаев, Ф.М. Алмакаева. – Нижнекамск : Нижнекамский химико-технологический институт (филиал) ФГБОУ ВПО «КНИТУ». 2014 – 137 с.

В учебном пособии изложены теоретические основы и примеры решения задач по сопротивлению узлов и деталей машин действию динамически приложенной нагрузки. Учебный и методический материал, составляющий пособие, позволит в полной мере изучить основы расчетов при ударном действии нагрузки, колебаниях механических систем, а также нагрузки, приводящей к циклическим изменениям напряжений.

Учебное пособие подготовлено в соответствии с требованиями ФГОС ВПО для подготовки бакалавров по направлению «Энерго- и ресурсосберегающие процессы в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии».

Предназначено для студентов очной и заочной форм обучения. Может быть использовано студентами других профилей и специальностей в качестве дополнительной литературы.

Подготовлено на кафедре машин и аппаратов химических производств НХТИ ФГБОУ ВПО «КНИТУ».

УДК 539.3

© Сабанаев И.А., Алмакаева Ф.М., 2014

© Нижнекамский химико-технологический институт (филиал) ФГБОУ ВПО «КНИТУ», 2014

1. Понятие о динамическом действии сил

1.1. Классификация динамических нагрузок

В курсе сопротивления материалов изучается сопротивление деталей действию статических, т.е. постоянных нагрузок. Инженерам-механикам машиностроительного профиля чаще приходится сталкиваться с практическими задачами, в которых внешние силы действуют динамически, т.е. меняются во времени. Однако, решение любой динамической задачи сводится на первом этапе к решению статической. Задача решается как обычная статическая задача, т.е. без учета возможного изменения нагрузок и только на последнем этапе учитывается ее динамический характер.

Выполним классификацию. Все многообразие динамических задач можно свести к действию четырех видов динамических нагрузок.

1) В результате действия силы возникают перемещения, ускорения для которых постоянны. Примером такой нагрузки является сила, приложенная к тросу грузоподъемного устройства, допустим кабины лифта при его подъеме.

2) Приложенная нагрузка изменяет свое значение за очень короткий промежуток времени. Такой случай называют ударом. Удар возникает при падении груза на балку, при внезапной остановке вала в результате заклинивания лопасти турбины и т.п.

3) В результате действия переменной силы возникают колебания бруса. Если частота колебаний совпадает с частотой его собственных колебаний, наступает явление резонанса – амплитуда колебаний многократно возрастает. Например, быстровращающиеся валы компрессоров на очень высоких оборотах могут войти в состояние резонанса: резко увеличивается амплитуды колебаний и деформаций, что в конечном итоге

приведет к разрушению подшипников и самого вала.

4) Нагрузка меняется во времени регулярно в течении всего срока службы детали не хаотично, без всякой закономерности, а по установившемуся закону, с некоторой периодичностью. Например, шатун кривошипно-шатунного механизма двигателей внутреннего сгорания в своей работе регулярно испытывает попеременно то сжатие – в такт рабочего хода, то растяжение – в такт впуска. И этот процесс продолжается на протяжении тысяч часов – в течении всего срока службы детали. Такое действие динамической нагрузки называют повторно-переменным. Это особый случай динамического нагружения и может привести к особому разрушению.

Решение динамических задач на первом этапе напоминает решение обычных статических задач. Напряжения и перемещения определяются как для обычной статической нагрузки и только на последнем этапе учитывается динамичность. Полученный в ходе статических расчетов результат умножается на коэффициент динамичности, который и учитывает динамичность нагрузки.

Формула расчета этого коэффициента выводится для каждой конкретной задачи. Например, для первого случая динамики он составляет величину в несколько единиц, т.е. напряжения при равноускоренном перемещении в 1,5 – 2 раза больше, чем, если бы нагрузка была бы постоянной. В случае ударного действия нагрузки величина динамического коэффициента достигает нескольких десятков и даже сотен единиц. Таким образом, при ударной нагрузке напряжения и деформации в десятки и сотни раз больше, чем во время статического нагружения. Для третьего характерного случая коэффициент динамичности зависит от того, насколько собственная частота колебаний системы отличается от

частоты вынужденных колебаний, т.е. колебаний вызываемых внешней силой. Если частоты отличаются значительно, то коэффициент близок к единице. Вблизи резонанса он возрастает значительно, приближаясь к бесконечности.

1.2. Принцип Даламбера

Как известно, статика характеризуется состоянием равновесия механической системы. Отсюда следует главный признак того, что система находится в статичном состоянии – это обязательное соблюдение условия равновесия. Условие равновесия определяется возможностью составления уравнений равновесия - если геометрическая сумма всех сил и моментов, приложенных к системе, равна нулю. Если сумма сил и моментов нулю не равна, такие уравнения составить не получается, система не находится в состоянии равновесия.

Уравнения равновесия позволяют легко вычислить все необходимые для решения задач прочности и жесткости параметры – опорные реакции, внутренние силовые факторы, напряжения и деформации. При решении динамических задач уравнения равновесия составить невозможно – поведение системы динамично и, очевидно, не может быть описано математическим аппаратом статики. Это значительно усложняет решение динамических задач.

Чтобы решить эту проблему, известный механик и математик Даламбер предложил использовать в динамических задачах особое правило – принцип Даламбера. Суть принципа состоит в том, что в динамических задачах можно составить уравнения равновесия, если считать приложенные динамические нагрузки статичными. И далее, чтобы учесть динамический характер нагрузки, к механической системе прикладываются дополнительно силы инерции, которые

тоже участвуют в уравнениях равновесия. Дальнейшее решение не отличается от решения статических задач.

Таким образом, принцип Даламбера позволяет решать динамические задачи с помощью математического аппарата статики. Основная часть решения приходится на применение методов, основанных на уравнениях равновесия. Все параметры механической системы, определяющей ее прочность и жесткость, вычисляются по правилам статики. И только на последнем этапе путем умножения этих величин на коэффициент динамичности учитывается динамический характер приложения нагрузки.

Особенность вычисления коэффициента динамичности состоит в том, что требуется предварительно рассчитать статические перемещения поперечных сечений, вызванные действием нагрузки. Поэтому, прежде чем приступить к изучению методов решения динамических задач, рассмотрим способы определения перемещений сечений при различных видах деформаций.

1.3. Методы расчета перемещений сечений

1.3.1. Деформация растяжения-сжатия

При растяжении или сжатии каждое поперечное сечение перемещается вдоль оси бруса (рис. 1). Из рисунка видно, величина перемещения по длине стержня не одинакова. Например, перемещение самого крайнего, правого торцевого сечения равно удлинению всего бруса и составляет величину $\Delta z = \Delta \ell$. Перемещение же самого левого сечения равно нулю – жесткая заделка не допускает ни линейных, ни угловых перемещений.

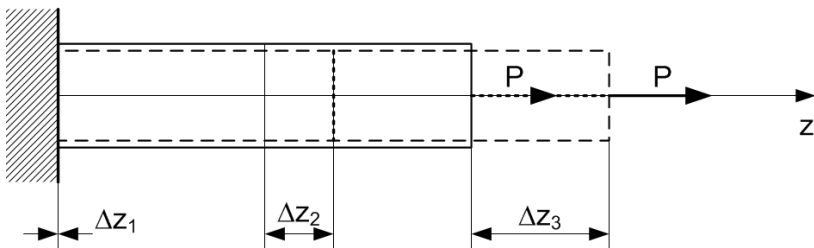


Рисунок 1 - Перемещения сечений бруса при растяжении

Вывод расчетной формулы для перемещений при растяжении и сжатии основан на использовании закона Гука. Проведем сечение бруса на произвольном расстоянии z от, например, левого конца (рис. 2).

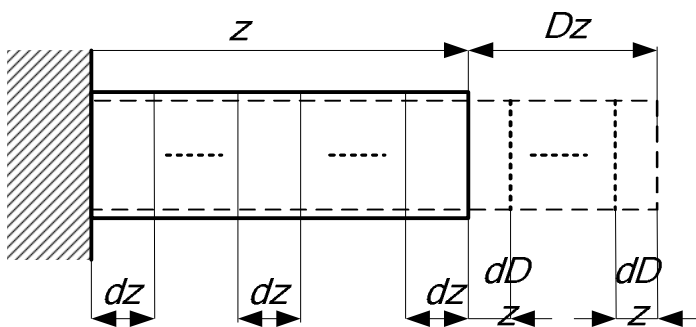


Рисунок 2 – Пояснения к выводу формулы расчета перемещений

Отбросим правую часть. Удлинение отсеченной части составит величину, равную Δz . Разделим оставшуюся часть на n узких участков бесконечно малой ширины dz . Очевидно, удлинение Δz всей отсеченной части будет равно сумме удлинений всех n участков,

причем каждый участок удлинится на одну и ту же величину $d\Delta z$ (рис. 2).

Вычислим деформацию любого из участков бесконечно малой ширины, например того, который находится на краю сечения – на расстоянии z от начала координат:

$$\varepsilon_{dz} = \frac{d\Delta z}{dz}$$

Деформацию определим из закона Гука:

$$\varepsilon_{dz} = \frac{\sigma(z)}{E}$$

Напряжения при растяжении рассчитываются через внутреннюю продольную силу и площадь сечения:

$$\sigma = \frac{N(z)}{F(z)}$$

Тогда деформация участка шириной dz будет равна:

$$\frac{d\Delta z}{dz} = \frac{N(z)}{E \cdot F(z)}$$

Таким образом, для определения перемещения Δz нужно решить дифференциальное уравнение первого порядка. Это уравнение относится к классу уравнений с разделяющимися переменными, поэтому решается путем интегрирования отдельно правой и левой частей:

$$d\Delta z = \frac{N(z)}{E \cdot F(z)} \cdot dz$$

$$\Delta z = \int \frac{N(z)}{E \cdot F(z)} \cdot dz + C \quad \dots(1)$$

где C – константа интегрирования.

Рассмотрим частный случай задачи, когда внутренняя сила N и площадь сечения F постоянны (рис. 3).

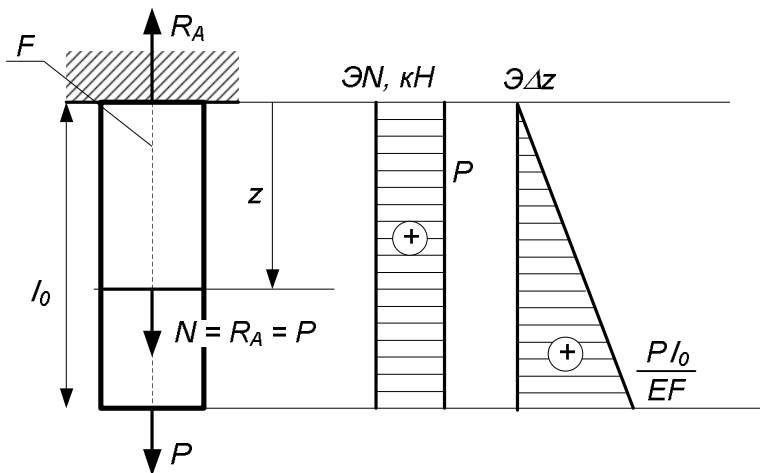


Рисунок 3 – Схема задачи и эпюры для частного случая

Постоянные величины при решении интеграла можно вынести за знак интеграла:

$$\Delta z = \frac{N}{E \cdot F} \int dz + C = \frac{N}{E \cdot F} z + C$$

В рассматриваемом случае функция перемещения сечений является линейной по отношению к координате z , что дает эпюру в форме наклонной прямой (рис. 3).

В знаменателе дроби находится произведение модуля упругости материала стержня на его площадь. Чем это произведение больше, тем при одной и той же нагрузке, перемещение меньше. Поэтому произведение $E \cdot F$ называют жесткостью стержня (жесткостью бруса при растяжении и сжатии). Если требуется уменьшить деформации, увеличивают жесткость. Это можно сделать двумя способами: заменить материал бруса на другой с большим модулем упругости; увеличить площадь сечения.

На практике, как правило, применяют второй способ как более эффективный.

Константу интегрирования можно найти из граничного условия – условия на одной из границ бруса. Граничные условия задаются способом закрепления стержня. Жесткая заделка и шарнирно-неподвижная опора, как известно, не допускают линейных перемещений вдоль оси бруса. Отсюда можно составить условие:

$$\Delta z|_{z=0} = 0$$

Подставим это условие в решение нашего уравнения, получаем:

$$\Delta z = \frac{N}{E \cdot F} \cdot 0 + C = 0; \quad C = 0$$

Тогда уравнение перемещений для рассматриваемого случая будет записываться следующим образом:

$$\Delta z = \frac{N}{E \cdot F} \cdot z \quad \dots(2)$$

Чтобы построить эпюру в форме прямой линии, достаточно вычислить функцию в двух точках:

$$\Delta z|_{z=0} = \frac{N}{E \cdot F} \cdot 0 = 0; \quad \Delta z|_{z=\ell_0} = \frac{N}{E \cdot F} \cdot \ell_0 = \frac{R_A \cdot \ell_0}{E \cdot F} = \frac{P \cdot \ell_0}{E \cdot F}$$

Получившаяся эпюра показана на рис. 3. Знак плюс означает совпадение направления перемещения с выбранным направлением оси z .

Перемещение крайнего нижнего сечения равно удлинению всего бруса:

$$\Delta \ell = \frac{N \cdot \ell_0}{E \cdot F} \quad \dots(3)$$

Важно помнить, что формулы (2) и (3) получены для частного случая, когда продольная сила и жесткость бруса по его длине постоянны. Если эпюра N или сечение по длине стержня изменяются при его расчете

использовать формулы (2) и (3) нельзя. Нужно воспользоваться общим решением (1).

Рассмотрим 2 примера.

Пример 1. Построить эпюру перемещений поперечного сечения стального стержня, показанного на рис. 4, в результате его деформации. Модуль упругости стали принять равным 200 ГПа. Диаметр стержня 20 мм, длина 3 м. Интенсивность распределенной нагрузки равна 2 кН/м.

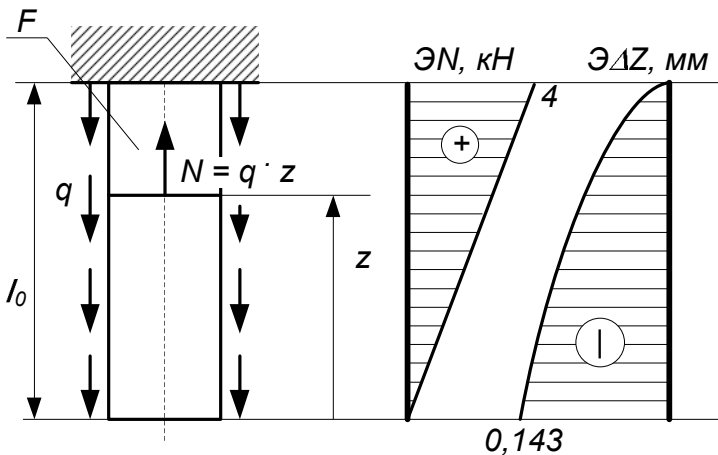


Рисунок 4 – Схема бруса и эпюры к примеру 1

Расположим начало координат, допустим, в нижней части бруса. В предыдущей задаче начало координат мы поместили сверху в заделке.

Сечение стержня по его длине не изменяется – жесткость от координаты z не зависит. Уравнение внутренней силы в сечении z дает непостоянную по длине бруса эпюру N . Таким образом, придется воспользоваться общим решением (1).

$$\Delta z = \int \frac{N(z)}{E \cdot F} dz + C = \frac{1}{E \cdot F} \cdot \int q \cdot z \cdot dz + C = \frac{q}{E \cdot F} \cdot \frac{z^2}{2} + C$$

Эпюра перемещений сечений представляет собой параболу – кривую с уравнением второго порядка.

Чтобы найти константу интегрирования, составляем граничное условие:

$$\Delta z|_{z=\ell} = 0$$

Подставляя граничное условие в уравнение перемещений находим константу С:

$$\Delta z = \frac{q \cdot \ell^2}{2 \cdot E \cdot F} + C = 0; \quad C = -\frac{q \cdot \ell^2}{2 \cdot E \cdot F}$$

Для заданных значений нагрузки, длины, модуля упругости и диаметра получаем числовое значение:

$$C = -\frac{2 \cdot 10^3 \cdot 3^2}{2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot \frac{\pi \cdot (2 \cdot 10^{-2})^2}{4}} = -0,143 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,143 \text{ мм.}$$

Зная уравнение перемещения, строим его эпюру (рис. 4). Знак минус на эпюре означает, что направление перемещения противоположно выбранному направлению оси z, т.е. перемещение сечений происходит в направлении вниз, что вполне логично для растяжения.

Пример 2. Вычислить общее удлинение или укорочение стального стержня, схема которого показана на рис. 5. Заданные значения: $P_1 = 3 \text{ кН}$, $P_2 = 4 \text{ кН}$, $q = 2 \text{ кН/м}$, $d_1 = 20 \text{ мм}$, $d_2 = 24,5 \text{ мм}$.

Первый сегмент стержня имеет переменную жесткость с постоянной эпюрой внутренней силы ($N = 3 \text{ кН}$); у второго и третьего сегментов жесткость постоянна ($d = 20 \text{ мм}$); эпюра N переменна на участке второго сегмента и постоянна на третьем участке (рис. 5).

В задании не требуется построить эпюры перемещений – нужно лишь определить абсолютную

деформацию бруса. Очевидно, деформация всего бруса может быть рассчитана как сумма абсолютных деформаций всех трех сегментов его составляющих.

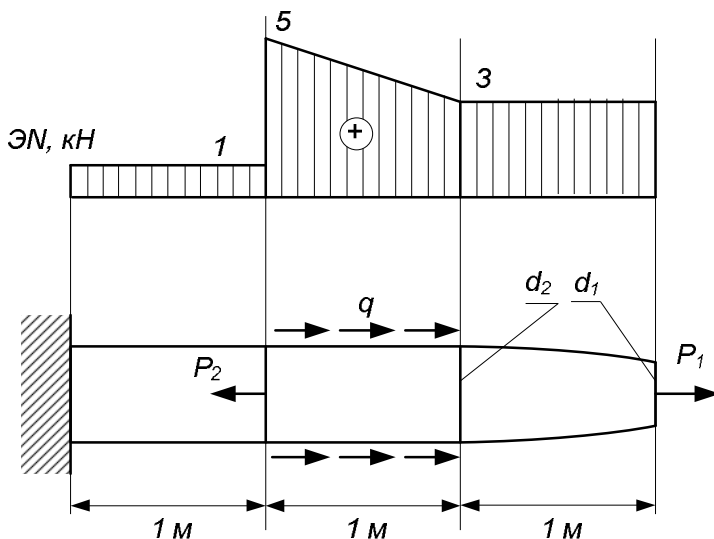


Рисунок 5 – Схема нагружения бруса к примеру 2

Чтобы вычислить удлинение третьего сегмента, можно воспользоваться формулой частного случая (3):

$$\Delta \ell_3 = - \frac{1 \cdot 10^3 \cdot 1^2}{200 \cdot 10^9 \cdot \frac{\pi \cdot (2,45 \cdot 10^{-2})^2}{4}} = 0,0106 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

Для первого и второго участков придется использовать общую формулу (1). В задании не сказано, что требуется строить эпюры перемещений, нужно лишь рассчитать удлинения. Тогда можно упростить решение по формуле (1), заменив неопределенный интеграл определенным интегралом, поставив в качестве пределов интегрирования границы участка и убрав, соответственно, константу интегрирования:

$$\Delta \ell = \int_a^b \frac{N(z)}{E \cdot F(z)} dz$$

На втором участке жесткость сечения постоянная, что позволяет при вычислении удлинения вынести ее за знак интеграла:

$$\Delta \ell_2 = \int_1^2 \frac{q \cdot (z-1) + P_1}{E \cdot F} dz = \int_1^2 \frac{2 \cdot z + 1}{E \cdot F} \cdot 10^3 \cdot dz = \frac{4000}{E \cdot F} = 0,042 \text{ м}$$

На первом участке эпюра N постоянна, что позволяет во время интегрирования вынести эту величину за знак интегрирования. Площадь сечения первого сегмента по длине участка изменяется. Нужно установить функцию площади от координаты z. Площадь сечения в начале участка:

$$F|_{z=0} = \frac{\pi \cdot (2 \cdot 10^{-2})^2}{4} = 3,14 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$$

Площадь сечения в конце сегмента:

$$F|_{z=1} = \frac{\pi \cdot (2,45 \cdot 10^{-2})^2}{4} = 4,71 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$$

Зависимость площади линейная. Тогда уравнение площади:

$$F = 1,57 \cdot 10^{-4} \cdot z + 3,14 \cdot 10^{-4}$$

Вычисляем удлинение:

$$\begin{aligned} \Delta \ell_1 &= \int_0^1 \frac{3000}{200 \cdot 10^9 \cdot (1,57 \cdot 10^{-4} \cdot z + 3,14 \cdot 10^{-4})} dz = \\ &= \int_0^1 \frac{3000}{200 \cdot 10^9 \cdot 1,57 \cdot 10^{-4} \cdot (z + 2)} dz = 9,554 \cdot 10^{-5} \cdot \int_0^1 \frac{1}{(z + 2)} dz = \\ &= 9,554 \cdot 10^{-5} \cdot \ln(1 + 2) = 0,1050 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Полное удлинение стержня равно сумме:

$$\Delta \ell = 0,0106 + 0,0420 + 0,1050 = 0,1576 \text{ мм}$$

1.3.2. Деформация изгиба

1.3.2.1. Методы расчета перемещений при изгибе

Поперечные сечения бруса при изгибе получают линейное и угловое перемещения. Ось бруса становится изогнутой линией (рис. 6).

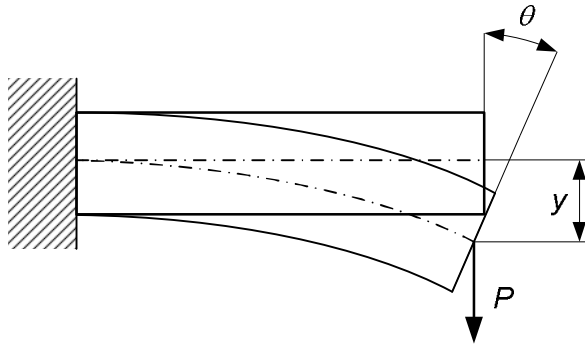


Рисунок 6 – Перемещения сечений при плоском изгибе

Перемещение центра тяжести сечения в направлении перпендикулярном к оси балки, называется прогибом – y . Он считается положительным, если его направление совпадает с направлением оси y .

Угол поворота сечения обозначается $\tilde{\theta}$. Он считается положительным, если направлен против хода часовой стрелки.

Для расчета статического прогиба сечения бруса в сопротивлении материалов разработан целый ряд методов:

- метод, на основе решения дифференциального уравнения изогнутой оси бруса;
- метод использования универсального уравнения;
- энергетические методы, в частности методы, основанные на применении;
- теоремы Кастильяно,

- теоремы Мора,
- перемножение эпюр изгибающих моментов по правилу Верещагина.

Рассмотрим некоторые из перечисленных методов более подробно.

1.3.2.2. Дифференциальное уравнение изогнутой оси бруса

Если известно уравнение прогнутой оси бруса, можно найти прогиб и угол поворота. Проведем касательную к изогнутой оси. Тогда тангенс угла наклона касательной к изогнутой оси, численно равный углу поворота сечения θ , есть производная от прогиба сечения в этой точке по координате:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{dy}{dz}$$

Так как в механике рассматриваются только малые деформации, то углы поворота также малы и можно считать, что $\operatorname{tg}\theta = \theta$, поэтому можно записать $\theta = y'$ - угол поворота данного сечения равен производной прогиба по z .

Составим дифференциальное уравнение изогнутой оси балки. Кривизна оси бруса при изгибе может быть рассчитана по формуле сопротивления материалов:

$$\frac{1}{\rho(z)} = \frac{M(z)}{EI}$$

где ρ - радиус кривизны оси в точке с координатой z . $M(z)$ - уравнение внутреннего момента на данном участке.

Произведение EI называют жесткостью бруса при изгибе. Чем выше жесткость, тем меньше кривизна оси и, следовательно, меньше прогиб. Она включает жесткость материала, который определяется величиной модуля

упругости E и жесткость размера и формы сечения, определяющаяся моментом инерции сечения. Для стали модуль упругости можно принять равным $E = 200$ ГПа.

Жесткость сечения характеризуется величиной осевого момента инерции. Для круглой формы сечения момент инерции рассчитывается по формуле:

$$I = \frac{\pi d^4}{64}$$

Кривизна плоской кривой находится по формуле:

$$\frac{1}{\rho(z)} = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}}$$

Приравняв правые части формул расчета кривизны, взятые из сопромата и математики, получаем дифференциальное уравнение изогнутой оси бруса:

$$\frac{M(z)}{EI} = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} \quad \dots(4)$$

Интегрировать это уравнение в общем случае довольно сложно. На практике используют уравнение в упрощенной форме для случая малых перемещений. Так как углы поворота $\theta = y'$ не превышают, как правило, 1° , $(y')^2 \approx \left(\frac{1}{57.3}\right)^2 \approx 0.0003$, то величиной $(y')^2$ можно пренебречь по сравнению с единицей:

$$1 + (y')^2 = 1 + 0,003 \approx 1$$

В результате упрощения получим приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки:

$$y' = \frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M(z)}{EI} \quad \dots(5)$$

Задача решается методом понижения порядка на и двумя последовательными интегрированиями. В результате появляются 2 константы интегрирования C и D .

Их определяют из граничных условий. Граничные условия формулируются условиями опирания бруса. Например, на шарнирных опорах прогиб невозможен, т.е. равен нулю. В жесткой заделке помимо прогиба невозможен и угол поворота сечения.

1.3.2.3. Метод начальных параметров. Универсальное уравнение изогнутой оси балки

Рассмотренный в 1.3.2.2 метод положен в основу метода начальных параметров. Из полученных уравнений для $EI\theta$ и EIy видно, что в уравнения углов поворота на всех участках входит $C = EJ\theta_0$, а в уравнения прогибов входит $D = EIy_0$ и $Cz = EI\theta_0z$. Прогиб в начале координат y_0 и угол поворота в начале координат θ_0 называются начальными параметрами. Сосредоточенные моменты M в уравнении углов поворота $EI\theta_0$ и уравнении прогибов EIy входят, соответственно, в виде:

$$\frac{M(z-a)^2}{1!} \text{ и } \frac{M(z-a)^2}{2!}$$

сосредоточенные силы, соответственно, в виде:

$$\frac{P(z-a)^2}{2!} \text{ и } \frac{P(z-a)^2}{3!}$$

распределенные нагрузки - в виде:

$$\frac{q(z-a)^3}{3!} \text{ и } \frac{q(z-a)^4}{4!}$$

с тем знаком, с которым каждая из нагрузок входит в выражение для изгибающего момента.

В этих выражениях a , b , c - расстояния от начала координат до места приложения нагрузки.

Используя эти выражения, можно сразу же записать универсальное уравнение изогнутой оси балки

$$EIy = D + C z + \frac{q(z-a)^4}{4!} + \frac{P(z-a)^3}{3!} + \frac{M(z-a)^2}{2!} \Big|_I + \frac{q(z-b)^4}{4!} + \frac{P(z-b)^3}{3!} + \frac{M(z-b)^2}{2!} \Big|_{II} + \dots \quad \dots(6)$$

Разделительная черта с цифрой внизу означает, что при вычислении прогиба на данном участке следует брать только те члены, которые записаны левее разделителя, т.е. при вычислении прогиба данного сечения нужно учитывать только те нагрузки, которые приложены между началом координат и данным сечением.

Уравнение углов поворота можно получить, проинтегрировав универсальное уравнение по z , а члены со скобками - по $(z-a)$ или $(z-b)$:

$$EI\theta = C z + \frac{q(z-a)^3}{3!} + \frac{P(z-a)^2}{2!} + \frac{M(z-a)^1}{1!} \Big|_I + \frac{q(z-b)^3}{3!} + \frac{P(z-b)^2}{2!} + \frac{M(z-b)^1}{1!} \Big|_{II} + \dots \quad \dots(7)$$

Основные правила метода:

1) Начало координат берется общим для всех участков.

2) Все составляющие выражения $M(z)$ предыдущего участка полностью сохраняются в выражении $M(z)$ последующего участка. С этой целью распределенная нагрузка, не доходящая до дальнего конца балки, условно продлевается до конца и компенсируется такой же противоположной нагрузкой.

3) Все вновь появляющиеся составляющие $M(z)$ должны содержать множитель - скобку типа $(z-a)$, $(z-b)$.

1.3.2.4. Энергетический метод Мора

Метод Мора является универсальным методом определения любых перемещений сечений бруса при любой нагрузке. Для каждого из внутренних силовых факторов (ВСФ) Q_y , M_x , M_z , N , M_y , Q_x составляют свой интеграл Мора. Запись интегралов для любого из ВСФ на основе теоремы Мора рассматривается в курсе лекций. Общее перемещение рассчитывается как сумма интегралов Мора для каждого внутреннего силового фактора.

В данном пособии рассматривается решение задач определения перемещений только от внутреннего изгибающего момента M_x . Перемещение от момента рассчитывается как интеграл Мора:

$$\Delta = \int_{\ell} \frac{M_x(z) \cdot \bar{M}_x(z)}{EI_x} dz. \quad \dots(8)$$

где EI_x - жесткость сечения; $M_x(z)$ - уравнение изгибающего момента основной схемы на данном участке; $\bar{M}_x(z)$ - уравнение изгибающего момента вспомогательной схемы.

Вспомогательная схема составляется с учётом основной, но без заданных внешних нагрузок. В качестве нагрузки здесь служат либо единичная сила ($P = 1$) при вычислении прогиба, либо единичный момент ($M = 1$) при вычислении угла поворота сечения. Их прикладывают в то сечение, перемещение которого определяется.

Общее число интегралов Мора должно быть равно числу участков, т.е. для каждого участка записывается свой интеграл с соответствующими границами. При этом, границы участков обеих балок должны совпадать. Сумма всех интегралов есть искомое перемещение.

Порядок применения метода Мора для расчета перемещений

1) Вычерчивается вспомогательная система, которая геометрически совпадает с основной (заданной), но без внешних нагрузок. На этом этапе нужно рядом с заданной балкой (рамой, валом и т.п.) начертить ее точную копию, но убрать с нее все внешние нагрузки, т.е. силы P , моменты M , распределенные нагрузки q . Таким образом, вторая система пока не нагружена.

2) На вспомогательной системе в той точке, где нужно определить перемещение, необходимо приложить:

- либо единичную силу $P = 1$, если рассчитывается прогиб U ;

- либо единичный момент $M = 1$, если определяется угол поворота сечения θ .

Допустим, требуется определить перемещение сечения, которое на схеме обозначена как т.А или номер 1. Тогда на вспомогательной системе именно в эту точку следует приложить силу или момент, равные единице. Это не 1 Н, не 1 кг, а просто 1 без единиц измерения. Силу прикладывают тогда, когда определяют линейное перемещение, т.е. перемещение, измеряемое в единицах длины. К таким перемещениям относят прогиб балки и удлинение стержня. Момент прикладывают тогда, когда нужно определить угловое перемещение, т.е. перемещение, измеряемое в радианах или градусах. К таким перемещениям относятся угол поворота сечения при изгибе и угол закручивания при кручении.

3) Определяют число участков и для каждого участка записываются уравнения моментов $M_X(z)$ для основной и вспомогательной схем. Причем, границы участков на схемах должны совпадать. Если, например, основная схема состоит из четырёх участков, а

вспомогательная состоит из двух, то вспомогательную придется разделить на такие же четыре участка.

4) Для каждого участка составляется свой интеграл Мора. Если участки имеют разные размеры сечений, то момент инерции вычисляется для каждого сечения. Если жесткость сечения по всей балке постоянна, то вычисление момента инерции можно оставить напоследок. При решении интегралов в этом случае, жесткость балки (EI_x - произведение модуля упругости на момент инерции) можно вынести за знак интеграла.

5) Результаты интегрирования на всех участках суммируются и, таким образом, рассчитывают требуемое перемещение. Перемещение в заданной точке есть сумма всех интегралов Мора.

Примечание. Если вычисленное перемещение по величине оказалось отрицательным, значит направление перемещения сечения противоположно выбранному направлению единичной силы или момента.

Пример 3. Для балки, изображенной на рис. 7 требуется вычислить прогиб сечения в точке С. Задано: $AC = 4$ м. $CB = 6$ м. $P_1 = 1$ кН, $P_2 = 2$ кН. $EI_x = 2179,01$ Нм².

1) Вычертим вспомогательную балку. Для этого перечертим основную схему, но отбросим внешние нагрузки P_1 и P_2 .

2) Требуется определить прогиб, поэтому на вспомогательной балке в т. С приложим силу, равную единице. Направление силы выберем, допустим, вниз. Тогда схема вспомогательной балки будет такой, как она изображена на рис. 8.

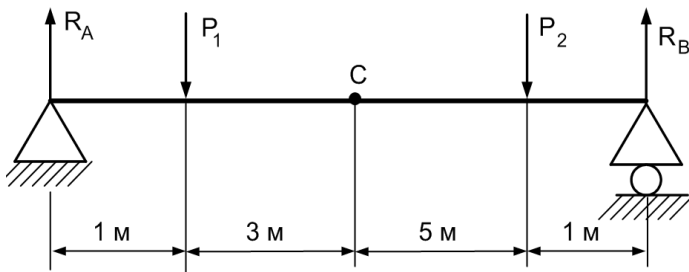


Рисунок 7 – Схема задачи

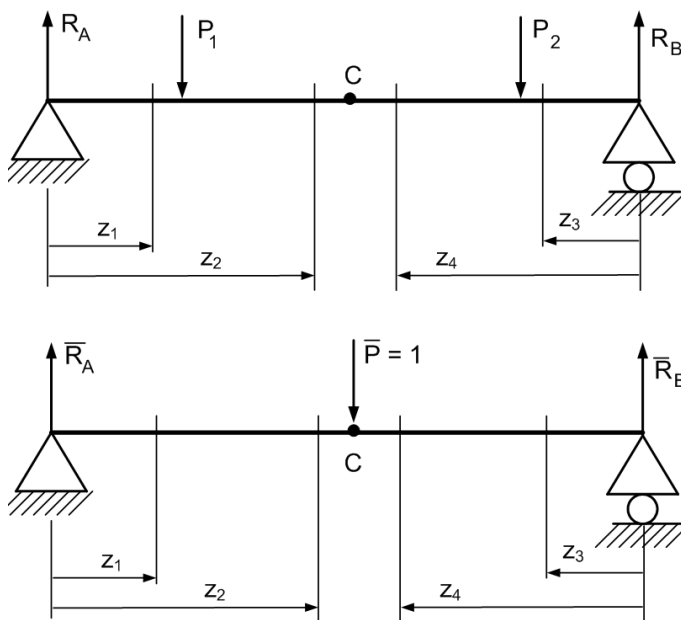


Рисунок 8 – Основная и вспомогательная схемы

3) На каждом участке обеих балок проводим сечения для вычисления внутренних моментов. Основная схема имеет 3 участка, вспомогательная только 2. Чтобы соблюдалось требование о совпадении границ участков, основную и вспомогательную балку разделим на 4 участка так, как показано на рис. 8.

Составляем уравнения внутреннего момента на каждом участке. Во все уравнения войдут опорные реакции, поэтому их нужно предварительно определить.

Запишем уравнения внутреннего изгибающего момента для основной и вспомогательной схем для каждого из четырех участков.

I участок $0 < z < 0,1$ м.

Основная: $M_x = R_A \cdot z = 1,1 \cdot z$;

вспомогательная: $M_x = 0,6 \cdot z$.

II участок $1 < z < 4$ м.

Основная: $M_x = R_A \cdot z - P_1 \cdot (z - 1) = 1,1 \cdot z - 1 \cdot (z - 1)$;

вспомогательная: $M_x = 0,6 \cdot z$.

III участок $0 < z < 1$ м.

Основная: $M_x = R_B \cdot z = 1,9 \cdot z$;

вспомогательная: $M_x = 0,4 \cdot z$.

IV участок $1 < z < 6$ м.

Основная: $M_x = R_B \cdot z - P_2 \cdot (z - 1) = 1,9 \cdot z - 2 \cdot (z - 1)$;

вспомогательная: $M_x = 0,4 \cdot z$.

4) На каждом участке составляем интеграл Мора.

I участок $0 < z < 1$ м.

$$\int 1,1 z \cdot 0,6 z dz = 0,66 \cdot I^3 / 3 = 0,22.$$

II участок $1 < z < 4$ м.

$$\begin{aligned} & \int [1,1z - 1 \cdot (z - 1)] \cdot 0,6 z dz = \\ & = 0,06 \cdot (4^3 - 1^3) / 3 + 0,6 \cdot (4^2 - 1^2) / 2 = 5,76. \end{aligned}$$

III участок $0 < z < 1$ м.

$$\int 1,9 z \cdot 0,4 z dz = 0,76 \cdot I^3 / 3 = 0,2533.$$

IV участок $1 < z < 6$ м.

$$\int [1,9z - 2 \cdot (z - 1)] \cdot 0,4z dz =$$

$$= -0,04 \cdot (6^3 - 1^3) / 3 + 0,8(6^2 - 1^2) / 2 = 11,133.$$

5) Прогиб в т. С, который мы вычисляем, равен сумме всех четырёх интегралов Мора:

6)

$$y = \frac{0,22 + 5,76 + 0,2533 + 11,133}{2179,01} = 7,97 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

Прогиб составил величину $Y = 7,97 \approx 8,0$ мм.

Пример 4. Для балки, схема которой показана на рис. 9, определить прогиб на свободном конце. Исходные данные: $q = 10$ кН/м; $P = 8$ кН; $M = 4$ кН·м.

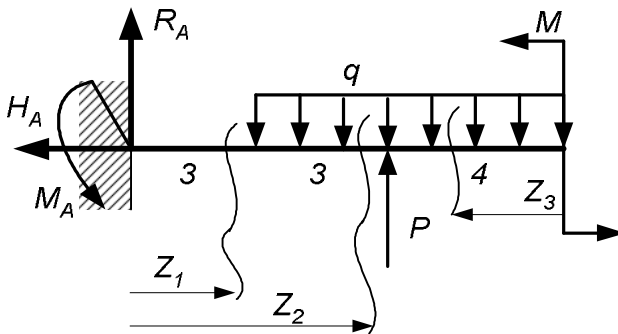


Рисунок 9 – Схема заданной балки

Решение.

Уравнения статики:

$$1) \sum Z = -H_A = 0 \quad H_A = 0;$$

$$2) \sum Y = R_A + P - q \cdot 7 = 0;$$

$$R_A = q \cdot 7 - P = 10 \cdot 7 - 8 = 62 \text{ (кН)};$$

$$3) \sum M_A = M_A + P \cdot 6 + M - q \cdot 7 \cdot 6,5 = 0;$$

$$M_A = q \cdot 45,5 - M - 6 \cdot P = 455 - 4 - 6 \cdot 8 = 403 \text{ (кН*м)}.$$

Вычерчиваем вспомогательную схему. На вспомогательной балке прикладываем силу, равную 1. Направление выбираем произвольно, допустим, вверх. Схема вспомогательной балки показана на рис. 10.

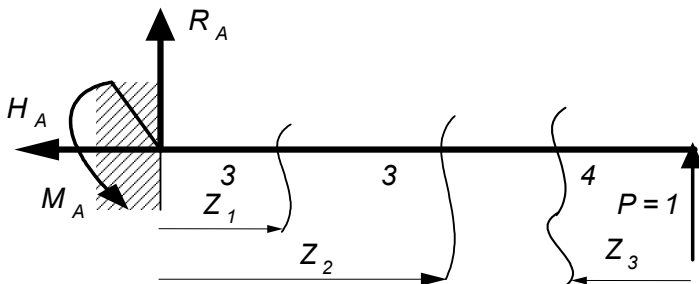


Рисунок 10 – Схема вспомогательной балки

Вычислим опорные реакции для вспомогательной балки.

$$1) \sum P_z = -H_A = 0, \quad H_A = 0;$$

$$2) \sum P_y = R_A + 1 = 0, \text{ тогда } R_A = -1;$$

$$3) \sum M_A = M_A + 1 \cdot 10 \text{ м} = 0, \quad M_A = -10 \text{ м}^{-1}.$$

Составляем уравнения внутренних моментов для обеих балок на каждом из трёх ее участков.

I участок $0 < z_1 < 3$.

$$\text{Основная балка } M_x = R_A \cdot z_1 - M_A = 62 \cdot z_1 - 403.$$

Вспомогательная балка:

$$\bar{M}_x = \bar{R}_A \cdot z_1 - \bar{M}_A = -1 \cdot z_1 + 10.$$

II участок $3 < z_2 < 6$.

Основная балка:

$$M_x = R_A \cdot z - M_A - q \frac{z-3}{2} = 62 \cdot z - 403 - 5 \cdot (z-3)^2$$

Вспомогательная балка:

$$\bar{M}_x = -1 \cdot z + 10.$$

III участок $0 < z_3 < 4$.

$$\text{Основная балка } M_x = -q \frac{z^2}{2} + M = -5 \cdot z^2 + 4.$$

Вспомогательная балка $\bar{M}_x = 1 \cdot z$.

Составляем 3 интеграла для трёх участков балки. Жесткость, входящая в формулу всех трёх интегралов, одинакова по условиям задачи. Ее можно вынести за знак интеграла. Поэтому в расчете участков мы ее учитывать не будем. Разделим на жесткость после сложения результатов интегрирования.

I участок $0 < Z_1 < 3$.

$$\int_0^3 \bar{M}_x \cdot M_x \cdot dz = \int_0^3 (-1 \cdot z + 10) \cdot (62 \cdot z - 403) \cdot dz =$$

$$\int_0^3 (-62 \cdot z^2 + 1023 \cdot z - 4030) dz = \left(-62 \frac{z^3}{3} + 1023 \frac{z^2}{2} - 4030 \cdot z \right) \Big|_0^3 =$$

$$= -558 + 4603,5 - 12090 = -8044,5.$$

II участок $3 < Z_2 < 6$.

Чтобы было проще интегрировать, перемножим сначала моменты под знаком интеграла.

$$M_x \cdot \bar{M}_x = (62 \cdot z - 403 - 5(z-3)^2) \cdot (-z + 10) =$$

$$= 5 \cdot z^3 - 142 \cdot z^2 + 1368 \cdot z - 4480.$$

Теперь интегрируем:

$$\int_3^6 (5 \cdot z^3 - 142 \cdot z^2 + 1368 \cdot z - 4480) dz = 5 \frac{z^4}{4} - 142 \frac{z^3}{3} + 1368 \frac{z^2}{2} -$$

$$- 4480 \cdot z = 5 \frac{6^4 - 3^4}{4} - 142 \frac{6^3 - 3^3}{3} + 1368 \frac{6^2 - 3^2}{2} - 4480(6 - 3) =$$

$$= -2399,25.$$

III участок $0 < Z_3 < 4$.

$$\int_0^4 (-5 \cdot z^2 + 4) \cdot z \cdot dz = -5 \cdot z^3 + 4 \cdot z = -5 \frac{4^4}{4} + 4 \frac{4^2}{2} = -288$$

Результаты интегрирования на всех трёх участках складываем и делим на жесткость, которую ранее вынесли за знак интеграла:

$$Y_B = \frac{-8044,5 - 2399,25 - 288}{E I_x} = -\frac{10731,75}{E I_x}.$$

Если размеры сечения и материал известны, можно вычислить жесткость балки и, подставив ее в полученный результат, определить прогиб в абсолютном значении (мм). Величина прогиба оказалась с отрицательным знаком. Значит, его направление противоположно выбранному направлению единичной силы. Прогиб сечения в т. В направлен не вверх, а вниз.

1.3.2.5. Способ Верещагина

А.Н. Верещагин в 1925 году, будучи студентом, предложил очень удобный способ вычисления интегралов Мора применительно к задачам изгиба балок и рам с прямолинейными участками, имеющими постоянную жесткость. При вычислении перемещений при изгибе он предложил заменить интеграл Мора (8) на формулу:

$$\Delta = \frac{\omega \cdot \bar{M}_c}{E I_x} \quad \dots(9)$$

где ω – площадь грузовой эпюры, т.е. эпюры изгибающего момента на основной балке; M_c - ордината (высота) единичной эпюры, которая определяется под центром тяжести грузовой эпюры.

Порядок применения способа практически совпадает с порядком применения метода Мора, за исключением п. 3 и 4.

Вместо записи уравнений внутренних моментов следует строить их эпюры, а вместо записи интегралов Мора, нужно «перемножать эпюры внутренних моментов» по формуле Верещагина, т.е. умножать площадь грузовой эпюры на момент, выбранный на единичной эпюре под центром тяжести грузовой эпюры.

Для расчета площадей эпюр и координат центра тяжести используют стандартные формулы, приведенные в таблице 1. В том случае, когда эпюра образована несколькими фигурами, ее разбивают на простые табличные фигуры.

Порядок применения способа Верещагина для определения перемещений при изгибе

1) Вычерчивается вспомогательная схема, которая геометрически совпадает с основной (заданной), но без внешних нагрузок, т.е. отбрасываются все приложенные силы, моменты и нагрузки.

2) На вспомогательной схеме в той точке, где нужно определить перемещение необходимо приложить либо единичную силу $P = 1$, если рассчитывается прогиб U ; либо единичный момент $M = 1$, если определяется угол поворота сечения.

3) Строятся эпюры изгибающих моментов для основной схемы, на каждый участок отдельно (грузовая эпюра). Строятся эпюры изгибающего момента для вспомогательной схемы (единичная эпюра).

4) Определяются площади грузовых эпюр ω и единичные моменты M_c под центрами тяжести грузовых. Для каждого участка записывается формула Верещагина, по которой «перемножаются» эпюры.

5) Результаты перемножения по всем участкам складываются, делятся на жесткость сечения, и получается перемещение в данной точке.

Для удобства вычисления площадей и координат центров тяжести эпюр, их разбивают на простейшие элементы: прямоугольник, треугольник, параболический треугольник и выполняют перемножение по отдельным элементам. Минимальное количество участков, на которое разбивается грузовая эпюра для вычисления площадей, равно числу участков на единичной эпюре, причем границы участков *должны совпадать* с границами их на единичной эпюре.

Например, трапецию можно разбить на две фигуры: прямоугольник и треугольник. В любом случае, для перемножения эпюр по способу Верещагина требуется, чтобы перемножаемые эпюры имели одинаковую длину по оси бруса.

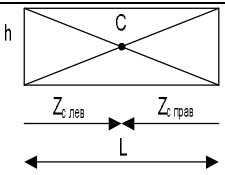
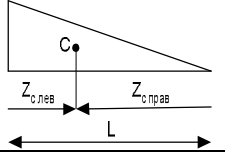
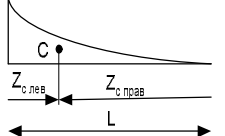
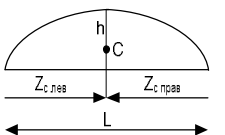
В тех случаях, когда грузовая и единичная эпюры обе прямолинейны, можно умножать площадь единичной эпюры на соответствующую ординату грузовой эпюры, взятую под центром тяжести единичной, т.е. применять правило Верещагина наоборот.

Необходимо запомнить, что ордината M_c всегда берется только на *линейной* эпюре.

Правило знаков при перемножении: если грузовая и единичная эпюры имеют разные знаки, то их произведение берется со знаком минус.

Таблица 1 – Справочные данные по расчету площадей эпюр и координат центра тяжести

Фигура	Формула	Координат центра	Координата центра
--------	---------	------------------	-------------------

	площади	тяжести с левой стороны	тяжести с правой стороны
	$\omega = h \cdot L$	$Z_{с.лев} = \frac{1}{2}L$	$Z_{с.прав} = \frac{1}{2}L$
	$\omega = \frac{1}{2} h \cdot L$	$Z_{с.лев} = \frac{1}{3}L$	$Z_{с.прав} = \frac{2}{3}L$
	$\omega = \frac{1}{3} h \cdot L$	$Z_{с.лев} = \frac{1}{4}L$	$Z_{с.прав} = \frac{3}{4}L$
	$\omega = \frac{2}{3} h \cdot L$	$Z_{с.лев} = \frac{1}{2}L$	$Z_{с.прав} = \frac{1}{2}L$

Рассмотрим примеры решения задач способом Верещагина. Чтобы сравнивать результаты решения с решениями, получаемыми при использовании метода Мора, решим те же задачи, что мы решали методом Мора, т.е. примеры 3 и 4.

Пример 5. Решим задачу, рассмотренную в примере 3. Сравним результаты, полученные методами Мора и Верещагина. Схема задачи показана на рис. 7. Основная и вспомогательная схемы показаны на рис. 8.

Пункты 1 и 2 порядка применения в примере 3 уже выполнены. Переходим к третьему пункту. Строим

грузовую и единичную эпюры. Построенные эпюры показаны на рис. 11.

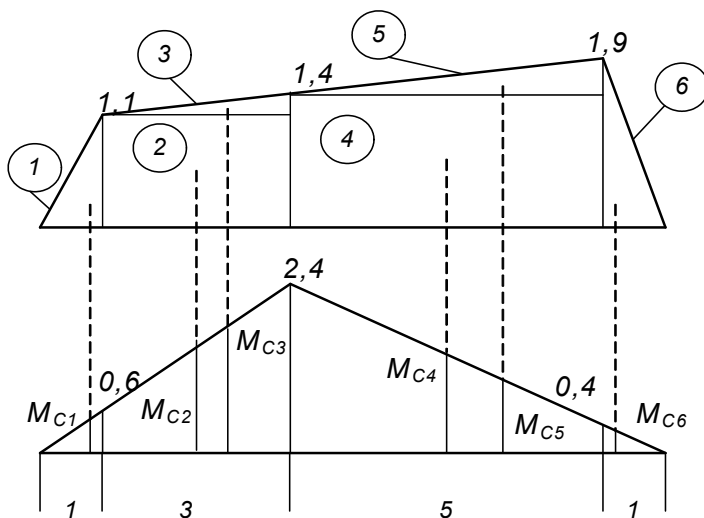


Рисунок 11 – Эпюры моментов для вычисления прогиба

Далее эпюры “перемножаются”, т.е. площади грузовых эпюр на каждом участке умножаются на соответствующие единичные моменты, взятые под центрами тяжести грузовых. Для удобства работы пронумеруем отдельные фигуры на грузовой эпюре.

Рассмотрим каждую фигуру по отдельности.

1) Площадь треугольника 1 равна $1/2 \cdot 1,11 = 0,55$. Момент на единичной эпюре рассчитывается на расстоянии $2/3$ от левого конца и поэтому равен $2/3$ от правого вертикального катета. $M_c = 2/3 \cdot 0,6 = 0,4$.

2) Площадь прямоугольника 2 равна $1,1 \cdot 3 = 3,3$. Момент на единичной эпюре находится на середине трапеции $0,6 - 2,4$. Тогда: $M_c = 0,5 \cdot (0,6 + 2,4) = 1,5$.

3) Площадь 3 равна $1/2 \cdot (1,4 - 1,1) \cdot 3 = 0,45$. Момент на единичной эпюре под этим треугольником определяется на трапеции в том месте, где у грузового треугольника располагается центр тяжести. M_{C3} можно вычислить тремя способами.

I способ. Момент M_c рассчитываем как сумму двух отрезков: $0,6 + 2/3 \cdot (2,4 - 0,6) = 1,8$.

II способ. Трапеция по ширине разделилась на 3 части. Высота левой грани трапеции равна 0,6. Высота правой грани равна 2,4. Высота увеличивается линейно с 0,6 до 2,4 в 3 этапа:

$$0,6-1,2; \quad 1,2-1,8; \quad 1,8-2,4.$$

Так как центр тяжести грузового треугольника расположен ближе к правой грани, то момент $M_c = 1,8$.

III способ. Момент M_c можно вычислить как вычисляется обычный внутренний момент с помощью уравнения.

$$M_c = M_x = R_A \cdot Z_c.$$

Расстояние Z_c рассчитывается как сумма длин 1-го участка и расстояния до центра тяжести грузовой эпюры на 2 участке.

$$Z_c = 1 + 2/3 \cdot 3 = 3 \text{ (м)}.$$

$$M_c = 0,6 \cdot 3 = 1,8.$$

4) Площадь грузовой эпюры $1,4 \cdot 5 = 7$. Момент на единичной эпюре под центром тяжести грузовой определяется делением трапеции на 2 равные части: $2,4-1,4-0,4$.

Тогда $M_c = 1,4$.

5) Площадь фигуры 4 равна $1/2 \cdot (1,9 - 1,4) \cdot 5 = 1,25$. Момент на единичной эпюре для предыдущей трапеции мы рассчитывали тремя способами. Рассмотрим еще раз все три способа.

I способ. Момент M_c рассчитываем как сумму двух отрезков: $0,4 + 1/3 \cdot (2,4 - 0,4) = 1,067$.

II способ. Трапеция по ширине разделилась на 3 части. Высота левой грани трапеции равна 2,4. Высота правой грани равна 0,4. Высота увеличивается линейно с 0,4 до 2,4 в 3 этапа. Разница $2,4 - 0,4 = 2$ на 3 части делится по 0,667. Тогда получаем 3 части трапеции: 0,4-1,067; 1,067-1,733; 1,733-2,4. Так как центр тяжести грузового треугольника расположен ближе к правой грани, то момент $M_c = 1,067$.

Расчет можно выполнить точно, если перейти к дробям:

$$2,4 = 24/10 = 12/5; 0,4 = 4/10 = 2/5.$$

Разница $12/5 - 2/5 = 10/5$ на 3 не делится. Тогда умножим обе дроби на 3/3, т.е. на 1. Теперь разница $36/15 - 6/15 = 30/15$ делится на 3 части ($10/15$). Тогда получаем слева $2,4 = 36/15$. Далее $26/15$, $16/15$ и на правом конце трапеции $6/15 = 0,4$. Центр тяжести верхнего (грузового) треугольника расположен ближе к правому его катету, поэтому из приведенного ряда выбираем $16/15 = 1,067$.

III способ. Момент M_c можно вычислить как вычисляется обычный внутренний момент с помощью уравнения.

$$M_c = M_x = R_B \cdot Z_c.$$

Расстояние Z_c рассчитывается как сумма длин 6-го участка и расстояния до центра тяжести грузовой эпюры на 5 участке.

$$Z_c = 1 + 1/3 \cdot 5 = 2,667 \text{ (м)}.$$

$$M_c = 0,4 \cdot 2,667 = 1,067.$$

6. Площадь эпюры 6 равна $\frac{1}{2} \cdot 1,9 \cdot 1 = 0,95$.

Момент на единичной эпюре под центром тяжести грузовой эпюры, т.е. треугольника на верхней эпюре рассчитывается как $2/3 \cdot 0,4 = 0,267$.

Перемножаем площади грузовых эпюр на единичные моменты и после сложения и деления на жесткость получаем значение прогиба в заданной точке.

$$Y = (0,55 \cdot 0,4 + 3,3 \cdot 1,5 + 0,45 \cdot 1,8 + 7 \cdot 1,4 + 1,25 \cdot 1,067 + 0,95 \cdot 0,267) / 2179,01 = 0,007967 \text{ м} \approx 8,0 \text{ мм}$$

Сравнение полученного прогиба с результатом решения примера 3 показывает, что метод Мора и способ Верещагина позволяют получить одинаковые ответы.

Пример 6. Решим задачу, рассмотренную в примере 4. Снова сравним результаты, полученные методами Мора и Верещагина. Схема задачи показана на рис. 9. Основная и вспомогательная схемы показаны на рис. 10. Пункты 1 и 2 в примере 4 уже выполнены. Переходим к третьему пункту.

Строим грузовую и единичную эпюры. Построенные эпюры показаны на рис. 12. На грузовой эпюре проведем 2 вспомогательные линии, которые показаны пунктиром. Для вспомогательной балки построим эпюры изгибающего момента, используя уже известные уравнения из примера 4.

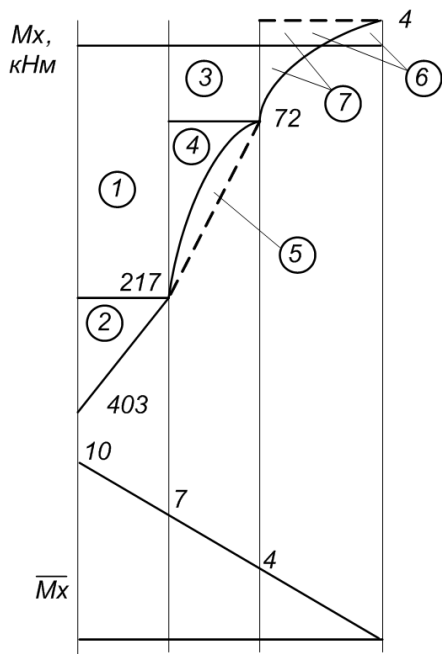


Рисунок 12 – Пояснения к перемножению эпюр при вычислении прогиба в т. В

Грузовая эпюра на правом участке образована двумя моментами: за счет внешнего сосредоточенного момента M и момента от равномерно-распределенной нагрузки. Вспомогательная пунктирная линия позволяет разделить суммарную эпюру на 2 составляющие: 6 – от сосредоточенного момента, 7 – за счет распределенной нагрузки. Такое разложение позволит легче перемножить эпюры. Важно помнить, что такой способ разложения допустим только тогда, когда в общую эпюру момента не добавляется эпюра момента от сосредоточенной силы (например P или R_A).

Если же момент от сосредоточенной силы существует, как например, на среднем участке нашей

балки, придется добавлять прямую наклонную линию. Чтобы отделить треугольную эпюру, возникающую от сосредоточенной силы P на среднем участке от эпюры распределенной нагрузки, суммарную эпюру дополняем до полной трапеции так, как это показано на рис. 12. В результате ее можно разложить на 3 отдельные площади. Фигура 5 – парабола, ограниченная пунктирной линией, является добавочной и поэтому при перемножении эпюр ее нужно вычитать (отнимать) от суммарной эпюры.

1) Площадь грузовой эпюры равна $217 \cdot 3 = 651$.

Момент на единичной выбирается по середине трапеции между 10 и 7, т.е. 8,5. Тогда все произведение равно

$$\omega \cdot M_c = 651 \cdot 8,5 = 5533,5.$$

2) Площадь грузовой эпюры $\frac{1}{2} \cdot (403 - 217) \cdot 3 = 279$.

Момент на единичной эпюре определяется как высота трапеции на расстоянии $1/3$ ее ширины с правой части любым из трёх приведенных в примере 6 способов. Проще всего трапецию разделить на 3 равные части с высотами 10 – 9 – 8 – 7. Выбираем под центром тяжести грузовой эпюры, т.е. 9.

$$\omega \cdot M_c = 279 \cdot 9 = 2511.$$

3) Площадь грузовой эпюры $76 \cdot 3 = 228$. Момент на единичной эпюре выбирается посередине единичной трапеции. На краях моменты равны 7 и 4. Значит, посередине будет 5,5. Тогда по формуле Верещагина:

$$\omega \cdot M_c = 228 \cdot 5,5 = 1254.$$

4) Площадь грузовой эпюры вычисляется как площадь треугольника $\frac{1}{2} \cdot (217 - 76) \cdot 3 = 211,5$. Момент на единичной эпюре определяется как высота трапеции со сторонами 7 и 4, взятая после ее деления на 3 части 7 – 6 – 5 – 4 ближе к левой стороне, т.е. там, где центр тяжести грузовой трапеции. Тогда момент будет равен 6.

Перемножаем эпюры по правилу Верещагина:

$$\omega \cdot M_c = 211,5 \cdot 6 = 1269.$$

5) Пятая площадь представляет собой параболу, которая наклонена по отношению к оси. Площадь и координату центра тяжести параболы определяем по таблице. В эти формулы входят высота параболы по середине h и ее длина L .

Чтобы их определить, следует, очевидно, использовать тригонометрические функции синуса или косинуса и вычислить через ширину участка и ординату эпюры. Но таких наклонных парабол обычно поступают проще. Наклонную параболу заменяют горизонтальной параболой, длина которой равна длине отрезка, а центр тяжести расположен на середине участка так, как это показано на рис. 13.

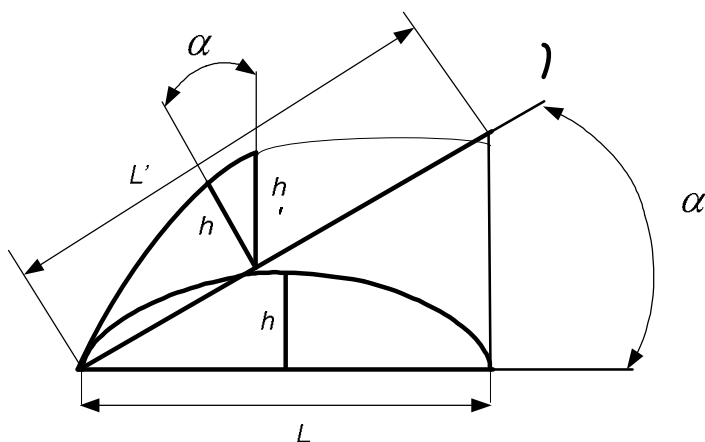


Рисунок 13 – Пояснения к определению площади параболы

Эпюры в таком случае перемножают по формуле

$$\omega \cdot \bar{M}_c = \frac{2}{3} h \cdot L \cdot \bar{M}_c.$$

Момент на единичной эпюре выбирают посередине участка. Высоту параболы h вычисляют по формуле:

$$h = 1/8 \cdot q \cdot L^2$$

Тогда площадь эпюры можно вычислять по формуле

$$\omega = \frac{2}{3} \cdot h \cdot L = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot q \cdot L^2 \right) \cdot L = \frac{1}{12} \cdot q \cdot L^3.$$

Рассмотрим теоретическое обоснование такой замены.

Пусть на участке длиной L уравнение момента записывается по общей формуле:

$$M_x = q \cdot z^2 / 2 + P \cdot z.$$

Получающаяся при этом эпюра показана на рис. 14. Пунктирная линия, дополняет параболу до треугольника (рис. 14 а).

Уравнение пунктирной линии – это уравнение прямой, которое можно получить от некоторой фиктивной силы P' как уравнение внутреннего момента $P' \cdot Z$.

Момент на правой границе участка для нашего уравнения рассчитывается как сумма $q \cdot L^2 / 2 + P \cdot L$ путем замены Z на L . Эту же высоту можно определить как момент от фиктивной силы P' , подставляя координату L вместо Z в уравнение $P' \cdot L$.

$$\text{Тогда } q \cdot L^2 / 2 + P \cdot L = P' \cdot L.$$

$$\text{Отсюда } P' = q \cdot L / 2 + P.$$

Высота наклонной параболы в любой точке участка может быть рассчитана как разность двух моментов:

$$\begin{aligned} P' \cdot z - \left(q \frac{z^2}{2} + P \cdot z \right) &= \left(\frac{q \cdot L}{2} + P \right) \cdot z - \left(q \frac{z^2}{2} + P \cdot z \right) = \\ &= \frac{q \cdot L}{2} z + P \cdot z - \frac{q z^2}{2} - P \cdot z = \frac{1}{2} q L z - q \frac{z^2}{2}. \end{aligned}$$

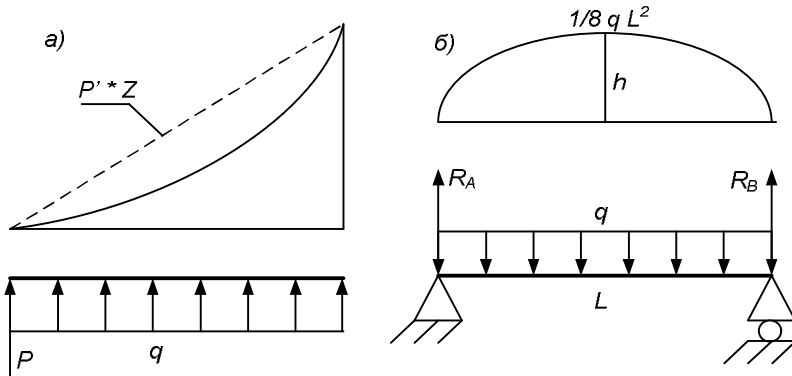


Рисунок 14 – Пояснения замены наклонной параболы горизонтальной параболой

На рис. 14.б приводится схема двухопорной балки и эпюра момента. Опорные реакции для обеих опор в силу симметрии внешней нагрузки равны.

$$R_A = R_B = \frac{1}{2} q \cdot L.$$

Уравнение внутреннего момента для любого сечения записывается как сумма 2-х моментов:

$$M_x = \frac{1}{2} q L \cdot z - q \frac{z^2}{2}.$$

Сравните это уравнение с уравнением, которое мы получили для левой балки – они полностью совпадают. Именно поэтому при расчете площади наклонной параболы возможна замена на площадь горизонтальной параболы.

Высота параболы посередине определяется подстановкой ее координаты в уравнение:

$$h = M_x \Big|_{z=\frac{L}{2}} = \frac{1}{2} q L \frac{L}{2} - q \frac{(L/2)^2}{2} = \frac{1}{8} q L^2.$$

Тогда площадь грузовой эпюры

$$\omega = \frac{1}{12} q \cdot L^3 = \frac{1}{12} 10 \cdot 3^3 = 22,5 .$$

Момент на единичной эпюре берется посередине участка. Там грузовая эпюра имеет центр тяжести и момент равен 5,5. Тогда произведение площади на момент равно:

$$\omega \cdot M_c = 22,5 \cdot 5,5 = 123,75.$$

6) Шестая площадь является прямоугольником и рассчитывается как произведение $4 \cdot 4 = 16$. Момент на единичной эпюре определяется посередине, т.е. под центром тяжести прямоугольника: $M_c = 2$. Тогда по формуле Верещагина

$$\omega \cdot M_c = 16 \cdot 2 = 32.$$

7) Седьмая эпюра представляет собой параболический треугольник, площадь которого определяем из табл. 1.

$$1/3 \cdot (76 + 4) \cdot 4 = 320 / 3.$$

Центр тяжести параболического треугольника в соответствии с формулой табл. 1 расположен на расстоянии $\frac{3}{4}$ его ширины от правого конца. Поэтому момент на единичной эпюре рассчитывается как $\frac{3}{4} \cdot 4 = 3$. Тогда по правилу Верещагина получаем результат перемножения

$$\omega \cdot \bar{M}_c = \frac{320}{3} \cdot 3 = 320 .$$

Чтобы получить итоговый результат, сложим результаты перемножения всех 7 эпюр. При сложении результатов важно помнить правило знаков.

Если перемножаемые составляющие располагаются по одну сторону от оси, т.е. обе положительны или обе отрицательны, то результат перемножения будет положительным; если эпюры расположены по разные стороны от оси, т.е. грузовая положительна, а единичная отрицательна, или наоборот, то результат перемножения должен быть отрицательным.

С учетом этого правила вычисляем результат.

$$Y_C = \frac{-5533,5 - 2511 - 1254 - 1269 + 123,75 + 32 - 320}{E I_x} =$$
$$= -\frac{10731,75}{E I_x}.$$

Сравним этот результат с результатом, полученным при решении задачи методом Мора.

2. Динамическое действие нагрузки в результате равноускоренного движения

Этот случай динамического действия нагрузки является наиболее простым с точки зрения выполнения расчетов. Задача решается на основе применения принципа Даламбера. Пусть груз массой m поднимается с помощью стального троса вверх с постоянным ускорением a . Требуется построить формулы для определения напряжений в сечениях троса и его деформаций.

Задача решается в 2 этапа. На первом этапе решим задачу в статической постановке: груз массой m неподвижно висит на тросе. Расчетная схема такой задачи показана на рис. 15 (а).

Внутренняя продольная сила в соответствии с методом сечений равна $N_{CT} = m \cdot g$.

Напряжения во всех сечениях троса одинаковы и равны:

$$\sigma_{CT} = \frac{N_{CT}}{F} = \frac{m \cdot g}{F}$$

Удлинение троса длины ℓ можно вычислить по формуле (3):

$$\Delta \ell_{CT} = \frac{N_{CT} \cdot \ell}{E \cdot F} = \frac{m \cdot g \cdot \ell}{E \cdot F}$$

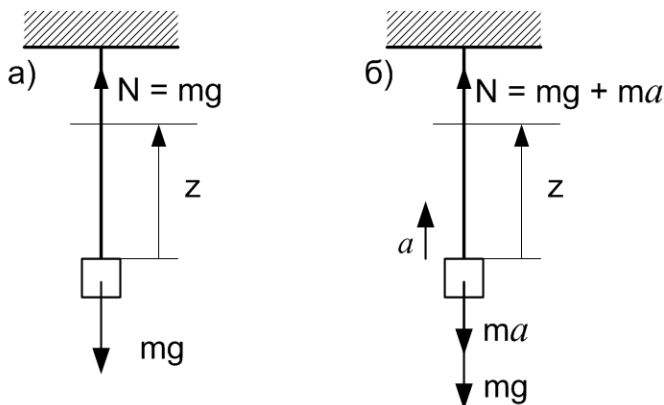


Рисунок 15 – Расчетная схема задачи в статической (а) и динамической (б) постановках

Рассмотрим решение задачи в динамической постановке. Согласно принципу Даламбера отличие новой задачи от предыдущей состоит в том, что дополнительно к силе тяжести груза массой m добавляется сила инерции, возникающая при его подъеме вверх. Важно помнить, что сила инерции всегда направлена противоположно к направлению ускорения, рис. 15 (б).

Составим формулы для расчета основных величин.

Внутренняя продольная сила в соответствии с методом сечений равна $N_{дин} = P_{дин} = mg + ma = m(g + a)$.

Введем понятие коэффициента динамичности:

$$N_{дин} = m \cdot (g + a) = mg \cdot \left(1 + \frac{a}{g}\right) = N_{ст} \cdot K_{дин}$$

Для рассматриваемого случая динамического воздействия нагрузки коэффициент динамичности может быть вычислен по формуле:

$$K_{дин} = 1 + \frac{a}{g} \quad \dots(10)$$

Динамические напряжения можно выразить через статические:

$$\sigma_{дин} = \frac{N_{дин}}{F} = \frac{K_{дин} \cdot N_{ст}}{F} = K_{дин} \cdot \sigma_{ст}$$

Динамическое удлинение троса тоже можно выразить через статическое удлинение:

$$\Delta \ell_{дин} = \frac{N_{дин} \cdot \ell}{E \cdot F} = \frac{K_{дин} \cdot N_{ст} \cdot \ell}{E \cdot F} = K_{дин} \cdot \Delta \ell_{ст}$$

Таким образом, задача расчета при динамической нагрузке состоит в решении задачи в статической постановке, в результате которого вычисляются основные параметры для проведения расчета на прочность и жесткость. Для заданного динамического характера нагружения рассчитывается коэффициент динамичности. Полученный коэффициент динамичности служит для перерасчета статических параметров в динамические.

Пример 7. Грузовой лифт, полная масса которого равна 400 кг, поднимается вверх с ускорением $0,5 g = 4,9 \text{ м/с}^2$. Длина троса равна 30 м. Диаметр сечения троса составляет 20 мм. Рассчитать напряжения и удлинение троса с учетом динамического характера приложения нагрузки.

1) Вычисляем статическое напряжение и удлинение:

$$\sigma_{ст} = \frac{400 \cdot 9,8}{\frac{\pi \cdot (2 \cdot 10^{-2})^2}{4}} = 12477750 \text{ Па} = 12,5 \text{ МПа}$$

$$\Delta \ell_{ст} = \frac{400 \cdot 9,8 \cdot 30}{200 \cdot 10^9 \cdot \frac{\pi \cdot (2 \cdot 10^{-2})^2}{4}} = 1,872 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

2) Вычисляем коэффициент динамичности:

$$K_{дин} = 1 + \frac{0,5 \cdot g}{g} = 1,5$$

3) Вычисляем динамическое напряжение и

удлинение:

$$\sigma_{дин} = K_{дин} \cdot \sigma_{СТ} = 18,75 \text{ МПа}$$

$$\Delta \ell_{дин} = K_{дин} \cdot \Delta \ell_{СТ} = 2,808 \text{ мм}$$

Пример 8. Грузоподъемное устройство для удержания груза использует балку на двух роликах (рис. 16). Выполнить расчет балки на динамическую прочность, учитывая, что она имеет сечение швеллера № 14, а длина ее равна 2 м. Масса поднимаемого груза составляет 300 кг. Ускорение при подъеме равно 3 м/с^2 .

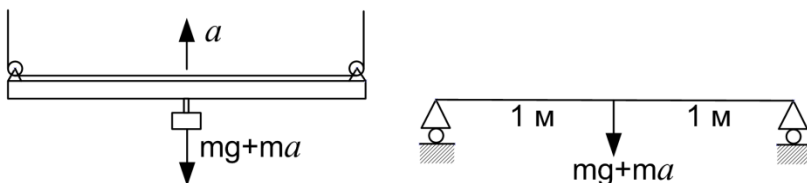


Рисунок 16 – Схема задачи и расчетная схема балки

При решении задачи несущую конструкцию грузоподъемного устройства можно рассмотреть как двухопорную балку на двух шарнирных опорах (рис. 17).

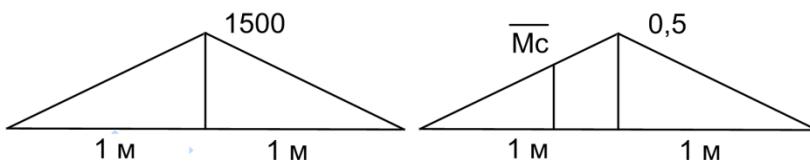


Рисунок 17 – Грузовая и единичная эпюры

1) Вычисляем статическое напряжение и прогиб балки в точке приложения груза:

$$\sigma_{CT} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{1500}{11 \cdot 10^{-6}} = 136363636,4 \text{ Па} = 136,6 \text{ МПа}$$

Статический прогиб определяем способом Верещагина (рис. 17). Перемножаем эпюры по правилу:

$$y_{CT} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1500 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5}{200 \cdot 10^9 \cdot 45,4 \cdot 10^{-8}} \cdot 2 = 2,75 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

2) Вычисляем коэффициент динамичности:

$$K_{дин} = 1 + \frac{3}{9,81} = 1,3$$

3) Вычисляем динамическое напряжение и удлинение:

$$\sigma_{дин} = K_{дин} \cdot \sigma_{CT} = 178,1 \text{ МПа}$$

$$y_{дин} = K_{дин} \cdot y_{CT} = 3,60 \text{ мм}$$

3. Расчеты при ударном действии нагрузки

В пособии рассматриваются задачи двух типов – сопротивление бруса при ударном действии осевой сжимающей силы и сопротивление бруса при ударном действии поперечной изгибающей сосредоточенной силы.

При решении задач такого типа все основные расчеты выполняются без учета динамичности, т.е. в предположении, что приложенные нагрузки носят статический характер. Напряжения и деформации вычисляются с помощью формул обычного сопромата. На втором этапе, чтобы учесть динамический характер приложения нагрузки, вводится коэффициент динамичности, который рассчитывается на основе применения принципа Даламбера.

При ударном характере воздействия нагрузки ее величина значительно изменяется за очень короткий промежуток времени. Например, ударом можно считать ситуацию, возникающую при падении груза с высоты на

торцевую поверхность стержня, вызывающее ударное сжатие или падение на балку, приводящее к ударному изгибу.

Вывод формулы коэффициента динамичности рассмотрим применительно к случаю ударного сжатия. Чтобы полученная формула носила универсальный характер, используем общий символ абсолютной деформации, тот, что в сопромате означал обобщенное перемещение Δ .

Схема задачи показана на рис. 18.

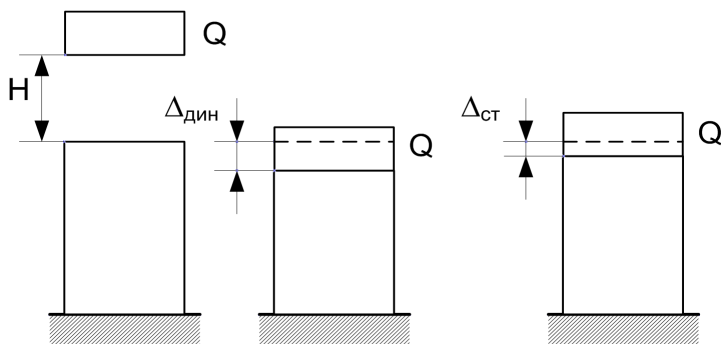


Рисунок 18 – Схема задачи к определению коэффициента динамичности

Введем обозначения. H – высота падения груза. $\Delta_{\text{дин}}$ - перемещение верхнего сечения в результате падения груза. $\Delta_{\text{ст}}$ - перемещение верхнего сечения приложения груза без падения. Q – вес падающего груза.

Вывод формулы основан на использовании закона сохранения энергии. Груз весом Q при падении перемещается вниз на расстояние $(H + \Delta_{\text{дин}})$. Значит, его потенциальная энергия уменьшается на величину:

$$\Delta W_p = Q \cdot (H + \Delta_{\text{дин}})$$

Эта энергия переходит в другую форму – потенциальную энергию деформации $U_{\text{дин}}$.

Тогда на основе закона сохранения энергии должно выполняться равенство: $\Delta W_P = U_{дин}$.

Расчетную формулу для потенциальной энергии деформации при ударе можно получить на основе вывода формулы потенциальной энергии деформации при статическом сжатии. Рассмотрим случай, когда груз просто лежит на торце бруса.

В курсе сопротивления материалов выводилась формула для вычисления потенциальной энергии деформации при воздействии статической силы:

$$U_{СТ} = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot \Delta_{СТ}$$

При сжатии укорочение стержня рассчитывается по формуле (3):

$$\Delta_{СТ} = \frac{Q \cdot \ell_0}{E \cdot F} = \frac{Q}{c}$$

где Q – удельная жесткость, жесткость единицы длины бруса. Отсюда: $Q = c \cdot \Delta_{СТ}$.

Тогда:

$$U_{СТ} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \Delta_{СТ}^2$$

По аналогии запишем формулу для потенциальной энергии деформации при ударном действии нагрузки:

$$U_{дин} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \Delta_{дин}^2$$

Учитывая, что:

$$c = \frac{Q}{\Delta_{СТ}}$$

Потенциальная энергия деформации при ударе может быть найдена по формуле:

$$U_{дин} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{\Delta_{СТ}} \cdot \Delta_{дин}^2$$

Вернемся к закону сохранения энергии $\Delta W_P = U_{дин}$ или:

$$Q \cdot (H + \Delta_{\text{дин}}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{\Delta_{\text{СТ}}} \cdot \Delta_{\text{дин}}^2$$

Упростив его, получаем квадратное уравнение:

$$\Delta_{\text{дин}}^2 - 2 \cdot \Delta_{\text{СТ}} \cdot \Delta_{\text{дин}} - 2 \cdot H \cdot \Delta_{\text{СТ}} = 0$$

Выбирая наибольший из двух корней уравнения, получаем формулу для динамического перемещения:

$$\Delta_{\text{дин}} = \frac{2 \cdot \Delta_{\text{СТ}} + \sqrt{4 \cdot \Delta_{\text{СТ}}^2 + 8 \cdot \Delta_{\text{СТ}} \cdot H}}{2} = \Delta_{\text{СТ}} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot H}{\Delta_{\text{СТ}}}}\right)$$

Величина, находящаяся в скобках представляет собой коэффициент динамичности:

$$K_{\text{дин}} = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot H}{\Delta_{\text{СТ}}}}\right) \quad \dots(11)$$

Динамическое перемещение и динамическое напряжение могут быть рассчитаны через статические параметры и коэффициент динамичности:

$$\Delta_{\text{дин}} = \Delta_{\text{СТ}} \cdot K_{\text{дин}}$$

$$\sigma_{\text{дин}} = \sigma_{\text{СТ}} \cdot K_{\text{дин}}$$

Таким образом, решение задачи предполагает, в первую очередь, определение статического перемещения. Его можно найти с помощью любого удобного способа, при изгибе, например, используя энергетические методы.

Пример 9. На брус, изображенный на рис. 19, падает с высоты 1 м груз массой 40 кг. Требуется построить эпюру напряжений и перемещений сечений стержня в результате ударного действия нагрузки.

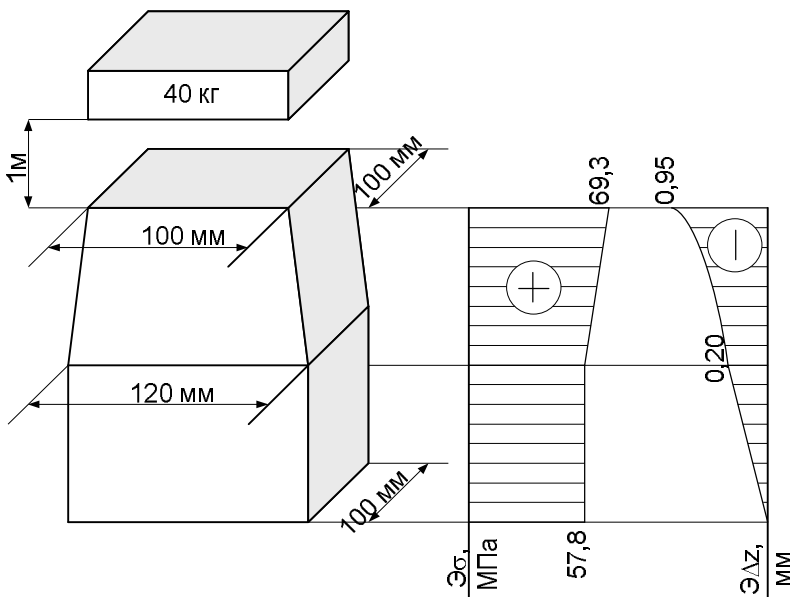


Рисунок 19 – Схема и результат решения задачи

Сначала вычислим коэффициент динамичности. Для этого определим статическую деформацию бруса от веса 400 Н. Всего 2 участка. Первый участок имеет переменную жесткость за счет изменения ширины одной из сторон своего прямоугольного сечения. Для вычисления укорочения стержня придется использовать формулу (1). Определим закон изменения площади сечения по координате z .

$$F'_1 = 10^{-1} \cdot 10^{-1} = 10^{-2} \text{ м}^2.$$

$$F''_1 = 1,2 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-1} = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2.$$

$$F_1 = F'_1 + k \cdot z = 10^{-2} + 0,4 \cdot 10^{-2} \cdot z = 0,4 \cdot 10^{-2} \cdot (z + 2,5).$$

Статическая абсолютная деформация первого участка рассчитывается по формуле (1) как интеграл:

$$\Delta \ell_1 = \int_0^{0,5} \frac{400}{200 \cdot 10^9 \cdot 0,4 \cdot 10^{-2} \cdot (z + 2,5)} dz =$$

$$= 500 \cdot 10^{-9} \ln |z + 2,5| = 0,55 \cdot 10^{-6}$$

На втором участке жесткость и внутренняя сила постоянны и, значит, его укорочение можно вычислить по формуле (3):

$$\Delta \ell_2 = \frac{400 \cdot 0,7}{200 \cdot 10^9 \cdot 1,2 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-1}} = 0,117 \cdot 10^{-6}$$

Тогда укорочение всего стержня составит 0,67 мкм.

По формуле (11) коэффициент динамичности:

$$K_{дин} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot H}{\Delta \ell}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 1}{0,67 \cdot 10^{-6}}} = 1733$$

Тогда укорочение первого участка при ударе составит: $0,55 \text{ мкм} \cdot 1733 = 0,95 \text{ мм}$; укорочение второго участка: $0,117 \text{ мкм} \cdot 1733 = 0,20 \text{ мм}$. Весь брус в момент удара получит деформацию 1,15 мм.

Динамические напряжения в верхнем сечении бруса: $\sigma_1 = 1733 \cdot \frac{400}{10^{-2}} = 69,32 \cdot 10^6 \text{ Па}$

Напряжения на границе участков и по всему второму участку:

$$\sigma_2 = 1733 \cdot \frac{400}{1,2 \cdot 10^{-2}} = 57,77 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

По результатам расчетов строим эпюры напряжений и перемещений.

Пример 10. На консольную балку длиной 1 м (рис. 20) с высоты 0,5 м падает груз массой 5 кг. Требуется построить эпюру динамических напряжений в крайних волокнах балки по ее длине, а также вычислить максимальный динамический прогиб.

Высота сечения бруса по его длине изменяется по закону:

$$h = \sqrt[3]{8 \cdot z + 8} = 2 \cdot \sqrt[3]{z + 1}$$

Высота сечения на свободном конце – 2 см, ширина сечения – 10 см.

Сначала получим формулу для изменения момента инерции сечения:

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} = 10^{-8} \cdot \frac{10}{12} \cdot (2 \cdot \sqrt[3]{z + 1})^3 = 10^{-8} \cdot \frac{20}{3} \cdot (z + 1) \text{ м}^4$$

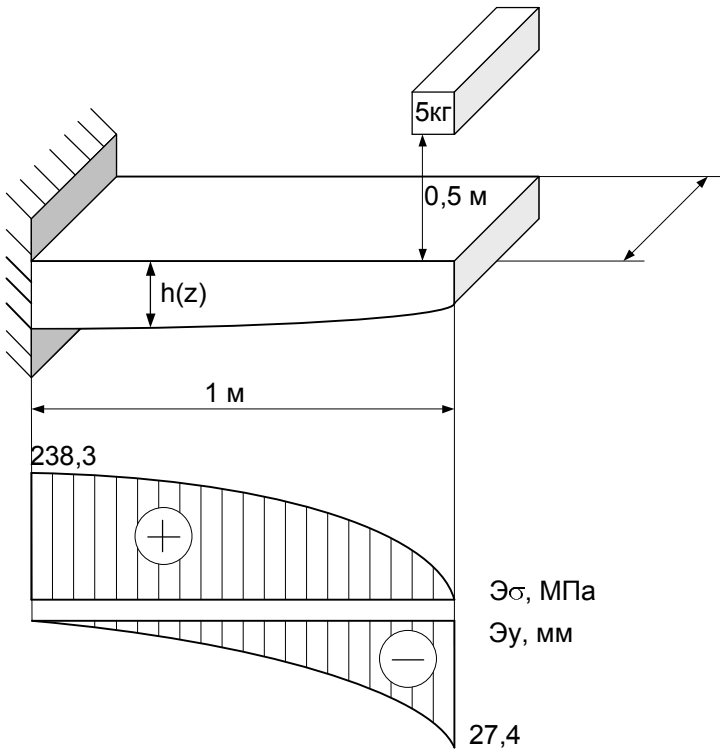


Рисунок 20 – Схема задачи и результат решения

Переходим к вычислению статического прогиба. Жесткость сечения бруса по его длине не постоянна,

поэтому способ Верещагина при решении задачи применять нельзя. Решим задачу методом Мора.

$$\begin{aligned}
 y_{T.B} &= \int_0^1 \frac{5 \cdot 9,81 \cdot z \cdot 1 \cdot z}{200 \cdot 10^9 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{20}{3} (z+1)} dz = 36,79 \cdot 10^{-4} \int_0^1 \frac{z^2}{z+1} dz = \\
 y_{T.B} &= 36,79 \cdot 10^{-4} \cdot \int_0^1 \frac{z^2 - 1 + 1}{z+1} dz = \\
 &= 36,79 \cdot 10^{-4} \cdot \int_0^1 \frac{(z-1)(z+1) + 1}{z+1} dz = \\
 &= 36,79 \cdot 10^{-4} \cdot \int_0^1 \left(\frac{(z-1)(z+1)}{z+1} + \frac{1}{z+1} \right) dz = \\
 &= 36,79 \cdot 10^{-4} \cdot \int_0^1 \left(z - 1 + \frac{1}{z+1} \right) dz = \\
 &= 36,79 \cdot 10^{-4} \cdot \left(\frac{z^2}{2} - z + \ln |z+1| \right) = \\
 &= 36,79 \cdot 10^{-4} \cdot \left(\frac{1^2}{2} - 1 + \ln |1+1| \right) = 7,106 \cdot 10^{-4} \text{ м}
 \end{aligned}$$

Вычислим коэффициент динамичности:

$$K_{дин} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot H}{y_{CT}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,5}{7,106 \cdot 10^{-4}}} = 38,5$$

Статические напряжения в верхних волокнах:

$$\sigma_{CT}^{верх} = \frac{M_X(z)}{W_X(z)} = \frac{5 \cdot 9,81 \cdot z}{10^{-6} \cdot \frac{10 \cdot (2 \cdot \sqrt[3]{z})^2}{6}} = 7,358 \cdot 10^6 \cdot \sqrt[3]{z}$$

Динамические напряжения в крайних волокнах:

$$\sigma_{дин}^{верх} = K_{дин} \cdot \sigma_{CT}^{верх} = 38,5 \cdot 7,358 \cdot 10^6 \cdot \sqrt[3]{z} = 283,28 \cdot \sqrt[3]{z}$$

Максимальный динамический прогиб – прогиб в точке В равен:

$$y_{дин}^{max} = K_{дин} \cdot y_{СТ}^{max} = 38,5 \cdot 0,71 = 27,36 \text{ мм}$$

По результатам вычислений строим эпюру динамических напряжений в верхних волокнах и эпюру динамических прогибов (рис. 20).

4. Расчеты колебаний механических систем

4.1. Общие положения

Из курса общей физики и теоретической механики известно, что любой брус (струна) при заданной длине и жесткости сечения обладает постоянной величиной частоты собственных колебаний. Любое, даже кратковременное воздействие нагрузки на брус приведет к тому, что он начнет испытывать колебания. Всякий раз частота колебаний будет одна и та же. Амплитуда может изменяться, но частота остается постоянной. Она зависит от геометрии бруса, способа его закрепления.

Задача расчета собственной частоты колебаний особенно важна при проектировании быстровращающихся валов насосов и компрессоров. В отличие от неподвижной балки, вал такой машины вращается с большой частотой. В силу неуравновешенности масс на валу, он получает вынужденные колебания, частота которых равна частоте вращения самого вала. Эту частоту называют рабочей частотой. Вполне вероятна ситуация, когда собственная частота колебаний вала совпадает с рабочей частотой. При совпадении собственной и вынужденной частот колебаний наступает явление резонанса и амплитуда колебаний начинает стремительно расти, теоретически до бесконечной величины. На практике же это означает разрушение опор (подшипников) и самого вала.

Таким образом, очень важно не допустить начала резонанса. Для этого нужно вычислить собственную

частоту колебаний вала. Ее также называют критической частотой вращения вала. При выборе рабочей частоты вращения вала исходят из того, что она не должна приближаться к критической частоте с некоторым запасом. Таким образом, задача расчета колебаний сводится к задаче расчета критической скорости вращения вала.

В инженерной практике приходится сталкиваться с изгибными и крутильными колебаниями валов переменного сечения, с присоединенными массами, дисками и т.п. В таких задачах приходится учитывать и собственный вес вала, т.к. он соизмерим с весом присоединенных масс. Обычно вес вала учитывается приложением сил тяжести его отдельных участков, имеющих постоянный диаметр.

Что касается крутильных колебаний, то в данной работе они не рассматриваются.

4.2. Аналитический способ расчета критической скорости вращения вала постоянной жесткости с одним диском

Рассмотрим решение наиболее простой задачи – расчет критической скорости вращения вала с одним диском без учета его собственного веса и, кроме того, с постоянным по длине диаметром.

Согласно принципу Даламбера, динамическое воздействие нагрузки можно свести к статическому, если к заданным нагрузкам добавить силы инерции. Деформация вала от сил инерции показана на рис. 21.

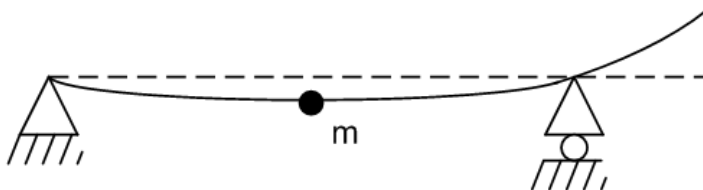


Рисунок 21 – Деформация вала от сил инерции

Сначала зададим закон перемещения сечений вала в результате его колебаний. Как правило, колебания хорошо описываются формулой:

$$\Delta = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Этот закон примем для описания процесса перемещения сечения вала, в котором установлена сосредоточенная масса m .

С другой стороны, если принять во внимание принцип Даламбера, перемещения сечений можно определить как прогибы от действия силы инерции по правилам статики. Для вычисления прогибов сечений вала воспользуемся методом сил:

$$\Delta_1 = \delta_{11} \cdot P_1,$$

где δ_{11} – перемещение точки приложения силы P_1 от силы, равной единице, а P_1 – сила инерции, возникающая от сосредоточенной массы m .

Силу инерции можно вычислить с помощью второго закона Ньютона:

$$P_1 = -m \cdot a = -m \cdot \frac{d^2 \Delta}{dt^2}$$

Знак минус в формуле означает, что направление силы инерции всегда противоположно направлению ускорения a . Ускорение a можно определить как вторую производную от перемещения. Сначала выполним дифференцирование уравнения перемещений, а потом от этой производной найдем еще раз производную:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta}{dt} &= A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ \frac{d^2 \Delta}{dt^2} &= -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \end{aligned}$$

Тогда сила инерции будет рассчитываться по формуле:

$$P_1 = -m \cdot (-A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)) = m \cdot A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Теперь формулу силы можно подставить в формулу метода сил:

$$\Delta_1 = \delta_{11} \cdot m \cdot A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Приравняем правые части полученного уравнения и закона колебаний сосредоточенной массы:

$$\begin{aligned} A \cdot \sin(\omega \cdot t) &= \delta_{11} \cdot m \cdot A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ &= \delta_{11} \cdot m \cdot \omega^2 \end{aligned}$$

Теперь можно рассчитать скорость вращения вала, определяющую частоту собственных колебаний. Как известно, она равна критической скорости вращения вала:

$$\omega_{кр}^2 = \frac{1}{\delta_{11} \cdot m}$$

Критическая частота вращения вала может быть вычислена по известной формуле:

$$n_{кр} = \frac{\omega_{кр}}{2 \cdot \pi}$$

Перемещение от единичной силы можно вычислить любым удобным методом, например, способом Верещагина.

Пример 11. В качестве примера рассмотрим схему вала, показанную на рис. 21. Пусть длина вала между соседними опорами равна 2 м. Масса груза составляет 6 кг. Диаметр вала по всей длине одинаковый и равен 40 мм. Вычислим критическую частоту вращения.

Перемещение от силы, равной единице, определим способом Верещагина. Построим эпюры изгибающего момента и вычислим значение коэффициента δ_{11} (рис. 22).

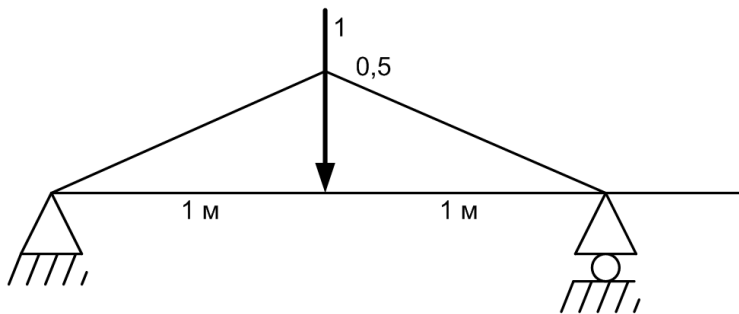


Рисунок 22 – Эпюра изгибающего момента от единичной силы

$$\delta_{11} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5}{E \cdot I_x} \cdot 2 = \frac{2}{3 \cdot E \cdot I_x}$$

Рассчитаем жесткость вала:

$$E \cdot I_x = 200 \cdot 10^9 \cdot \frac{\pi \cdot (4 \cdot 10^{-2})^4}{64} = 25134 \quad (\text{Н} \cdot \text{м}^2)$$

Тогда:

$$\delta_{11} = \frac{2}{3 \cdot 25134} = 265 \cdot 10^{-6}$$

Рассчитаем квадрат критической скорости вращения вала:

$$\omega_{\text{кр}}^2 = \frac{1}{\delta_{11} \cdot m} = \frac{1}{265 \cdot 10^{-6} \cdot 6} = 22641$$

$$\omega_{\text{кр}} = \sqrt{22641} = 150,5 \quad \text{с}^{-1}$$

Критическая частота вращения вала:

$$n_{\text{кр}} = \frac{\omega_{\text{кр}}}{2 \cdot \pi} = \frac{150,5}{2 \cdot 3,141592} = 23,9 \quad \text{с}^{-1}$$

Пересчитаем частоту в оборотах в минуту:

$$n_{\text{кр}} = 23,9 \cdot 60 = 1437 \quad \text{об/мин}$$

Значение критической скорости вращения вала позволяет правильно подобрать рабочую частоту вращения. Не допускается задавать рабочую частоту близко к критической. Рабочая частота не должна превышать величины 0,7 от нее. Для частоты 1437 об/мин она будет равна 1006 об/мин.

Рассмотрим влияние степени приближения частот на величину коэффициента динамичности. Динамический коэффициент рассчитывается по формуле:

$$K_{дин} = \frac{1}{1 - \frac{n_p^2}{n_{кр}^2}}$$

Построим график зависимости коэффициента динамичности от рабочей частоты вращения (рис. 23).

Из рис. 23 видно, что при приближении к критической частоте, коэффициент динамичности резко возрастает и стремится к бесконечности. При значении рабочей частоты, меньше 0,7 от критической, коэффициент динамичности не превышает двух единиц (рис. 23).

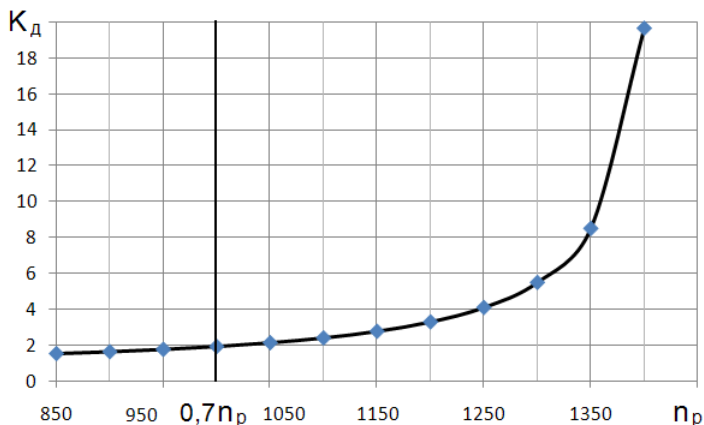


Рисунок 23 – График изменения коэффициента динамичности в зависимости от частоты вращения вала

4.3. Аналитический способ расчета критической скорости постоянной жесткости с двумя дисками

Задача аналогична предыдущей, но с большим числом сосредоточенных масс. Если вал несет на себе 2 диска, то его колебания становятся сложнее – число степеней свободы такого вала равно двум единицам. Перемещения сечений вала определяются в такой задаче двумя уравнениями:

$$\Delta_1 = A_1 \cdot \text{Sin}(\omega \cdot t)$$

$$\Delta_2 = A_2 \cdot \text{Sin}(\omega \cdot t)$$

Число уравнений метода сил тоже будет равно двум:

$$\Delta_1 = \delta_{11} \cdot P_1 + \delta_{12} \cdot P_2$$

$$\Delta_2 = \delta_{21} \cdot P_1 + \delta_{22} \cdot P_2$$

Также, как и в задаче с одним диском, рассчитаем силы инерции:

$$P_1 = -m_1 \cdot (-A_1 \cdot \omega^2 \cdot \text{Sin}(\omega \cdot t)) = m_1 \cdot A_1 \cdot \omega^2 \cdot \text{Sin}(\omega \cdot t)$$

$$P_2 = -m_2 \cdot (-A_2 \cdot \omega^2 \cdot \text{Sin}(\omega \cdot t)) = m_2 \cdot A_2 \cdot \omega^2 \cdot \text{Sin}(\omega \cdot t)$$

Тогда уравнения метода сил примут вид:

$$\Delta_1 = \delta_{11} \cdot m_1 \cdot A_1 \cdot \omega^2 \cdot \text{Sin}(\omega \cdot t) + \delta_{12} \cdot m_2 \cdot A_2 \cdot \omega^2 \cdot \text{Sin}(\omega \cdot t)$$

$$\Delta_2 = \delta_{21} \cdot m_1 \cdot A_1 \cdot \omega^2 \cdot \text{Sin}(\omega \cdot t) + \delta_{22} \cdot m_2 \cdot A_2 \cdot \omega^2 \cdot \text{Sin}(\omega \cdot t)$$

Приравниваем правые части уравнений колебаний и уравнений метода сил:

$$A_1 = \delta_{11} \cdot m_1 \cdot A_1 \cdot \omega^2 + \delta_{12} \cdot m_2 \cdot A_2 \cdot \omega^2$$

$$A_2 = \delta_{21} \cdot m_1 \cdot A_1 \cdot \omega^2 + \delta_{22} \cdot m_2 \cdot A_2 \cdot \omega^2$$

Далее записываем систему уравнений относительно неизвестных значений амплитуд колебаний:

$$\begin{cases} (\delta_{11} \cdot m_1 \cdot \omega^2 - 1) \cdot A_1 + (\delta_{12} \cdot m_2 \cdot \omega^2) \cdot A_2 = 0 \\ (\delta_{21} \cdot m_1 \cdot \omega^2) \cdot A_1 + (\delta_{22} \cdot m_2 \cdot \omega^2 - 1) \cdot A_2 = 0 \end{cases}$$

Система уравнений имеет решение, если определитель ее коэффициентов равен нулю:

$$\det = (\delta_{11} \cdot m_1 \cdot \omega^2 - 1) \cdot (\delta_{22} \cdot m_2 \cdot \omega^2 - 1) - (\delta_{12} \cdot m_2 \cdot \omega^2) \cdot (\delta_{21} \cdot m_1 \cdot \omega^2) = 0$$

Обозначим $\omega^2 = z$.

Тогда получим уравнение:

$$(\delta_{11} \cdot \delta_{22} - \delta_{12} \cdot \delta_{21}) \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot z^2 - (\delta_{11} \cdot m_1 + \delta_{22} \cdot m_2) \cdot z + 1 = 0$$

Обозначим:

$$\alpha_1 = (\delta_{11} \cdot \delta_{22} - \delta_{12} \cdot \delta_{21}) \cdot m_1 \cdot m_2; \quad \alpha_2 = -(\delta_{11} \cdot m_1 + \delta_{22} \cdot m_2)$$

Получаем квадратное уравнение:

$$\alpha_1 \cdot z^2 + \alpha_2 \cdot z + 1 = 0$$

Получаем 2 решения квадратного уравнения:

$$z_{1,2} = \frac{-\alpha_2 \pm \sqrt{\alpha_2^2 - 4 \cdot \alpha_1}}{2 \cdot \alpha_1}$$

Критическая скорость вращения вала:

$$\omega_{кр} = \sqrt{z}$$

Пример 12. Требуется рассчитать критическую скорость вращения стального вала постоянной жесткости с двумя сосредоточенными массами, схема которого показана на рис. 24.

Диаметр вала – 40 мм.

Массы дисков: $m_1 = 2$ кг, $m_2 = 3$ кг.

Добавляем 2 вспомогательных бруса. Направления единичных сил задаем по направлениям сил инерции, возникающих от действия сосредоточенных масс (рис. 24).

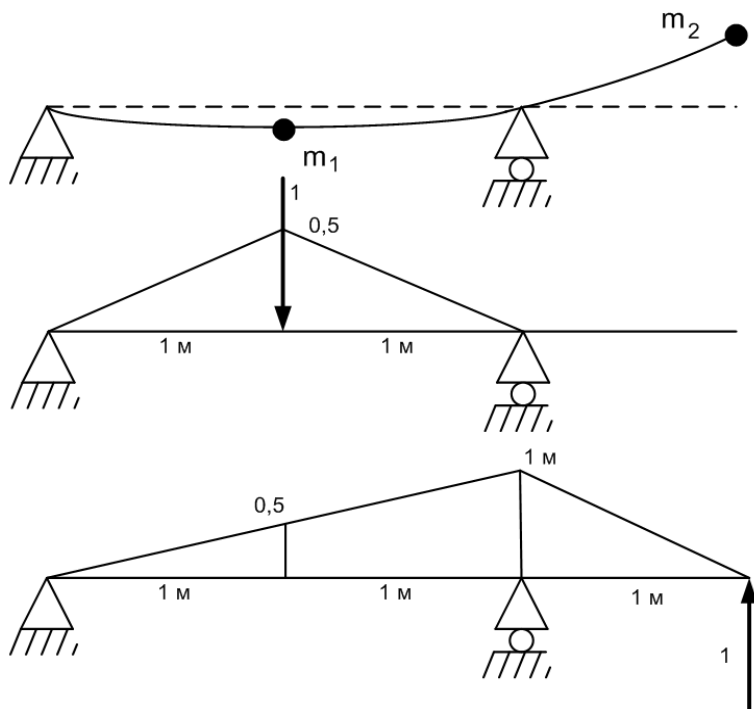


Рисунок 24 – Вал с двумя дисками

Строим эпюры изгибающих моментов от действия единичных сил. Для вычисления коэффициентов уравнений метода сил перемножаем эпюры по правилу Верещагина.

$$\delta_{11} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 = \frac{1}{6 \cdot E \cdot I_x}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{1}{E \cdot I_x}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{E \cdot I_x} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0,5 \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{4 \cdot E \cdot I_x}$$

Рассчитаем жесткость вала:

$$E \cdot I_x = 200 \cdot 10^9 \cdot \frac{\pi \cdot (4 \cdot 10^{-2})^4}{64} = 25134 \quad (\text{Н} \cdot \text{м}^2)$$

После деления на жесткость:

$$\delta_{11} = 66,3 \cdot 10^{-10}$$

$$\delta_{22} = 397,9 \cdot 10^{-10}$$

$$\delta_{12} = 99,5 \cdot 10^{-10}$$

Вычислим:

$$\alpha_1 = (\delta_{11} \cdot \delta_{22} - \delta_{12} \cdot \delta_{21}) \cdot m_1 \cdot m_2 = 0,9895 \cdot 10^{-15};$$

$$\alpha_2 = -(\delta_{11} \cdot m_1 + \delta_{22} \cdot m_2) = -1,3263 \cdot 10^{-7}$$

Решения квадратного уравнения:

$$z_1 = 8019633,3$$

$$z_2 = 126021646,7$$

Выбираем первое решение как решение, дающее наименьшую критическую скорость:

$$\omega_{кр} = 2831,9 \text{ рад/с}$$

Критическая частота вращения вала составит:

$$n = 2831,9 \cdot 60 / (2 \cdot 3,14) = 27042,6 \text{ об/мин.}$$

4.4. Энергетический метод Релея определения критической скорости вращения вала

Способ определения критической скорости вращения вала, рассмотренный в предыдущем параграфе, требует больших усилий при числе сосредоточенных масс больше двух.

Для решения задач с большим числом дисков наиболее удобным является энергетический метод Релея. Метод основан на использовании закона сохранения энергии, согласно которому сумма кинетической и потенциальной энергий системы постоянна. Рассмотрим

вывод формулы Релея. Пусть задан вал с несколькими сосредоточенными массами (рис. 25).

Закон движения массы с номером i можно записать в виде тригонометрической функции

$$\Delta_i = A_i \cdot \text{Sin}(\omega \cdot t)$$

где Δ_i - текущее перемещение; A_i - амплитуда (наибольший прогиб). Тогда скорость после дифференцирования будет равна:

$$\frac{d\Delta_i}{dt} = A_i \cdot \omega \cdot \text{Cos}(\omega \cdot t)$$

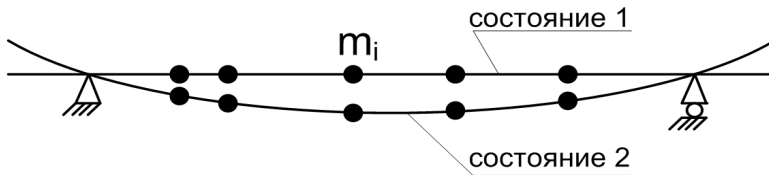


Рисунок 25 – Поясняющий рисунок к выводу формулы Релея

Когда вал и присоединенные массы проходят состояние 1 (рис. 25), потенциальная энергия системы равна нулю, а кинетическая энергия максимальна, так как в этом положении максимальна скорость. Максимум потенциальной энергии достигается в момент наибольшего отклонения от положения равновесия – состояние 2. Кинетическая энергия в этом состоянии равна нулю. Если пренебречь потерями энергии на внутреннее трение, возникающее в результате упругой деформации, то согласно закону сохранения энергии можно записать:

$$U_{\text{max}} = E_{\text{max}}$$

Кинетическая энергия системы, как известно, рассчитывается по формуле:

$$E = \frac{\sum m_i \cdot v_i^2}{2} = \frac{\sum m_i \cdot A_i^2 \cdot \omega^2 \cdot \text{Cos}^2 \omega \cdot t}{2} = \frac{\omega^2 \cdot \sum m_i \cdot A_i^2 \cdot \text{Cos}^2 \omega \cdot t}{2}$$

Кинетическая энергия максимальна в состоянии 1, когда переменная $t = 0 + 2\pi n$, Косинус такого аргумента равен единице. Тогда можно вычислить максимальное значение кинетической энергии:

$$E_{\max} = \frac{\omega^2 \cdot \sum m_i \cdot A_i^2}{2}$$

где i -номер массы (диска).

В состоянии 2 кинетическая энергия равна нулю, а потенциальная энергия максимальна. Потенциальная энергия деформации рассчитывается по формуле сопротивления материалов:

$$u = \sum \frac{P_i \cdot \Delta_i}{2} = \sum \frac{P_i \cdot A_i \cdot \text{Sin} \omega \cdot t}{2}$$

Максимальное значение потенциальной энергии соответствует времени $t = \frac{1}{2} \pi + 2\pi n$, когда функция синуса максимальна и равна единице. Тогда максимальная потенциальная энергия может быть рассчитана по формуле:

$$u_{\max} = \sum \frac{P_i \cdot A_i}{2} = \frac{\sum P_i \cdot A_i}{2}$$

Подставив обе формулы в закон сохранения энергии и заменив амплитуду колебаний на максимальный прогиб в точке, получаем расчетную формулу для вычисления критической скорости вращения (формула Релея):

$$\frac{\omega^2 \cdot \sum m_i \cdot A_i^2}{2} = \frac{\sum P_i \cdot A_i}{2}$$

$$\omega^2 \cdot \sum m_i \cdot Y_i^2 = \sum P_i \cdot Y_i$$

Тогда формула Релея для изгибных колебаний будет следующей:

$$\omega^2 = \frac{\sum P_i \cdot Y_i}{\sum m_i \cdot Y_i^2} = \frac{g \cdot \sum m_i \cdot Y_i}{\sum m_i \cdot Y_i^2}$$

Так как силами, приложенными к валу, являются силы тяжести отдельных участков вала и силы тяжести отдельных дисков, то окончательная формула записывается через массы, а величина g является ускорением свободного падения.

Пример 13. В качестве примера рассмотрим ту же задачу, которую решали при изучении метода расчета критической скорости для двух сосредоточенных масс.

Вычислим перемещения сечений с сосредоточенными массами по формулам метода сил:

$$\Delta_1 = \delta_{11} \cdot P_1 + \delta_{12} \cdot P_2$$

$$\Delta_2 = \delta_{21} \cdot P_1 + \delta_{22} \cdot P_2$$

Коэффициенты канонических уравнений метода рассчитаны в предыдущей задаче:

$$\delta_{11} = 66,3 \cdot 10^{-10}$$

$$\delta_{22} = 397,9 \cdot 10^{-10}$$

$$\delta_{12} = 99,5 \cdot 10^{-10}$$

$$\text{Силы } P_1 = 9,81 \cdot 2 = 19,62 \text{ Н. } P_2 = 9,81 \cdot 3 = 29,43 \text{ Н.}$$

Тогда:

$$Y_1 = 66,3 \cdot 10^{-10} \cdot 19,62 + 99,5 \cdot 10^{-10} \cdot 29,43 = 0,423 \cdot 10^{-6}$$

$$Y_2 = 99,5 \cdot 10^{-10} \cdot 19,62 + 397,9 \cdot 10^{-10} \cdot 29,43 = 1,366 \cdot 10^{-6}$$

$$\omega^2 = \frac{9,81 \cdot (2 \cdot 0,423 \cdot 10^{-6} + 3 \cdot 1,366 \cdot 10^{-6})}{2 \cdot (0,423 \cdot 10^{-6})^2 + 3 \cdot (1,366 \cdot 10^{-6})^2} = 8142472,1$$

Критическая скорость:

$$\omega_{кр} = \sqrt{8142472,1} = 2853,5$$

Критическая частота:

$$n_{\text{кр}} = \frac{2853,5}{2 \cdot 3,141592} \cdot 60 = 27248,9 \text{ об/мин.}$$

Сравним результаты решения одной задачи двумя способами. Разница в результатах составляет 0,76%. Считается, что энергетический метод несколько завышает результат. Однако, учитывая, что ошибка решения не превышает 1% и, при этом, трудоемкость самого решения значительно снижается, метод Релея можно считать незаменимым для расчета критической скорости вращения вала с несколькими сосредоточенными массами.

4.5. Расчет критической скорости вращения вала переменной жесткости с учетом собственного веса

4.5.1. Пояснения к работе с программой WinCritic

Расчет критической скорости вращения вала переменной жесткости с учетом собственного веса представляет собой сложную задачу. Решить ее без применения вычислительной техники практически невозможно.

Программа расчета критической скорости вращения вала WinCritic разработана на кафедре МАХП НХТИ для студентов специальности МАХП и ОНПП при решении задач курсового и дипломного проектирования.

Программа запускается выбором команды главного меню операционной системы MS Windows – Пуск – Программы – МАХП – WinCritic.

Программа может работать в двух режимах: ручном и автоматизированном. В первом случае программа использует диалоговый режим для выполнения расчетов вала. Второй режим предназначен для ее использования в качестве компонента разрабатываемых студентами САПР вала путем интегрирования в систему.

Ручной режим работы программы предполагает автономное использование программы как отдельного приложения Windows. При работе с программой можно выделить 3 этапа:

- ввод данных для расчета;
- непосредственно сам расчет;
- работа с результатами расчета (редактирование и печать).

В большинстве подобных программ для проведения расчета используются графические средства ввода исходных данных, которые требуют значительных затрат времени. Ввод данных в программу WinCritic осуществляется в режиме диалога с пользователем с использованием табличных форм.

После загрузки программы WinCritic открывается главное окно программы, показанное на рис. 26. Оно содержит строку главного меню со стандартными пунктами – Файл, Правка, Справка, а также специфичными командами Ввод данных и Расчет, заставку и кнопку выхода из программы.

Если предполагается начать новый расчет, то выбирается команда главного меню Ввод данных.

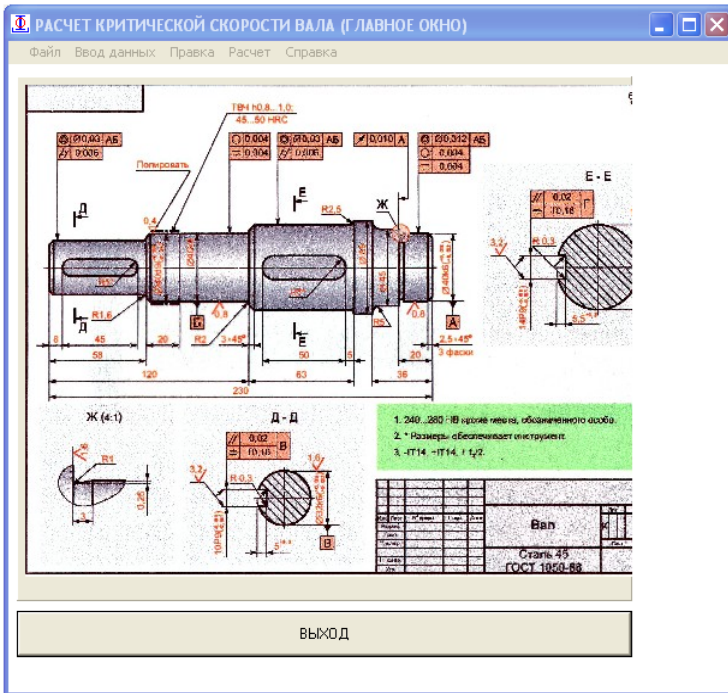


Рисунок 26 - Главное окно программы

Этот этап является наиболее трудоемким и ответственным. При выборе команды «Ввод данных» запускается программная утилита – Мастер ввода. Как и любой мастер приложений Windows, он предназначен для облегчения процесса выполнения сложной многоэтапной операции, в данном случае ввода данных. Мастер требует заполнения полей нескольких экранных форм, которые выходят последовательно друг за другом.

Первая экранная форма мастера ввода данных показана на рис. 27.

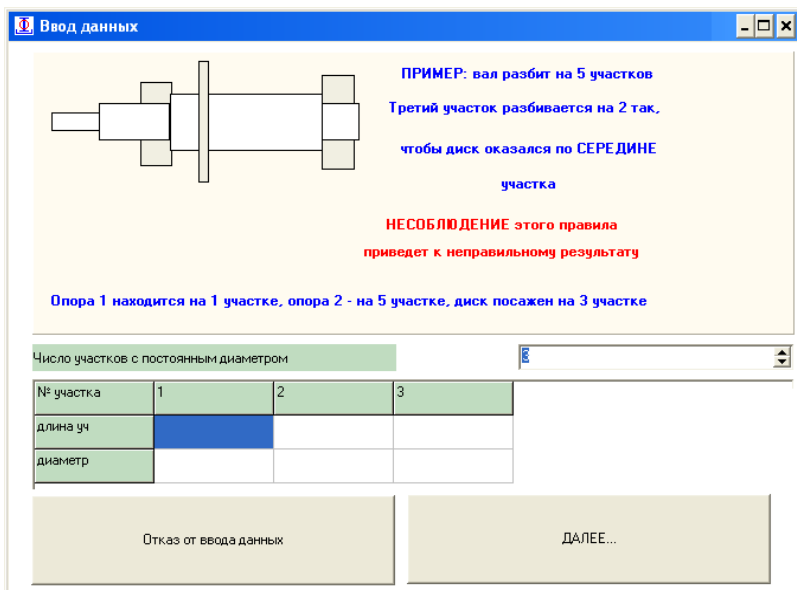


Рисунок 27 - Первая экранная форма мастера ввода данных

Здесь нужно ввести, в первую очередь, число участков с постоянным диаметром. При вводе числа участков следует помнить *важное правило*: программа считает, что сосредоточенные массы (диски, рабочие колеса и пр.) всегда располагаются по середине участка вала. Если длина участка, например, составляет 100 мм, то масса расположена на расстоянии 50 мм от левого его конца. Такой подход облегчает ввод - здесь не нужно рассчитывать расстояния от начала вала.

Однако в случае несимметричного по отношению к концам участка расположения сосредоточенной массы, этот участок придется искусственно разбить на два – так, чтобы точка расположения сосредоточенной массы оказалась бы на середине одного из полученных участков.

Например, для вала, показанного на рис. 28, рабочее

колесо на втором участке расположено несимметрично – оно сдвинуто к его правой границе.

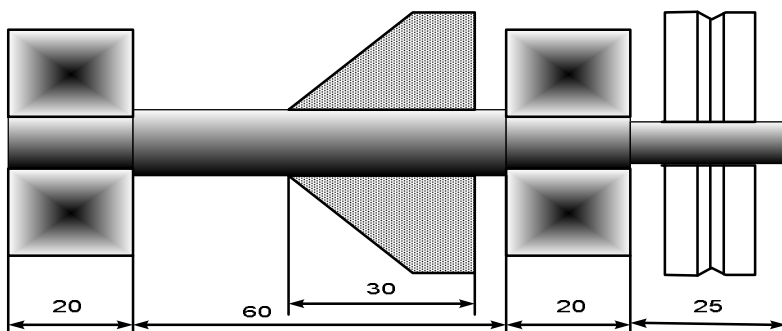


Рисунок 28 - Схема вала, рассматриваемого в качестве примера

Чтобы правильно ввести исходные данные по точке расположения рабочего колеса, нужно второй участок разделить на 2 участка так, чтобы масса оказалась бы в середине нового третьего участка. Длина колеса – 30 мм, зазор между колесом и подшипником справа – 5 мм. Добавим еще 5 мм слева от колеса. Тогда длина нового третьего участка составит – 40 мм. Длина нового второго участка будет равна – $60 - 40 = 20$ мм.

Продолжаем вводить данные в поля ввода первой экранной формы. Значения длин участков и диаметров следует вводить в мм (рис. 29).

Для перехода в следующую ячейку таблицы ввода можно выполнить щелчок левой кнопкой мыши на ней или нажать клавишу Tab на клавиатуре. Закончив ввод данных на первой экранной форме, нажимаем на кнопку «Далее...».

Число участков с постоянным диаметром					5
№ участка	1	2	3	4	5
длина уч	20	20	40	20	25
диаметр	20	25	25	20	15

Рисунок 29 - Ввод данных в табличную часть первой экранной формы

На втором шаге работы Мастера ввода открывается вторая экранная форма «Ввод данных продолжение», показанная на рис. 30.

Ввод данных продолжение

Введите НОМЕРА участков, на которых находятся опоры

Опора А: Опора В:

Сосредоточенные массы (диски, колеса и т.п.) Кол-во:

№ диска	1	2
№ участка	3	5
Масса, кг	4	3

Рисунок 30 - Вторая экранная форма ввода

Сначала вводим номера участков, на которых располагаются опоры вала – левый и правый подшипники. Программа может рассчитывать валы только с двумя подшипниками. Возможность расчета статически

неопределимых валов в текущую версию программы не заложена.

При вводе номеров участков расположения опор вала соблюдайте правила:

- 1) подшипники не имеют ширины;
- 2) опора устанавливается в точке, расположенной по середине участка.

В том случае, когда подшипники устанавливаются на вал с одной стороны вала, например так, как показано на рис. 31, между опорами должно остаться хотя бы небольшое расстояние.

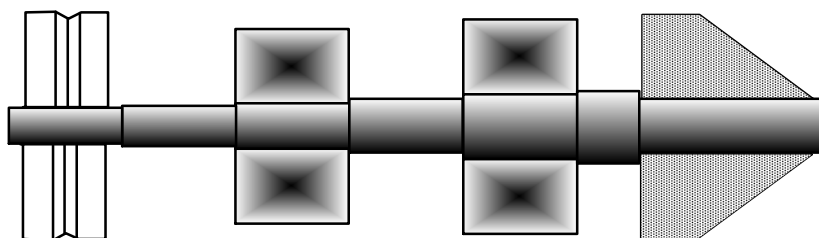


Рисунок 31 - Схема вала с подшипниками, устанавливаемыми с одной стороны.

Далее вводится число сосредоточенных масс, которые несет на себе вал, а также номера участков, на которых они установлены и их массы (рис. 30).

После завершения ввода данных на второй экранной форме Мастера ввода следует выполнить команду «Сохранить ввод», нажав соответствующую кнопку. Важно помнить, что при нажатии на эту кнопку данные сохраняются только в памяти программы. Сохранение введенных данных в файле на диске выполняется позже.

После выполнения этой команды выводится третья экранная форма «Схема вала» (рис. 32).

Она отображает сформированный эскиз -

схематичное изображение рассчитываемого вала и служит для контроля правильности ввода данных. Если сформированная схема вала не соответствует заданной схеме, следует отказаться от дальнейшего расчета и повторить ввод.

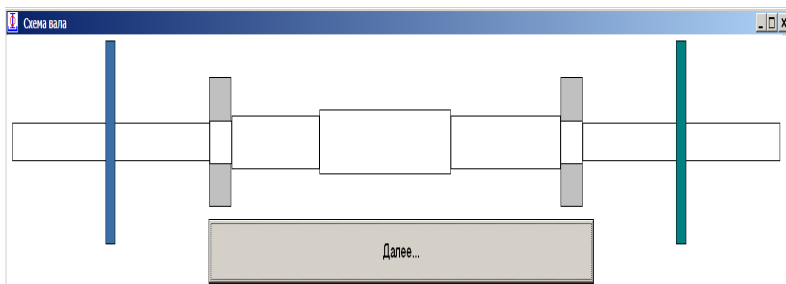


Рисунок 32 - Экранная форма «Схема вала»

Следует помнить, что изображение вала на рис. 32 является схематичным. Ширина и диаметры подшипников не соответствуют размерам стандартных подшипников качения, а сосредоточенные массы изображаются узкими прямоугольниками.

На этом работа Мастера ввода завершается, программа возвращает главное окно с меню команд.

Введенные данные можно сохранить в файле специального формата, имеющего расширение *.val на диске компьютера. Для этого после ввода данных нужно выбрать команду «Сохранить как...» из пункта «Файл» главного меню программы. Можно задать любое имя файла, которое допускается операционной системой Windows, например, ИвановКурсовик.val, но нельзя изменять расширение имени файла - *.val. Файл можно сохранить в любой папке.

Если нужно поработать с этими же данными в другой раз, например, на следующий день, можно открыть файл с сохраненными данными, выбрав команду «Открыть» пункта «Файл» главного меню программы.

4.5.2. Выполнение расчетов с помощью программы WinCritic

Программа WinCritic выполняет 3 вида расчетов вала:

- критической скорости вращения вала;
- расчет на статическую прочность;
- расчет на динамическую прочность.

Для выбора нужного расчета следует вызвать соответствующую команду пункта меню «Расчеты». Например, при выборе команды «Расчет критической скорости вращения вала», программа выполняет расчет и выводит эпюры прогибов вала и внутреннего изгибающего момента (рис. 33), а также числовые результаты (рис. 34).

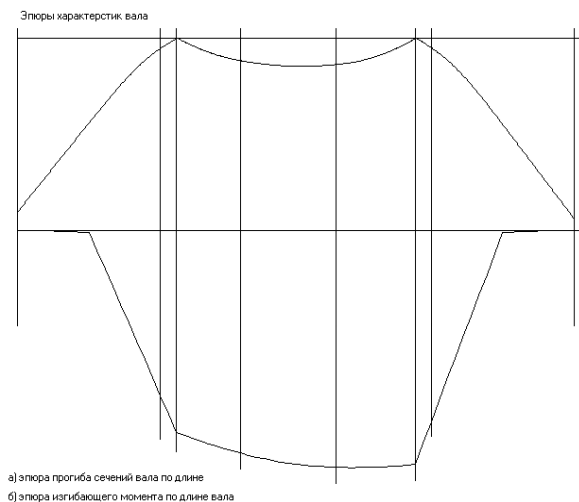


Рисунок 33 - Эпюры, построенные программой

Результаты выводятся, во-первых, на экран монитора; во-вторых, сохраняются в текстовом файле val.txt; в третьих, выводятся в рабочую книгу MS Excel, которую можно сохранить под любым именем в форме файла табличного процессора.

Расчеты на динамическую нагрузку выполняются по результатам расчетов критической скорости вращения вала. Программа запрашивает рабочую частоту вращения вала, рассчитывает коэффициент нарастания колебаний и определяет динамические характеристики.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Результат расчета вала программой WinCrit 3							
2	Исходные данные для расчета:							
3	Число участков вала N = 7							
4	Длина и диаметр каждого участка вала:							
5	№ уч:	1	2	3	4	5	6	7
6	диам.	18	20	25	30	25	20	18
7	длина	180	20	80	120	100	20	180
8	Число и расположение сосредоточенных масс:							
9	№диска	1	2					
10	масса	6	7					
11	№уч-ка	1	7					
12	Результаты расчетов:							
13	MAX изгиб. момент от сил инерции					Mmax=	8,2	Нм
14	MAX статич. прогиб					Umax=	94,5	мкм
15	крит. скорость вращения вала					w=	469,1	рад/с
16	крит. частота вращения					n=	4479,7	об/мин

Рисунок 34 – Результаты расчетов

4.6. Задания на самостоятельное решение

1) Применяя аналитический способ, выполните расчет критической скорости вращения вала постоянной жесткости без учета собственного веса с двумя дисками, схема которого показана на рис. 1 в приложении 2.

Диаметр вала 30 мм.

Массы m_1 и m_2 , соответственно, равны 4 и 5 кг.

Длины участков:

$l_1 = 300$ мм, $l_2 = 200$ мм, $l_3 = 90$ мм, $l_4 = 70$ мм,
 $l_5 = 80$ мм.

2) Применяя энергетический метод Релея, выполните расчет критической скорости вращения вала постоянной жесткости без учета собственного веса с тремя дисками, схема которого показана на рис. 2 приложения 2. Статические прогибы должны быть рассчитаны способом Верещагина.

Диаметр вала 40 мм.

Массы дисков m_1 , m_2 и m_3 , установленных на вале, соответственно, равны 3, 4 и 5 кг.

Длины участков:

$l_1 = 300$ мм, $l_2 = 100$ мм, $l_3 = 200$ мм,
 $l_4 = 100$ мм, $l_5 = 200$ мм, $l_6 = 300$ мм.

3) Применяя энергетический метод Релея, выполните расчет критической скорости вращения вала постоянной жесткости без учета собственного веса с четырьмя дисками, схема которого показана на рис. 3 приложения 2. Статические прогибы должны быть рассчитаны с помощью универсального уравнения изогнутой оси бруса методом начальных параметров.

Диаметр вала 50 мм.

Массы дисков m_1 , m_2 , m_3 и m_4 , установленных на вале, соответственно, равны 3, 4, 6 и 5 кг.

Длины участков:

$l_1 = 300$ мм, $l_2 = 100$ мм, $l_3 = 200$ мм,
 $l_4 = 100$ мм, $l_5 = 200$ мм, $l_6 = 300$ мм.

3) Применяя компьютерную программу WinCritic, выполните расчет критической скорости вращения вала со ступенчатым изменением диаметра с учетом собственного веса с тремя дисками, схема которого показана на рис. 4 приложения 2.

Исходные данные для всех вариантов:

Масса шкива = 6 кг, масса первого колеса = 5 кг,
масса второго колеса = 4 кг, масса ротора = 6 кг.

Диаметры и длины участков приводятся в таблице.

Таблица со значениями диаметров и длин участков

Строка 1 – номера участков;

Строка 2 – диаметры участков;

Строка 3 – длины участков.

Варианты заданий

Вариант 1

1	2	3	4	5	6	7	8
30	35	40	45	36	32	28	24
90	120	24	20	110	90	20	70

Вариант 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	25	30	35	40	45	40	35	30
120	10	20	160	24	20	160	20	90

Вариант 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9
16	20	24	28	32	35	40	35	32
80	30	120	140	20	24	160	24	60

Вариант 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	24	28	32	35	40	36	32	28
18	12	100	16	24	20	180	20	90

Вариант 5

1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	24	28	32	36	40	45	50	46
18	12	100	16	120	20	28	20	70

Вариант 6

1	2	3	4	5	6	7	8	9
16	20	25	30	34	38	45	50	46
160	16	20	16	180	20	28	20	100

Вариант 7

1	2	3	4	5	6	7	8	9
22	26	30	34	40	44	40	35	30
90	30	110	20	26	30	140	20	24

Вариант 8

1	2	3	4	5	6	7	8	9
22	26	30	34	30	30	28	25	20
90	30	24	16	180	120	18	22	80

Вариант 9

1	2	3	4	5	6	7	8	9
22	26	30	34	30	28	25	20	16
90	30	24	16	280	20	22	20	160

Вариант 10

1	2	3	4	5	6	7	8	9
18	22	26	30	35	40	35	30	26
80	18	120	18	26	180	26	70	160

Вариант 11

1	2	3	4	5	6	7	8
18	22	25	30	25	20	16	16
80	18	20	200	20	16	120	120

Вариант 12

1	2	3	4	5	6	7	8	9
18	22	26	30	35	40	45	50	44
120	26	140	26	28	160	28	26	180

Вариант 13

1	2	3	4	5	6	7
20	24	28	35	40	35	30
240	240	26	28	160	28	90

Вариант 14

1	2	3	4	5	6	7
20	24	30	34	38	35	30
240	26	26	160	160	28	80

Вариант 15

1	2	3	4	5	6	7
20	24	30	34	30	26	22
240	26	26	160	26	240	60

Вариант 16

1	2	3	4	5	6
18	25	30	25	20	16
16	20	260	20	60	180

Вариант 17

1	2	3	4	5	6	7
22	26	30	36	40	35	30
160	60	26	200	26	28	26

Вариант 18

1	2	3	4	5	6	7
26	30	36	40	36	30	25
70	26	240	20	220	28	20

5. Расчеты на усталостную прочность

5.1. Понятие об усталостном разрушении

В результате действия повторно-переменных нагрузок многие детали машин испытывают напряжения, циклически изменяющиеся во времени. Они возникают либо:

- при циклическом изменении внешних сил, действующих на неподвижные детали,
- при циклическом изменении положения детали в поле постоянных сил.

Например, железнодорожные рельсы неподвижны, но на них циклически действует внешняя нагрузка при движении по ним железнодорожного состава. А вал насоса изгибается от действия постоянной силы, но из-за его вращения оказывается, что напряжения в нем тоже циклически изменяются.

При циклическом нагружении сопротивление материала сильно отличается от его поведения при статическом нагружении. Известно, что длительное время работавшая деталь при циклическом нагружении может разрушиться внезапно, без заметных остаточных деформаций, т.е. по хрупкому механизму, хотя изготовлена из пластического материала. Такие случаи разрушения инженеры стали наблюдать впервые в период начала бурного развития машин, но когда еще не было ясного представления о строении материала. Пластичным материалам приписывали волокнистое строение, а хрупким – кристаллическое.

Вид разрушенных деталей как будто свидетельствовал о том, что происходит хрупкое разрушение (отсутствуют остаточные деформации, а излом имеет крупнозернистую структуру). А так как разрушение происходило не сразу, а по прошествии некоторого времени, было высказано предположение, что под

действием циклических напряжений материал "устает" и перерождается из пластического в хрупкий. Тогда появилось понятие «усталость материала» и термин «усталостное разрушение».

Механизм разрушения от циклических напряжений был раскрыт в XX веке, когда был изобретен микроскоп с достаточной возможностью увеличения. Было доказано, что никакого перерождения материала не происходит; как хрупкий, так и пластичный материал имеют кристаллическую структуру, причем эта структура сохраняется и после действия циклических напряжений и даже после разрушения.

Современный взгляд на это явление состоит в следующем. В любом материале существуют микроскопические трещины. В процессе работы в результате повторно-переменного нагружения детали трещины развиваются. Наибольшую опасность представляет самая крупная из них и приходящаяся на слабое место. При переменных напряжениях края трещины то сближаются, то расходятся и перетираются друг о друга. Таким образом, образуется гладкая отполированная зона.

Когда оставшейся части сечения становится недостаточно для обеспечения прочности, деталь внезапно разрушается, разрушается хрупко, т.к. конец трещины является острым надрезом, вызывающим объемное напряженное состояние. Объемное напряженное состояние со всеми тремя положительными, т.е. растягивающими главными напряжениями всегда приводит к хрупкому разрушению, даже если деталь изготовлена из пластичного материала.

Сейчас под "усталостью" понимают разрушение от развивающейся трещины. А само понятие "усталости" исторически сохранилось, хотя полностью изменило смысл. Расчет на усталостную прочность часто называют

расчетом на выносливость.

5.2. Циклы напряжения

Рассмотрим основные характеристики циклов напряжений. На рис. 35 показаны графики изменения напряжений во времени для трех различных циклов напряжений.

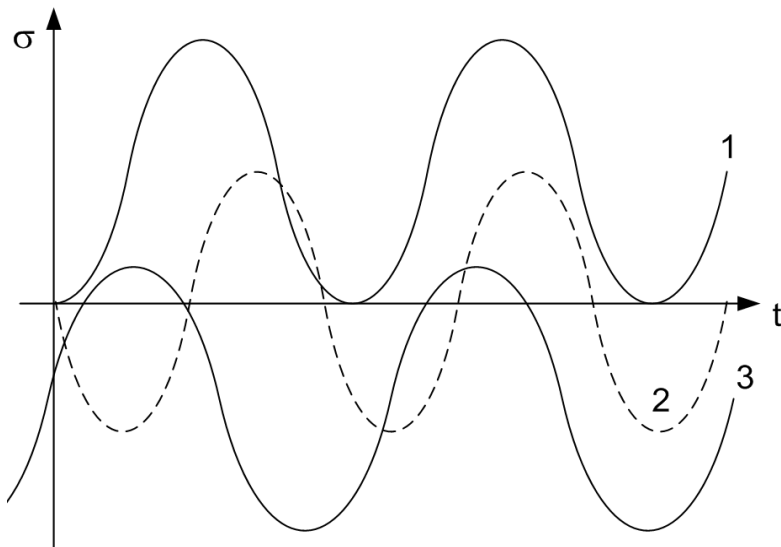


Рисунок 35 - Циклы напряжений

По графику определяют максимальное и минимальное напряжения цикла. Значения определяются с учетом знака напряжения. Например, для графика 3, максимальное напряжение на вершине полувольты, т.к. оно положительно, хотя по модулю оно значительно меньше минимального, которое определяется как нижняя точка полувольты. По максимальному и минимальному напряжениям цикла определяются все основные параметры.

Среднее напряжение цикла:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\min} + \sigma_{\max}}{2}$$

Амплитуда цикла:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$$

Циклы напряжений различают характеристикой или коэффициентом асимметрии цикла.

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$$

Рассмотрим первый график. Для него характерно то, что максимальное и минимальное напряжения цикла по модулю равны $|\sigma_{\max}| = |\sigma_{\min}|$. График по абсолютному значению максимального и минимального напряжений циклов симметричен относительно оси времени. По этой причине цикл с графиком типа 1 называют **симметричным**.

Любой другой тип цикла, кроме первого, будет несимметричным. Рассчитаем среднее значение напряжения, амплитуду и коэффициент асимметрии цикла:

$$\sigma_m = 0, \quad \sigma_a = \sigma_{\max}, \quad r = -1.$$

Любой другой цикл, для которого коэффициент асимметрии не равен -1 , является несимметричным (асимметричным).

Рассмотрим второй график. Для него характерно то, что минимальное напряжение равно нулю. График поднимается от нуля, поэтому его называют **отнулевым**. С другой стороны, напряжение регулярно исчезает и вновь появляется, другими словами - пульсирует, поэтому такой цикл еще называют **пульсирующим**.

Т.к. $\sigma_{\min} = 0$, то основные характеристики такого цикла будут равны:

$$\sigma_m = 0,5 \sigma_{\max} \quad \sigma_a = 0,5 \sigma_{\max}, \quad r = 0.$$

Для третьего графика нельзя вычислить основные характеристики, если не знать численных значений максимального и минимального напряжений.

5.3. Определение предела выносливости материала

Для возникновения усталостного разрушения, очевидно, максимальное по модулю значение напряжения цикла должно превысить определенную величину, которую называют пределом выносливости материала. Предел выносливости σ_r – это наибольшее напряжение циклического изменения нагрузки, которому материал может противостоять бесконечно долго без возникновения усталостного разрушения.

Расчет на выносливость сводится к расчету наибольшего напряжения и сравнения его с пределом выносливости.

$$\sigma_{\max} < \sigma_r$$

Предел выносливости материала определяют опытным путем. Его величина для одного и того же материала, но для разных видов деформаций различна. И даже различна для одного и того же материала и при одной и той же деформации, но при разных значениях коэффициента асимметрии r . Поэтому при проведении опытов испытываются стандартные образцы из одного материала на один интересующий вид деформации, при интересующем значении коэффициента асимметрии.

Первый образец нагружают такой нагрузкой, чтобы в первом же цикле, т.е. с первого раза получить разрушение. Таким образом, первое испытание оказывается аналогичным статическим испытаниям, в которых определяется предел прочности материала. Второй образец испытывают при меньшей нагрузке. Теперь разрушение происходит уже не в первом цикле. Каждый следующий образец испытывают при более низкой нагрузке, всякий раз фиксируя число циклов до разрушения. По результатам опытов строится кривая выносливости материала (рис. 36). На графике по оси абсцисс откладывается число циклов до разрушения, а по оси ординат – величина напряжения, которая

соответствует разрушающей нагрузке.

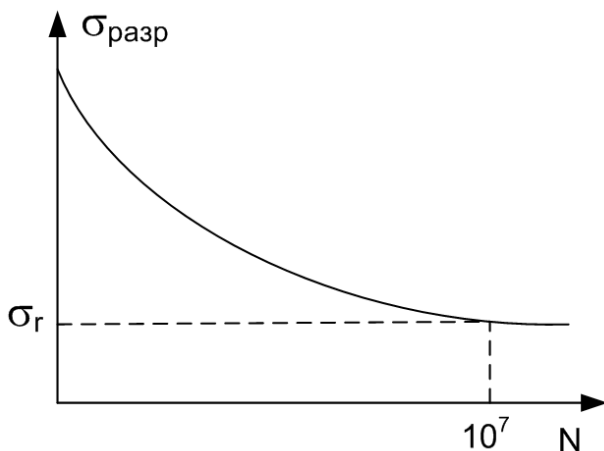


Рисунок 36 – Кривая выносливости

Из определения следует, что при назначении предела выносливости по кривой выносливости, нужно взять то напряжение, которое не вызовет усталостного разрушения при бесконечном числе циклов нагружений. При таком способе назначения предела выносливости расчет на усталостную прочность значительно завышает запас прочности. Дело в том, что в силу развивающегося в процессе работы любой детали ее износа, срок службы детали на практике ограничен. Для стальных деталей, как правило, ресурс по износу составляет величину порядка 10000000 циклов нагружений, что соответствует 7 – 8 тысячам часов ее непрерывной работы. Поэтому предел выносливости материала σ_r назначают исходя из ресурса 10^7 циклов для стали и $4 \cdot 10^6$ для цветных металлов.

5.4. Влияние различных факторов на величину предела выносливости

а) Влияние концентрации напряжений.

Трещина усталости зарождается обычно в местах концентрации напряжений. *Концентрацией напряжений* называется явление роста напряжений в местах резкого изменения поперечного сечения детали. Отношение максимального местного напряжения к среднему называется коэффициентом концентрации

$$\alpha_k = \sigma_{max} / \sigma_m$$

Типичными концентраторами являются: отверстие, канавка, царапина, надрез, и т.д.

Значения α_k приводятся в справочниках. Предел выносливости деталей, имеющих концентраторы напряжений ниже, чем для стандартной детали без концентраторов:

$$\sigma_r^{дет} = \frac{\sigma_r^{стан}}{\alpha_k}$$

б) Влияние размеров детали

Опыт показывает, что детали больших размеров разрушаются при нагрузках, значительно меньших тех, которые соответствует значению предела выносливости, полученного на стандартных образцах. Крупные детали более подвержены усталостному разрушению, чем мелкие. Влияние размеров детали учитывается с помощью масштабного коэффициента. Предел выносливости рассчитываемой детали ниже предела выносливости стандартного образца на величину масштабного коэффициента:

$$\sigma_r^{дет} = \frac{\sigma_r^{стан}}{\alpha_m}$$

Значения масштабного коэффициента приводятся в справочных таблицах.

в) Влияние состояния поверхности

Состояние поверхности детали существенно влияет на предел выносливости. Чем чище обработана

поверхность, тем выше предел выносливости. Наихудшая обработка соответствует поверхности, получаемой при отливке. Чистота поверхности выше при грубой обточке на станке, еще выше при тонкой обточке, далее – шлифовке. Наивысшая чистота соответствует полированной поверхности. Поэтому поверхности стандартных образцов обязательно должны быть отполированы.

Влияние состояния поверхности на предел выносливости учитывается коэффициентом чистоты обработки поверхности:

$$\sigma_r^{дет} = \frac{\sigma_r^{стан}}{\alpha_n}$$

Значения этого коэффициента приводятся в справочных таблицах.

5.5. Расчет на усталостную прочность

Очевидно, что усталостного разрушения не будет в том случае, если максимальное по модулю расчетное напряжение цикла не превышает опытного предела выносливости для данного вида деформации и данного коэффициента асимметрии цикла с учетом концентрации напряжений, чистоты обработки поверхности, размеров детали и естественно, запаса прочности:

$$\sigma_{max} \leq \frac{\sigma_r^{стан}}{\alpha_n \alpha_k \alpha_n n}$$

Максимальное напряжение рассчитывается по формулам сопротивления материалов. Например, при изгибе оно равно:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{Xmax}}{W_X}$$

Однако на практике способ расчета на выносливость по максимальному напряжению возможен только для симметричного и пульсирующего циклов

напряжений. Для них всегда можно найти табличные значения предела выносливости. Для произвольного асимметричного цикла нагружения предел выносливости в справочнике найти не получится: невозможно провести испытания каждого материала для всех возможных вариантов коэффициента асимметрии. Поэтому для произвольного асимметричного цикла при расчете на выносливость пользуются другой формулой:

$$\sigma_a + \Psi \sigma_m \leq \frac{\sigma_{-1}}{\alpha_m \alpha_k \alpha_n n}$$

Несимметричный пытаются свести к симметричному. В правой части формулы находится предел выносливости для симметричного цикла, который есть в таблицах практически для любого материала. Чтобы сравнить некоторый произвольный несимметричный цикл с симметричным, нужно привести данный цикл к равноопасному симметричному. Теперь в левой части формулы находится не максимальное по модулю расчетное напряжение, а расчетные значения среднего значения и амплитуды цикла. С помощью этих величин и коэффициента приведения цикла Ψ проводится приведение. Сам коэффициент приведения можно вычислить через пределы выносливости материала при симметричном и пульсирующем циклах нагружения:

$$\Psi = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}$$

Расчет на выносливость чаще всего проводится в форме проверки. Как правило, к моменту расчета на усталостную прочность все размеры детали уже известны из предыдущих прочностных расчетов. Обычно проверка проводится путем сравнения расчетного коэффициента запаса выносливости с допусковым: расчетный коэффициент запаса должен быть равен или больше допускового.

$$n_{расч} \geq [n]$$

Если в сечениях бруса возникают и нормальные, и касательные напряжения, вычисляют общий коэффициент запаса:

$$n = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}}$$

По такой методике рассчитывают, например, вал круглого сечения на совместное действия кручения и изгиба. Рассмотрим эту задачу подробнее на примере.

Пример 14. На рис. 36 приводится эскиз косозубой передачи, включающей ведущий и ведомый валы, а также зубчатые колеса, посредством которых происходит передача вращающего момента. Для понижающих передач ведомый вал нагружен в несколько раз больше, чем ведущий. Выполним расчет ведомого вала.

На рис. 37 показаны силы, возникающие в зацеплении передачи. Кроме того показана сила давления на ведомый вал со стороны цепной передачи. Эти силы становятся известными в результате проектных расчетов передач.

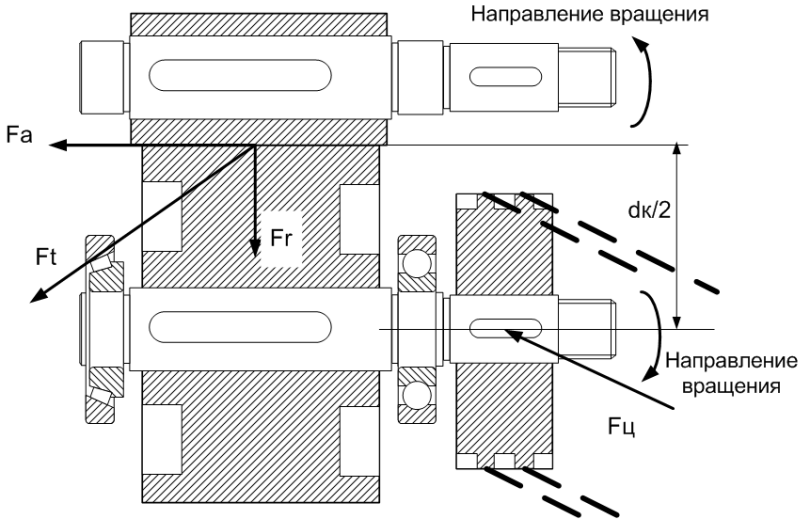


Рисунок 37 – Эскиз передачи

На основании эскиза разрабатываем расчетную схему вала (рис. 38).

В этой задаче большими буквами T обозначены внешние вращающие моменты. Исходные данные для решения задачи известны из предшествующих расчетов.

$$T = 344,7 \text{ Нм.}$$

$F_{ц} = 328,9 \text{ Н}$ – сила давления на вал со стороны цепной передачи.

$F_t = 2908,9 \text{ Нм}$ – окружная сила, действующая в зацеплении цилиндрической передачи.

$F_r = 1075,1 \text{ Н}$ – радиальная сила, действующая в зацеплении цилиндрической передачи.

$F_a = 512,6 \text{ Н}$ – осевая сила, действующая в зацеплении косозубой передачи.

$$d = 237 \text{ мм} – \text{диаметр колеса косозубой передачи.}$$

$L_1 = L_3 = 18 \text{ мм}$ – длина участка вала для посадки подшипника.

$$L_2 = 70 \text{ мм} – \text{длина участка вала для посадки}$$

зубчатого колеса с боковыми зазорами.

$L_4 = 50$ мм – длина участка вала для посадки звездочки цепной передачи с зазором и толщиной стенки корпуса.

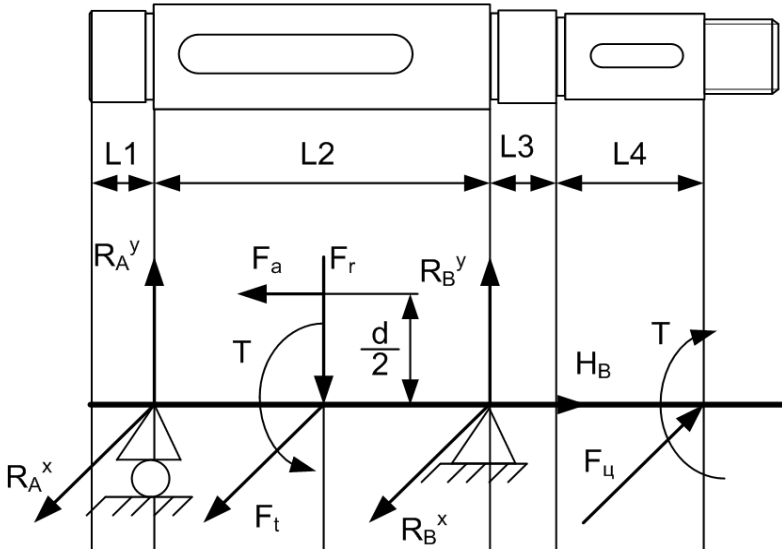


Рисунок 38 - Расчетная схема вала

Решение задачи начинается со статических расчетов. Опорные реакции определяются из уравнений равновесия. Всего можно составить 6 уравнений статики.

Уравнение суммы моментов вокруг оси Z дает тождество:

$$\sum M_z = T - T = 0$$

Из оставшихся пяти уравнений определяем 5 опорных реакций, которые показаны на рис. 39.

$$\sum P_z = 0 \quad - F_a + H_B = 0$$

$$\begin{aligned} \Sigma P_y = 0 & \quad R_A^y - F_r + R_B^y = 0 \\ \Sigma M_x^m \cdot A = 0 & \quad -F_r \cdot \frac{\ell_2}{2} + R_B^y \cdot \ell_2 + F_a \cdot \frac{d}{2} = 0 \\ \Sigma P_x = 0 & \quad -R_A^x - F_t - R_B^x + F_u = 0 \\ \Sigma M_A^y = 0 & \quad -F_t \cdot \frac{\ell_2}{2} - R_B^x \cdot \ell_2 + F_u \cdot (\ell_2 + \ell_3 + \ell_4) = 0 \end{aligned}$$

Опорные реакции:

$$H_B = 512,6 \text{ Н}$$

$$R_B^y = \frac{F_r \cdot \frac{\ell_2}{2} - F_a \cdot \frac{d}{2}}{\ell_2} = \frac{1075,1 \cdot \frac{70}{2} - 512,6 \cdot \frac{237}{2}}{70} \approx -330,2 \text{ Н}$$

$$R_A^y = F_r - R_B^y = 1075,1 - (-330,2) \approx 1405,3 \text{ Н}$$

$$\begin{aligned} R_B^x &= \frac{F_u \cdot (\ell_2 + \ell_3 + \ell_4) - F_t \cdot \frac{\ell_2}{2}}{\ell_2} = \\ &= \frac{328,9 \cdot (70 + 18 + 50) - 2908,9 \cdot 35}{70} = -806,1 \text{ Н} \end{aligned}$$

$$R_A^x = F_u - F_t - R_B^x = 328,9 - 2908,9 + 806,1 = -1773,9 \text{ Н}$$

Далее составляем уравнения внутренних сил Q_x , Q_y и моментов M_x , M_y , разделив брус на три участка с сечениями z_1 , z_2 , z_3 соответственно (рис. 39 и рис. 40).

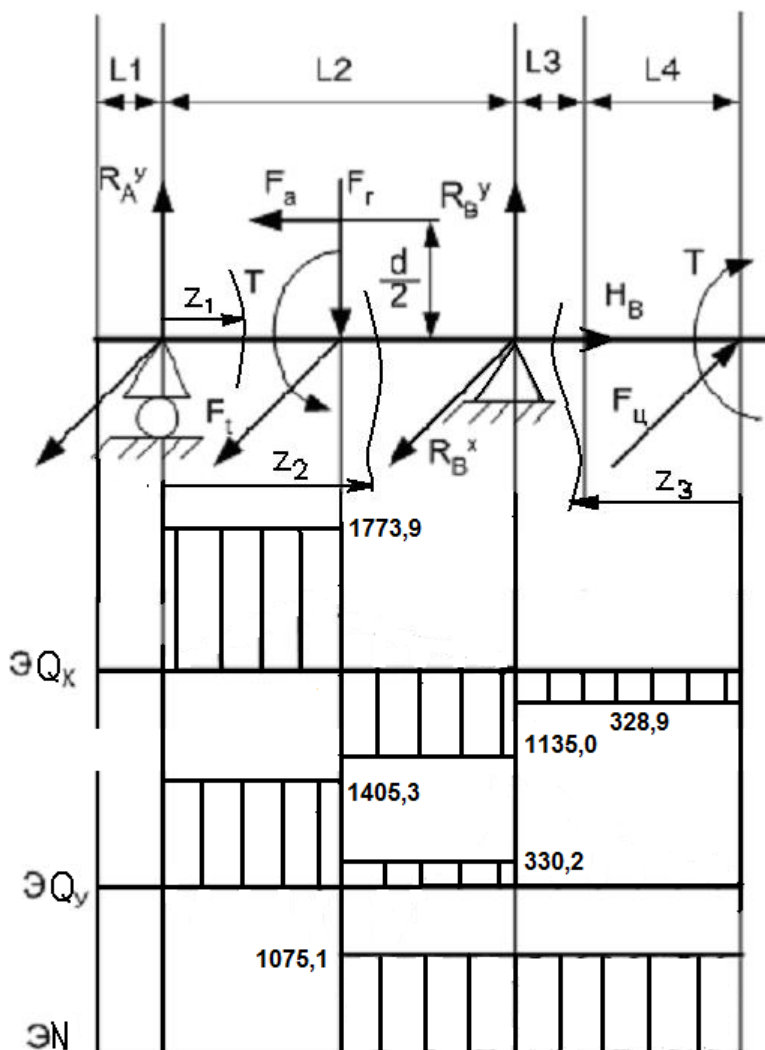


Рисунок 39 – Эпюры внутренних сил

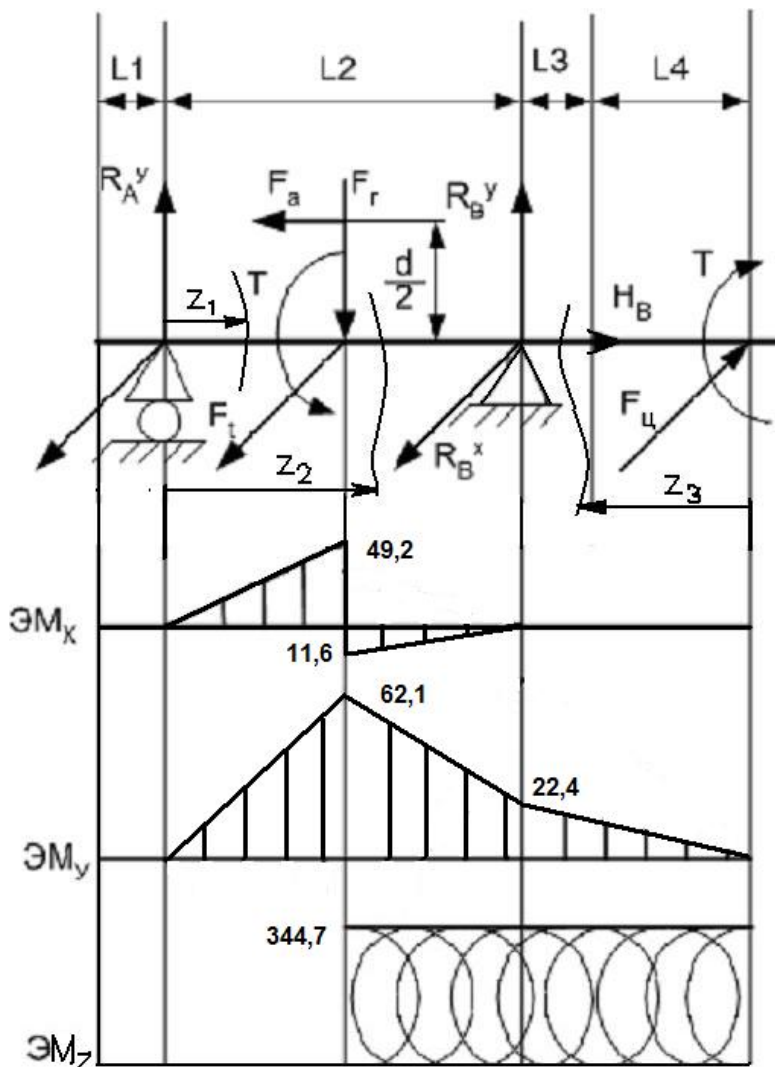


Рисунок 40 - Эпюры внутренних моментов

1 участок $0 \leq Z_1 \leq 35$ мм

$Q_y = R_A^y = 1405,3$ - прямая постоянная линия.

$Q_X = -R_A^X = -(-1773,9) = 1773,9$ - прямая постоянная линия.

$M_X = R_A^Y \cdot Z_1 = 1405,3 \cdot Z_1$ - наклонная прямая, для ее построения вычислим функцию в 2-х точках, на границах участка.

$$M_X \Big|_{Z=0} = 1405,3 \cdot 0 = 0$$

$$M_X \Big|_{Z=35} = 1405,3 \cdot 35 = 49185,5 \text{ Нмм} = 49,2 \text{ Нм}$$

$M_Y = -R_A^X \cdot Z_1 = 1773,9 \cdot Z_1$ прямая наклонная линия.

$$M_Y \Big|_{Z=0} = 0$$

$$M_Y \Big|_{Z=35} = 1773,9 \cdot 35 = 62086,5 \text{ Нмм} = 62,1 \text{ Нм}$$

II участок $35 \leq Z_2 \leq 70$ мм

$Q_Y = R_A^Y - F_r = 1405,3 - 1075,1 = 330,2$ - прямая постоянная линия.

$Q_X = R_A^X - F_t = -(-1773,9) - 2908,9 = -1135,0$ - прямая постоянная линия.

$$\begin{aligned} M_X &= R_A^Y \cdot Z_2 - F_r \cdot (Z_2 - \frac{\ell_2}{2}) - F_a \cdot \frac{d}{2} = \\ &= 1405,3 \cdot Z_2 - 1075,1 \cdot (Z_2 - 35) - 512,6 \cdot \frac{237}{2} \end{aligned}$$

После упрощения получаем уравнение:

$M_X = 330,2 \cdot Z_2 - 23114,6$ - уравнение прямой наклонной линии. Вычисляем значения на границах участка.

$$M_X \Big|_{Z=35} = -11557,6 \text{ Нмм} = -11,6 \text{ Нмм}$$

$$M_X \Big|_{Z=70} = -0,6 \text{ Нмм} \approx 0$$

$$M_y = -R_A^x \cdot Z_2 - F_t \cdot (Z_2 - \frac{\ell_2}{2}) = 1173,9 \cdot Z_2 - 2908,9 \cdot (Z_2 - 35) =$$

$$= -1135,0 \cdot Z_2 + 101811,5$$

$$M_y \Big|_{z=35} = 62086,5 \text{ Нмм} = 62,1 \text{ Нм}$$

$$M_y \Big|_{z=70} = 22361,5 \text{ Нмм} = 22,4 \text{ Нм}$$

$N = F_a = 1075,1$ – прямая, параллельная оси вала.

$M_z = T = 344,7 \text{ Нм}$ – прямая постоянная линия.

III участок $0 \leq Z_2 \leq 68 \text{ мм}$

$Q_x = -F_u = -328,9$ - прямая постоянная линия.

$M_y = F_u \cdot Z_3 = 328,9 \cdot Z_3$ -прямая наклонная линия.

$$M_x \Big|_{z=0} = 0$$

$$M_x \Big|_{z=j} = 22362,2 \text{ Нмм} = 22,4 \text{ Нм}$$

$M_z = T = 344,7 \text{ Н*м}$ – прямая постоянная линия.

По результатам расчетов строим эпюры, которые показаны на рис. 39 и 40.

Далее определяем законы изменения циклов напряжений. В силу того что вал вращается вокруг своей оси, напряжения в его сечениях циклически изменяются. Принято считать, что касательные напряжения кручения изменяются по пульсирующему закону.

Нормальные напряжения изгиба изменяются по симметричному закону. Пояснения к этому тезису приводятся на рис. 41 для произвольной точки А, выбранной на поверхности вала. Поэтому амплитуда изменения нормальных напряжений изгиба равна максимальному напряжению, а амплитуда изменения касательных напряжений кручения равна половине максимального касательного напряжения:

$$\sigma_a = \sigma_{max} \quad \tau_a = \frac{\tau_{max}}{2}$$

Нормальные напряжения изгиба рассчитываются по формуле:

$$\sigma_a = \frac{M_{изгmax}}{W_x} = \frac{79,2}{6283,2 \cdot 10^{-9}} = 12,6 \cdot 10^6 \text{ Па} = 12,6 \text{ МПа}$$

Амплитуда касательных напряжений:

$$\tau_a = \frac{\tau_{max}}{2} = \frac{M_z}{2} = \frac{M_z}{2 \cdot W_x} = \frac{M_z}{4 \cdot W_x} = \frac{344,7}{4 \cdot 6283,2 \cdot 10^{-9}} = 13,7 \cdot 10^6 \text{ Па} = 13,7 \text{ МПа}$$

Предел выносливости стали 45 определяем из справочника: $\sigma_{-1} = 350 \text{ МПа}$, $\tau_{-1} = 210 \text{ МПа}$.

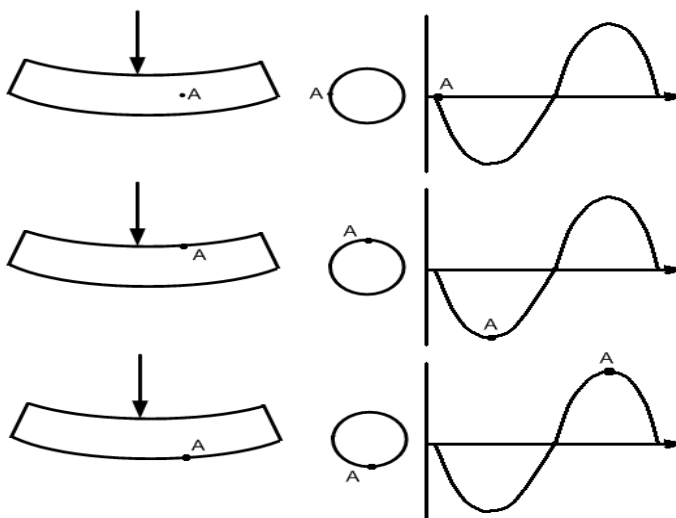


Рисунок 41 - Симметричный закон изменения нормальных напряжений

Далее определяем коэффициенты снижения предела выносливости материала в силу влияния размеров сечения,

чистоты обработки поверхности и концентрации напряжений.

Здесь возможны 2 варианта:

I вариант. Опасное сечение соответствует точке вала, в котором осуществляется посадка зубчатого колеса. В таком случае концентратором напряжений является шпоночный паз на валу. Коэффициент концентрации напряжений тогда для нормальных и касательных напряжений соответственно равен:

$$K_{\sigma} = 1,5; \quad K_{\tau} = 1,4$$

Коэффициент влияния чистоты обработки поверхности для вала принимают равным $K_F = 1,2$.

Масштабный коэффициент, учитывающий влияние размеров сечения определяется по табл.2.

Таблица – 2

Диаметр вала	Для нормальных напряжений K_d	Для касательных напряжений K_d
10	1,00	1,00
20	1,08	1,18
30	1,14	1,30
40	1,19	1,37
50	1,23	1,43
60	1,28	1,47
70	1,32	1,51
80	1,35	1,55
90	1,39	1,59
100	1,41	1,61

Для $d = 40$ мм: $K_d = 1,19$; $K_d = 1,37$.

Тогда общий коэффициент снижения предела выносливости материала:

$$K_{(\sigma)} = K_{\sigma} \cdot K_F \cdot K_d = 1,5 \cdot 1,2 \cdot 1,19 = 2,14$$

$$K_{(\tau)} = K_{\tau} \cdot K_F \cdot K_d = 1,4 \cdot 1,2 \cdot 1,37 = 2,30$$

II вариант. Опасное сечение соответствует точке вала, в котором осуществляется посадка подшипника. В

таком случае концентратором напряжений является посадка с натягом. Коэффициент концентрации напряжений и коэффициент влияния размеров вала тогда задаются как единый коэффициент и для нормальных и касательных напряжений соответственно приводятся в данной табл.3.

Таблица – 3

Диаметр вала	$K_{d\sigma}$	$K_{d\tau}$
10	1,00	1,00
20	1,90	1,42
30	2,50	1,75
40	2,85	1,93
50	3,05	2,05
60	3,17	2,12
70	3,23	2,16
80	3,27	2,18
90	3,29	2,19
100	3,30	2,20

Для $d = 40$ мм: $K_{d\sigma} = 2,85$; $K_{d\tau} = 1,93$.

Коэффициент влияния чистоты обработки поверхности для вала принимают равным $K_F = 1,2$.

Тогда общий коэффициент снижения предела выносливости материала:

$$K_{(\sigma)} = K_F \cdot K_{d\sigma} = 1,2 \cdot 2,85 = 3,42$$

$$K_{(\tau)} = K_F \cdot K_{d\tau} = 1,2 \cdot 1,93 = 2,32$$

Вычисляем предел выносливости с учетом коэффициентов снижения предела выносливости:

$$(\sigma_{-1})_D = \frac{\sigma_{-1}}{K_{(\sigma)}} = \frac{350}{2,14} = 163,4 \text{ МПа};$$

$$(\tau_{-1})_D = \frac{\tau_{-1}}{K_{(\tau)}} = \frac{210}{2,30} = 91,2 \text{ МПа}.$$

Теперь вычисляем коэффициент запаса усталостной прочности отдельно по изгибу и кручению:

$$n_{\sigma} = \frac{(\sigma_{-1})_D}{\sigma_a} = \frac{163,4}{12,6} = 12,97$$

$$n_{\tau} = \frac{(\tau_{-1})_D}{\tau_a} = \frac{91,2}{13,7} = 6,66$$

Теперь определяем общий коэффициент запаса:

$$n = \frac{n_{\sigma} \cdot n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} = \frac{12,97 \cdot 6,66}{\sqrt{12,97^2 + 6,66^2}} = 5,92 \geq [n] = 2,0$$

Общий коэффициент запаса усталостной прочности оказался больше допускаемого коэффициента запаса. Это говорит о том, что выносливость вала при заданных условиях обеспечивается в полной мере.

5.6. Задания к контрольным и расчетно-графическим работам

Рассчитать на выносливость (усталостную прочность) вал, схема которого приводится в приложении 3. В качестве методических рекомендаций для решения задачи используйте пример 14. Числовые исходные данные приводятся в таблице.

Таблица с числовыми значениями исходных данных для всех вариантов заданий

Вариант 1

$$M_1 = M_2 = 180 \text{ Нм}; M_3 = 360 \text{ Нм}; F_1 = 800 \text{ Н}; F_2 = 600 \text{ Н}.$$

№уч.	1	2	3	4	5	6	7	8
d	16	20	25	30	34	30	26	22
ℓ	90	18	120	24	24	140	16	120

Вариант 2

$$M_1 = M_2 = 320 \text{ Нм}; M_3 = 640 \text{ Нм}; F_1 = 900 \text{ Н}; F_2 = 500 \text{ Н}.$$

№ уч.	1	2	3	4	5	6	7	8
d	24	35	40	36	32	30	26	22
ℓ	110	28	30	90	60	26	60	120

Вариант 3

$M_1 = M_2 = 200 \text{ Нм}; M_3 = 400 \text{ Нм}; F_1 = 750 \text{ Н}; F_2 = 490 \text{ Н}.$

№ уч.	1	2	3	4	5	6	7	8
d	26	30	34	38	42	38	34	30
ℓ	100	30	20	120	36	120	16	28

Вариант 4

$M_1 = M_2 = 280 \text{ Нм}; M_3 = 560 \text{ Нм}; F_1 = 680 \text{ Н}; F_2 = 720 \text{ Н}.$

№ уч.	1	2	3	4	5	6	7	8
d	30	36	42	48	52	45	40	35
ℓ	80	90	60	90	30	26	120	30

Вариант 5

$M_1 = M_2 = 230 \text{ Нм}; M_3 = 460 \text{ Нм}; F_1 = 560 \text{ Н}; F_2 = 690 \text{ Н}.$

№ уч.	1	2	3	4	5	6	7	8
d	22	30	35	40	44	40	35	30
ℓ	120	90	60	30	20	110	50	30

Вариант 6

$M_1 = M_2 = 120 \text{ Нм}; M_3 = 240 \text{ Нм}; F_1 = 490 \text{ Н}; F_2 = 820 \text{ Н}.$

№ уч.	1	2	3	4	5	6	7	8
d	26	30	36	40	44	40	36	32
ℓ	120	80	40	30	80	30	30	140

Вариант 7

$M_1 = M_2 = 420 \text{ Нм}; M_3 = 840 \text{ Нм}; F_1 = 620 \text{ Н}; F_2 = 670 \text{ Н}.$

№ уч.	1	2	3	4	5	6	7	8
d	32	36	40	44	42	38	35	25
ℓ	90	20	26	110	100	20	24	80

Вариант 8

$$M_1 = M_2 = 380 \text{ Нм}; M_3 = 760 \text{ Нм}; F_1 = 450 \text{ Н}; F_2 = 500 \text{ Н}.$$

№ уч.	1	2	3	4	5	6	7	8
d	36	40	44	47	50	54	45	30
ℓ	80	20	80	60	30	160	28	110

Вариант 9

$$M_1 = M_2 = 180 \text{ Нм}; M_3 = 360 \text{ Нм}; F_1 = 800 \text{ Н}; F_2 = 600 \text{ Н}.$$

№ уч.	1	2	3	4	5	6	7	8
d	26	34	40	44	40	36	32	24
ℓ	90	20	30	120	30	30	100	80

Вариант 10

$$M_1 = M_2 = 320 \text{ Нм}; M_3 = 720 \text{ Нм}; F_1 = 670 \text{ Н}; F_2 = 420 \text{ Н}.$$

№ уч.	1	2	3	4	5	6	7	8
d	25	28	32	36	30	26	24	20
ℓ	20	24	100	20	30	36	120	160

Вариант 11

$$M_1 = M_2 = 275 \text{ Нм}; M_3 = 550 \text{ Нм}; F_1 = 900 \text{ Н}; F_2 = 700 \text{ Н}.$$

№ уч.	1	2	3	4	5	6	7	8
d	25	30	35	39	35	32	30	26
ℓ	22	80	30	20	110	40	160	180

Вариант 12

$$M_1 = M_2 = 310 \text{ Нм}; M_3 = 620 \text{ Нм}; F_1 = 540 \text{ Н}; F_2 = 720 \text{ Н}.$$

№ уч.	1	2	3	4	5	6	7	8
d	20	24	28	32	28	24	20	16
ℓ	22	20	120	40	100	40	18	200

Вариант 13

$$M_1 = M_2 = 120 \text{ Нм}; M_3 = 240 \text{ Нм}; F_1 = 370 \text{ Н}; F_2 = 520 \text{ Н}.$$

№ уч.	1	2	3	4	5	6	7	8
d	30	34	38	40	44	40	36	30
ℓ	130	90	50	30	20	160	50	24

Вариант 14

$$M_1 = M_2 = 480 \text{ Нм}; M_3 = 960 \text{ Нм}; F_1 = 900 \text{ Н}; F_2 = 1100 \text{ Н}.$$

№ уч.	1	2	3	4	5	6	7	8
d	24	28	32	35	40	35	32	30
ℓ	140	120	40	30	90	30	40	220

Вариант 15

$$M_1 = M_2 = 310 \text{ Нм}; M_3 = 620 \text{ Нм}; F_1 = 400 \text{ Н}; F_2 = 700 \text{ Н}.$$

№ уч.	1	2	3	4	5	6	7	8
d	30	36	40	44	40	35	30	20
ℓ	150	20	30	110	100	20	26	200

Вариант 16

$$M_1 = M_2 = 220 \text{ Нм}; M_3 = 440 \text{ Нм}; F_1 = 510 \text{ Н}; F_2 = 480 \text{ Н}.$$

№ уч.	1	2	3	4	5	6	7	8
d	30	36	40	44	50	54	45	40
ℓ	150	20	120	60	40	150	36	160

Вариант 17

$$M_1 = M_2 = 430 \text{ Нм}; M_3 = 860 \text{ Нм}; F_1 = 910 \text{ Н}; F_2 = 640 \text{ Н}.$$

№ уч.	1	2	3	4	5	6	7	8
d	30	36	40	44	40	36	32	28
ℓ	120	30	36	200	36	40	160	200

Вариант 18

$M_1 = M_2 = 170 \text{ Нм}$; $M_3 = 340 \text{ Нм}$; $F_1 = 500 \text{ Н}$; $F_2 = 300 \text{ Н}$.

№ уч.	1	2	3	4	5	6	7	8
d	30	34	38	42	35	32	28	24
ℓ	26	30	120	30	30	60	200	200

Задания к расчетно-графическим и контрольным работам

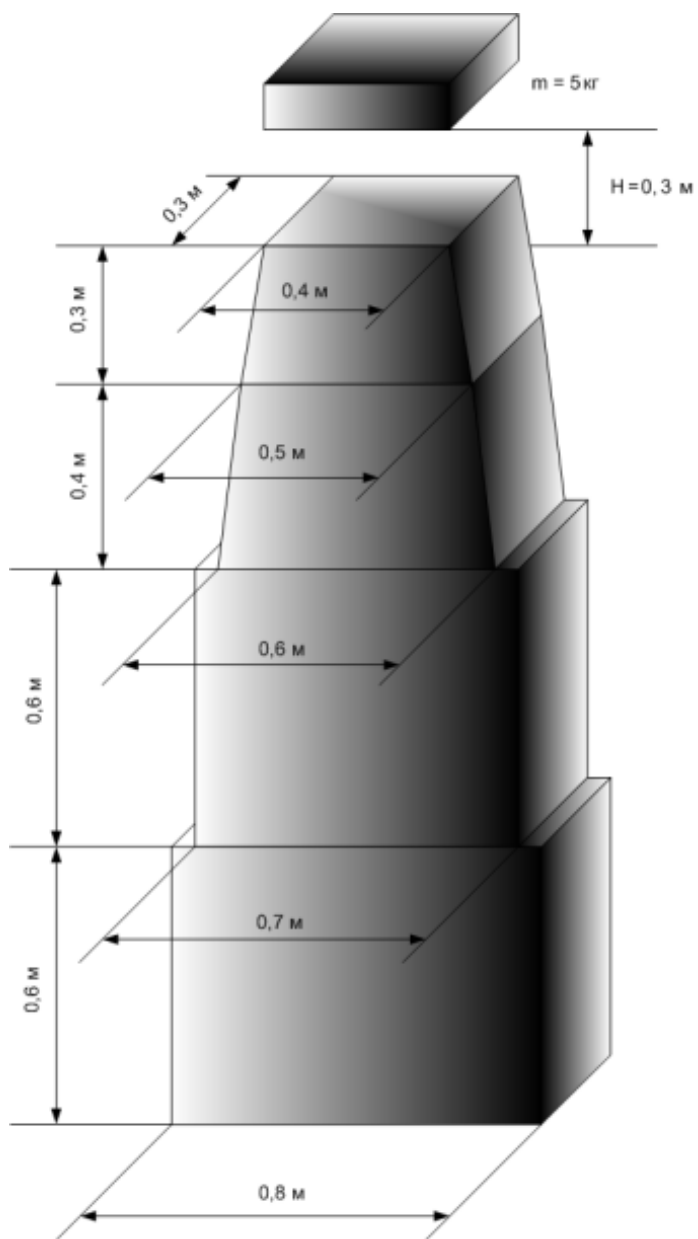
Приложение 1

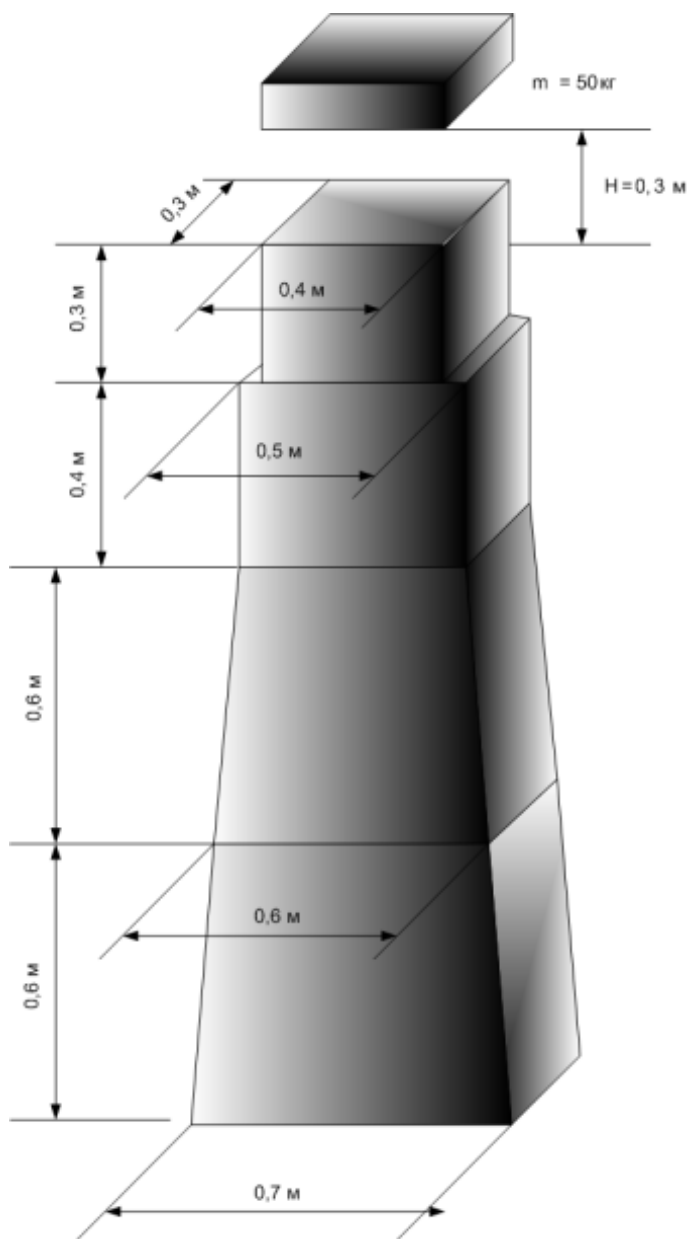
ЗАДАНИЕ по теме «Ударное действие нагрузки»

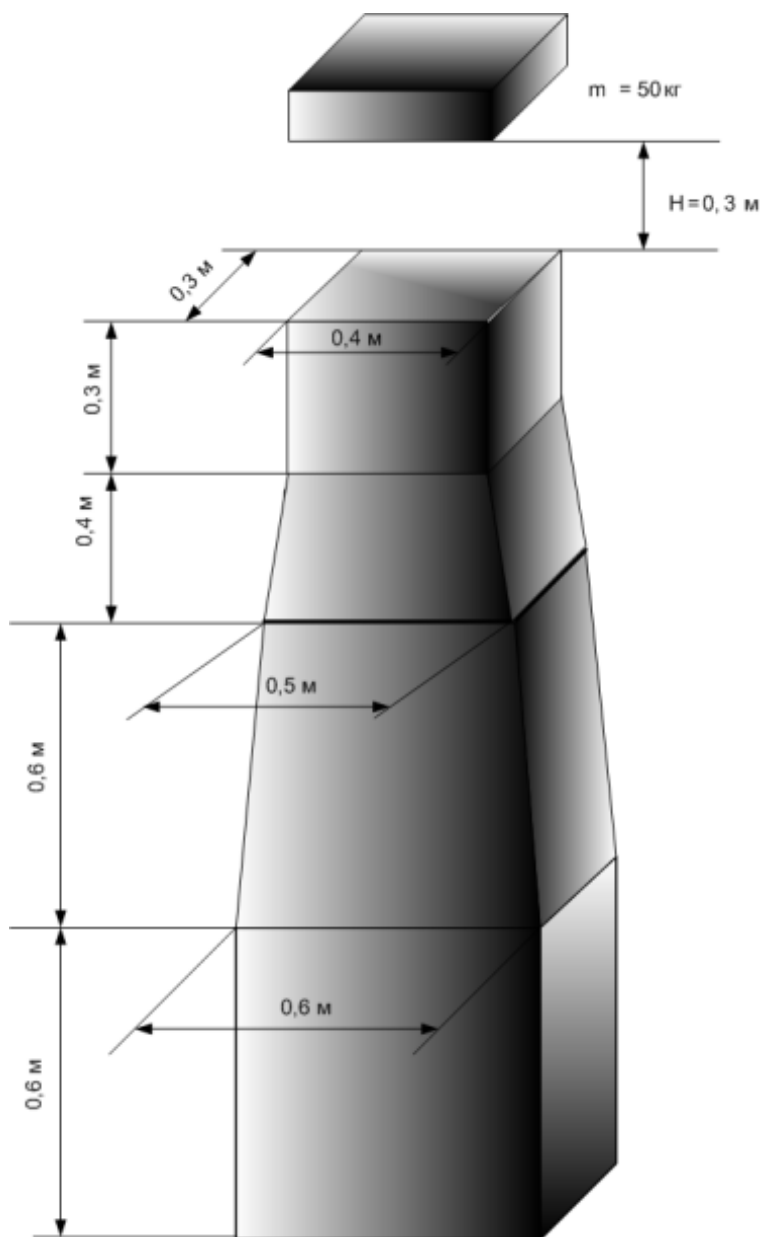
Стальной брус (модуль упругости – 200 ГПа, предел текучести – 240 МПа), который показан на рисунке, в результате падения груза массой m с высоты H испытывает ударное действие нагрузки.

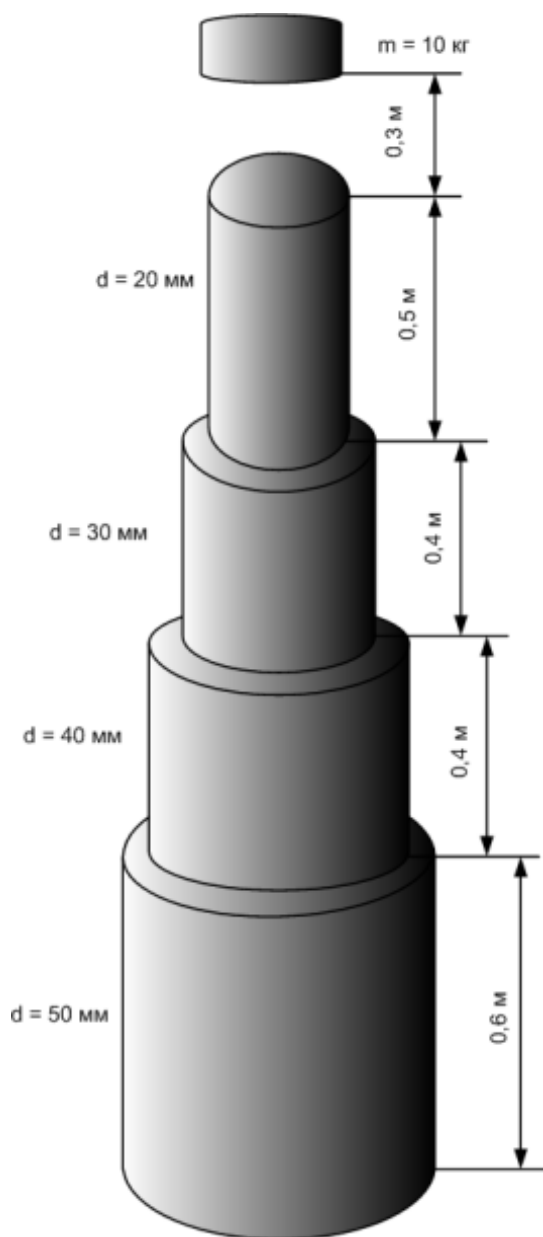
Требуется:

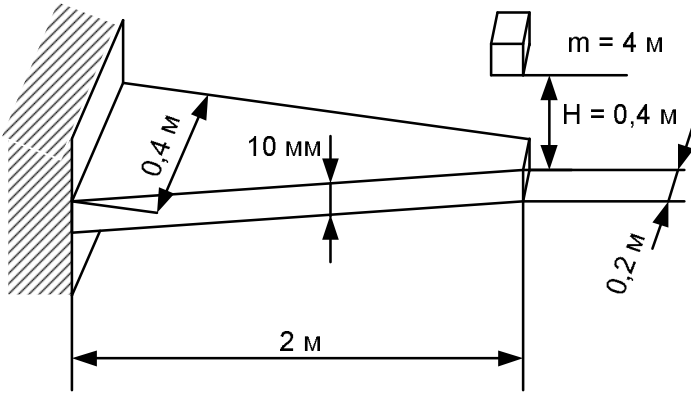
- 1) выяснить, выполняется ли условие прочности;
- 2) построить эпюру напряжений по высоте стержня (варианты 1 - 4), напряжений в крайних волокнах по длине балки (варианты 5 – 14);
- 3) вычислить укорочение стержня (варианты 1 - 4), прогиб в точке падения груза (варианты 5 – 14) в результате падения груза.



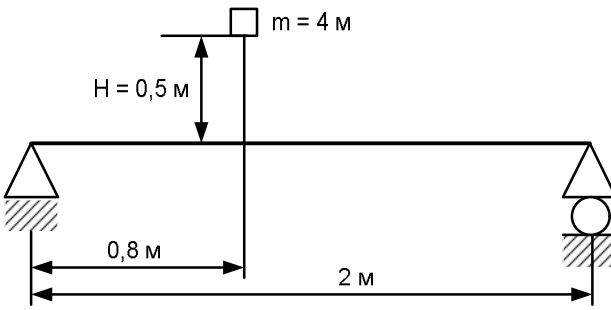




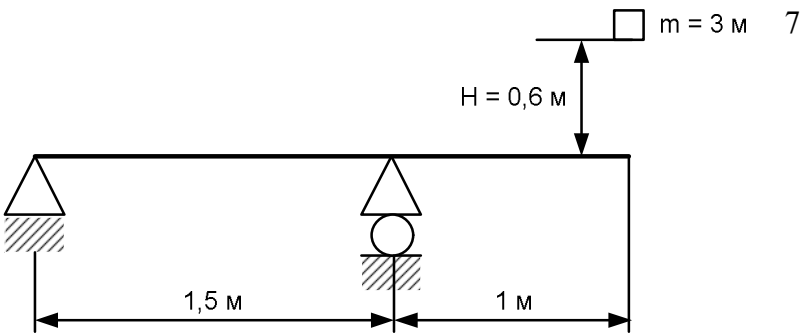




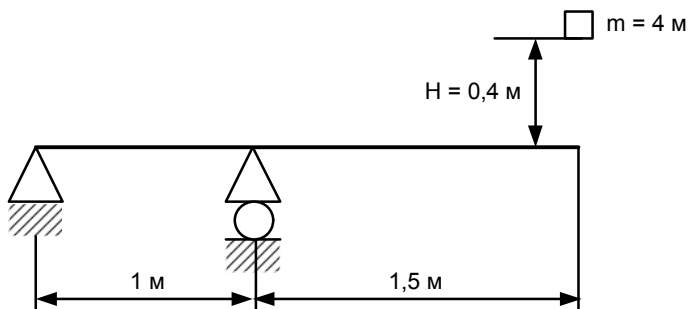
5



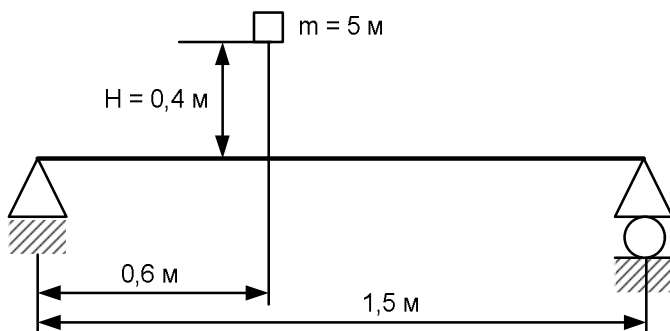
6



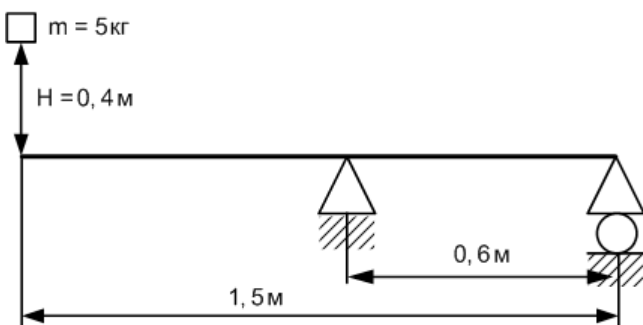
7



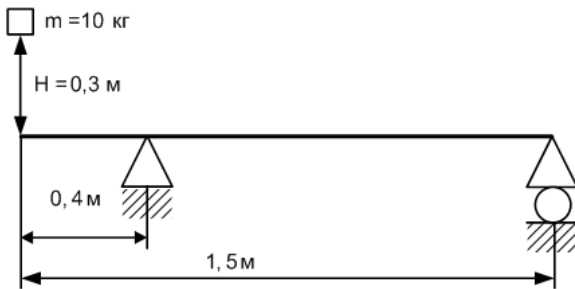
8



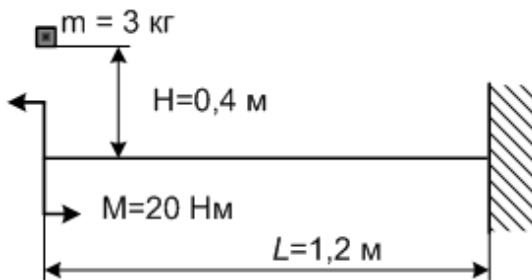
9



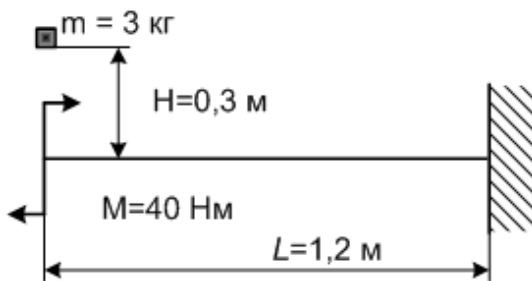
10



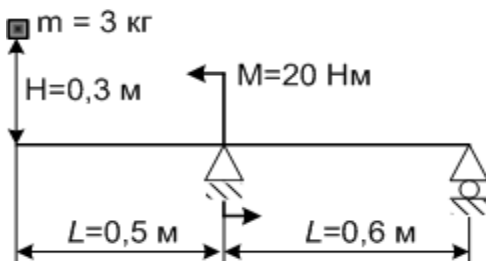
11



12



13



14

Приложение 2
Выбор варианта задания по теме
«Расчет критической скорости вращения вала с
постоянной жесткостью сечения»

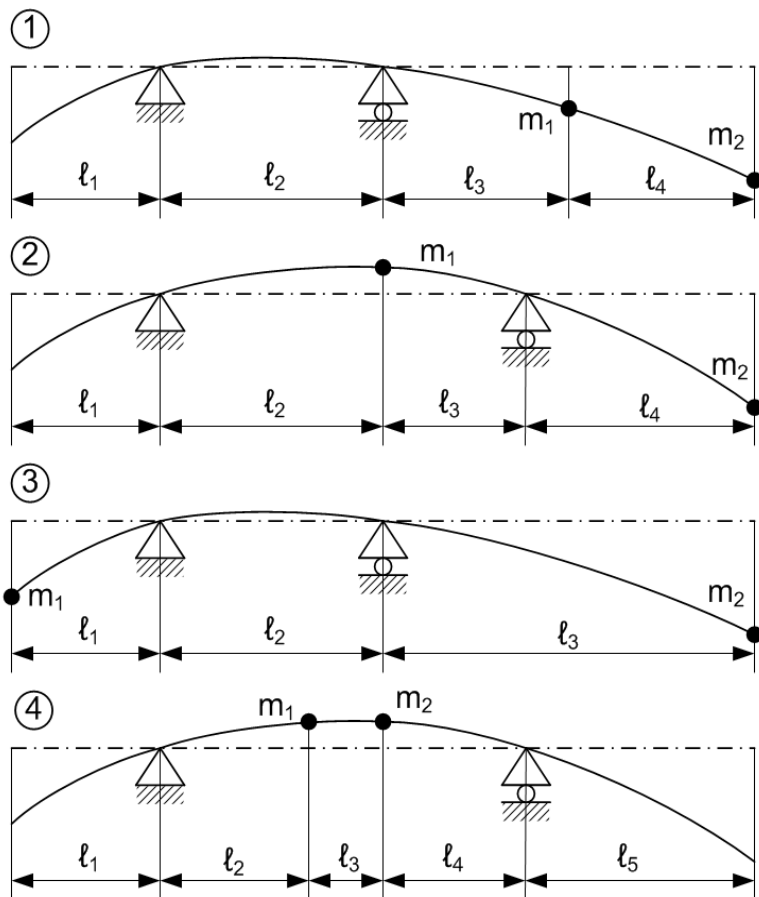


Рис. 1 – Схемы вала к заданию 1

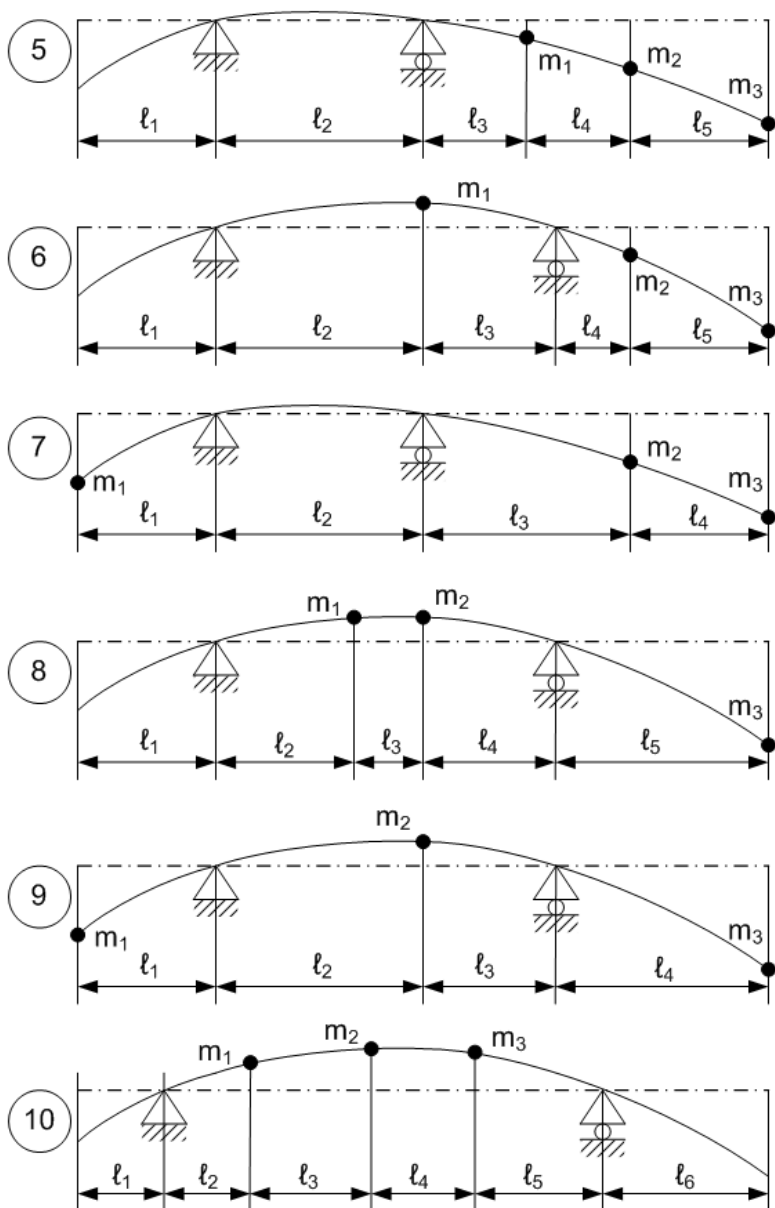


Рис. 2 – Схемы вала к заданию 2

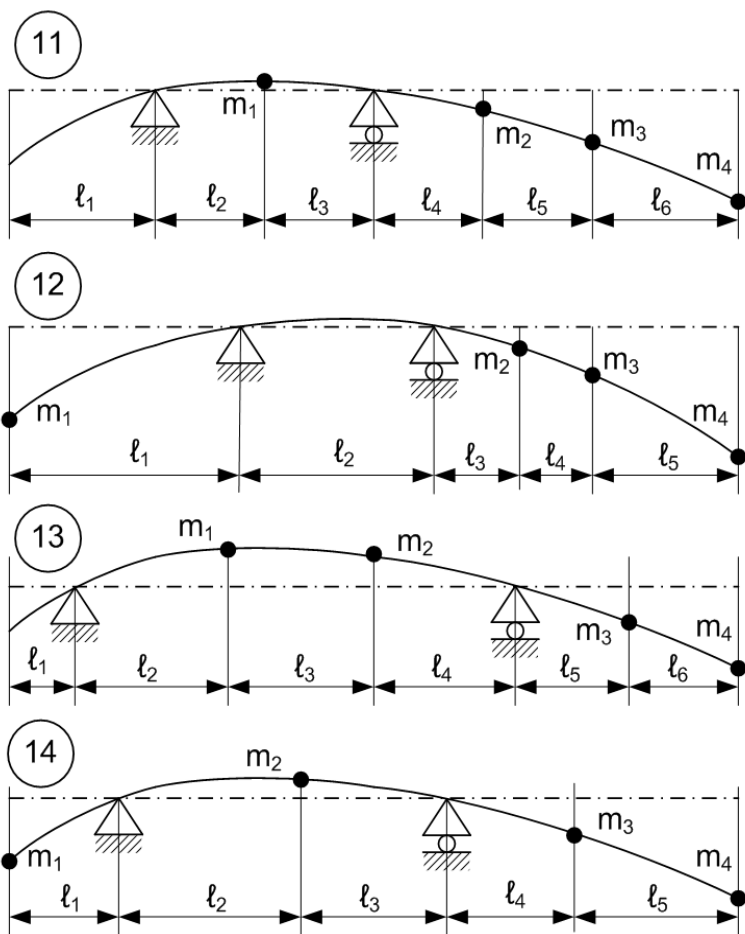


Рис. 3 – Схемы вала к заданию 3

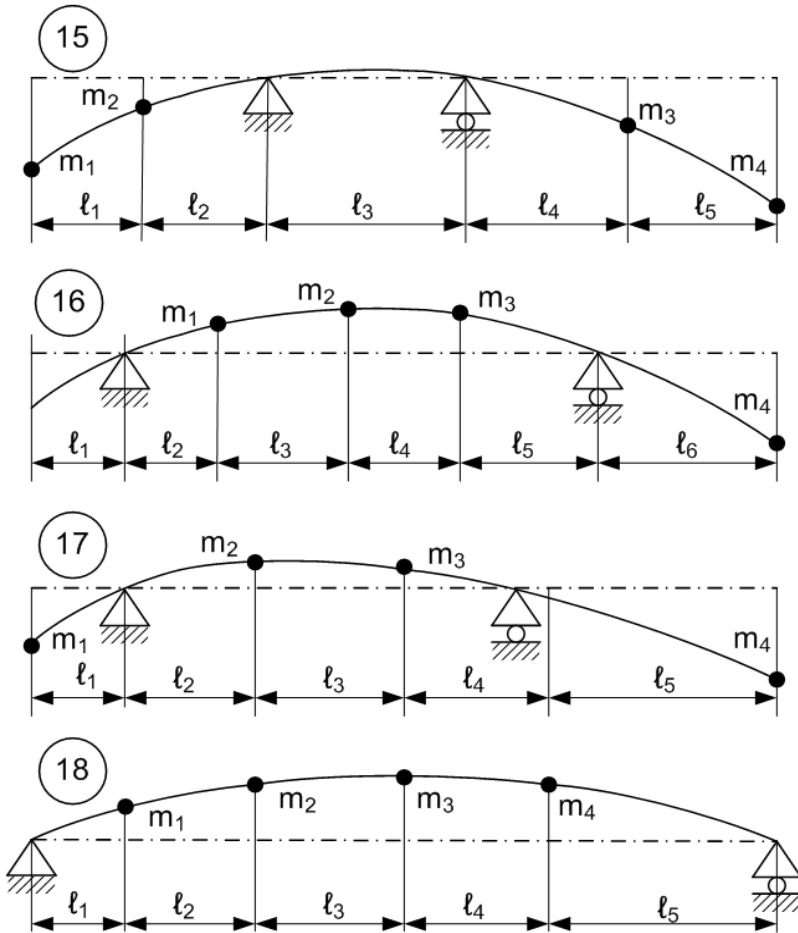


Рис. 3 – Схемы вала к заданию 3 (продолжение)

Приложение 3
Выбор варианта задания по теме
«Расчет критической скорости вращения вала с
переменной жесткостью сечения»

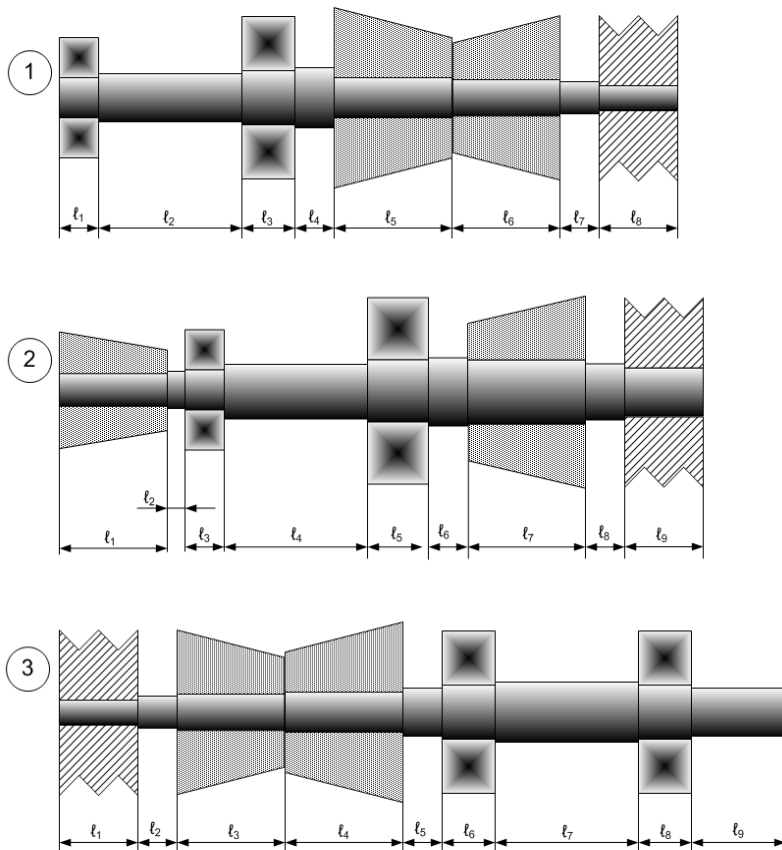


Рис. 4 – Схемы вала к заданию 4

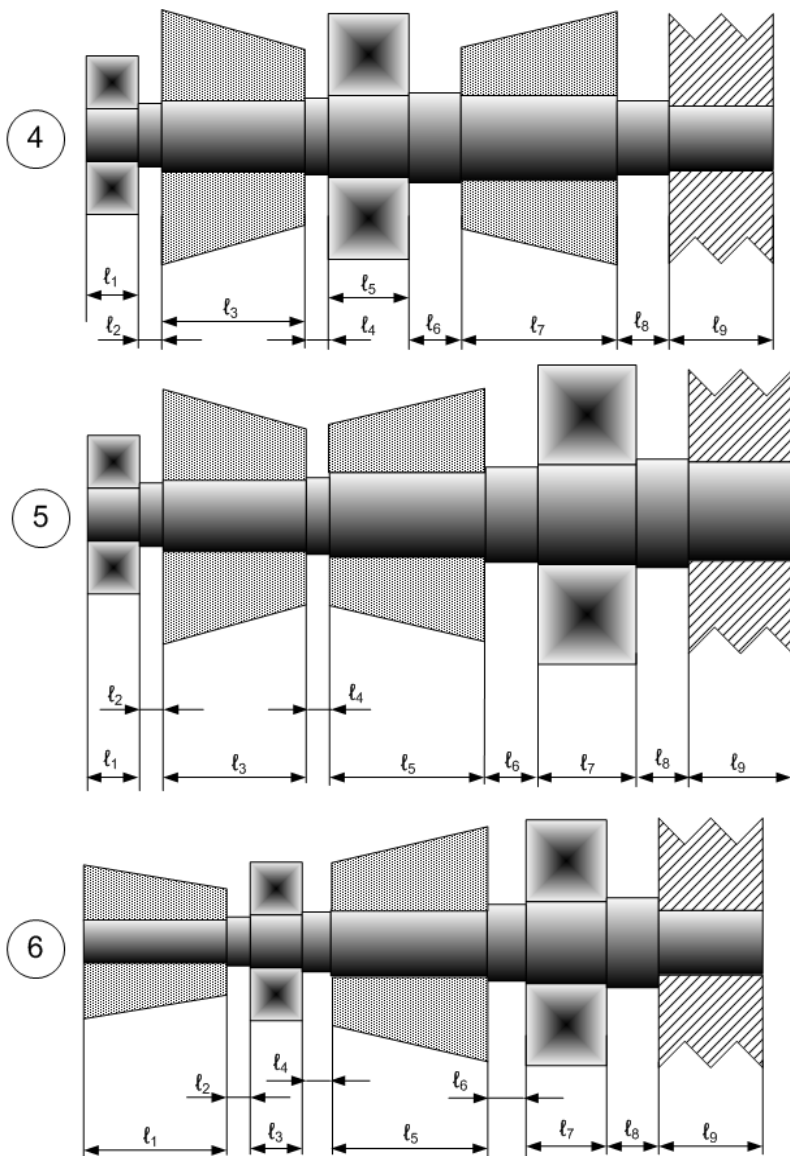


Рис. 4 – Схемы вала к заданию 4 (продолжение)

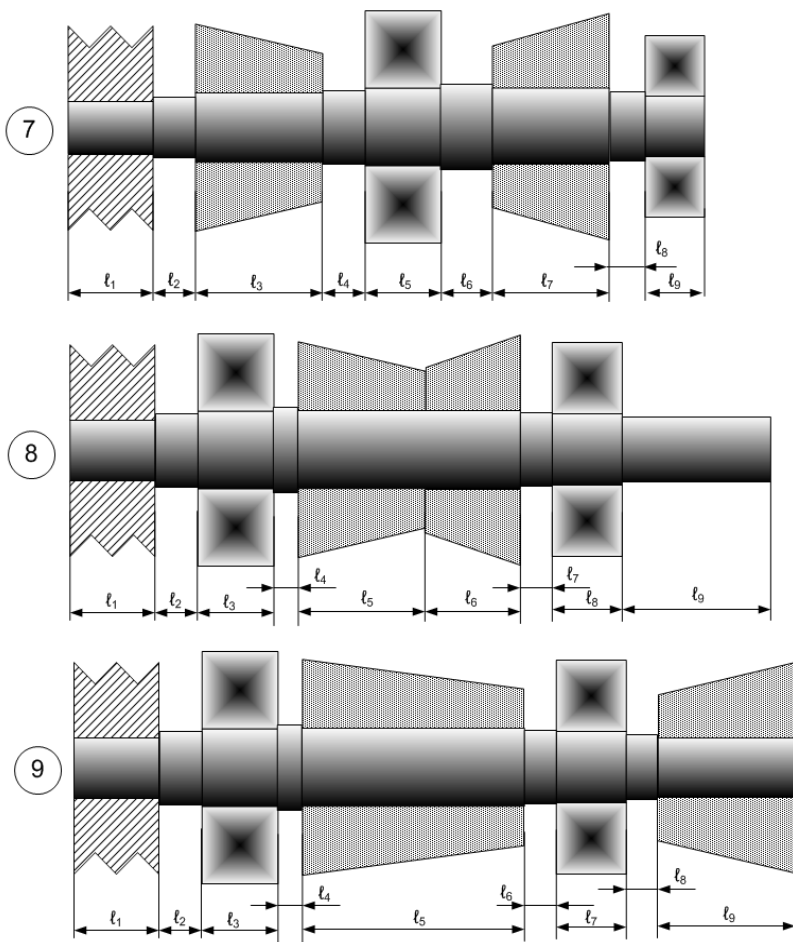


Рис. 4 – Схемы вала к заданию 4 (продолжение)

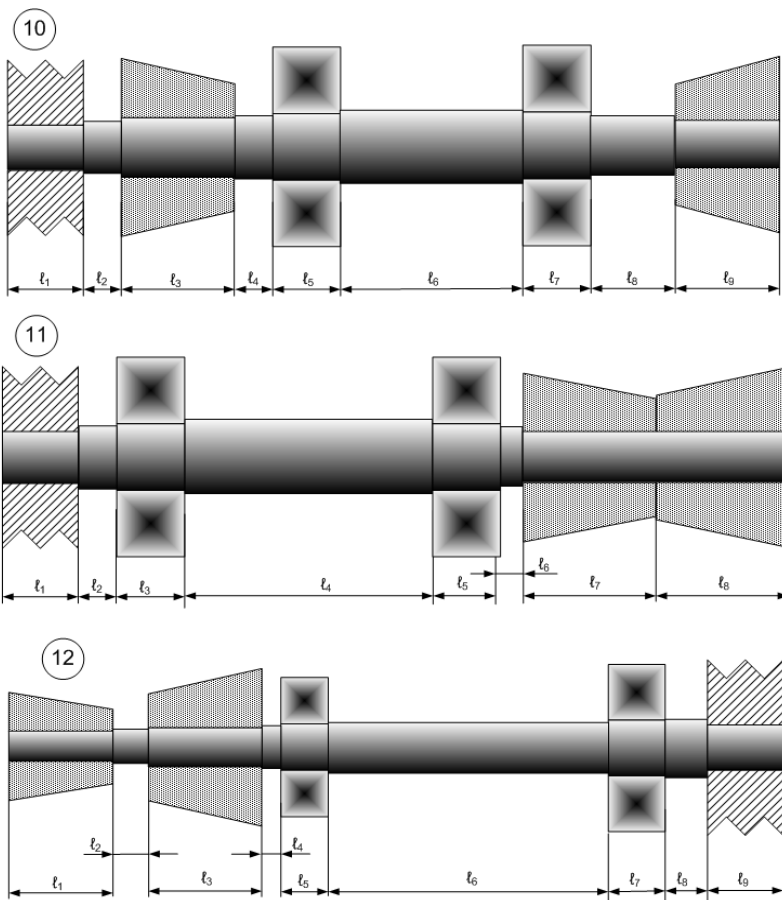


Рис. 4 – Схемы вала к заданию 4 (продолжение)

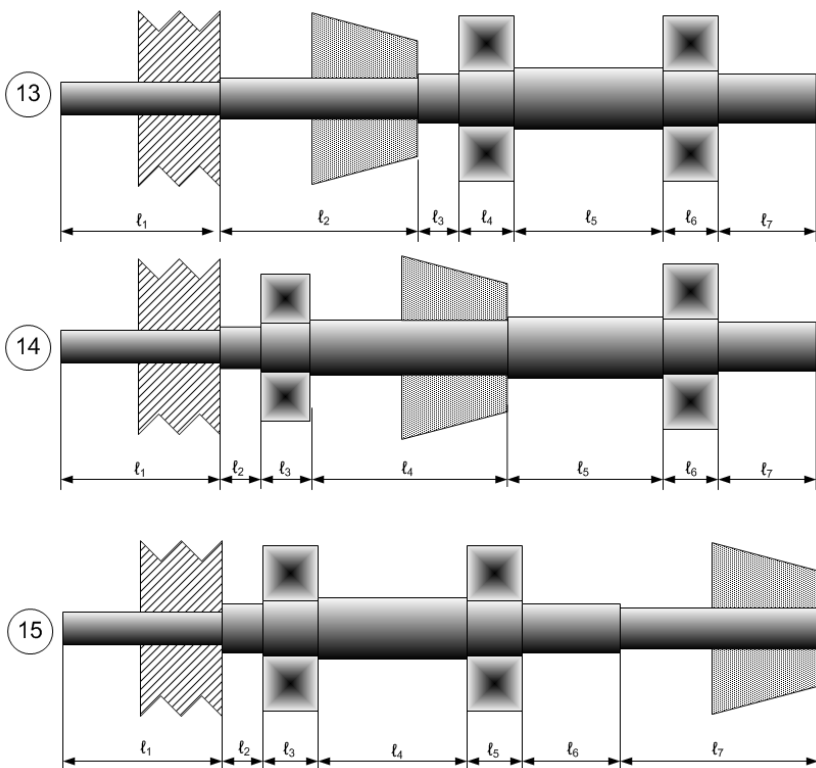


Рис. 4 – Схемы вала к заданию 4 (продолжение)

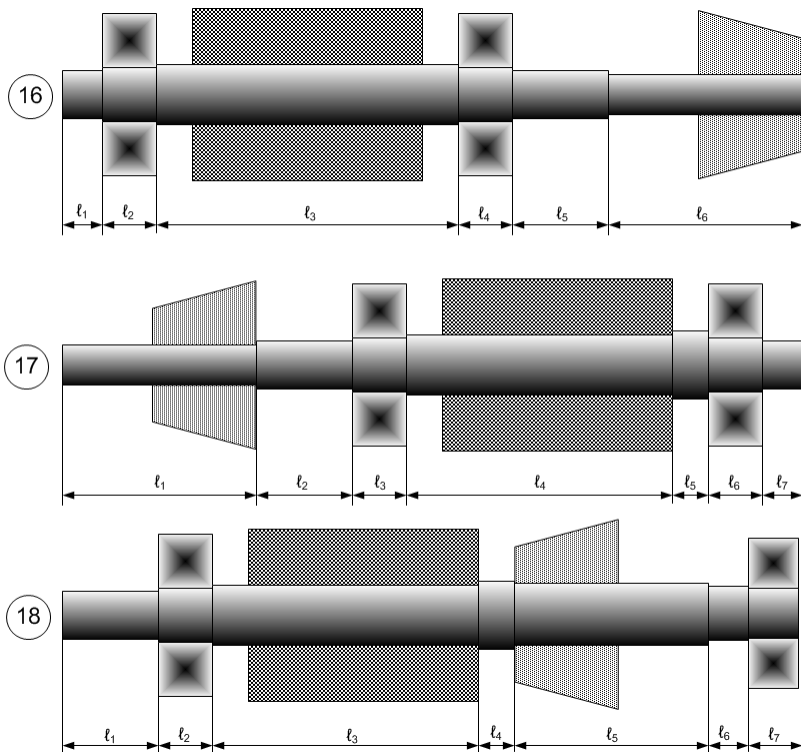
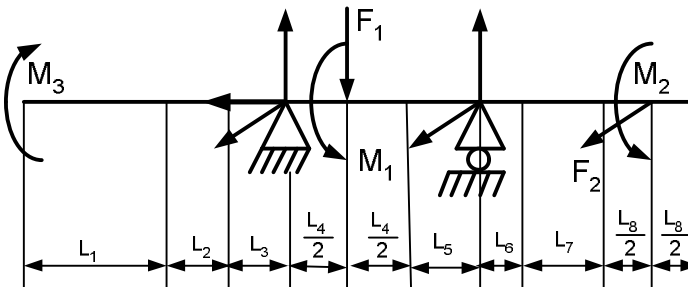
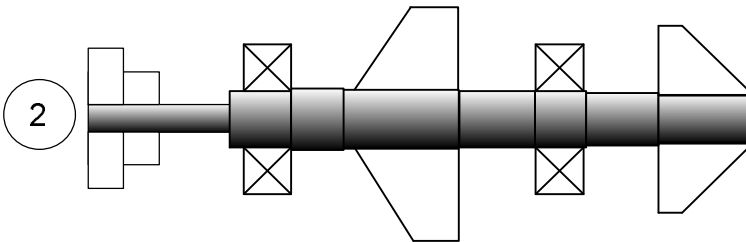
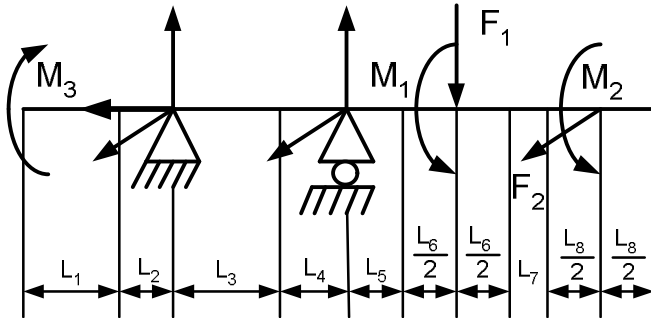
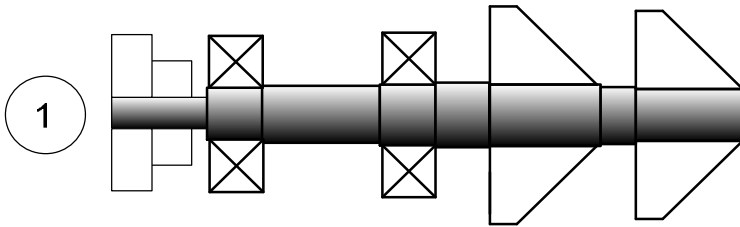
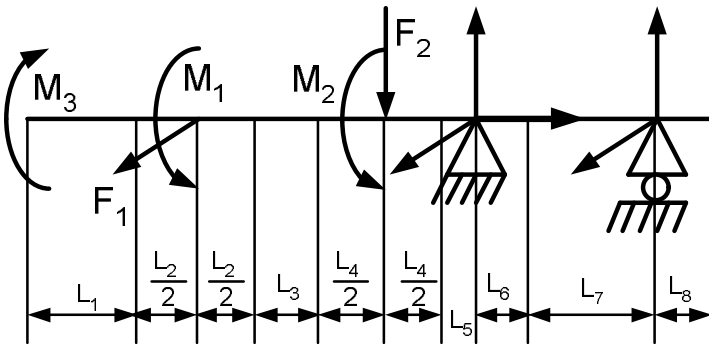
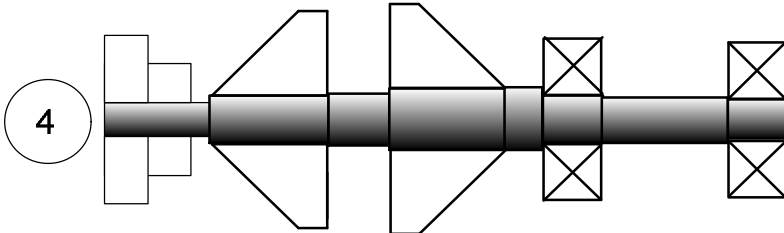
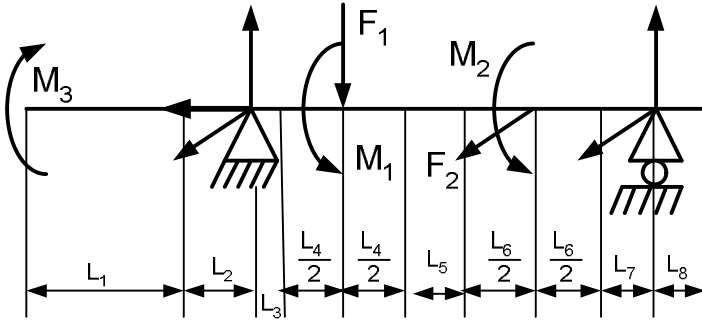
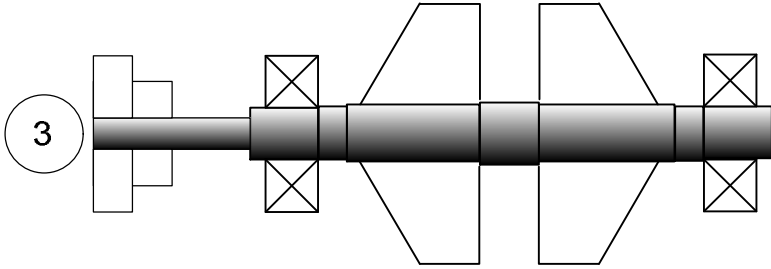


Рис. 4 – Схемы вала к заданию 4 (окончание)

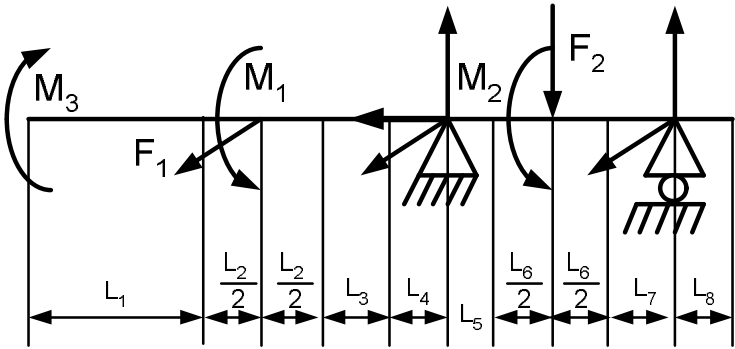
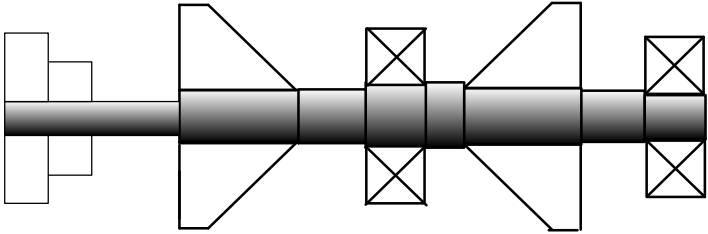
Приложение 4

Эскизы валов к заданиям на усталостную прочность

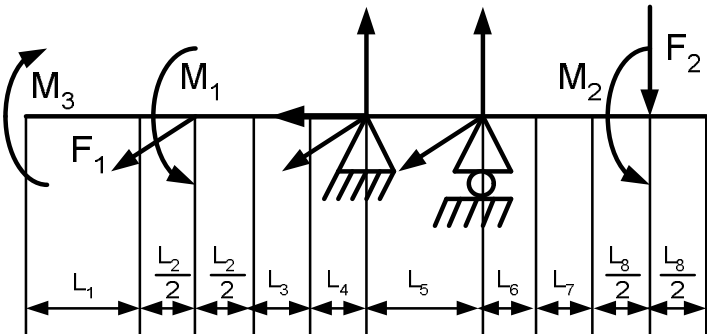
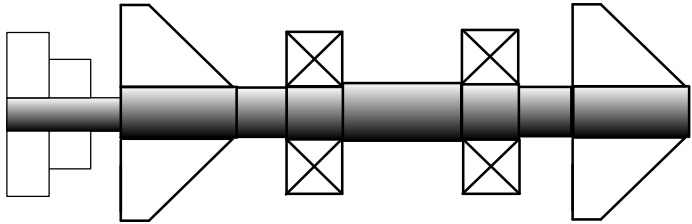


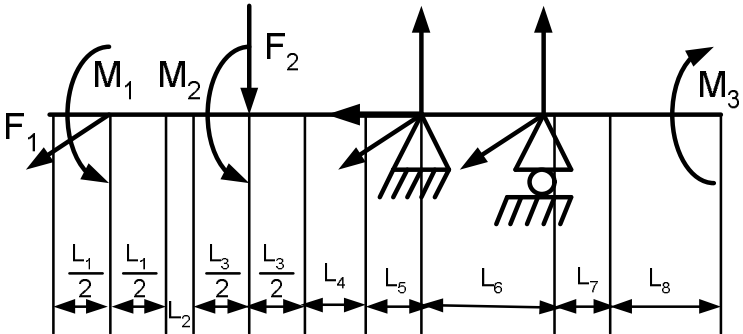
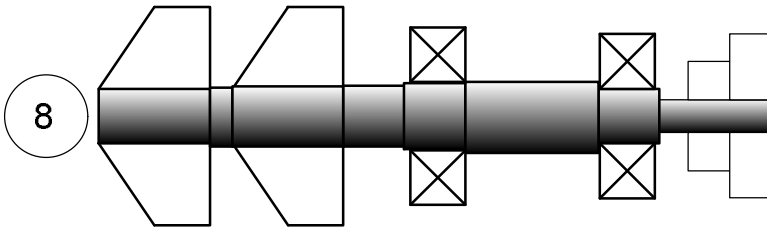
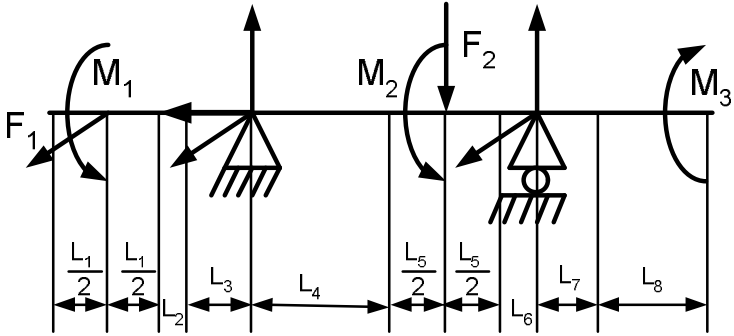
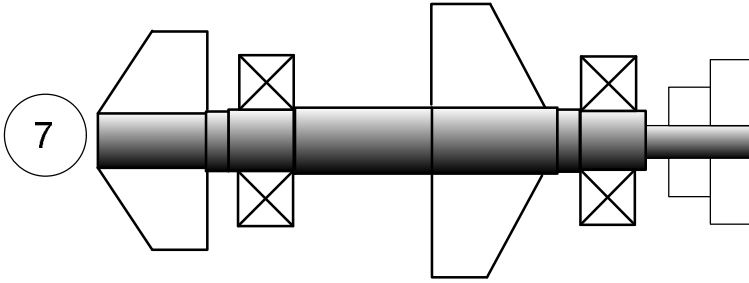


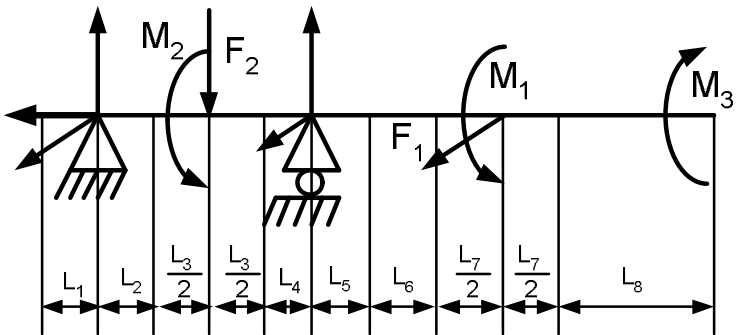
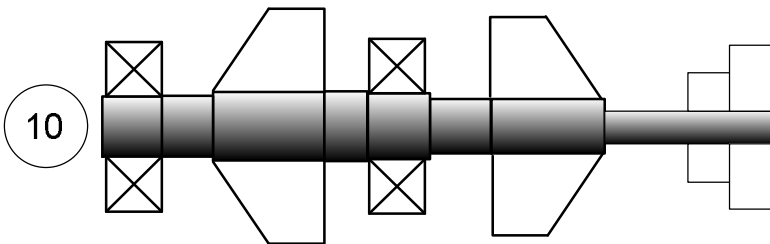
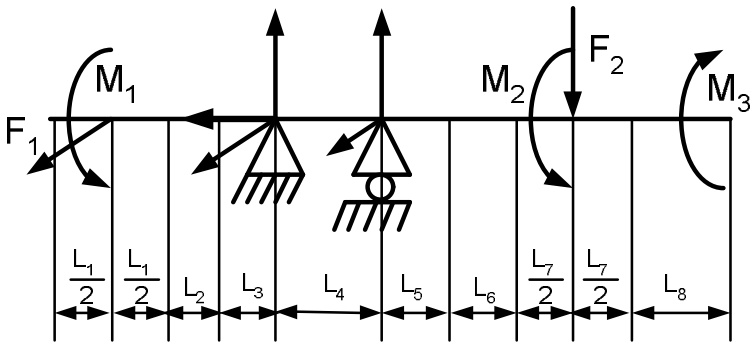
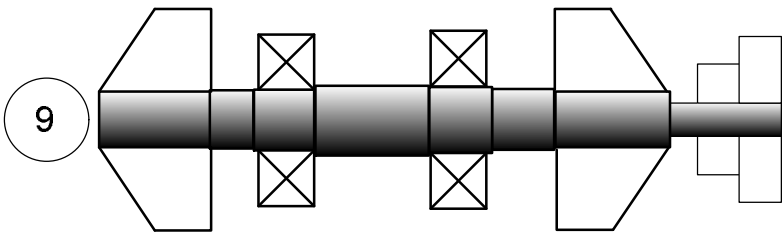
5



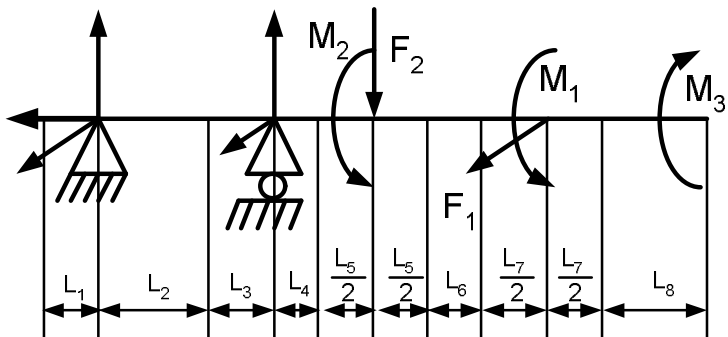
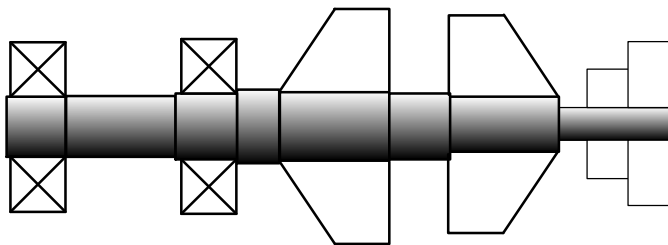
6



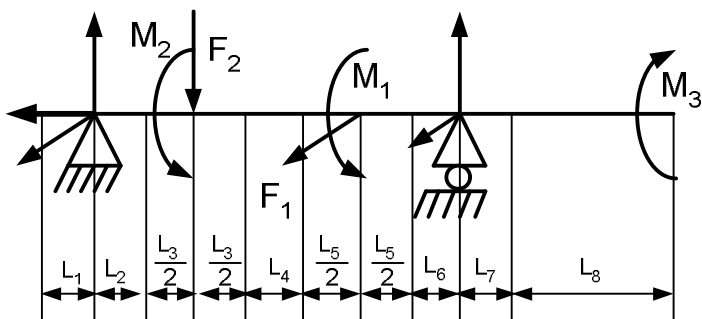
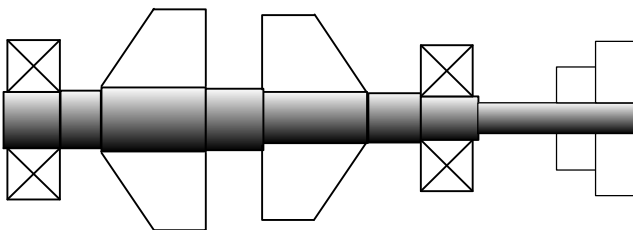


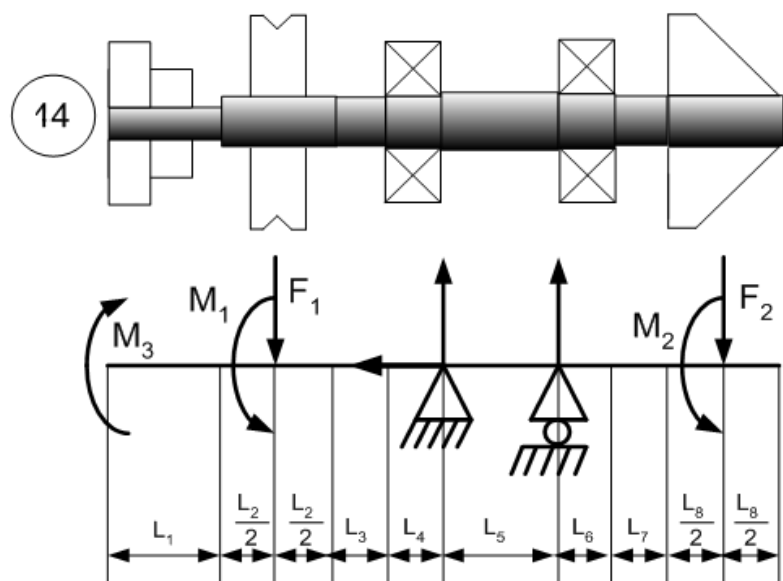
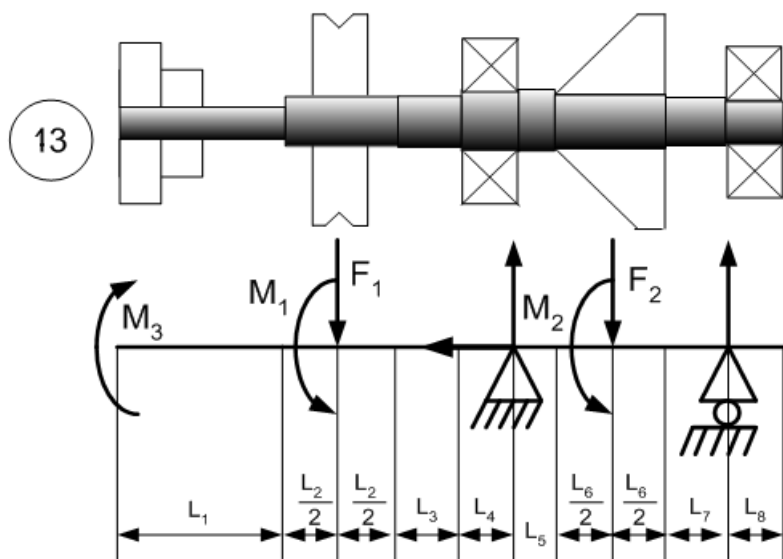


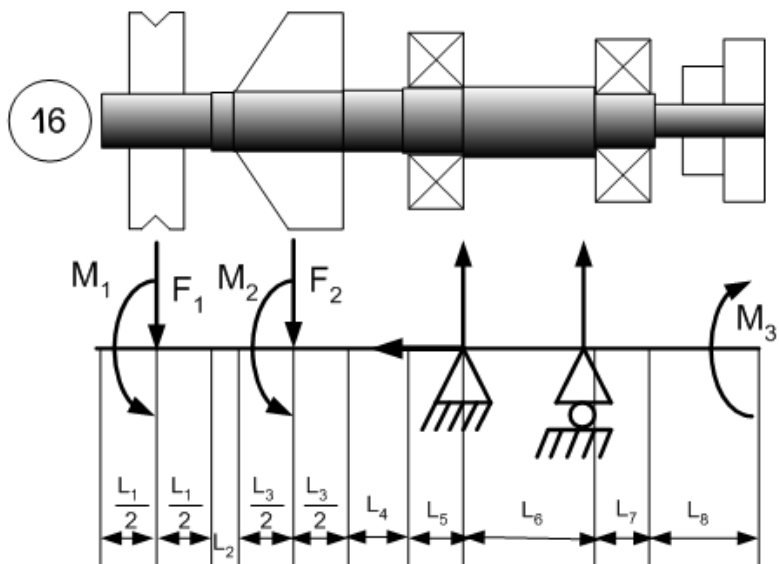
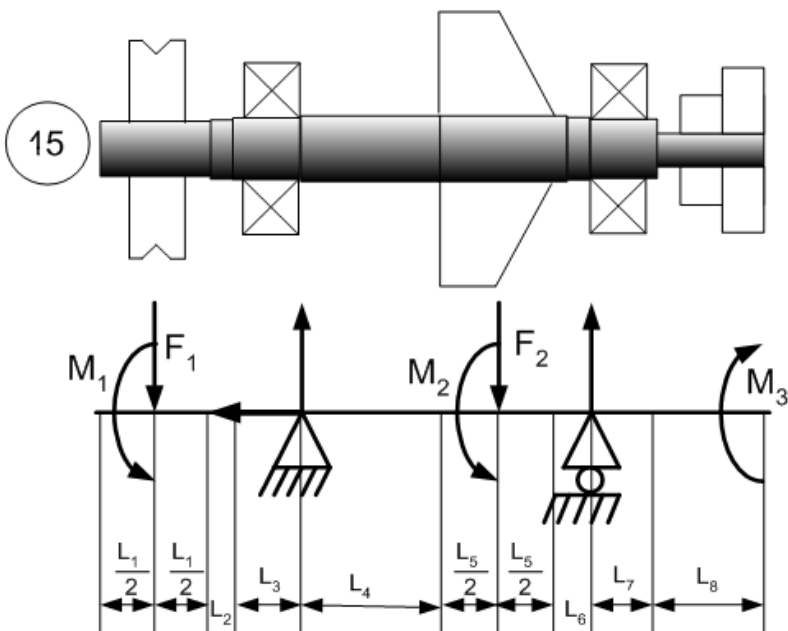
11

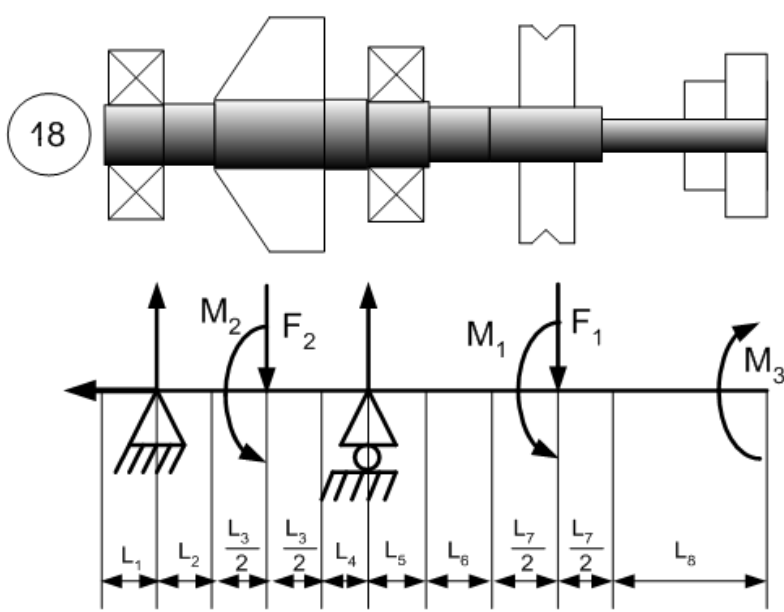
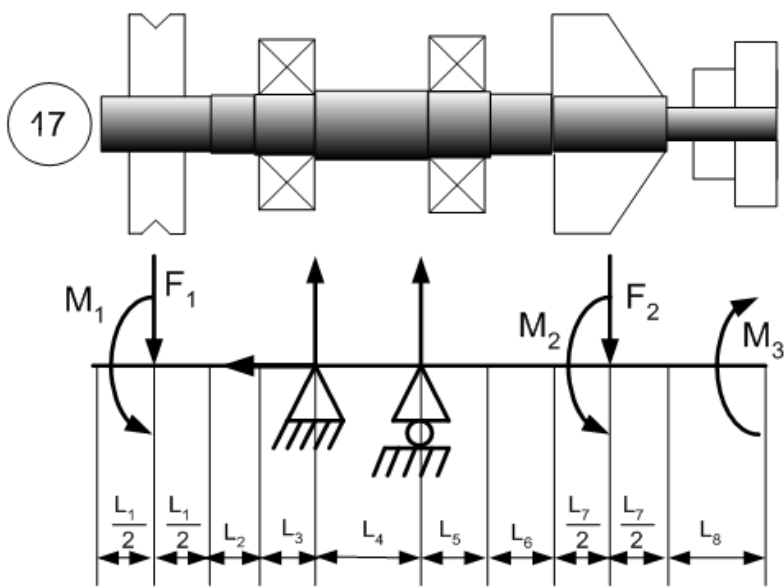


12









Литература

1. **Костюк, А.Г.** Динамика и прочность турбомашин : учебник для вузов / А.Г. Костюк. - Изд. 3-е, перераб. и доп. - М.: Издательский дом МЭИ, 2009. – 476 с.
2. **Яцун, С.Ф.** Кинематика, динамика и прочность машин, приборов и аппаратуры / С.Ф. Яцун, В.Я. Мищенко, Е.Н. Политов. - М.: Инфра-М, 2012. - 208 с.

Содержание

1	Понятие о динамическом действии сил	3
1.1.	Классификация динамических нагрузок	3
1.2.	Принцип Даламбера	5
1.3.	Методы расчета перемещений сечений	6
1.3.1.	Деформация растяжения-сжатия	6
1.3.2.	Деформация изгиба	15
1.3.2.1.	Методы расчета перемещений при изгибе	15
1.3.2.2.	Дифференциальное уравнение изогнутой оси бруса	16
1.3.2.3.	Метод начальных параметров. Универсальное уравнение изогнутой оси балки.	18
1.3.2.4.	Энергетический метод Мора	20
1.3.2.5.	Способ Верещагина	28
2.	Динамическое действие нагрузки в результате равноускоренного движения	42
3.	Расчеты при ударном действии нагрузки	46
4.	Расчеты колебаний механических систем	54
4.1.	Общие положения	54
4.2.	Аналитический способ расчета критической скорости вращения вала постоянной жесткости с одним диском	55
4.3.	Аналитический способ расчета критической скорости постоянной жесткости с двумя дисками	60
4.4.	Энергетический метод Релея определения критической скорости вращения вала	64
4.5.	Расчет критической скорости вращения вала переменной жесткости с учетом собственного веса	67
4.5.1.	Пояснения к работе с программой WinCritic	67
4.5.2.	Выполнение расчетов с помощью программы WinCritic	75
4.6.	Задания на самостоятельное решение	76
5.	Расчеты на усталостную прочность	82
5.1.	Понятие об усталостном разрушении	82

5.2. Циклы напряжения	84
5.3. Определение предела выносливости материала	86
5.4. Влияние различных факторов на величину предела выносливости	88
5.5. Расчет на усталостную прочность	89
5.6. Задания к контрольным и расчетно-графическим работам	102
Приложение 1	104
Приложение 2	115
Приложение 3	119
Приложение 4	125
Литература	134

Учебное издание

Сабанаев Илдар Арифович

кандидат технических наук

Алмакаева Флорида Минулловна

старший преподаватель

ДИНАМИКА И ПРОЧНОСТЬ МАШИН

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Корректор Габдурахимова Т.М.

Худ. редактор Федорова Л.Г.

Сдано в набор 26.02.2014.

Подписано в печать 03.03.2014.

Бумага писчая. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. л. 8,6. Тираж 100.

Заказ №10.

НХТИ (филиал) ФГБОУ ВПО «КНИТУ»,
г. Нижнекамск, 423570, ул. 30 лет Победы, д.5а.