Федеральное агенство по образованию
Государственного образовательного учреждения
Высшего профессионального образования
Казанский государственный технологический университет
Нижнекамский химико-технологический институт

Л.А. Апайчева, А.Г. Багоутдинова, Л.Е. Шувалова

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебное пособие

Нижнекамск НХТИ КГТУ
2009

УДК 517.5

Апайчева Л. А.

Теория функций комплексного переменного. Операционное исчисление/ Л.А. Апайчева, А.Г. Багоутдинова, Л.Е. Шувалова. – Нижнекамск: Изд-во НХТИ, 2009. – 216 с.

Пособие содержит основные классические разделы теории функций комплексного переменного: дифференцирование, интегрирование, ряды Тейлора и Лорана, особые точки и вычеты, а также применение этой теории к операционному исчислению. Изложение материала сопровождается большим количеством типовых примеров, приводимых с решениями, и задач для самостоятельной работы.

Предназначено для студентов инженерно-технических специальностей вузов.

Подготовлено на кафедре математики и информатики НХТИ.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Нижнекамского химико-технологического института КГТУ.

Рецензенты: **канд. физ.-мат. наук, доц. ИНЭКА**
Р.М. Зайниев.
канд. техн. наук, доц. НХТИ
В.В. Гетман

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение…………………………………………………...5

Глава I. Комплексные числа……………………………...7

1.1. Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме……………………………………………..7

1.2. Тригонометрическая форма записи комплексного числа…12

1.3. Показательная форма записи комплексного числа………..20

1.4. Множества и кривые на комплексной плоскости………….23

Глава II. Функция комплексного переменного……….28

2.1. Основные понятия……………………………………….....28

2.2. Элементарные функции комплексного переменного……..31

2.3. Дифференцирование функций комплексного переменного. Условия Коши-Римана…………………………………………37

2.4. Интегрирование функций комплексного переменного……40

Глава III. Ряды в комплексной области………………..45

3.1. Числовые ряды с комплексными членами…………………45

3.2. Степенные ряды с комплексными членами………………..47

3.3. Ряд Тейлора……………………………………………….…..49

3.4. Ряд Лорана……………………………………………………52

Глава IV. Нули функции. Изолированные особые точки. Вычеты………………………………………………...55

4.1. Нули функции……………………………………………….....55

4.2. Изолированные особые точки. Классификация особых точек……………………………………………………....57

4.3. Вычеты…………………………………………………….…..60

4.4. Вычет в бесконечно удаленной точке………………………63

4.5. Вычисление интегралов с помощью вычетов……………...65
Глава V. Операционное исчисление……………………..69
5.1. Преобразование Лапласа. Оригиналы и изображения……..69
5.2. Изображение некоторых функций………………………..70
5.3. Основные теоремы операционного исчисления……………73
5.4. Изображение периодических функций……………………..87
5.5. Дельта-функция и ее изображение…………………………89
5.6. Таблица оригиналов и изображений………………………...90
Глава VI. Нахождение оригинала по изображению…..92
6.1. Применение таблицы и теорем операционного исчисления…………………………………………………..93
6.2. Применение теорем разложения…………………………....98
6.3. Понятие о свертке. Теорема о свертке…………………….104
6.4. Умножение изображений…………………………………...105
6.5. Операционный метод решения линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами…………………………………………………108
6.6. Применение формулы Дюамеля………………………...…114
6.7. Операционный метод решения системы дифференциальных уравнений……………………………………………………......118
6.8. Применение преобразования Лапласа к решению некоторых интегральных уравнений……………………………………..120
Задания для самостоятельной работы………………....123
I. Теория функций комплексного переменного……....123
Тематические тестовые задания для самопроверки...168
II. Операционное исчисление………………………….....169
Тематические тестовые задания для самопроверки...211
Список литературы……….……………………...……215

ВВЕДЕНИЕ

Впервые, по-видимому, мнимые величины появились в труде «Великое искусство, или об алгебраических правилах» Дж. Кардано (1545 г.), который счел их «бесполезными, непригодными к употреблению». Пользу мнимых величин, в частности, при решении кубического уравнения в так называемом неприводимом случае (когда действительные корни выражаются через кубические корни из мнимых величин) впервые оценил Р. Бомбелли (1572 г.). Он же дал некоторые простейшие правила действий с комплексными числами. Однако даже для многих крупных ученых XVII века алгебраическая и геометрическая сущность мнимых величин представлялась неясной и даже загадочной и мистической. Название «мнимые числа» ввел в 1637 году Р.Декарт.

Символ $i=\sqrt{-1}$ был предложен Л. Эйлером (1777 г.)(от первой буквы французского слова imaginaire (мнимый)). Но лишь в IX веке после появления работ К. Гаусса, в которых давалось наглядное геометрическое изображение комплексных чисел (как точек или векторов на плоскости), существование комплексных чисел стало общепризнанным фактом.

Геометрическое истолкование комплексных чисел позволило определить многие понятия, связанные с функцией комплексного переменного, расширить область их применения.

Комплексные числа можно представить в алгебраической, тригонометрической и показательной формах. Формула Эйлера устанавливает между ними связь. Благодаря этой формуле элементарные функции комплексного переменного можно связать между собой: тригонометрические функции выражаются через показательную функцию, а обратные тригонометрические – через логарифмическую.

Важным разделом приложений теории функций комплексного переменного является операционное исчисление, которое находит широкое применение в современной автоматике, телемеханике, теории автоматического регулирования и других областях. Методы операционного исчисления позволяют упростить алгоритм решения дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений с помощью перехода к решению более простых алгебраических уравнений.

Большой вклад в развитие теории функций комплексного переменного внесли русские и советские ученые.

Н. И. Мусхелишвили занимался ее применением к теории упругости, Н. Н. Келдыш и М. А. Лаврентьев – к аэро- и гидродинамике, Н.Н. Боголюбов и В. С. Владимиров – к проблемам квантовой теории поля.

ГЛАВА I
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Под **комплексным числом** понимается выражение вида

$$z = x + i\,y \equiv x + y\,i\,,$$

где x и y – действительные числа, а i – **мнимая единица**, удовлетворяющая равенству $i^2 = -1\left(\sqrt{-1} = i\right)$. При этом x называется **действительной**, а y – **мнимой частью** числа z, что записывается так:

$$x = \operatorname{Re} z, \qquad y = \operatorname{Im} z\,.$$

Действительному числу x соответствует комплексное число $x + 0i$; число $i\,y = 0 + i\,y$ называется чисто мнимым числом.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + i\,y_1$ и $z_2 = x_2 + i\,y_2$ равны между собой $\left(z_1 = z_2\right)$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Заметим, что знаками неравенств комплексные числа соединить нельзя, то есть запись $z_1 > z_2$ не имеет смысла.

1.1. ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ, ЗАДАННЫМИ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Выражение $z = x + i\,y$ называется **алгебраической формой** записи комплексного числа.

Задание комплексного z можно рассматривать как задание точки на плоскости, абсциссой которой является $x = \operatorname{Re} z$, ординатой $y = \operatorname{Im} z$, т.е. числу $z = x + iy$ соответствует точка $M\left(x, y\right)$. Между множеством точек плоскости xOy и множеством комплексных чисел (множество C) устанавливается взаимно однозначное соответствие: каждой точке $M\left(x, y\right)$ соответствует единственное число $z = x + iy$, каждому числу $z = x + iy$ соответствует единственная точка M с координатами (x, y); плоскость xOy называется **комплексной плоскостью** (плоскость (z)).

Два комплексных числа, у которых действительные части равны, а мнимые отличаются только знаком, называются (взаимно) **сопряженными**. Если $z = x + i\,y$, то сопряженное число обозначается $\overline{z} = x - i\,y$. Ясно, что $\overline{\overline{z}} = z$. Точки, изображающие сопряженные комплексные числа, расположены симметрично относительно действительной оси.

<u>Пример 1.1.</u> Записать действительную и мнимую части комплексных чисел, числа, сопряженные к ним, изобразить числа на комплексной плоскости:

$$z_1 = 2 - 3i,\ z_2 = 4,\ z_3 = i,\ z_4 = -5 + 2i.$$

► $\operatorname{Re} z_1 = 2, \operatorname{Im} z_1 = -3; \operatorname{Re} z_2 = 4, \operatorname{Im} z_2 = 0;$

$\operatorname{Re} z_3 = 0, \operatorname{Im} z_3 = 1; \operatorname{Re} z_4 = -5, \operatorname{Im} z_4 = 2;$

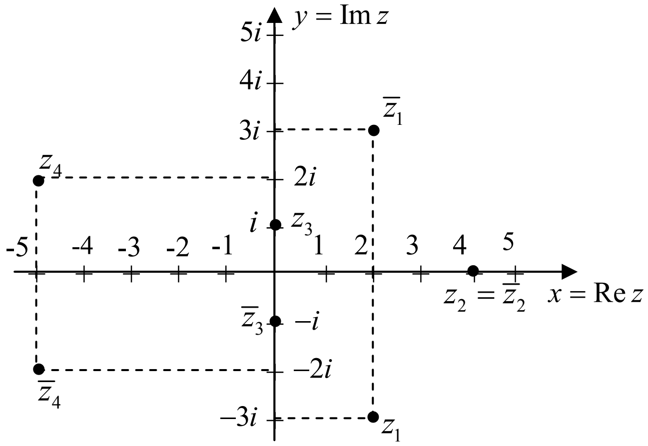


Рис.1

$$\overline{z}_1 = 2 + 3i;\quad z_2 = \overline{z}_2 = 4;\quad \overline{z}_3 = -i;\quad \overline{z}_4 = -5 - 2i. \quad ◄$$

Над комплексными числами $z_1 = x_1 + i\,y_1$ и

$z_2 = x_2 + i\,y_2$ допустимы следующие операции:

1. **Сложение и вычитание**

$$z_1 \pm z_2 = \left(x_1 + i\,y_1\right) \pm \left(x_2 + i\,y_2\right) = \left(x_1 \pm x_2\right) + i\left(y_1 \pm y_2\right).$$

При сложении (вычитании) комплексных чисел складываются (вычитаются) действительные и мнимые части соответственно.

В частности, сумма двух сопряженных чисел равна их удвоенной действительной части:

$$\left(x + i\,y\right) + \left(x - i\,y\right) = 2x\text{, или } z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z,$$

а их разность: $\left(x + i\,y\right) - \left(x - i\,y\right) = 2iy$ или $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}\,z$.

2. **Умножение**

$$z_1 z_2 = \left(x_1 + i\,y_1\right)\left(x_2 + i\,y_2\right) = \left(x_1 x_2 - y_1 y_2\right) + i\left(x_1 y_2 + x_2 y_1\right).$$

В частности, произведение сопряженных чисел равно:

$$z\,\bar{z} = \left(x + i\,y\right)\left(x - i\,y\right) = x^2 + y^2. \tag{1.1}$$

3. **Деление**. **Частным** от деления числа z_1 на z_2 $\left(z_2 \neq 0\right)$ называется число z такое, что справедливо равенство $z \cdot z_2 = z_1$.

Для нахождения частного двух комплексных чисел следует делимое и делитель умножить на число, сопряженное с делителем:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\left(x_1 + i\,y_1\right)\left(x_2 - i\,y_2\right)}{\left(x_2 + i\,y_2\right)\left(x_2 - i\,y_2\right)} = \frac{x_1 x_2 - i\,x_1 y_2 + i\,x_2 y_1 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} =$$

$$= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \qquad \text{если } x_2^2 + y_2^2 \neq 0.$$

4. **Возведение комплексных чисел в степень.**

Для комплексных чисел выполняются следующие соотношения:

$i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i, \ldots$ или в общем случае $i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Пример 1.2. Выполнить действия: а) $(1-i)^2$; б) $(1+i)^3$; в) $\frac{1}{i}$.

► а) $(1-i)^2 = 1-2i+i^2 = 1-2i-1 = -2i$;

б) $(1+i)^3 = 1+3i+3i^2+i^3 = 1+3i-3-i = -2+2i$;

в) $\frac{1}{i} = \frac{1}{i}\cdot\frac{i}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$. ◄

Пример 1.3. Найти частное от деления чисел $z_1 = i$ на $z_2 = 1+i$.

► $$\frac{i}{i+1} = \frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{i-i^2}{1+1} = \frac{i+1}{2} = \frac{1}{2}+i\frac{1}{2}.$$ ◄

Пример 1.4. Вычислить: $z = \frac{(-1+5i)^2(3-4i)}{1+3i} + \frac{(10+7i)}{5i}$.

► $$z = \frac{(1-10i-25)(3-4i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} + \frac{(10+7i)i}{5i^2} =$$

$$= \frac{-2(12+5i)(3-13i-12)}{10} + \frac{-7+10i}{-5} =$$

$$= \frac{43+201i}{5} + \frac{7-10i}{5} = 10+38,2i.$$ ◄

Пример 1.5. Вычислить: $z = \left(\frac{4}{\sqrt{3}+i}\right)^2$.

► $$z = \left(\frac{4}{\sqrt{3}+i}\right)^2 = \frac{16}{3+2\sqrt{3}i-1} = \frac{16}{2\left(1+\sqrt{3}i\right)} = \frac{8}{\left(1+\sqrt{3}i\right)} =$$

$$= \frac{8\left(1-\sqrt{3}i\right)}{\left(1+\sqrt{3}i\right)\left(1-\sqrt{3}i\right)} = \frac{8\left(1-\sqrt{3}i\right)}{1+\left(\sqrt{3}\right)^2} = 2\left(1-\sqrt{3}i\right) = 2-2\sqrt{3}i.$$ ◄

Пример 1.6. Вычислить: $i^{17} - i^{26} + \frac{1}{i^{25}}$.

► Согласно правилу возведения комплексных чисел в степень имеем:

$$i^{17}-i^{26}+\frac{1}{i^{25}}=i^{16+1}-i^{24+2}+\frac{1}{i^{24+1}}=i+1+\frac{1}{i}=i+1+\frac{i}{i^2}=i+1-i=1. \quad ◄$$

5. **Извлечение корня из комплексного числа.**

Корнем n**- й степени** из комплексного числа z называется число ω такое, что $\omega^n = z$. Обозначение: $\omega=\sqrt[n]{z}$.

Правило извлечения корня. Для извлечения корня $\sqrt[n]{z}$ (нахождения $x=\operatorname{Re}\sqrt[n]{z}$ и $y=\operatorname{Im}\sqrt[n]{z}$) следует, используя определение корня и правило возведения в степень, составить и решить систему уравнений относительно искомых x и y:

Пусть $\sqrt[n]{z}=x+iy$, тогда $z=\left(x+iy\right)^n$. Определим z из системы уравнений $\begin{cases}\operatorname{Re}z=\operatorname{Re}\left(x+iy\right)^n;\\ \operatorname{Im}z=\operatorname{Im}\left(x+iy\right)^n.\end{cases}$

Пример 1.7. Вычислить $\sqrt{2-2\sqrt{3}i}$.

► Обозначим: $\sqrt{2\text{-}2\sqrt{3}i}=x+iy$, тогда $\left(x+iy\right)^2=2\text{-}2\sqrt{3}i$, или $x^2-y^2+2ixy=2\text{-}2\sqrt{3}i$. Используя условие равенства комплексных чисел, записываем систему уравнений $\begin{cases}x^2-y^2=2\\ 2xy=-2\sqrt{3}\end{cases}$. Решаем систему:

$$\begin{cases}x^2-y^2=2\\ y=-\sqrt{3}/x\end{cases}, \qquad \text{или} \qquad x^4-2x^2-3=0.$$

Полагаем $t=x^2$, $t>0$. Имеем $t^2-2t-3=0$.

Отсюда находим $t_1=3,\ t_2=-1$. В результате получаем $x_1=\sqrt{3}, x_2=-\sqrt{3}, y_1=-1, y_2=1$.

Таким образом, имеем два значения квадратного корня:

$$\sqrt{2\text{-}2\sqrt{3}i}=\sqrt{3}-i,\ \sqrt{2\text{-}2\sqrt{3}i}=-\sqrt{3}+i. \quad ◄$$

1.2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА ЗАПИСИ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Комплексное число $x+iy$ определяется парой вещественных чисел (x,y) и поэтому определяется точкой $M(x,y)$ плоскости Oxy или ее радиус-вектором $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ (рис. 2). Длина вектора:

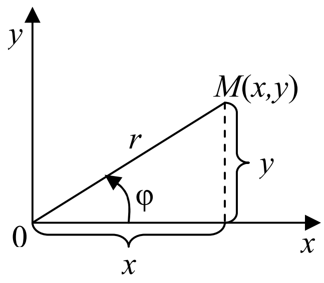


Рис. 2.

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2} \qquad (1.2)$$

называется **модулем** комплексного числа, а угол его с осью Ox $\varphi=\operatorname{Arg}z$ – **аргументом** комплексного числа. Здесь $-\infty<\operatorname{Arg}z<+\infty$. Значение $\operatorname{Arg}z$ называют **главным значением аргумента** z и обозначают через $\arg z$, если $-\pi<\arg z\le+\pi$. Главное значение аргумента определяется с помощью соотношений:

$$\varphi=\arg z=\begin{cases}\operatorname{arctg}(y/x), & x>0;\\ \pi/2, & x=0,\ y>0;\\ \pi+\operatorname{arctg}(y/x), & x<0,\ y>0;\\ -\pi+\operatorname{arctg}(y/x), & x<0,\ y<0;\\ \pi, & x<0,\ y=0;\\ -\pi/2, & x=0,\ y<0.\end{cases} \qquad (1.3)$$

$$\operatorname{Arg}z=\arg z+2\pi k, \qquad (k=0,1,2,...).$$

При решении примеров удобно пользоваться схемой, которая изображена на рис.3.

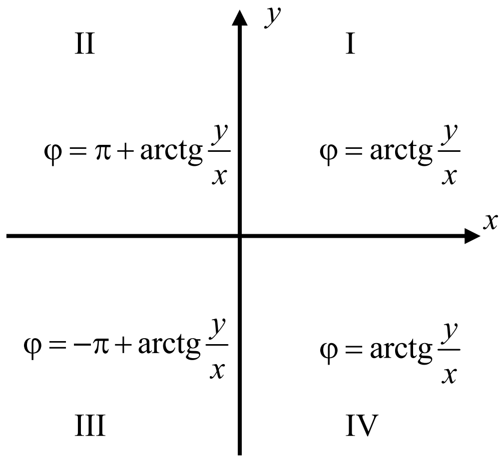


Рис. 3

Модуль r и аргумент φ комплексного числа z можно рассматривать как полярные координаты точки M. Тогда $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, и получаем тригонометрическую форму комплексного числа

$$\boxed{z = x + i\,y = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)}. \tag{1.4}$$

<u>Пример 1.8.</u> Представить в тригонометрической форме комплексные числа: а) $z_1 = 2i$; б) $z_2 = -1$; в) $z_3 = -i$; г) $z_4 = 4$; д) $z_5 = -\sqrt{3} - i$.

► Числа $z_1 = 2i$ и $z_3 = -i$ – чисто мнимые ($x_1 = x_3 = 0$), причем $y_1 = \operatorname{Im} z_1 = 2 > 0$, $y_3 = \operatorname{Im} z_3 = -1 < 0$, поэтому $\arg z_1 = \pi/2$, $\arg z_3 = -\pi/2$ (рис.4), $\left|z_1\right| = 2$, $\left|z_2\right| = 1$. С помощью формулы (1.4) получаем $2i = 2\left(\cos\left(\pi/2\right) + i\sin\left(\pi/2\right)\right)$;
$-i = \cos\left(-\pi/2\right) + i\sin\left(-\pi/2\right)$.

Числа $z_2 = -1,\ z_4 = 4$ – действительные, причем $z_2 = x_1 = -1 < 0$, $z_4 = x_4 = 4 > 0$ (рис.4). Поэтому $|z_2| = -z_2 = 1$, $|z_4| = z_4 = 4$, $\arg z_2 = \pi,\ \arg z_4 = 0$. Таким образом, $z_2 = -1 = \cos\pi + i\sin\pi,\ \ z_4 = 4\left(\cos 2\pi k + i\sin 2\pi k\right),\ k \in Z$.

д) $|z_5| = \left|-\sqrt{3} - i\right| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$.

Так как $x_5 = \operatorname{Re} z_5 = -\sqrt{3} < 0,\ \ y_5 = \operatorname{Im} z_5 = -1 < 0$ (рис.4), то с помощью (1.3) находим $\varphi = -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{-1}{-\sqrt{3}} = -\pi + \dfrac{\pi}{6} = -5\pi/6$. Поэтому $-\sqrt{3} - i = 2 \cdot \left[\cos\left(-5\pi/6\right) + i\sin\left(-5\pi/6\right)\right]$.

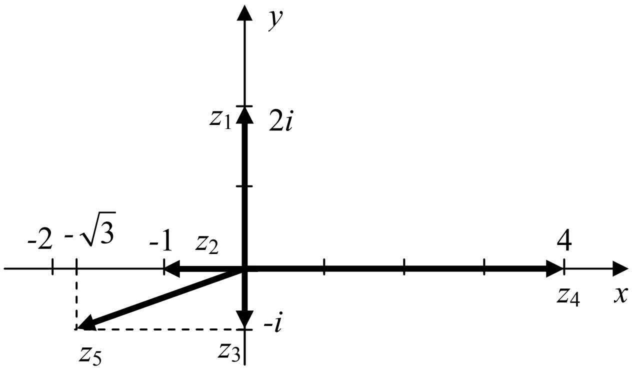


Рис. 4

◀

Умножение. Зададим два комплексных числа z_1 и z_2 в тригонометрической форме, то есть $z_1 = r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)$, $z_2 = r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)$, и вычислим их произведение:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right) =$$

$$= r_1 \cdot r_2 \left[\left(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2\right) + i\left(\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2\right)\right]$$

или $$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \left[\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right].$$

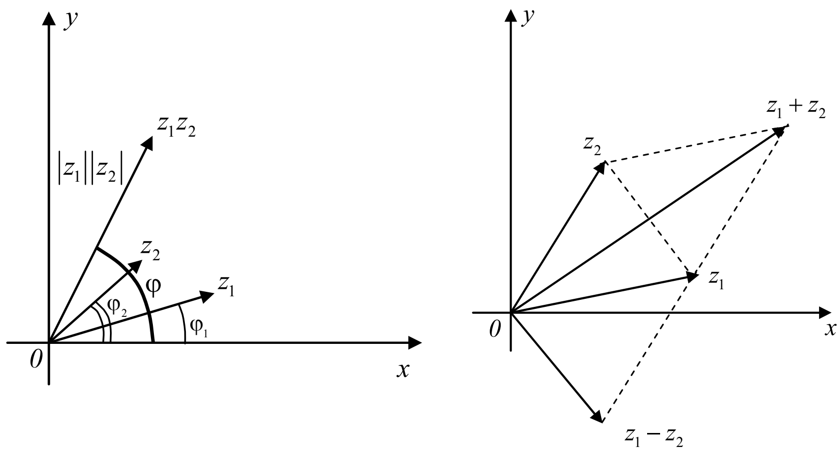
Получим новое число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, записанное в тригонометрической форме, для которого $r = r_1 \cdot r_2$, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

Правило умножения. При умножении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$\boxed{|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \qquad \operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2}. \tag{1.5}$$

Геометрически вектор $z_1 z_2$ получается из вектора z_1 поворотом на угол φ_2 и умножением его длины на длину вектора z_2 (рис. 5а).

Сложение и вычитание комплексных чисел геометрически сводится к сложению и вычитанию изображающих эти числа векторов (рис. 5б).



а) б)

Рис. 5.

<u>Пример 1.9</u>. Найти произведение комплексных чисел

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) \text{ и } z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

► $$z_1 z_2 = 2\cdot 3\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)\right]=$$
$$=6\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=3+3\sqrt{3}i\,.$$ ◄

Деление. Рассмотрим частное комплексных чисел z_1/z_2, заданных в тригонометрической форме:
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}=$$
$$=\frac{r_1(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{r_2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)}$$
или
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\big).$$

Правило деления. Модуль частного, полученного в результате деления чисел, заданных в тригонометрической форме, равен частному от деления модуля числителя на модуль знаменателя, а аргумент частного равен разности аргументов делимого и делителя:
$$\boxed{\begin{array}{l}|z_1/z_2|=|z_1|/|z_2|, \qquad |z_2|\neq 0,\\ \operatorname{Arg}(z_1/z_2)=\operatorname{Arg}z_1-\operatorname{Arg}z_2\end{array}}. \tag{1.6}$$

Пример 1.10. Записать в тригонометрической форме число $\dfrac{2-2i}{1-\sqrt{3}i}$.

► $z_1=2-2i,\ z_2=1-\sqrt{3}i.\ |z_1|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$,

$|z_2|=\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2,\ \operatorname{tg}\varphi_1=-1,$

$\arg z_1=-\dfrac{\pi}{4},\ \operatorname{tg}\varphi_2=-\sqrt{3},\ \arg z_2=-\dfrac{\pi}{3}.$

По формуле (1.6) получаем $|z| = \sqrt{2}$, $\arg z = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{12}$.

Поэтому

$$\frac{2-2i}{1-\sqrt{3}i} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + 2k\pi\right)\right),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \blacktriangleleft$$

Возведение в степень. Очевидным обобщением операции умножения является возведение в степень комплексного числа:

$$\boxed{z^n = (x + i\,y)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}. \qquad (1.7)$$

В частности, при $r = 1$ имеет место соотношение

$$\boxed{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi}, \qquad (1.8)$$

названное **формулой Муавра.**

<u>Пример 1.11</u>. Вычислить по формуле Муавра $\left(\sqrt{3} + i\right)^3$.

► $z = \sqrt{3} + i$, $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$,

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6},\ \sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

С помощью формулы Муавра находим

$$\left(\sqrt{3} + i\right)^3 = 2^3\left(\cos\frac{3\pi}{6} + i\sin\frac{3\pi}{6}\right) = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 8(0 + i) = 8i. \blacktriangleleft$$

<u>Пример 1.12</u>. Вычислить $\dfrac{(1-i)^{40}}{(1+i)^{20}}$.

► $z_1 = 1 - i,\ z_2 = 1 + i,\ r_1 = r_2 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$,

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{1}\right) = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4},\ \varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{1} = \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4},$$

$$\frac{(1-i)^{40}}{(1+i)^{20}} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{40}\left[\cos(-\pi/4)\cdot 40 + i\sin(-\pi/4)\cdot 40\right]}{\left(\sqrt{2}\right)^{20}\left[\cos(\pi/4)\cdot 20 + i\sin(\pi/4)\cdot 20\right]} =$$

$$= \frac{2^{10}\left[\cos(-10\pi) + i\sin(-10\pi)\right]}{\cos(5\pi) + i\sin(5\pi)} = 2^{10}\left[\cos(-10\pi - 5\pi) + i\sin(-10\pi - 5\pi)\right] =$$

$$= 2^{10}\left(\cos(-15\pi) + i\sin(-15\pi)\right) = 2^{10}\left(\cos\pi - i\sin\pi\right) =$$
$$= 2^{10}\left(-1 - i\cdot 0\right) = -2^{10}.$$ ◄

Извлечение корня. Для целого положительного числа n определена и операция извлечения корня для комплексных чисел. Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n различных значений, которые находятся по формуле:

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)}, \qquad (1.9)$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, $\sqrt[n]{r}$ – арифметическое значение корня.

Пример 1.13. Найти: а) $\sqrt[3]{-1+i}$; б) $\sqrt[4]{-16}$.

► а) Так как $-1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, то по формуле (1.9) находим

$$\sqrt[3]{-1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi/4 + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi/4 + 2k\pi}{3}\right) =$$
$$= \sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right], \ \{k = 0, 1, 2\}.$$

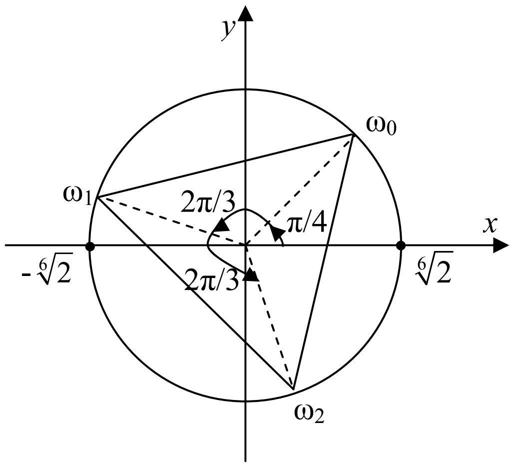


Рис. 6.

Если $k=0$, то $\omega_0=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

$k=1$, $\omega_1=\sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)\right]=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$,

$k=2$, $\omega_2=\sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)\right]=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$.

Точки, соответствующие полученным значениям, изображены на рис. 6. Они образуют правильный треугольник, вписанный в окружность радиуса $R=\sqrt[6]{2}$ с центром в начале координат.

б) Запишем число -16 в тригонометрической форме:

$$-16=16(\cos\pi+i\sin\pi),\quad r=16,\ \varphi=\pi.$$

С помощью формулы (1.9) получаем

$$\sqrt[4]{-16}=\sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right);\quad \{k=0,1,2,3\}.$$

Полагая последовательно k равным 0, 1, 2, 3, найдем все четыре значения $\sqrt[4]{-16}$:

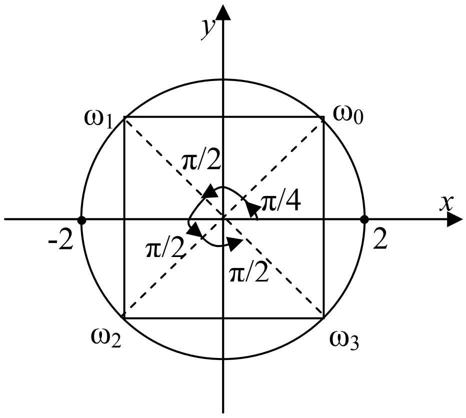


Рис. 7.

если

$k=0$, то $\omega_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) =$
$= \sqrt{2}\left(1+i\right)$,

$k=1$, $\omega_1 = 2\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{4}\right) =$
$= \sqrt{2}\left(-1+i\right)$,

$k=2$, $\omega_2 = 2\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+4\pi}{4}\right) =$
$= \sqrt{2}\left(-1-i\right)$,

$k=3$, $\omega_3 = 2\left(\cos\frac{\pi+6\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+6\pi}{4}\right) = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(1-i\right)$.

Точки, соответствующие полученным числам, изображены на рис. 7. Они образуют квадрат, вписанный в окружность радиуса $R=2$ с центром в начале координат. ◄

1.3. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Связь между показательной и тригонометрическими функциями устанавливает формула Эйлера

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}. \qquad (1.10)$$

Комплексное число z может быть представлено в показательной форме

$$\boxed{\begin{array}{c} z = r\,e^{i\varphi}, \quad \text{где } r = |z| - \text{модуль}, \\ \varphi = \arg z \ - \text{аргумент}. \end{array}} \qquad (1.11)$$

Таким образом, для каждого комплексного числа z возможны три формы представления:

алгебраическая: $z = x + i\,y$,

тригонометрическая: $z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$,

показательная: $z = r\,e^{i\varphi}$.

Пример 1.14. Комплексные числа: а) $z = -4i$; б) $z = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$; в) $z = 1 + i\sqrt{3}$, записанные в алгебраической форме, представить в тригонометрической и показательной формах.

► а) Модуль $r = |z| = 4$, $x = 0$, $y = -4$. Отсюда $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, поэтому

$$z = -4i = 4\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 4e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

б) $r = |z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$, $x = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0$, $y = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0$.

Следовательно, по формуле (1.3) имеем

$$\varphi = -\pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = -\pi + \operatorname{arctg}1 = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}.$$

С помощью формулы Эйлера (1.10) находим

$$z = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i = 1\cdot\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right] = e^{-\frac{3\pi}{4}i}.$$

в) $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$, $x = 1 > 0$, $y = \sqrt{3} > 0$.

Тогда $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, поэтому

$$z = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}, \text{ или}$$

$$z = 1 + i\sqrt{3} = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)\right] = 2e^{\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)i},\ k \in Z$$

(если не ограничиваться одним главным значением $\arg z = \dfrac{\pi}{3}$). ◄

<u>Пример 1.15.</u> Решить уравнение

$$z^2 + 4|z| = 0.$$

► Пусть $z = x + iy$. Тогда данное уравнение запишется в виде $(x+iy)^2 + 4\sqrt{x^2+y^2} = 0$, откуда $\left(x^2 - y^2 + 4\sqrt{x^2+y^2}\right) + 2xy\,i = 0$.

Комплексное число равно нулю тогда и только тогда, когда его действительная и мнимая части равны нулю; поэтому для нахождения неизвестных x и y получим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 4\sqrt{x^2+y^2} = 0, \\ xy = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения этой системы находим:
$x = 0$ или $y = 0$.

При $x = 0$ первое уравнение системы запишется в виде $-y^2 + 4|y| = 0$ или $|y|^2 - 4|y| = 0$. Отсюда находим $|y| = 0$ или $|y| = 4$, то есть $y_1 = 0,\ y_2 = 4, y_3 = -4$. Таким образом, числа $z_1 = 0,\ z_2 = 4i,\ z_3 = -4i$ являются решениями данного уравнения.

При $y = 0$ для нахождения x получаем уравнение $x^2 + 4|x| = 0$. Отсюда следует, что $x = 0$, и тем самым $z = 0$.

Таким образом, корнями данного уравнения являются числа $z_1 = 0,\ z_2 = 4i,\ z_3 = -4i$. ◄

<u>Пример 1.16</u>. Найти действительные значения x и y из уравнения

$$(4-3i)x - (2-5i)y = 2 + 9i.$$

► Преобразуя данное уравнение, получаем

$$(4x - 2y) - i(3x - 5y) = 2 + 9i.$$

Приравнивая действительные и мнимые части в левой и правой части последнего уравнения, имеем систему уравнений для определения неизвестных значений x и y:

$$\begin{cases} 4x - 2y = 2, \\ 3x - 5y = -9. \end{cases}$$

Отсюда находим: $x = 2$, $y = 3$. ◄

Пример 1.17. Решить уравнение

$$z^2 - 3z + 3 + i = 0.$$

► Так как $D = 9 - 4(3 + i) = -3 - 4i$, то

$z_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{-3 - 4i}}{2} = \dfrac{3 \pm \omega}{2}$, где $\omega^2 = -3 - 4i$.

Полагаем $\omega = x + iy$, тогда $x^2 + 2i\,xy - y^2 = -3 - 4i$.

Два комплексных числа равны, следовательно, равны их действительные и мнимые части:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3, \\ xy = -2. \end{cases}$$

Находим решение этой системы. Имеем

$$\begin{cases} y = -\dfrac{2}{x} \\ x^2 - \dfrac{4}{x^2} + 3 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -\dfrac{2}{x} \\ x^4 + 3x^2 - 4 = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим $x^2 = 1,\ x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ y_1 = -2,\ y_2 = 2$, то есть $\omega_1 = 1 - 2i,\ \omega_2 = -1 + 2i$. Поэтому $z_1 = 2 - i,\ z_2 = 1 + i$. ◄

1.4. МНОЖЕСТВА И КРИВЫЕ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Расстояние $\rho(z_1, z_2)$ между точками плоскости комплексного переменного $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ находится по известной из аналитической геометрии формуле

$$\boxed{\rho(z_1, z_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = |z_2 - z_1|}. \qquad (1.12)$$

Уравнение вида $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ определяет на комплексной плоскости кривую, параметрические уравнения которой имеют вид: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Исключением параметра t из этих уравнений получаем уравнение кривой в виде $F(x, y) = 0$.

Заменой $x = (z + \bar{z})/2,\ y = (z - \bar{z})/2i$ последнее уравнение приводится к виду $F\left(\dfrac{z + \bar{z}}{2}, \dfrac{z - \bar{z}}{2i}\right) = 0$.

<u>Пример 1.18.</u> Записать уравнение окружности радиуса R с центром в точке $O(x_0, y_0)$.

► В параметрической форме уравнение окружности имеет вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + R\cos t, \\ y = y_0 + R\sin t, \end{cases} \qquad 0 \le t < 2\pi .$$

Отсюда получаем $z(t) = x(t) + iy(t) = x_0 + R\cos t + i(y_0 + R\sin t) =$
$= x_0 + iy_0 + R(\cos t + i\sin t)$.

Используя формулу Эйлера (1.10), запишем уравнение окружности в виде: $z(t) = z_0 + R \cdot e^{it}$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $0 \le t \le 2\pi$.

Отсюда

$$|z - z_0| = R \cdot \left|e^{it}\right| = R \cdot |\cos t + i\sin t| = R\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = R . \qquad ◄$$

Таким образом, уравнение окружности радиуса R с центром в точке z_0 можно записать в виде:

$$\boxed{|z - z_0| = R}, \qquad (1.13)$$

а внутренность круга с центром z_0 радиуса R (рис. 8а) записывается неравенством

$$\boxed{|z - z_0| < R}. \tag{1.14}$$

Кольцо с центром в точке z_0, радиусы внешней и внутренней окружностей которого R и r, задается неравенством $r<|z-z_0|<R$ (рис. 8б).

Верхняя полуплоскость комплексной плоскости – множество точек, для которых $y > 0$, т.е. в комплексной форме $\operatorname{Im} z > 0$ (рис. 8в); соответственно $\operatorname{Im} z < 0$ – нижняя полуплоскость. Неравенство $\operatorname{Re} z > 0$ определяет правую полуплоскость (рис. 8г), $\operatorname{Re} z < 0$ – левую полуплоскость.

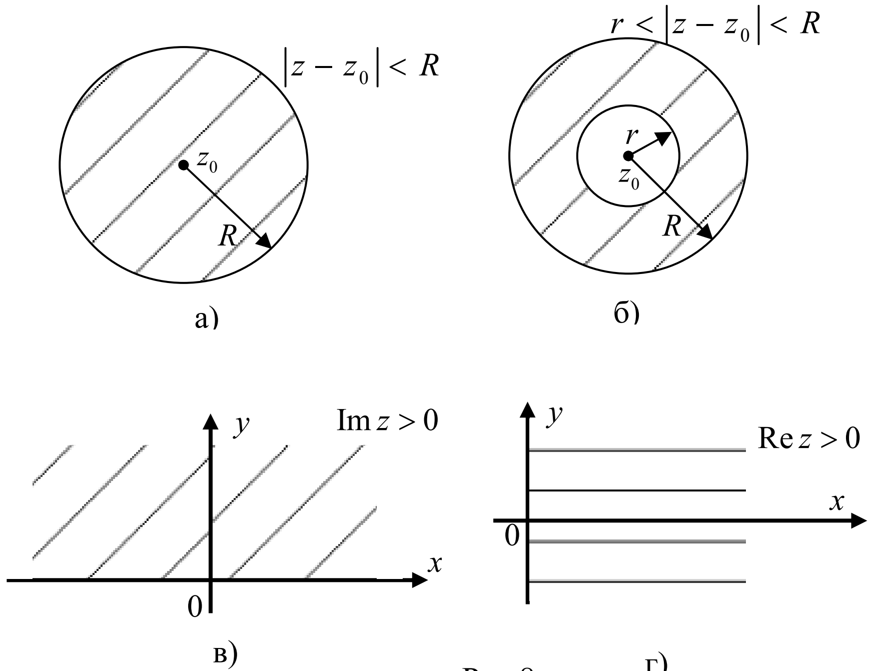


Рис.8

<u>Пример 1.19</u>. Найти множество точек координатной плоскости Oxy, изображающих комплексные числа z, удовлетворяющих условию:

а) $|z+i-2|\le 2$; б) $|z+i|>|z-i|$; в) $\begin{cases}1\le|z+1|\le 2,\\ \pi/2\le\arg z\le\pi.\end{cases}$

► а) Запишем комплексное число z в алгебраической форме $z=x+i\,y$. Тогда

$$z+i-2=(x-2)+i(y+1).$$

По определению модуля комплексного числа

$$|z+i-2|=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2},$$

вследствие чего неравенство из условия примера а) принимает вид:

$$\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}\le 2 \text{ или } (x-2)^2+(y+1)^2\le 2^2.$$

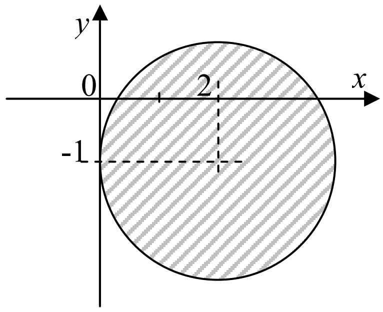


Рис. 9.

Множество точек координатной плоскости Oxy, удовлетворяющих последнему неравенству, представляет собой множество всех точек, лежащих внутри и на окружности радиуса 2 с центром в точке (2; –1) (рис. 9). Этот ответ можно получить из геометрических соображений, учитывая, что для каждого z число $|z+i-2|=|z-(2-i)|$ равно расстоянию между точкой z и точкой $2-i$.

б) Пусть $z=x+i\,y$. Тогда данное соотношение перепишется в виде $|x+(y+1)i|>|x+(y-1)i|$, или $x^2+(y+1)^2>x^2+(y-1)^2$.

Отсюда находим $(y+1)^2>(y-1)^2$, то есть $(y+1-y+1)(y+1+y-1)>0$.

Таким образом, $y > 0$, и, следовательно, исходному соотношению удовлетворяют только комплексные числа, для которых $\mathrm{Jm}\, z > 0$. Такие точки заполняют всю верхнюю полуплоскость.

в) Искомое множество точек есть пересечение кольца, ограниченного окружностями радиусов 1 и 2 с центром в точке (-1; 0), и второго квадранта (рис. 10). ◀

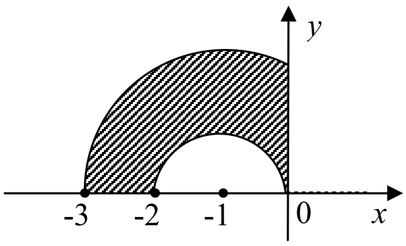


Рис. 10.

ГЛАВА II
ФУНКЦИЯ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

2.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Говорят, что в области D определена функция $\omega = f(z)$, если каждой точке $z \in D$ поставлено в соответствие одно (однозначная функция) или несколько (многозначная функция) значений ω.

Пусть $z = x + iy$ и $\omega = u + iv$. Тогда зависимость $\omega = f(z)$ между комплексной функцией ω и комплексной переменной z может быть описана с помощью двух действительных функций u и v действительных переменных x и y: $u = \operatorname{Re} f(z)$ - действительная часть, $v = \operatorname{Im} f(z)$ - мнимая часть функции $f(z)$: $u = u(x, y),\ v = v(x, y)$, $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$.

Говорят, что однозначная функция $\omega = f(z)$ при $z \to z_0$ имеет конечный предел A (z_0 и A - комплексные числа), если для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что из условия $|z - z_0| < \delta$ следует неравенство $|f(z) - A| < \varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$.

Функция $\omega = f(z)$ называется **непрерывной в точке** z_0, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области D, называется **непрерывной в этой области**.

Рассмотрим область D, ограниченную замкнутой не самопересекающейся линией $\tilde{A}$. Эта область называется **односвязной** (рис. 11).

Если область D ограничена двумя замкнутыми не пересекающимися и не самопересекающимися линиями $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$, то область D называется **двусвязной** (рис. 12).

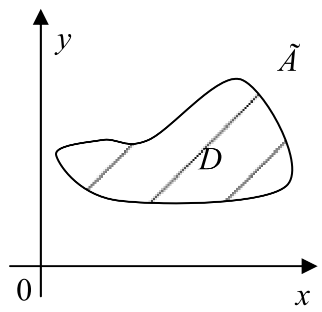


Рис. 11.

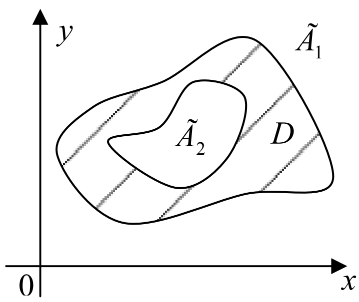


Рис. 12.

<u>Пример 2.1</u>. Найти действительную и мнимую части функции: а) $\omega = \overline{z} - iz^2$, б) $\omega = \dfrac{1}{\overline{z}}$.

► Пусть $z = x + iy$. Тогда $\overline{z} = x - iy$.

а) $\omega = \overline{z} - i\,z^2 = x - iy - i\left(x + iy\right)^2 = x - iy - x^2 i + 2xy + iy^2 =$

$= \left(x + 2xy\right) + i\left(y^2 - x^2 - y\right)$. Таким образом,

$\operatorname{Re}\omega = x + 2xy$, $\operatorname{Im}\omega = y^2 - x^2 - y$.

б) $\omega = \dfrac{1}{\overline{z}} = \dfrac{1}{x - iy} = \dfrac{x + iy}{\left(x - iy\right)\left(x + iy\right)} = \dfrac{x + iy}{x^2 + y^2} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + i\dfrac{y}{x^2 + y^2}$.

Поэтому $\operatorname{Re}\omega = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $\operatorname{Im}\omega = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$. ◄

Задание функции комплексного переменного $f\left(z\right)$ с областью определения D и областью значений G есть отображение множества D на множество G, $f : D \to G$ (рис. 13).

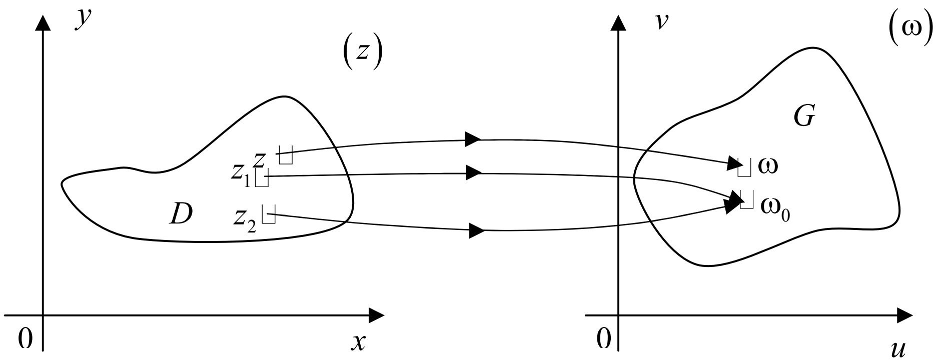


Рис. 13

Точка $\omega \in G$ называется **образом** точки z при отображении $\omega = f(z)$, точка $z \in D$ - **прообразом**.

По определению предполагается однозначность отображения, т.е. каждому числу $z \in D$ соответствует единственное значение $\omega \in G$, но при этом может оказаться, что точка ω является образом двух или более точек $z \in D$ (на рис. 13 это точка ω_0, так как $\omega_0 = f(z_1)$ и $\omega_0 = f(z_2)$).

Если любое значение $\omega \in G$ является образом только одной точки $z \in D$, то отображение называется **однолистным** в D, в противном случае – **неоднолистным**.

Примерами однолистных отображений в комплексной плоскости являются отображения $\omega = z$, $\omega = \overline{z}$. Примером неоднолистного отображения в C является $\omega = z^2$, так как различным точкам, например, $z_1 = 1$ и $z_2 = -1$, соответствует одно значение $\omega = 1$.

Функция называется **многозначной**, если каждому значению z ставится в соответствие несколько комплексных чисел.

<u>Пример 2.2</u>. Найти образ точки $z_0 = 1 - i$ при отображении $\omega = z^2$.

► $\omega = (1-i)^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$. ◄

2.2. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1. **Дробно-рациональная** функция

$$\omega = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m};$$

в частности, рациональной функцией является многочлен

$$\omega = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n .$$

2. **Показательная функция** e^z определяется формулой

$$\boxed{\omega = e^z = e^{x+iy} = e^x\left(\cos y + i\sin y\right)}. \qquad (2.1)$$

Показательная функция e^z обладает следующими свойствами:

а) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$, где z_1 и z_2 - любые комплексные величины;

б) $e^{z+2k\pi i} = e^z$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), т.е. e^z является периодической функцией с периодом $2\pi i$;

в) $e^{z_1} / e^{z_2} = e^{z_1 - z_2}$.

Полагая в формуле (2.1) $x = 0,\ y = \varphi$, получим формулу Эйлера (1.10).

Для комплексного переменного z формулы Эйлера имеют вид:

$$\boxed{e^{iz} = \cos z + i\sin z}, \qquad (2.2)$$

$$\boxed{e^{-iz} = \cos z - i\sin z}. \qquad (2.3)$$

3. **Тригонометрические функции** $\sin z$ и $\cos z$ определяются равенствами:

$$\boxed{\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}}, \qquad (2.4)$$

$$\boxed{\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}}. \qquad (2.5)$$

Функции $\sin z$ и $\cos z$ периодические с действительным периодом 2π и имеют только действительные нули $z = k\pi$ и $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ соответственно.

Функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ определяются равенствами

$$\boxed{\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}}. \tag{2.6}$$

Для тригонометрических функций остаются в силе все формулы тригонометрии.

Отметим, что тригонометрические функции $\sin z, \cos z$ в комплексной плоскости C неограничены: $\lim\limits_{z \to \pm\infty} \sin z = \infty$, $\lim\limits_{z \to \pm\infty} \cos z = \infty$.

4. **Гиперболические** функции определяются формулами:

$$\boxed{\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}}, \tag{2.7}$$

$$\boxed{\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}}. \tag{2.8}$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \qquad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Из формул (2.7), (2.8) вытекает соотношение:

$$\boxed{e^z = \operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z}, \tag{2.9}$$

называемое формулой Эйлера.

Формулы Эйлера (2.2),(2.9) связывают тригонометрические и гиперболические функции с показательной.

Так как $\operatorname{ch} z$ - четная функция, а $\operatorname{sh} z$ - нечетная функция, то

$$e^{-z} = \operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z.$$

Тригонометрические и гиперболические функции связаны между собой формулами:

$$\boxed{\begin{array}{l}\operatorname{sh} iz = i\sin z,\ \operatorname{ch} iz = \cos z,\\ \cos iz = \operatorname{ch} z,\ \sin iz = i\operatorname{sh} z,\\ \operatorname{th} z = -i\operatorname{tg} iz,\ \operatorname{cth} z = i\operatorname{ctg} iz,\\ \operatorname{tg} iz = i\operatorname{th} z,\ \operatorname{ctg} iz = -i\operatorname{cth} z,\\ \sin z = -i\operatorname{sh} iz,\ \cos z = \operatorname{ch}(iz).\end{array}} \qquad (2.10)$$

Для гиперболических функций справедливы следующие формулы:

$$\boxed{\begin{array}{l}\operatorname{sh}(z_1+z_2) = \operatorname{sh} z_1\cdot\operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1\cdot\operatorname{sh} z_2,\\ \operatorname{sh} 2z = 2\operatorname{sh} z\operatorname{ch} z,\\ \operatorname{ch}(z_1+z_2) = \operatorname{ch} z_1\cdot\operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1\cdot\operatorname{sh} z_2,\\ \operatorname{ch} 2z = 2\operatorname{ch}^2 z - 1,\\ \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1, \qquad \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z = \operatorname{ch} 2z.\end{array}} \qquad (2.11)$$

Гиперболические функции в действительной области не являются периодическими, в комплексной области функции $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ являются периодическими, и период, как и у функции e^z, мнимое число $T = 2\pi i$; функции $\operatorname{th} z$ и $\operatorname{cth} z$ имеют период πi.

5. **Логарифмическая** функция $\operatorname{Ln} z$, где $z \neq 0$, определяется как функция, обратная показательной, причем

$$\boxed{\begin{array}{l}\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i\\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)\end{array}}. \qquad (2.12)$$

Эта функция является многозначной. Главным значением $\operatorname{Ln} z$ называется то значение, которое получается при $k = 0$, оно обозначается

$$\boxed{\ln z = \ln|z| + i\arg z}, \quad \text{где } -\pi < \arg z \leq \pi. \qquad (2.13)$$

Справедливы следующие соотношения:

$$\operatorname{Ln}(z_1\cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln}(z_1/z_2) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln} z^n = n\operatorname{Ln} z.$$

6. **Обратные тригонометрические** функции $\operatorname{Arc}\sin z$, $\operatorname{Arc}\cos z$, $\operatorname{Ar}\operatorname{ctg} z$, $\operatorname{Ar}\operatorname{c}\operatorname{c}\operatorname{tg} z$ определяются как функции, обратные соответственно к $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$.

Например, если $z = \sin\omega$, то ω называется арксинусом числа z и обозначается $\omega = \arcsin z$.

Все эти функции являются многозначными и выражаются через логарифмические функции

$\operatorname{Arc}\sin z = -i\,\operatorname{Ln}\left(i\,z + \sqrt{1-z^2}\right),$	(2.14)
$\operatorname{Arc}\cos z = -i\,\operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right),$	(2.15)
$\operatorname{Ar}\operatorname{ctg} z = -\dfrac{i}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{i-z}{i+z},\ \ z \neq \pm i,$	(2.16)
$\operatorname{Ar}\operatorname{c}\operatorname{ctg} z = -\dfrac{i}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{z+i}{z-i},\ \ z \neq \pm i.$	(2.17)

7. **Общая степенная** функция $\omega = z^a$, где $a = \alpha + i\beta$ – любое комплексное число, определяется соотношением

$$\boxed{z^a = e^{a\operatorname{Ln} z}}. \tag{2.18}$$

Эта функция многозначная; ее главное значение равно

$$z^a = e^{a\ln z}. \tag{2.19}$$

8. **Общая показательная** функция $\omega = a^z$ ($a \neq 0$ – любое комплексное число) определяется равенством

$$\boxed{a^z = e^{z\operatorname{Ln} a}}. \tag{2.20}$$

Главное значение этой функции

$$a^z = e^{z\ln a}.$$

<u>Пример 2.3</u>. Найти $\ln z$ и $\operatorname{Ln} z$ для следующих чисел:

а) $z = i$; б) $z = 1 - \sqrt{3}\,i$.

► а) Находим модуль и аргумент числа $z = i$: $|z| = 1$, $\arg z = \pi/2$. По формулам (2.13), (2.12) получаем $\ln i = \ln 1 + \dfrac{\pi}{2}i = \dfrac{\pi}{2}i$, $\operatorname{Ln} i = \left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

б) Для числа $z=1-\sqrt{3}\,i$ находим модуль и аргумент: $|z|=2,\ \operatorname{tg}\varphi=-\sqrt{3},\ \varphi=-\pi/3$. Поэтому $\ln\left(1-\sqrt{3}\,i\right)=\ln 2-\dfrac{\pi}{3}i,$

$\operatorname{Ln}\left(1-\sqrt{3}\,i\right)=\ln 2+\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)i,\quad k=0,\pm 1,\pm 2,...$ ◄

Пример 2.4. Дана функция $\omega=e^{z}$. Найти ее значение при: а) $z=\pi i$; б) $z=\pi\left(2-\dfrac{1}{3}i\right)$; в) $z=-2+\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right)i,\quad k\in Z$.

► а) По формуле Эйлера (2.2) находим $\omega=e^{\pi i}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$;

б) $\omega=e^{\pi\left(2-\frac{1}{3}i\right)}=e^{2\pi}\cdot e^{-\frac{\pi}{3}i}=e^{2\pi}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]=$

$=e^{2\pi}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$;

в) $\omega=e^{-2+\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)i}=e^{-2}\cdot e^{\frac{\pi}{2}i}=e^{-2}\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)=e^{-2}\,i=\dfrac{i}{e^{2}}$. ◄

Пример 2.5. Найти $\operatorname{Re}z,\operatorname{Im}z$, если а) $z=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+2i\right)$; б) $z=\operatorname{sh}\left(2+\dfrac{\pi}{6}i\right)$.

►а) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+2i\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}\cos 2i+\cos\dfrac{\pi}{3}\sin 2i=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2i+\dfrac{1}{2}\sin 2i$.

С учетом формул (2.10) находим

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+2i\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch}2+\frac{1}{2}i\operatorname{sh}2.$$

Отсюда имеем $\operatorname{Re}z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch}2,\ \operatorname{Im}z=\dfrac{1}{2}\operatorname{sh}2$.

б) С учетом формул (2.10), (2.11) последовательно находим

$$z=\operatorname{sh}\left(2+\frac{\pi}{6}i\right)=\operatorname{sh}2\cdot\operatorname{ch}\frac{\pi}{6}i+\operatorname{ch}2\cdot\operatorname{sh}\frac{\pi}{6}i=$$

$$=\operatorname{sh}2\cdot\cos\frac{\pi}{6}+i\operatorname{ch}2\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sh}2+i\cdot\frac{1}{2}\operatorname{ch}2.$$

Итак, имеем $\operatorname{Re}z=\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sh}2$, $\operatorname{Im}z=\frac{1}{2}\operatorname{ch}2$. ◄

<u>Пример 2.6</u>. Вычислить i^{-i}.

► По формуле (2.18) запишем i^{-i} в виде $i^{-i}=e^{-i\operatorname{Ln}i}$. Найдем значение для $\operatorname{Ln}i$:

$$\operatorname{Ln}i=\ln 1+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\quad k=0,\pm1,\pm2,...$$

Поэтому $i^{-i}=e^{-i^2\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}=e^{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$, $k=0,\pm1,\pm2,...$ ◄

<u>Пример 2.7</u>. Решить уравнение $4\cos z+5=0$.

► Задача сводится к нахождению величины $z=\operatorname{Arccos}\left(-\frac{5}{4}\right)$.

С помощью формулы (2.15) находим

$$z=-i\operatorname{Ln}\left(-\frac{5}{4}+\sqrt{\left(-\frac{5}{4}\right)^2-1}\right)=-i\operatorname{Ln}(-0,5).$$

Далее воспользуемся формулой (2.12)

$$\operatorname{Ln}(-0,5)=\ln|-0,5|+i\arg(-0,5)+2k\pi i=\ln 0,5+(2k\pi+\pi)i.$$

Теперь будем иметь

$$z=i\ln 2+(2k+1)\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,...$$ ◄

<u>Пример 2.8</u>. Пусть $z=x+iy$. Доказать, что $\operatorname{Re}\sin z=\sin x\cdot\operatorname{ch}y$.

► Используя формулы (2.10), имеем $\sin(x+iy)=\sin x\cdot\cos iy+$ $+\cos x\cdot\sin iy=\sin x\cdot\operatorname{ch}y+\cos x\cdot i\operatorname{sh}y$. ◄

2.3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. УСЛОВИЯ КОШИ – РИМАНА

Производной однозначной функции комплексного переменного $\omega = f(z)$ называется предел отношения

$\dfrac{\Delta\omega}{\Delta z} = \dfrac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$, если Δz любым способом стремится к нулю.

Таким образом,

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Функция, имеющая производную при данном значении z, называется **дифференцируемой** при этом значении z.

Если $z = x + i\,y$, $\omega = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, то в каждой точке дифференцируемости функции $f(z)$ выполняются соотношения

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}, \qquad (2.21)$$

называемые **условиями Коши – Римана**.

Условия Коши – Римана являются необходимыми условиями дифференцируемости функции $\omega = f(z)$ в точке $z = x + i\,y$.

Однозначная функция $f(z)$ называется **аналитической** в **точке** z, если она дифференцируема (выполнены условия Коши – Римана) в некоторой окрестности этой точки. Функция $f(z)$ называется **аналитической** в области D, если она дифференцируема в каждой точке области.

Для любой аналитической функции $f(z)$ имеем

$$\boxed{f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}}. \qquad (2.22)$$

Пример 2.9. Показать, что функция $f(z)=\left(x^3-3xy^2\right)+i\left(3x^2y-y^3\right)$ дифференцируема и найти ее производную.

► Здесь $u(x,y)=x^3-3xy^2$, $v(x,y)=3x^2y-y^3$ – всюду дифференцируемые функции переменных x и y.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-6xy,\ \frac{\partial v}{\partial x}=6xy,\ \frac{\partial v}{\partial y}=3x^2-3y^2.$$

Условия Коши – Римана: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ выполняются. Найдем производную по формуле (2.22):

$$f'(z)=\left(3x^2-3y^2\right)+6i\,xy. \qquad ◄$$

Пример 2.10. Найти аналитическую функцию по известной ее действительной части $u(x,y)=2\sin x\operatorname{ch} y-x$ и дополнительном условии $f(0)=0$.

► Имеем $\frac{\partial u}{\partial x}=2\cos x\operatorname{ch} y-1$. По первому из условий Коши – Римана должно быть $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, так что $\frac{\partial v}{\partial y}=2\cos x\operatorname{ch} y-1$.

Отсюда $v(x,y)=\int\left(2\cos x\operatorname{ch} y-1\right)\mathrm{dy}=2\cos x\operatorname{sh} y-y+\varphi(x)$.

Определим неизвестную функцию $\varphi(x)$. Дифференцируя $v(x,y)$ по x и используя второе из условий Коши – Римана (2.21), получим

$$-2\sin x\operatorname{sh} y+\varphi'(x)=-\frac{\partial u}{\partial y}=-2\sin x\operatorname{sh} y,$$

откуда $\varphi'(x)=0$, а значит $\varphi(x)=C$, где $C=const$.

Итак, $v(x,y) = 2\cos x \operatorname{sh} y - y + C$, и, следовательно,

$f(z) = (2\sin x \operatorname{ch} y - x) + i(2\cos x \operatorname{sh} y - y + C)$.

Поскольку $\operatorname{ch} y = \cos iy$, $\operatorname{sh} y = \frac{1}{i}\sin iy = -i\sin iy$, то

$$f(z) = (2\sin x \cdot \cos iy + 2\cos x \cdot \sin iy) - (x + iy) + C \cdot i$$

или

$$f(z) = u + iv = 2\sin(x + iy) - (x + iy) + C \cdot i.$$

Так как $z = x + iy$, то имеем

$$f(z) = 2\sin z - z + Ci.$$

Постоянную C находим из условия $f(0) = 0$. Получаем $C = 0$.

Таким образом, получаем

$$f(z) = 2\sin z - z. \quad ◄$$

Замечание. Искомую функцию $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) + C$ можно преобразовать к переменной z заменой x и y:

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2},\ y = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Определение. Функция $\varphi(x,y)$ называется **гармонической** в области D, если она имеет в этой области непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет в этой области уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Если функция $f(z) = u + iv$ аналитична в некоторой области D, то ее действительная часть $u(x,y)$ и мнимая часть $v(x,y)$ являются гармоническими в этой области.

Однако, если $u_1(x,y)$ и $v_1(x,y)$ – любые две гармонические функции, то функция $f_1(z)=u_1(x,y)+iv_1(x,y)$ может и не быть аналитической функцией. Для аналитичности $f_1(z)$ нужно, чтобы функции u_1 и v_1 дополнительно удовлетворяли условиям Коши – Римана.

2.4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Пусть однозначная функция $f(z)$ определена и непрерывна в области D, а L – кусочно-гладкая замкнутая или незамкнутая дуга линии, лежащая в D.

Пусть $z=x+iy,\ f(z)=u+iv$, где $u=u(x,y),\ v=v(x,y)$ – действительные функции переменных x и y.

Вычисление интеграла от функции $f(z)$ комплексного переменного z сводится к вычислению обычных криволинейных интегралов, а именно,

$$\boxed{\int\limits_l f(z)\,dz=\int\limits_l u\,dx-v\,dy+i\int\limits_l v\,dx+u\,dy}. \tag{2.23}$$

Интеграл $\int\limits_l f(z)\,dz$, вообще говоря, зависит от пути интегрирования l.

Если кривая l задана уравнением $y=y(x),\ a\le x\le b$, то в формуле (2.23) можно записать $dy=y'(x)\,dx$; если кривая l задана параметрическими уравнениями $x=x(t),\ y=y(t)$, $t_1\le t\le t_2$, то полагаем $dx=x'(t)\,dt,\ dy=y'(t)\,dt$.

Пусть функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D, а l – некоторая кривая (с начальной точкой z_1 и конечной точкой z_2), лежащая в области D. Тогда

1) имеет место формула Ньютона-Лейбница

$$\boxed{\int_l f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1)}, \tag{2.24}$$

где $F(z)$ – первообразная для функции $f(z)$ ($F'(z) = f(z)$ в области D), то есть этот интеграл не зависит от вида кривой l, а зависит от начальной и конечной точек z_1 и z_2;

2) если l – замкнутая кривая, то верна **теорема Коши**:

$$\boxed{\oint_l f(z)\,dz = 0} \tag{2.25}$$

(через $\oint_l$ обозначается интеграл по замкнутой кривой l);

3) если точка z_0 лежит внутри замкнутой кривой l, то верна **интегральная формула Коши:**

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz} \tag{2.26}$$

и

$$\boxed{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_l \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz, \quad n = 1, 2, \ldots} \tag{2.27}$$

(обход кривой l совершается против часовой стрелки).

Пример 2.11. Вычислить интеграл $J = \int_l z^2 \operatorname{Im} z\,dz$, где l – отрезок прямой от точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 2 + 2i$.

► Так как l – отрезок прямой $y = x$ (рис. 14), то $dy = dx$. Поскольку $z = x + iy$ и $\operatorname{Im} z = y$, тогда находим

$$J = \int_l (x + iy)^2\, y\, d(x + iy) = \int_l \left(x^2 y + 2ixy^2 - y^3\right)(dx + idy) =$$

$$=\int_0^2\left(x^3+2x^3i-x^3\right)(1+i)\,dx=2(1+i)i\int_0^2 x^3dx=2(i-1)\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^2=8(i-1).◄$$

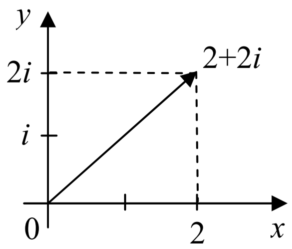


Рис. 14

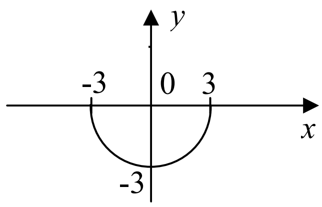


Рис. 15

Пример 2.12. Вычислить интеграл $J=\int_l |z|\operatorname{Re} z\,dz$, где l – полуокружность $|z|=3,\ \operatorname{Im} z\le 0$.

► Запишем уравнение полуокружности (рис. 15) в параметрическом виде: $x=3\cos t,\ y=3\sin t,\ -\pi\le t\le 0$. Так как $z=x+i\,y,\ \ |z|=3$, $\operatorname{Re} z=x$, то

$$J=\int_l 3x\,d\left(x+i\,y\right)=3\int_{-\pi}^{0} 3\cos t\left(-3\sin t+3i\cos t\right)dt=$$

$$=27\int_{-\pi}^{0}\left(-\sin t\cos t+i\cos^2 t\right)dt=\frac{27}{2}\int_{-\pi}^{0}\left(-\sin 2t+i\left(1+\cos 2t\right)\right)dt=$$

$$=\frac{27}{2}\left(\frac{1}{2}\cos 2t+i\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\right)\Bigg|_{-\pi}^{0}=\frac{27}{2}\pi i.\qquad ◄$$

Пример 2.13. Вычислить интеграл от функции комплексного переменного $\int_l \overline{z}\,dz$, l – полуокружность $|z|=1$, $\operatorname{Im} z\ge 0$.

► Так как для всех точек полуокружности выполняется условие: $r=|z|=1$, то полагаем $z=re^{i\varphi}=e^{i\varphi}$, $0\le\varphi\le\pi$. Тогда $\overline{z}=e^{-i\varphi}$, $dz=ie^{i\varphi}\,d\varphi$. Имеем

$$\int\limits_l \overline{z}\,dz = \int\limits_0^{\pi} e^{-i\varphi}\cdot i\cdot e^{i\varphi}\,d\varphi = i\int\limits_0^{\pi} d\varphi = \pi i\,. \qquad ◄$$

Пример 2.14. Вычислить интеграл $\oint\limits_l \frac{\cos z\,dz}{z-\pi}$ по замкнутой кривой l (обход осуществляется против часовой стрелки). а) $l: |z| = 1$; б) $l: |z-\pi| = 2$.

► а) Так как функция $\frac{\cos z}{z-\pi}$ аналитична на всей комплексной плоскости C, кроме точки $z=\pi$, которая не лежит внутри окружности $|z|=1$ и на этой окружности, то по теореме Коши (2.25) получим

$$\oint\limits_l \frac{\cos z}{z-\pi}\,dz = 0\,.$$

б) Так как функция $\cos z$ аналитична на всей комплексной плоскости C, а точка $z=\pi$ лежит внутри окружности $|z-\pi|=2$, то по интегральной формуле Коши (2.26) находим

$$f\left(z_0=\pi\right) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z-\pi|=2}\frac{\cos z}{z-\pi}\,dz\,,$$

откуда

$$\oint\limits_{|z-\pi|=2}\frac{\cos z}{z-\pi}\,dz = 2\pi i\cdot f\left(z_0=\pi\right) = 2\pi i\cdot\cos\pi = -2\pi i\,. \qquad ◄$$

Пример 2.15. Вычислить интеграл $\oint\limits_l \frac{z\,dz}{(z-1)^2(z+3)}$ по замкнутой кривой l (обход осуществляется против часовой стрелки).

а) $l:\ |z| = \frac{1}{2}$; б) $l:\ |z| = 2$.

► а) Так как функция $\frac{z}{(z-1)^2(z+3)}$ аналитична на всей комплексной плоскости C, за исключением $z=1,\ z=-3$, которые не лежат внутри окружности $|z|=\frac{1}{2}$ и на этой окружности, то по теореме Коши получим:

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{zdz}{(z-1)^2(z+3)} = 0.$$

б) Так как функция $f(z)=\frac{z}{z+3}$ аналитична на всей комплексной плоскости C, за исключением точки $z=-3$, которая не лежит внутри окружности $|z|=2$ и на этой окружности, а $z=1$ лежит внутри окружности $|z|=2$,то по интегральной теореме Коши (2.27) находим:

$$f'(z_0=1)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2} \frac{\frac{z}{z+3}}{(z-1)^2}dz,$$

откуда

$$\int_{|z|=2} \frac{\frac{z}{z+3}}{(z-1)^2}dz = 2\pi i\cdot f'(z_0=1) = 2\pi i\cdot\left(\frac{z}{z+3}\right)'\Bigg|_{z_0=1} =$$

$$=2\pi i\cdot\frac{3}{(z+3)^2}\Bigg|_{z_0=1} = \frac{3\pi i}{8}.$$ ◄

ГЛАВА III
РЯДЫ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

3.1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Пусть имеем ряд с комплексными членами

$$\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \,, \qquad (3.1)$$

где $\omega_n = u_n + i \cdot v_n$.

Ряд (3.1) сходится тогда и только тогда, когда сходятся как ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \,, \qquad (3.2)$$

так и ряд

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \,. \qquad (3.3)$$

Ряд (3.1) называется **абсолютно** сходящимся, если сходится ряд

$$|\omega_1| + |\omega_2| + \ldots + |\omega_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |\omega_n| . \qquad (3.4)$$

Ряды (3.2), (3.3), (3.4) являются рядами с действительными членами, и вопрос об их сходимости решается с помощью известных признаков сходимости рядов в действительной области.

Для рядов с комплексными членами справедливы следующие **признаки сходимости**:

1) если существует сходящийся ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ такой, что для всех натуральных n выполняется условие $|\omega_n| \le a_n$, то ряд (3.1) сходится, и притом абсолютно;

2) если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\omega_{n+1}}{\omega_n}\right| = l$, то при $l<1$ ряд (3.1) сходится абсолютно (**признак Даламбера**);

3) если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\omega_n|} = l$, то при $l<1$ ряд (3.1) абсолютно сходится (**признак Коши**).

Пример 3.1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{in}}{n^2}$.

► Общий член ряда $\omega_n = \dfrac{e^{in}}{n^2} = \dfrac{\cos n + i\sin n}{n^2}$, его модуль $|\omega_n| = \left|\dfrac{\cos n + i\sin n}{n^2}\right| = \dfrac{\sqrt{\cos^2 n + \sin^2 n}}{n^2} = \dfrac{1}{n^2}$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\omega_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ сходится, следовательно, рассматриваемый ряд абсолютно сходится. ◄

Пример 3.2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n}$.

► Имеем $e^{i\frac{\pi}{n}} = \cos(\pi/n) + i\sin(\pi/n)$. Таким образом, вопрос о сходимости данного ряда сводится к вопросу о сходимости рядов с действительными членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\pi/n)}{n} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\pi/n)}{n}.$$

Первый из этих рядов расходится. Это следует из признака сравнения данного ряда с расходящимся гармоническим рядом. Далее, поскольку $\sin\dfrac{\pi}{n} \sim \dfrac{\pi}{n}$ при $n\to\infty$, то сходимость второго ряда доказывается по признаку сравнения со сходящимся рядом Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ при $\alpha = 2 > 1$.

Следовательно, данный ряд расходится. ◄

3.2. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Ряд вида

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n , \qquad (3.5)$$

где $c_0, c_1, \ldots$ – комплексные постоянные, а z – комплексная переменная, называется **степенным рядом** в комплексной области.

Теорема Абеля. Если степенной ряд (3.5) сходится при некотором значении $z = z_0$, то он сходится и притом абсолютно при всех значениях z, для которых $|z| < |z_0|$. Если ряд (3.5) расходится при $z = z_1$, то он расходится и при любом z, для которого $|z| > |z_1|$.

Область сходимости ряда (3.5) есть круг с центром в начале координат.

Радиус сходимости степенного ряда определяется по формулам

$$\boxed{R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|, \quad \left(c_n \neq 0\right)}, \qquad (3.6)$$

или

$$\boxed{R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}}, \qquad (3.7)$$

если соответствующие пределы существуют.

<u>Пример 3.3</u>. Найти круг и радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (1+i)^n z^n$.

► Вычислим модуль коэффициента $c_n = (1+i)^n$:

$$|c_n| = \left|(1+i)^n\right| = |1+i|^n = \left(\sqrt{2}\right)^n = 2^{n/2} .$$

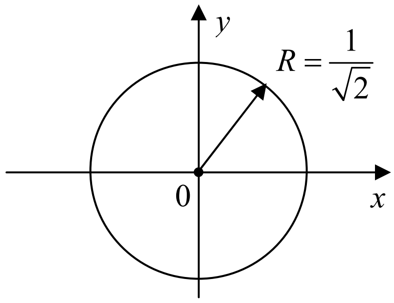


Рис. 16

Применяя формулу (3.7), найдем радиус сходимости данного ряда

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^{n/2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Данный ряд сходится при $|z|<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, то есть внутри круга радиуса $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ с центром в точке $z=0$ (рис. 16). ◄

Пусть дан степенной ряд

$$c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots+c_n(z-z_0)^n+\ldots, \qquad (3.8)$$

где $c_0,\ c_1,\ c_2,\ldots,\ z_0$ – комплексные числа, z – комплексная переменная.

Этот ряд сходится в круге $|z-z_0|<R$, где R определяется по формулам (3.6) или (3.7).

<u>Пример 3.4</u>. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(1+i)^n}(z-i)^n.$$

► Поскольку $c_n=\dfrac{1}{n^2(1+i)^n}$, а $c_{n+1}=\dfrac{1}{(n+1)^2(1+i)^{n+1}}$, то

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2|1+i|^{n+1}}{n^2|1+i|^n}==\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2|1+i|=\sqrt{2}.$$

Следовательно, степенной ряд будет сходиться при $|z-i|<\sqrt{2}$, то есть внутри круга радиуса $\sqrt{2}$ с центром в точке $z=i$ (рис. 17). ◄

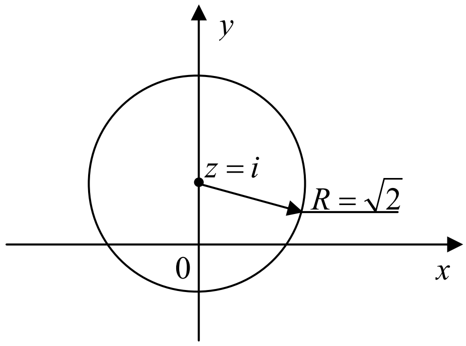


Рис. 17

3.3. РЯД ТЕЙЛОРА

Функция, аналитическая в области D, в окрестности каждой точки z_0 этой области представляется в виде степенного ряда

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots+c_n(z-z_0)^n+\ldots, \quad (3.9)$$

радиус сходимости R которого не меньше, чем расстояние от точки z_0 до границы области D.

Коэффициенты ряда вычисляются по формуле

$$\boxed{c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,\ n=0,1,\ldots}, \quad (3.10)$$

где γ – произвольный контур, принадлежащий области D и охватывающий точку z_0, в частности, γ – окружность $|z-z_0|=\rho$, или по формуле

$$\boxed{c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},\ n=0,1,2,\ldots} \quad (3.11)$$

Степенной ряд (3.9), коэффициенты которого определяются равенствами ((3.10) или (3.11)) называется **рядом Тейлора** функции $f(z)$ с центром в точке z_0.

Имеют место следующие утверждения:

1. Функция, аналитическая в точке z_0, раскладывается в окрестности этой точки в степенной ряд.

2. На границе круга сходимости ряда есть хотя бы одна особая точка функции, то есть радиус сходимости круга равен расстоянию от центра разложения z_0 до ближайшей особой точки функции.

Приведем разложения некоторых элементарных функций в ряд Тейлора по степеням z:

$$\boxed{e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots,\ |z| < \infty,} \tag{3.12}$$

$$\boxed{\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots,\ |z| < \infty,} \tag{3.13}$$

$$\boxed{\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots,\ |z| < \infty,} \tag{3.14}$$

$$\boxed{\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \ldots + \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots,\ |z| < \infty,} \tag{3.15}$$

$$\boxed{\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \ldots + \frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots,\ |z| < \infty.} \tag{3.16}$$

Заменив z на iz в разложении функции e^z, получим

$$e^{iz}=1+iz+\frac{(iz)^2}{2!}+\frac{(iz)^3}{3!}+\frac{(iz)^4}{4!}+\ldots=\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots\right)+i\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots\right).$$

Используя разложения (3.13), (3.14) функций $\sin z$ и $\cos z$, получим формулу Эйлера

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z.$$

Для функций $\ln(1+z),(1+z)^n$ имеют место следующие разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=0$:

$$\boxed{\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}z^n=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}z^n+\ldots,\ |z|<1,} \tag{3.17}$$

$$\boxed{(1+z)^m=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}z^n,\ |z|<1}. \tag{3.18}$$

В частности, при $m=-1$ получим сумму ряда геометрической прогрессии

$$\boxed{\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n=1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots,\ |z|<1}. \tag{3.19}$$

<u>Пример 3.5</u>. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z)=\sin\frac{\pi(z-1)}{4}$ в окрестности точки $z_0=1$.

►Используя формулу (3.13) имеем

$$\sin\frac{\pi(z-1)}{4}=\frac{\pi(z-1)}{4}-\frac{\pi^3(z-1)^3}{3!4^3}+\frac{\pi^5(z-1)^5}{5!4^5}+\ldots+$$

$$+(-1)^{n+1}\frac{\pi^{2n-1}(z-1)^{2n-1}}{(2n-1)!4^{2n-1}}+\ldots$$ ◄

<u>Пример 3.6</u>. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=0$ функцию $f(z)=\frac{z}{z^2-4z+3}$.

► Сначала разложим функцию на элементарные дроби:

$$\frac{z}{z^2-4z+3}=\frac{z}{(z-3)(z-1)}=\frac{A}{z-3}+\frac{B}{z-1}.$$

Определим неизвестные коэффициенты A и B:
$z=A(z-1)+B(z-3)$.

Полагая $z=1$, $z=3$, находим $A=\frac{3}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$. Тогда

$$\frac{z}{z^2-4z+3}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{z-3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-1}.$$

Преобразуем правую часть следующим образом:

$$f(z)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z/3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z}.$$

Используя разложение (3.19) функции $\frac{1}{1-z}$, получим

$$f(z)=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}+\ldots+\frac{z^n}{3^n}+\ldots\right)+\frac{1}{2}\left(1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{3}z+\frac{4}{9}z^2+\frac{13}{27}z^3+\ldots\quad. \qquad ◄$$

3.4. РЯД ЛОРАНА

Ряды Лорана, названные по имени французского математика П. Лорана (1813-1854 гг.), широко применяются в теории аналитических функций. Эти ряды являются обобщением степенных рядов.

Если функция $\omega=f(z)$, аналитическая в кольце $r<|z-z_0|<R$, то она разлагается в этом кольце в ряд

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=-\infty}^{-1}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n, \quad (3.20)$$

где коэффициенты c_n находятся по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{3.21}$$

Здесь γ – произвольная окружность с центром в точке z_0, лежащая внутри заданного кольца.

Ряд (3.20) называется **рядом Лорана** для функции $f(z)$ в рассматриваемом кольце. Разложение в ряд Лорана единственно.

В формуле (3.20)

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} = \ldots + \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \ldots +$$

$$+ \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z-z_0} \tag{3.22}$$

называется **главной частью** ряда Лорана; ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = c_0 (z-z_0) + c_1 (z-z_0)^2 + \ldots + c_n (z-z_0)^n \tag{3.23}$$

называется **правильной частью** ряда Лорана.

На практике при нахождении коэффициентов стараются избегать применения формул (3.21), так как они приводят к громоздким выкладкам. Обычно, если это возможно, используются готовые разложения в ряд Тейлора элементарных функций.

Ряд Лорана представляет собой сумму двух рядов (3.22) и (3.23).

Ряд Лорана называется сходящимся в некоторой точке z, если в этой точке сходятся оба ряда (3.22) и (3.23), при этом сумма ряда (3.20) равна сумме рядов (3.22) и (3.23).

Пусть $c_{-n} \neq 0$ и существует конечный предел

$$\boxed{r = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{-n-1}|}{|c_{-n}|}}, \tag{3.24}$$

то ряд (3.22) сходится в области $|z - z_0| > r$. Пусть ряд (3.23) сходится в круге $|z - z_0| < R$. Тогда, если

1) $r > R$, то ряд (3.20) расходится;

2) $r < R$, то ряд (3.20) сходится в кольце $r < |z - z_0| < R$, здесь $r \ge 0,\ 0 < R < \infty$.

Пример 3.7. Определить область сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(z+2-i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+2-i}{4-3i} \right)^n .$$

► Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(z+2-i)^n}$ имеем $c_{-n} = 3^n$, $c_{-n-1} = 3^{n+1}$.

Поэтому по формуле (3.24) находим $r = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{3^n} = 3$.

Первый ряд сходится в области $|z+2-i| > 3$. Для ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+2-i}{4-3i} \right)^n$ имеем $c_n = (4-3i)^{-n}$, $c_{n+1} = (4-3i)^{-n-1}$. Поэтому по формуле (3.6) находим

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|4-3i|^{-n}}{|4-3i|^{-n-1}} = |4-3i| = 5,$$

то есть второй ряд сходится в области $|z+2-i| < 5$. Итак, $r = 3 < R = 5$. Следовательно, данный ряд сходится в кольце $3 < |z+2-i| < 5$ (рис. 18). ◄

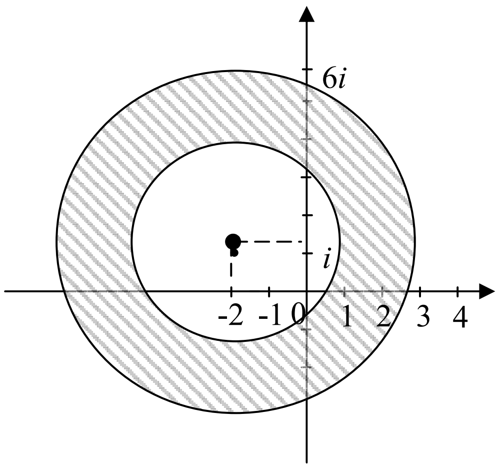


Рис.18

ГЛАВА IV
НУЛИ ФУНКЦИИ. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ. ВЫЧЕТЫ

4.1. НУЛИ ФУНКЦИИ

Пусть функция $f(z)$ является аналитической в точке z_0. Точка z_0 называется **нулем функции**, если $f(z_0)=0$. В разложении функции в ряд Тейлора в окрестности нуля отсутствует свободный член: $c_0=0$.

Если в разложении отсутствуют слагаемые, содержащие степени разности $(z-z_0)$ до *n*-й степени, то есть разложение имеет вид

$$f(z)=c_n(z-z_0)^n+c_{n+1}(z-z_0)^{n+1}+\ldots,\ c_n\neq 0,$$

то точка z_0 называется **нулем порядка *n*** функции $f(z)$.

Нуль первого порядка называется **простым нулем**.

Точка z_0 тогда и только тогда является нулем n - го порядка функции $f(z)$, аналитической в точке z_0, когда в некоторой окрестности этой точки имеет место равенство

$$f(z)=(z-z_0)^n\varphi(z),$$

где функция $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 и $\varphi(z_0)\neq 0$.

Пример 4.1. Найти все нули функции $f(z)=z^6+z^5+9z^4+$ $+9z^3$, определить их порядок.

► Раскладываем многочлен на множители

$$f(z)=z^5(z+1)+9z^3(z+1)=(z^5+9z^3)(z+1)=z^3(z^2+9)(z+1).$$

Находим нули функции: $z_1=0,\ z_2=-1,\ z_3=3i,\ z_4=-3i$. Разложение многочлена на линейные множители имеет вид

$$f(z)=z^3(z+1)(z+3i)(z-3i).$$

Для точки $z_1=0$ из равенства $f(z)=z^3\varphi(z),\ \varphi(0)\neq 0$, получаем $z=0$ – нуль 3-го порядка; для точки $z_2=-1$ из равенства $f(z)=(z+1)\varphi(z),\ \varphi(-1)\neq 0$, получаем, что $z=-1$ – простой нуль; для точек $z_3=-3i,\ z_4=3i$ аналогично находим, что это нули первого порядка (простые нули). ◄

<u>Пример 4.2.</u> Найти нули аналитической функции $f(z)$ и определить их порядок.

а) $f(z)=1-e^z$, б) $f(z)=\sin z-z$.

► а) Находим нули функции $f(z)=1-e^z$, решая уравнение $1-e^z=0$. Имеем нули $z_n=2n\pi i$, $n=0,\pm1,\pm2,...$ Так как $f'(z)=-e^z$, $f'(2n\pi i)=-e^{2n\pi}=-1\neq 0,\ f(2n\pi i)=1-e^{2n\pi i}=0$, то точки $z=2n\pi i$ $(n=0,\pm1,\pm2,...)$ – простые нули.

б) Решая уравнение $\sin z-z=0$, находим нуль функции $f(z)$: $z=0$. Для определения порядка нуля используем разложение (3.13) функции $\sin z$ в ряд Тейлора по степеням z. Имеем

$$\sin z-z=\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+...\right)-z=-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+...$$

Поскольку в полученном разложении коэффициенты $c_0=c_1=c_2=0$, а $c_3=-\dfrac{1}{3!}$, то точка $z=0$ – нуль третьего порядка функции $f(z)$. ◄

4.2. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ. КЛАССИФИКАЦИЯ ОСОБЫХ ТОЧЕК

Точка z_0 называется **изолированной особой** точкой функции $f(z)$, если существует окрестность $0<|z-z_0|<\delta$ этой точки (с исключенной точкой z_0), в которой $f(z)$ аналитична, кроме самой точки $z=z_0$.

Изолированная особая точка z_0 (конечная или бесконечная) функции $f(z)$ называется:

1) **устранимой особой точкой**, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$;

2) **полюсом**, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$;

3) **существенно особой точкой**, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не существует.

Для того чтобы точка z_0 была **полюсом** функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы эта точка была нулем для функции $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$.

Точку z_0 называют **полюсом** порядка $n\ (n\geq 1)$ функции $f(z)$, если эта точка является нулем порядка n для функции $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$.

В случае $n=1$ полюс называют **простым**.

Для того чтобы точка z_0 являлась полюсом порядка n функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы функцию

$f(z)$ можно было представить в виде $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}$, где $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 и $\varphi(z_0)\neq 0$.

<u>Пример 4.3.</u> Определить тип особых точек функций:

а) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$; б) $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^3}$; в) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z-\pi}$.

► а) Особая точка функции $f(z)$ есть $z_0=0$. Имеем $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1$. Следовательно, точка $z_0=0$ – устранимая особая точка.

б) Особая точка функции $f(z)$ $z_0=1$. Для функции $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}=(z-1)^3$ точка $z_0=1$ – нуль порядка 3. Следовательно, для $f(z)$ $z_0=1$ – полюс третьего порядка.

в) Особая точка $z_0=\pi$ является простым полюсом для функции $f(z)$, так как $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{z-\pi}$, где $\varphi(z)=\cos z$ аналитична в точке $z_0=\pi$ и $\varphi(\pi)=\cos\pi=-1\neq 0$. ◄

Имеют место следующие утверждения:

1. Для того чтобы точка z_0 была устранимой особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы лорановское разложение $f(z)$ в окрестности точки z_0 не содержало главной части.

2. Для того чтобы точка z_0 была полюсом функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы главная часть лорановского разложения $f(z)$ в окрестности z_0 содержало лишь конечное число членов

$$f(z)=\frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n \quad (c_{-k}\neq 0). \quad (4.1)$$

Наибольший из показателей степеней у разностей $z-z_0$, содержащихся в знаменателях членов главной части ряда Лорана, совпадает с порядком полюса.

3. Точка z_0 тогда и только тогда является существенно особой точкой для функции $f(z)$, когда главная часть ее лорановского разложения в окрестности точки z_0 содержит бесконечно много членов.

4. Бесконечно удаленная точка $z=\infty$ является полюсом m-го порядка функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда функция $f(z)$ представима в виде произведения

$$f(z)=\varphi(z)\cdot z^m,$$

где $\varphi(z)$ аналитична в бесконечно удаленной точке, $\lim\limits_{z\to\infty}\varphi(z)\neq 0$, $\lim\limits_{z\to 5}\varphi(z)\neq\infty$.

5. Для того чтобы $z=\infty$ была **существенно особой** точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы точка $u=0$ была существенно особой точкой функции $\varphi(u)=f\left(\frac{1}{u}\right)$, то есть ряд Лорана функции $f(z)$ содержал бесконечное число ненулевых членов с положительными степенями z.

Пример 4.4. Определить характер особой точки $z_0=0$ для функций:

а) $f(z)=\frac{1-e^{z^2}}{z}$; б) $f(z)=\frac{\sin z}{z^4}$; в) $f(z)=e^{1/z^2}$.

► а) Используя разложение в ряд Тейлора (3.12) для функции e^z в окрестности точки $z_0 = 0$, получим лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности нуля

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(1 - e^{z^2}\right) = \frac{1}{z}\left(1 - \left(1 + z^2 + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \dots\right)\right) = -z - \frac{z^3}{2!} - \frac{z^5}{3!} + \dots$$

Это разложение не содержит главной части. Поэтому точка $z_0 = 0$ является устранимой особой точкой.

б) Для разложения функции $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^4}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0 = 0$ используем формулу (3.13). Имеем

$$f(z) = \frac{1}{z^4}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots\right) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \dots$$

Разложение в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 0$ содержит конечное число членов с отрицательными степенями z. Следовательно, точка $z_0 = 0$ является полюсом порядка три, так как наибольший отрицательный показатель степени у z равен 3.

в) Используя разложение (3.12), получим

$$f(z) = e^{1/z^2} = 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!z^4} + \frac{1}{3!z^6} + \frac{1}{4!z^8} + \dots$$

Это разложение содержит бесконечное множество членов с отрицательными степенями. Следовательно, точка $z_0 = 0$ является существенно особой точкой функции $f(z)$. ◄

4.3. ВЫЧЕТЫ

Вычетом аналитической функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется интеграл

$$\boxed{res\, f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz}, \qquad (4.2)$$

который берется по простому замкнутому контуру γ, охватывающему точку z_0, не содержащему внутри других особых точек и не проходящему через такие точки.

Вычет может быть обозначен так: $res\left[f(z); z_0\right]$ или $\underset{z=z_0}{res}\, f(z)$, или $res\, f(z_0)$ (*residu* – вычет (франц.)).

При нахождении интегралов удобно использовать формулы для вычисления вычетов.

1. Вычет в изолированной особой точке z_0 равен коэффициенту c_{-1} ряда Лорана функции $f(z)$ при $0 < |z - z_0| < R$, то есть

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \underset{z=z_0}{res}\, f(z) = c_{-1}}. \qquad (4.3)$$

► Формула (4.3) непосредственно получается из формулы (3.10) при $n = -1$. ◄

2. Вычет функции $f(z)$ в устранимой особой точке z_0 равен нулю.

3. Пусть z_0 – простой полюс функции $f(z)$, тогда

$$\boxed{res\, f(z_0) = \lim_{z \to z_0}\left(f(z)(z - z_0)\right)}. \qquad (4.4)$$

4. Пусть z_0 – простой полюс для функции $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, то есть z_0 – простой нуль для функции $\psi(z)$: $\psi(z_0) = 0,\ \varphi(z_0) \neq 0$. Тогда вычет $f(z)$ в точке z_0 выражается формулой

$$\boxed{res\, f(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}}. \qquad (4.5)$$

5. Пусть z_0 – полюс порядка n $(n \geq 1)$ для функции $f(z)$. Тогда вычет $f(z)$ в точке z_0 выражается формулой

$$\boxed{res\, f(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(f(z)(z-z_0)^n \right)}. \qquad (4.6)$$

6. Если точка z_0 есть существенно особая точка функции $f(z)$, то для нахождения вычета в точке z_0 необходимо найти коэффициент c_{-1} в лорановском разложении функции $f(z)$ в окрестности точки z_0; это и будет $res\, f(z_0)$.

Пример 4.5. Найти вычеты функции $f(z) = \frac{\cos z}{z^2 - \pi^2}$ в ее особых точках.

► Особые точки функции $f(z)$ находим из уравнения $z^2 - \pi^2 = 0$. Имеем: $z_1 = -\pi,\ z_2 = \pi$ – простые полюса.

Вычислим вычеты в особых точках двумя способами.

1-ый способ. Находим вычет по формуле (4.4):

$$res\, f(\pi) = \lim_{z \to \pi} (z-\pi) \cdot \frac{\cos z}{z^2 - \pi^2} = \lim_{z \to \pi} \frac{\cos z}{z + \pi} = -\frac{1}{2\pi},$$

$$res\, f(-\pi) = \lim_{z \to -\pi} (z+\pi) \cdot \frac{\cos z}{z^2 - \pi^2} = \lim_{z \to -\pi} \frac{\cos z}{z - \pi} = \frac{1}{2\pi}.$$

2-ой способ. Находим вычет по формуле (4.5):

$$res\, f(\pi) = \lim_{z \to \pi} \frac{\cos z}{(z^2 - \pi^2)'} = \lim_{z \to \pi} \frac{\cos z}{2z} = -\frac{1}{2\pi},$$

$$res\, f(-\pi) = \lim_{z \to -\pi} \frac{\cos z}{(z^2 - \pi^2)'} = \lim_{z \to -\pi} \frac{\cos z}{2z} = \frac{1}{2\pi}. \qquad ◄$$

Пример 4.6. Найти вычеты функции $f(z) = \frac{z-4}{z^3 + 2z^2}$ в ее особых точках.

► Находим особые точки функции из уравнения $z^2(z+2)=0$. Особыми точками функции $f(z)$ являются $z_1=-2$ – простой полюс, $z_2=0$ – полюс второго порядка. По формуле (4.5) находим

$$res(f(z);-2)=\lim_{z\to-2}\frac{z-4}{\left(z^3+2z^2\right)'}=\lim_{z\to-2}\frac{z-4}{3z^2+4z}=-\frac{3}{2}.$$

По формуле (4.6) получаем

$$res(f(z);0)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to0}\left((z-0)^2\frac{z-4}{z^2(z+2)}\right)'=\lim_{z\to0}\left(\frac{z-4}{z+2}\right)'=$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{6}{(z+2)^2}=\frac{3}{2}.$$ ◄

<u>Пример 4.7</u>. Найти вычет функции $f(z)=\sin\frac{1}{z}$ в особой точке $z=0$.

► Разложим данную функцию в ряд Лорана в окрестности точки $z=0$, используя разложение в ряд Тейлора (3.13):

$$\sin\frac{1}{z}=\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5z^5}-\ldots.$$

Отсюда находим $c_{-1}=1$, т.е. $res(f(z);0)=1$. ◄

4.4. ВЫЧЕТ В БЕСКОНЕЧНО УДАЛЕННОЙ ТОЧКЕ

Пусть функция $f(z)$ аналитична в некоторой проколотой окрестности U бесконечно удаленной точки ∞. **Вычетом функции** $f(z)$ в точке ∞ называется число

$$\boxed{\underset{\infty}{res}\,f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}f(z)\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}f(z)\,dz}, \qquad (4.7)$$

где γ – некоторый замкнутый контур, а $|z| = \rho$ – окружность достаточно большого радиуса, целиком лежащая в U. Обход контура и окружности производится по часовой стрелке.

Если разложение (3.20) сходится в некоторой окрестности точки ∞, то

$$\boxed{\underset{\infty}{res} f(z) = -c_{-1}}. \qquad (4.8)$$

Если функция $f(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости, за исключением изолированных особых точек $z_1, z_2, ..., z_n$, то

$$\boxed{\underset{\infty}{res} f(z) = -\sum_{k=1}^{n} \underset{z_k}{res} f(z)}. \qquad (4.9)$$

<u>Пример 4.8</u>. Найти вычеты функции $f(z) = \dfrac{z}{(z-i)(z+2)^2}$ во всех особых точках, определить их тип, найти вычет в бесконечно удаленной точке.

► Особыми точками $f(z)$ являются точки: $z_1 = i$ – простой полюс, $z_2 = -2$ – полюс второго порядка. Вычислим вычет в точке $z_1 = i$: $\underset{i}{res} f(z) = \underset{i}{res} \dfrac{z}{(z-i)(z+2)^2} = \lim\limits_{z \to i} \dfrac{(z-i)z}{(z-i)(z+2)^2} =$

$= \lim\limits_{z \to i} \dfrac{z}{(z+2)^2} = \dfrac{i}{(i+2)^2}$.

Упрощая это выражение, имеем

$$\frac{i}{(i+2)^2} = \frac{i(2-i)^2}{(2+i)^2(2-i)^2} = \frac{i(4-4i+i^2)}{(4+1)^2} = \frac{i(3-4i)}{25} =$$

$$= \frac{3i-4i^2}{25} = \frac{4}{25} + \frac{3}{25}i .$$

Вычислим вычет в точке $z = -2$:

$$\underset{-2}{res}\, f(z) = \underset{-2}{res} \frac{z}{(z-i)(z+2)^2} = \lim_{z\to -2}\left(\frac{(z+2)^2 z}{(z-i)(z+2)^2} \right)' =$$

$$= \lim_{z\to -2}\left(\frac{z}{z-i} \right)' = -\lim_{z\to -2} \frac{i}{(z-i)^2} = -\frac{i}{(-2-i)^2} = -\frac{i}{(2+i)^2} = -\frac{i}{4+4i+i^2} =$$

$$= -\frac{i}{3+4i} = -\frac{i(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{-3i+4i^2}{9+16} = \frac{-3i-4}{25} = -\frac{4}{25} - \frac{3}{25}i\,.$$

Найдем вычет в бесконечно удаленной точке используя (4.9):

$$\underset{\infty}{res}\, f(z) = -\left(\underset{i}{res}\, f(z) + \underset{-2}{res}\, f(z) \right) = -\left(\frac{4}{25} + \frac{3}{25}i - \frac{4}{25} - \frac{3}{25}i \right) = 0\,. \blacktriangleleft$$

4.5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ С ПОМОЩЬЮ ВЫЧЕТОВ

1. **Вычисление интегралов по замкнутому контуру. Теорема Коши о вычетах**. Если функция $f(z)$ является аналитической на границе C области D и всюду внутри области, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, ..., z_n$, то

$$\boxed{\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res f(z_k)}. \qquad (4.10)$$

Пример 4.9. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=1/2} z \sin\frac{1}{z^2}\,dz$.

► В области D: $|z| < 1/2$ функция $f(z) = z\sin\frac{1}{z^2}$ аналитична всюду, кроме точки $z=0$. Разложение Лорана имеет вид

$$z\sin\frac{1}{z^2} = z\left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!z^6} + \frac{1}{5!z^{10}} - \frac{1}{7!z^{14}} + ... \right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^5} + \frac{1}{5!z^9} - \frac{1}{7!z^{13}} + ...,$$

$z=0$ – существенно особая точка функции $f(z)$. Поскольку $res\big(f(z);0\big)=c_{-1}=1$, то используя формулу (4.3), имеем

$$\int\limits_{|z|=1/2} z\sin\frac{1}{z^2}\,dz=2\pi i\cdot res\big(f(z);0\big)=2\pi i. \qquad ◄$$

<u>Пример 4.10</u>. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\oint\limits_{|z-3i|=3}\frac{z^5+8z}{z^4-16}dz$.

► Найдем особые точки функции $f(z)=\frac{z^5+8z}{z^4-16}$ из уравнения $z^4-16=0$

$z^4-16=\left(z^2-4\right)(z-2i)(z+2i)$. Имеем особые точки:

$z_1=2i,\ z_2=-2i,\ z_3=2,\ z_4=-2$.

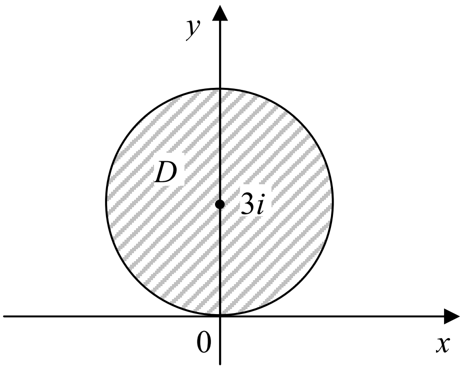


Рис. 18

В области D: $|z-3i|<3$ (рис. 18) функция аналитична всюду, кроме точки $z=2i$. Поэтому $\oint\limits_{|z-3i|=3} f(z)\,dz=2\pi i\cdot \underset{2i}{res}\, f(z)$.

Вычислим вычет функции $f(z)$ в особой точке $z=2i$ – простой полюс:

$$\underset{2i}{res}\, f(z)=\underset{2i}{res}\frac{z^5+8z}{z^4-16}=$$

$$=\lim_{z\to 2i}\frac{z^5+8z}{\left(z^4-16\right)'}=\lim_{z\to 2i}\frac{z^5+8z}{4z^3}=\frac{(2i)^5+16i}{4\cdot(2i)^3}=\frac{32i+16i}{-32i}=-\frac{3}{2}.$$

Следовательно, $\oint\limits_{|z-3i|=3} \frac{z^5+8z}{z^4-16}dz = 2\pi i \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -3\pi i$. ◄

2. **Вычисление определенных интегралов с помощью вычетов**. Интегралы вида $J = \int\limits_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx$, где R – рациональная функция от $\cos x$ и $\sin x$, сводятся к интегралам по окружности $|z| = 1$ с помощью замены переменного $z = e^{ix}$.

Пример 4.11. Вычислить интеграл с помощью вычетов $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{5+3\cos x}dx$.

► Полагаем $z = e^{ix}$. При этом область интегрирования $[0; 2\pi]$ отобразится в окружность $|z| = 1,\ 0 \le \arg z \le 2\pi,\ dz = i\,e^{ix}dx$. Отсюда $dx = \frac{dz}{iz}$. По формуле Эйлера имеем: $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$, $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$.

Подставив в интеграл, находим

$$J = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{5+3\cos x}dx = \oint\limits_{|z|=1} \frac{\frac{1}{4i^2}\left(z-\frac{1}{z}\right)^2}{5+\frac{3}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)} \cdot \frac{dz}{iz} = -\frac{1}{4i} \oint\limits_{|z|=1} \frac{z^2-2+\frac{1}{z^2}}{\left(5+\frac{3}{2}z+\frac{3}{2z}\right)z}dz =$$

$$= \frac{i}{2} \oint\limits_{|z|=1} \frac{z^4-2z^2+1}{\left(10z+3z^2+3\right)z^2}dz.$$

Далее вычисляем интеграл по замкнутой кривой с помощью вычетов.

Находим особые точки подынтегральной функции

$$f(z) = \frac{z^4-2z^2+1}{\left(3z^2+10z+3\right)z^2},$$

для этого определяем нули знаменателя: $z^2\left(3z^2+10z+3\right)=0$, $z_1=-3,\ z_2=-\dfrac{1}{3},\ z_3=0$.

Внутри области $|z|<1$ функция $f(z)$ имеет особые точки $z=-\dfrac{1}{3}$ – простой полюс, $z=0$ – полюс 2-го порядка.

Вычисляем вычет в точке $z=-\dfrac{1}{3}$ по формуле (4.4):

$$res\left(f(z);-\frac{1}{3}\right)=\lim_{z\to-1/3}\frac{(z+1/3)\left(z^4-2z^2+1\right)}{3(z+1/3)(z+3)z^2}=\lim_{z\to-1/3}\frac{\left(z^2-1\right)^2}{3(z+3)z^2}=$$

$$=\frac{(1/9-1)^2}{3(-1/3+3)1/9}=\frac{8}{9}.$$

Вычисляем вычет в точке $z=0$ по правилу (4.6):

$$res\left(f(z);0\right)=\lim_{z\to0}\left(\frac{z^2\left(z^4-2z^2+1\right)}{\left(3z^2+10z+3\right)z^2}\right)'=\lim_{z\to0}\left(\frac{z^4-2z^2+1}{3z^2+10z+3}\right)'=$$

$$=\lim_{z\to0}\frac{\left(4z^3-4z\right)\left(3z^2+10z+3\right)-\left(z^4-2z^2+1\right)(6z+10)}{\left(3z^2+10z+3\right)^2}=-\frac{10}{9}.$$

Вычисляем интеграл по замкнутому контуру используя формулу (4.10)

$$\int\limits_{|z|=1}f(z)dz=\oint\limits_{|z|=1}\frac{z^4-2z^2+1}{\left(10z+3z^2+3\right)z^2}dz=2\pi i\left(\underset{-1/3}{res}\,f(z)+\underset{0}{res}\,f(z)\right)=$$

$$=2\pi i\left(\frac{8}{9}-\frac{10}{9}\right)=\frac{-4\pi i}{9}.$$

Следовательно, имеем

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin^2 x}{5+3\cos x}dx=\frac{i}{2}\oint\limits_{|z|=1}\frac{z^4-2z^2+1}{\left(10z+3z^2+3\right)z^2}dz=\frac{i}{2}\cdot\left(\frac{-4i\pi}{9}\right)=-\frac{2\pi}{9}.\ ◄$$

ГЛАВА V
ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

5.1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА. ОРИГИНАЛЫ И ИЗОБРАЖЕНИЯ

Функцией – оригиналом называется функция $f(t)$ действительного аргумента t, которая удовлетворяет следующим условиям:

а) $f(t)=0$ при $t<0$;

б) на любом конечном отрезке $[a;b]\in[0;+\infty)$ функция $f(t)$ имеет не более чем конечное число точек разрыва первого рода;

в) $f(t)$ возрастает не быстрее показательной функции, то есть существуют такие постоянные $M>0$ и $S_0\geq 0$, что

$$\left|f(t)\right|<\mathrm{Me}^{S_0 t} \text{ при } t>0.$$

Число S_0 называется показателем роста функции $f(t)$.

Пусть $p=\alpha+\beta i$ – комплексный параметр. Рассмотрим интеграл

$$\boxed{F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt}. \tag{5.1}$$

Если интеграл справа существует, то функция $F(p)$ называется **изображением** функции $f(t)$, а сама операция (5.1) перехода от $f(t)$ к $F(p)$ называется **интегральным преобразованием Лапласа**. Несобственный интеграл в формуле (5.1) называется интегралом (**оператором**) Лапласа.

Тот факт, что $F(p)$ есть изображение $f(t)$, символически записывается так: $f(t)\doteqdot F(p)$ или $F(p)=L\{f(t)\}$ или

$F(p) \to f(t)$, что означает, что изображению $F(p)$ соответствует оригинал $f(t)$.

Для любой функции – оригинала $f(t)$ изображение $F(p)$ определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p > S_0$, где S_0 – показатель роста $f(t)$, и является в этой полуплоскости аналитической.

Теорема (**единственность изображения**). Если оригиналы $f(t)$ и $g(t)$ непрерывны и имеют одинаковые изображения $F(p)$, то эти функции совпадают.

5.2. ИЗОБРАЖЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ

1^0. **Единичная функция Хевисайда**.

Простейшим оригиналом является функция Хевисайда, которая определяется так (рис. 19):

$$I(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t<0, \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

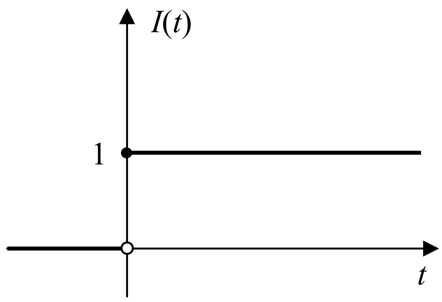


Рис.19

Найдем изображение этой функции по формуле (5.1):

$$L\{I(t)\}=\int_0^{\infty}1\cdot e^{-pt}\,dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^{b}e^{-pt}\,dt=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{p}e^{-pt}\right)\Bigg|_0^b=\frac{1}{p},$$

то есть $$F(p)=\frac{1}{p} \text{ или } I(t)\risingdotseq\frac{1}{p}. \qquad (5.2)$$

<u>Замечание.</u> В дальнейшем функцию – оригинал $f(t)I(t)$ будем обозначать в виде $f(t)$, считая, что

$$f(t)=\begin{cases} f(t) & \text{при} \quad t\ge 0,\\ 0 & \text{при} \quad t<0.\end{cases}$$

2^0. **Изображение функции $f(t)=e^{\alpha t}$.**

Пусть α – действительное число. По формуле (5.1) находим

$$L\{e^{at}\}=\int_0^{\infty}e^{at}\cdot e^{-pt}\,dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^{b}e^{-(p-a)t}\,dt=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{a-p}e^{-(p-a)t}\Bigg|_0^b=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{p-a}-\frac{e^{-(p-a)\cdot b}}{p-a}\right)$$

Так как $\operatorname{Re}p>a$, то $\lim\limits_{b\to\infty}\dfrac{e^{-(p-a)\cdot b}}{p-a}=0$. Тогда имеем

$$L\{e^{at}\}=\frac{1}{p-a}.$$

Итак, $F(p)=\dfrac{1}{p-a}$, то есть

$$e^{at}\risingdotseq\frac{1}{p-a}. \qquad (5.3)$$

3^0. **Изображение функции $f(t)=t$.**

Используя формулу интегрирования по частям, находим:

$$F(p)=\int_0^{\infty} t\,e^{-pt}dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^{b} t\,e^{-pt}dt=\begin{vmatrix} u=t, \quad du=dt \\ dv=e^{-pt}dt, \;\; v=-\dfrac{1}{p}e^{-pt}\end{vmatrix}=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(t\cdot\left(-\frac{1}{p}e^{-pt}\right)\Bigg|_0^b+\frac{1}{p}\int_0^b e^{-pt}dt\right)=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{p^2}e^{-pt}\right)\Bigg|_0^b=\frac{1}{p^2},$$

так как из равенства $\left|e^{-pt}\right|=e^{\operatorname{Re}(-pt)}=e^{-t\operatorname{Re}p}=e^{-i\alpha}$, следует что $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-pt}=0$.

Итак, $F(p)=\dfrac{1}{p^2}$, или $t\risingdotseq\dfrac{1}{p^2}$.

4^0. **Изображение функции $\boldsymbol{f(t)=t^{-1/2}}$.**

По формуле (5.1) находим

$$F(p)=L\left\{t^{-1/2}\right\}=\int_0^{\infty}e^{-pt}t^{-1/2}dt=\begin{vmatrix} pt=x^2,\; t=\dfrac{x^2}{p} \\ dt=\dfrac{2x\,dx}{p}\end{vmatrix}=$$

$$=2\int_0^{\infty}e^{-x^2}\,\frac{x}{p}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2/p}}dx=\frac{2}{\sqrt{p}}\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx.$$

Известно, что $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Поэтому $L\left\{t^{-1/2}\right\}=\sqrt{\dfrac{\pi}{p}}$ или $\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\risingdotseq\dfrac{1}{\sqrt{p}}$.

5.3. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1. Теорема (линейность преобразования).

Если $f_1(t) \fallingdotseq F_1(p)$, $f_2(t) \fallingdotseq F_2(p)$, *а* α *и* β *– произвольные постоянные, то*

$$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t) \fallingdotseq \alpha F_1(p) + \beta F_2(p).$$

Доказательство.

$$L\left\{\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)\right\} = \int_0^\infty \left(\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)\right) e^{-pt} dt = \alpha \int_0^\infty f_1(t) e^{-pt} dt +$$

$$+\beta \int_0^\infty f_2(t) e^{-pt} dt = \alpha F_1(p) + \beta F_2(p).$$

Пример 5.1. Найти изображение функций: а) $f(t) = \cos t$; б) $f(t) = \sin t$; в) $f(t) = \operatorname{sh} t$; г) $f(t) = \operatorname{ch} t$.

► Пользуясь свойством линейности, формулой (5.3), находим

а) $\cos t = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2} \fallingdotseq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-i} + \dfrac{1}{p+i}\right) = \dfrac{p}{p^2+1}$;

б) $\sin t = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \fallingdotseq \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{p-i} - \dfrac{1}{p+i}\right) = \dfrac{1}{p^2+1}$;

в) $\operatorname{sh} t = \dfrac{e^{t} - e^{-t}}{2} \fallingdotseq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-1} - \dfrac{1}{p+1}\right) = \dfrac{1}{p^2-1}$;

г) $\operatorname{ch} t = \dfrac{e^{t} + e^{-t}}{2} \fallingdotseq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-1} + \dfrac{1}{p+1}\right) = \dfrac{p}{p^2-1}$. ◄

Пример 5.2. Найти изображение функции $f(t) = 2\cos t - 3t + 1$.

► Используя свойство линейности преобразования, получаем

$$F(p)=\frac{2p}{p^2+1}-\frac{3}{p^2}+\frac{1}{p}.$$ ◄

2. Теорема подобия.

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, *то* $f(at) \risingdotseq \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$, $a>0$.

Доказательство. По определению изображения (5.1) находим

$$L\{f(at)\}=\int_0^\infty f(at)e^{-pt}dt=\left|\begin{array}{l} u=at \\ t=\frac{u}{a},\ dt=\frac{du}{a}\end{array}\right|=\frac{1}{a}\int_0^\infty f(u)e^{-\frac{p}{a}u}=$$

$$=\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right).$$

Пример 5.3. Найти изображение функций: а) $\sin\omega t$; б) $\cos\omega t$; в) $\operatorname{sh}\omega t$; г) $\operatorname{ch}\omega t$.

► а) Используя формулу $L\{\sin t\}=\frac{1}{1+p^2}$ и теорему подобия, находим

$$L\{\sin\omega t\}=\frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{p}{\omega}\right)^2}=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}. \quad (5.4)$$

б) Из соотношения $L\{\cos t\}=\frac{p}{p^2+1}$ и теоремы подобия получаем

$$L\{\cos\omega t\}=\frac{1}{\omega}\cdot\frac{p/\omega}{1+\left(\frac{p}{\omega}\right)^2}=\frac{p}{p^2+\omega^2}. \quad (5.5)$$

Аналогично имеем

$$L\{\operatorname{sh}\omega t\}=\frac{\omega}{p^2-\omega^2},\ L\{\operatorname{ch}\omega t\}=\frac{p}{p^2-\omega^2}. \qquad ◄$$

3. Теорема смещения в аргументе изображения.

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, *то при любом комплексном а следует*

$$\boxed{e^{at}f(t) \risingdotseq F(p-a),\ \operatorname{Re}(p-a)>S_0},$$

то есть умножению оригинала на e^{at} *соответствует смещение изображения на а.*

Доказательство. Используя определение изображения (5.1), находим

$$L\{e^{at}f(t)\}=\int_0^\infty e^{at}f(t)e^{-pt}dt=\int_0^\infty f(t)e^{-(p-a)t}dt=F(p-a).$$

Пример 5.4. Найти изображение функции $f(t)=e^{at}\cos\omega t$.

► Используя соотношение (5.5) и теорему смещения, получаем $L\{e^{at}\cos\omega t\}=\dfrac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$. ◄

4. Теорема о дифференцировании изображения.

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, n *– натуральное число, то*

$$F'(p) \risingdotseq -t\,f(t),$$
$$F''(p) \risingdotseq t^2\,f(t), \qquad (5.6)$$
$$\ldots$$
$$F^{(n)}(p) \risingdotseq (-1)^n t^n\,f(t),$$

то есть дифференцированию изображения соответствует умножение оригинала на $(-t)$.

Доказательство. Поскольку $F(p)$ является аналитической функцией в полуплоскости $\operatorname{Re}p=\alpha>S_0$, то у нее существует производная любого порядка. Дифференцируя интеграл (5.1) по параметру *p*, имеем

$$F'(p)=\left(\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt\right)'=\int_0^{\infty}\left(f(t)e^{-pt}\right)'dt=\int_0^{\infty}\left(-t\,f(t)\right)e^{-pt}dt=$$
$$=L\{-t\,f(t)\}.$$

Итак, $F'(p)\fallingdotseq -t\,f(t)$.

Дифференцируя последнее соотношение, получаем $F''(p)=\left(F'(p)\right)'\fallingdotseq -t\left(-t\,f(t)\right)=t^2 f(t)$.

Аналогично, $F'''(p)=\left(F''(p)\right)'\fallingdotseq -t\left(t^2 f(t)\right)=-t^3 f(t)$.

Применяя операцию дифференцирования многократно, получаем $F^{(n)}(p)\fallingdotseq (-1)^n t^n f(t)$.

<u>Пример 5.5.</u> Найти изображение функций $f_1(t)=t$, $f_2(t)=t^2$, $f_3(t)=t^3,\ldots,f_n(t)=t^n$.

► Поскольку $I(t)\fallingdotseq \dfrac{1}{p}$, то, используя теорему о дифференцировании изображения, последовательно находим

$\left(\dfrac{1}{p}\right)'\fallingdotseq(-t)\cdot 1$, то есть $\dfrac{1}{p^2}\fallingdotseq t$,

Еще раз применяем теорему 4:

$\left(\dfrac{1}{p^2}\right)'\fallingdotseq(-t)\cdot t$, или $\dfrac{1\cdot 2}{p^3}\fallingdotseq t^2$,

$\left(\dfrac{1\cdot 2}{p^3}\right)'\fallingdotseq(-t)\cdot t^2$, отсюда $\dfrac{3!}{p^4}\fallingdotseq t^3$, и т.д.

$$\boxed{t^n \risingdotseq \frac{n!}{p^{n+1}}}. \qquad (5.7) \quad ◄$$

<u>Пример 5.6.</u> Найти изображение функции $f(t) = t\sin 2t$.

► В силу формулы (5.4) имеем $\sin 2t \risingdotseq \frac{2}{p^2+4} = F(p)$.

Используя формулу (5.6), находим

$$t\sin 2t \risingdotseq -\left(F'(p)\right) = -\left(\frac{2}{p^2+4}\right)' = \frac{4p}{\left(p^2+4\right)^2}. \qquad ◄$$

Для получения изображений ступенчатых функций эффективно используется теорема запаздывания.

5. Теорема запаздывания. *Если* $f(t) \risingdotseq F(p)$, *то для любого* $\tau > 0$ *(*τ *– произвольное «запаздывание» сигнала) следует*

$$\boxed{f(t-\tau) \risingdotseq e^{-\tau p} F(p), \ \operatorname{Re} p > S_0, \ \text{где} \ f(t-\tau) = \begin{cases} 0 \ \text{при} \ t < \tau, \\ f(t-\tau) \ \text{при} \ t \ge \tau, \end{cases}}$$

(рис. 20), то есть запаздыванию оригинала на τ *соответствует умножение изображения на* $e^{-p\tau}$.

Теорема запаздывания показывает, что умножение изображения на $e^{-\tau p}$ сдвигает график оригинала вправо на τ (рис. 20).

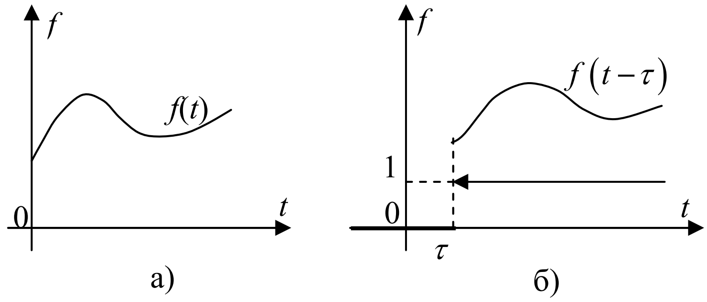


Рис. 20

Доказательство. Так как $f(t-\tau)=0$ при $t<\tau$, то используя формулу (5.1) и замену переменного интегрирования, находим

$$L\{f(t-\tau)\}=\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t-\tau)\,dt=\int_\tau^{+\infty} e^{-pt} f(t-\tau)\,dt=\left|\begin{matrix} z=t-\tau,\ dz=dt \\ z_{\text{н}}=0,\ z_{\text{в}}=+\infty \end{matrix}\right|=$$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-p(z+\tau)} f(z)\,dz=e^{-p\tau}\int_0^{+\infty} e^{-pz} f(z)\,dz=e^{-p\tau}F(p).$$

<u>Пример 5.7.</u> Найти изображение обобщенной единичной функции $I(t-t_0)=\begin{cases} 0, & t<t_0 \\ 1, & t>t_0 \end{cases}$.

► График оригинала $I(t-t_0)$ (рис. 21) представляет собой график «единичной функции» Хевисайда, сдвинутый вправо на t_0, поэтому $f(t)=I(t-t_0)$.

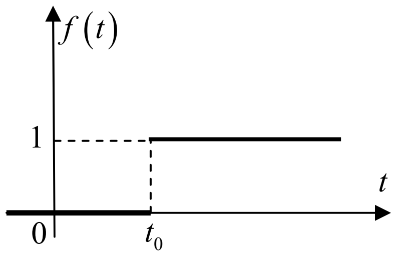


Рис. 21

Известно, что $L\{I(t)\}\doteq\dfrac{1}{p}$, поэтому в силу теоремы запаздывания находим

$$\boxed{I(t-t_0) \risingdotseq \frac{e^{-pt_0}}{p}}. \qquad (5.8) \quad ◄$$

<u>Замечание.</u> Функцию с запаздывающим аргументом $\varphi(t)=\begin{cases} f(t-t_0), & t \ge t_0 \\ 0, & t < t_0 \end{cases}$ можно записать следующим образом:

$$f(t-t_0)=f(t-t_0)I(t-t_0).$$

<u>Пример 5.8.</u> Найти изображение прямоугольного импульса $f(t)$ высотой 1 и шириной $2l$ (рис. 22).

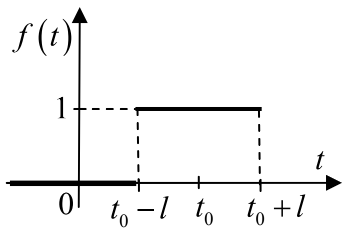


Рис. 22

► Оригинал $f(t)$ выражается через единичную функцию следующим образом: $f(t)=I\big(t-(t_0-l)\big)-I\big(t-(t_0+l)\big)$.

На основании свойства линейности и формулы (5.8) находим

$$f(t) \risingdotseq \frac{e^{-p(t_0-l)}-e^{-p(t_0+l)}}{p} = \frac{e^{-pt_0}}{p}\left(e^{lp}-e^{-lp}\right)=\frac{2e^{-pt_0}}{p}\operatorname{sh} lp. \quad ◄$$

<u>Пример 5.9.</u> Найти изображение функции

$$f(t)=\begin{cases} (t-2)^2, & t \ge 2, \\ 0, & t < 2. \end{cases}$$

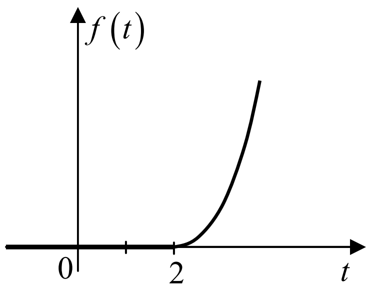


Рис. 23

► Функцию $f(t)$ можно записать в виде $f(t)=(t-2)^2 I(t-2)$ (рис. 23). Используя формулу (5.7) и теорему запаздывания, имеем

$$f(t)=(t-2)^2 I(t-2) \risingdotseq \frac{2}{p^3}\cdot e^{-2p}. \quad ◄$$

Пример 5.10. Найти изображение функции

$$f(t)=\begin{cases}\sin(2t-\pi/4), & t\ge\pi/8;\\ 0, & t<\pi/8.\end{cases}$$

► Запишем $f(t)$ в виде $f(t)=\sin 2\left(t-\dfrac{\pi}{8}\right)I\left(t-\dfrac{\pi}{8}\right)$. Так как $\sin 2t \risingdotseq \dfrac{2}{p^2+4}$, то с помощью теоремы запаздывания находим $\sin 2\left(t-\dfrac{\pi}{8}\right)I\left(t-\dfrac{\pi}{8}\right) \risingdotseq e^{-\frac{p\pi}{8}}\cdot\dfrac{2}{p^2+4}$. ◄

Теорему запаздывания удобно использовать при отыскании изображения функций, которые на разных участках задаются разными аналитическими выражениями.

Рассмотрим функцию $f(t)$, заданную графически (рис. 24).

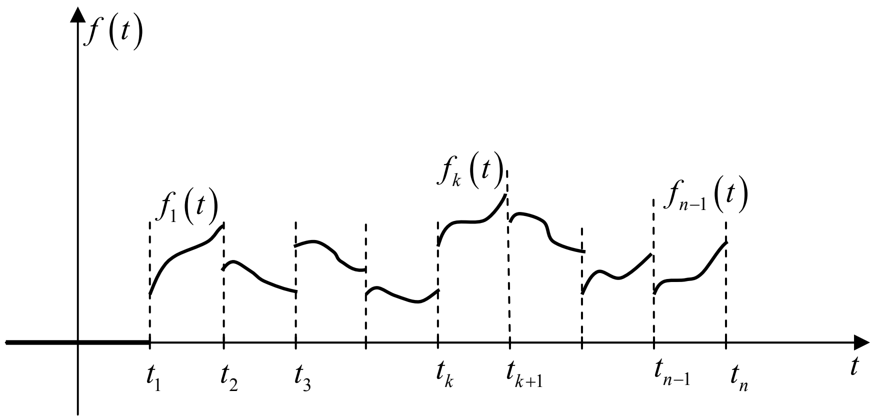


Рис. 24

Данную функцию можно записать аналитически с помощью единичной функции Хевисайда:

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n-1}\left(I\left(t-t_k\right)-I\left(t-t_{k+1}\right)\right)f_k\left(t\right). \qquad (5.9)$$

Пример 5.11. Найти изображение функции

$$f(t)=\begin{cases} a_0,\ 0\le t<b_1; \\ a_1,\ b_1\le t<b_2; \\ a_2,\ t\ge b_2. \end{cases}$$

► График функции $f\left(t\right)$ изображен на рис. 25.

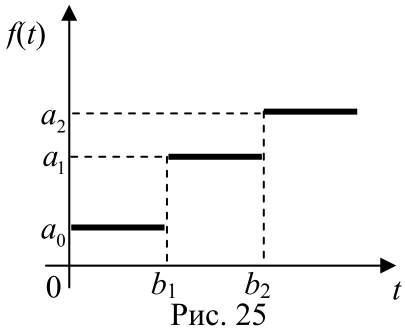


Рис. 25

На практике такая функция может встретиться, например, при рассмотрении механической системы, в которой в моменты времени t=0, t=b_1, t=b_2 последовательно прилагаются постоянные силы a_0, a_1-a_0, a_2-a_1. Эта же функция может встретиться также при рассмотрении электрической схемы, в которую в указанные моменты времени последовательно включаются постоянные напряжения a_0, a_1-a_0, a_2-a_1.

Причем здесь предполагается, что процессы, протекающие при включении, не принимаются во внимание.

Рассматриваемая функция $f\left(t\right)$ с помощью формулы (5.9) запишется единым выражением в виде:

$$f(t)=a_0\left(I\left(t\right)-I\left(t-b_1\right)\right)+a_1\left(I\left(t-b_1\right)-I\left(t-b_2\right)\right)+a_2I\left(t-b_2\right)=$$
$$=a_0I\left(t\right)+\left(a_1-a_0\right)I\left(t-b_1\right)+\left(a_2-a_1\right)I\left(t-b_2\right),$$

а изображение ее по теореме запаздывания, будет равно:

$$F(p)=a_0\cdot\frac{1}{p}+(a_1-a_0)\cdot e^{-b_1p}\cdot\frac{1}{p}+(a_2-a_1)\cdot e^{-b_2p}\cdot\frac{1}{p}=$$
$$=\frac{1}{p}\cdot\left(a_0+(a_1-a_0)\cdot e^{-b_1p}+(a_2-a_1)\cdot e^{-b_2p}\right).$$ ◄

Пример 5.12. Найти изображение ступенчатой функции с бесконечным числом ступеней, график которой представлен на рис. 26.

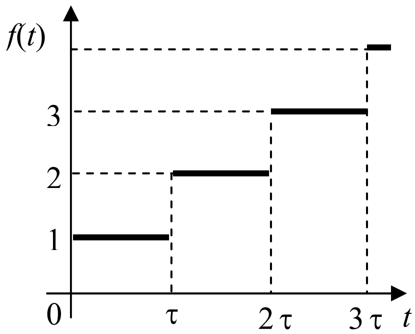


Рис. 26

► Заданная функция $f(t)$, очевидно, запишется в виде: $f(t)=I(t)+I(t-\tau)+I(t-2\tau)+\ldots$.

Согласно теореме запаздывания изображение такой функции выражается геометрической прогрессией

$$F(p)=\frac{1}{p}+e^{-p\tau}\cdot\frac{1}{p}+e^{-2p\tau}\cdot\frac{1}{p}+$$

$$+e^{-3p\tau}\cdot\frac{1}{p}+\ldots=\frac{1}{p}\cdot(1+e^{-p\tau}+e^{-2p\tau}+e^{-3p\tau}+\ldots)=\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{1-e^{-p\tau}}.$$

Итак, $Lf(t)=\dfrac{1}{p(1-e^{-p\tau})}$. ◄

6. Теорема опережения. *Если* $a>0$, *то*

$$\boxed{L\{f(t+a)\}=e^{ap}\left[Lf(t)-\int_0^a e^{-pt}f(t)\,dt\right]}.$$

Пример 5.13. Найти изображение оригинала $f(t)=\sin\left(t+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

► По теореме опережения имеем

$$L\left\{\sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right)\right\}=e^{\frac{\pi}{6}p}\left(L(\sin t)-\int_0^{\pi/6}e^{-pt}\sin t\,dt\right).$$

Последний интеграл возвратный, вычисляется двукратным интегрированием по частям. Так как $L(\sin t)=\dfrac{1}{p^2+1}$, то получаем $L\left\{\sin\left(t+\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}=e^{\frac{\pi}{6p}}\left(\dfrac{1}{p^2+1}+e^{-pt}\,\dfrac{p\sin t+\cos t}{p^2+1}\Bigg|_0^{\pi/6}\right)=$

$$=\frac{p\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}}{p^2+1}=\frac{p+\sqrt{3}}{2\left(p^2+1\right)}. \qquad ◄$$

7. Теорема о дифференцировании оригинала. *Если* $f(t) \risingdotseq F(p)$ *и функции* $f'(t),\ f''(t), \dots, f^{(m)}(t)$ *являются оригиналами, то*

$$\boxed{\begin{aligned}
&f'(t) \risingdotseq pF(p)-f(0),\\
&f''(t) \risingdotseq p^2F(p)-p\,f(0)-f'(0),\\
&f'''(t) \risingdotseq p^3F(p)-p^2 f(0)-p\,f'(0)-f''(0),\\
&\dots\\
&f^{(m)}(t) \risingdotseq p^mF(p)-p^{m-1}f(0)-p^{m-2}f'(0)-\dots\\
&\dots-pf^{(m-2)}(0)-f^{(m-1)}(0).
\end{aligned}} \tag{5.10}$$

Доказательство. Применим преобразование Лапласа к $f'(t)$: $\quad L\{f'(t)\}=\int\limits_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt$.

Интегрируя по частям, получим

$$\int\limits_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt=\begin{vmatrix} u=e^{-pt},\ du=-pe^{-pt}dt \\ dv=f'(t)dt,\ v=f(t)\end{vmatrix}=f(t)e^{-pt}\Big|_0^{+\infty}+p\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt=$$
$$=-f(0)+p\,F(p).$$

Здесь первое слагаемое обращается в нуль при $t\to+\infty$, так как при $\operatorname{Re}p=\alpha>S_0$ имеем

$$\left|f(t)\cdot e^{-pt}\right|\le Me^{-(\alpha-S_0)t}\to 0 \text{ при } t\to+\infty .$$

Итак, $f'(t) \risingdotseq p\,F(p)-f(0)$.

Используя полученное соотношение, получим изображение второй производной $f''(t)$:

$$f''(t)=\left(f'(t)\right)' \risingdotseq p\left(pF(p)-f(0)\right)-f'(0)=p^2F(p)-pf(0)-f'(0).$$

Аналогично находим изображение третьей производной $f'''(t)$ и т.д.

<u>Пример 5.14</u>. Пользуясь теоремой о дифференцировании оригинала, найти изображение функции $f(t)=\cos^2 3t$.

► Пусть $f(t)\risingdotseq F(p)$. Тогда $f'(t)\risingdotseq pF(p)-f(0)$.

Учитывая, что $f(0)=1$, формулу (5.4), получим

$$f'(t)=-6\cos 3t\cdot\sin 3t=-3\sin 6t \risingdotseq -3\cdot\frac{6}{p^2+36}=-\frac{18}{p^2+36}.$$

Поэтому имеем $-\dfrac{18}{p^2+36}=pF(p)-1$.

Отсюда находим

$$F(p)=\frac{1}{p}-\frac{18}{p\left(p^2+36\right)}. \qquad ◄$$

8. Теорема об интегрировании оригинала. *Пусть* $f(t)\risingdotseq F(p)$, *тогда*

$$\boxed{\int_0^t f(u)\,du \risingdotseq \frac{F(p)}{p}}. \tag{5.11}$$

Доказательство. Функция $\varphi(t)=\int\limits_0^t f(u)\,du$ является оригиналом, так как выполняются все три условия оригинала. Пусть

$$\int_0^t f(u)\,du \risingdotseq \Phi(p).$$

Пользуясь теоремой о дифференцировании оригинала, имеем

$$\left(\int_0^t f(u)\,du\right)' \fallingdotseq p\Phi(p)-\int_0^0 f(u)\,du = p\Phi(p).$$

Так как $\left(\int_0^t f(u)\,du\right)' = f(t)$, а по условию теоремы $f(t) \fallingdotseq F(p)$, то в силу единственности изображения получаем

$$\Phi(p)=\frac{F(p)}{p},$$

что и доказывает теорему.

Пример 5.15. Найти изображение функции $f(t)=\int_0^t \tau\cos\tau\,d\tau$, не вычисляя интеграла.

► Сначала найдем изображение функции $\varphi(t)=t\cos t$. Поскольку $\cos t \fallingdotseq \frac{p}{p^2+1}$, то используя теорему о дифференцировании изображения, имеем

$$t\cos t \fallingdotseq -\left(\frac{p}{p^2+1}\right)' = \frac{p^2-1}{\left(p^2+1\right)^2}.$$

Теперь с учетом соотношения (5.11) получаем

$$\int_0^t \tau\cos\tau\,d\tau \fallingdotseq \frac{p^2-1}{p\left(p^2+1\right)^2}.$$ ◄

10. Теорема об интегрировании изображения. *Пусть* $f(t) \fallingdotseq F(p)$ *и* $\frac{f(t)}{t}$ *– оригинал, а интеграл* $\int_p^\infty F(z)\,dz$ *сходится, тогда*

$$\boxed{\frac{f(t)}{t} \fallingdotseq \int_p^{+\infty} F(z)\,dz}.$$

Пример 5.16. Найти изображение функции $\dfrac{\sin t}{t}$.

► Как известно, $\sin t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2+1}$. Поэтому

$$\frac{\sin t}{t} \risingdotseq \int\limits_{p}^{+\infty} \frac{dz}{z^2+1} = \operatorname{arctg} z \Big|_{p}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arcctg} p . \qquad ◄$$

Пример 5.17. Найти изображение интегрального синуса $\int\limits_0^t \dfrac{\sin z}{z} dz$.

► С учетом предыдущего примера и свойства интегрирования оригинала получаем

$$\int\limits_0^t \frac{\sin z}{z} dz \risingdotseq \frac{\operatorname{arcctg} p}{p} . \qquad ◄$$

С помощью теоремы об интегрировании изображения легко вычисляются некоторые несобственные интегралы.

Пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$, и пусть сходится несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{f(t)}{t} dt$. Тогда

$$\boxed{\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int\limits_0^{+\infty} F(p)\, dp}. \tag{5.12}$$

Пример 5.18. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t} dt$.

► С учетом соотношения $\sin t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2+1}$ и формулы (5.12) получаем

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dp}{p^2+1} = \operatorname{arctg} p \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} . \qquad ◄$$

5.4. ИЗОБРАЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Если оригинал $f(t)$ имеет период T, т.е. удовлетворяет условию $f(t+T)=f(t)$, то его изображение находят по формуле

$$\boxed{F(p)=L\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-Tp}}\cdot\int_0^T e^{-pt}\cdot f(t)\,dt, \operatorname{Re} p>0}. \qquad (5.13)$$

Пример 5.19. Найти изображение оригинала $f(t)$ с периодом а и графиком, изображенным на рис. 27.

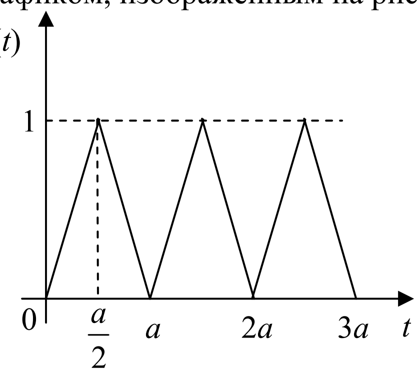


Рис. 27

► Функция $f(t)$ на промежутке $[0,a]$ может быть представлена так:

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{2t}{a}, & 0\le t<\dfrac{a}{2}\\ \dfrac{2(a-t)}{a}, & \dfrac{a}{2}\le t\le a.\end{cases}$$

Изображение этого периодического оригинала определим по формуле (5.13)

$$F(p)=L\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-ap}}\cdot\int_0^a e^{-pt}\cdot f(t)\,dt=$$

$$=\frac{2}{a\left(1-e^{-ap}\right)}\cdot\left(\int\limits_0^{\frac{a}{2}} e^{-pt}t\,dt+\int\limits_{\frac{a}{2}}^{a} e^{-pt}\left(a-t\right)dt\right). \tag{5.14}$$

Вычислим интегралы, интегрируя по частям. Получим:

$$\int\limits_0^{\frac{a}{2}} e^{-pt}t\,dt=\left|\begin{array}{l} u=t,\ du=dt \\ dv=e^{-pt}dt,\ v=-\dfrac{1}{p}e^{-pt}\end{array}\right|=-\frac{1}{p}\cdot e^{-pt}\,t\Big|_0^{\frac{a}{2}}+\frac{1}{p}\int\limits_0^{\frac{a}{2}} e^{-pt}dt=$$

$$=-\frac{a}{2p}\cdot e^{-\frac{ap}{2}}-\frac{1}{p^2}e^{-pt}\Big|_0^{\frac{a}{2}}=-\frac{a}{2p}\cdot e^{-\frac{ap}{2}}-\frac{1}{p^2}e^{-\frac{ap}{2}}+\frac{1}{p^2},$$

$$\int\limits_{\frac{a}{2}}^{a} e^{-pt}\left(a-t\right)dt=\left|\begin{array}{ll} u=a-t & du=-dt \\ dv=e^{-pt}dt & v=-\dfrac{1}{2}e^{-pt}\end{array}\right|=-\frac{1}{p}e^{-pt}\left(a-t\right)\Big|_{\frac{a}{2}}^{a}+\frac{1}{p^2}e^{-pt}\Big|_{\frac{a}{2}}^{a}=$$

$$\frac{a}{2p}\cdot e^{-\frac{ap}{2}}+\frac{1}{p^2}\cdot e^{-ap}-\frac{1}{p^2}\cdot e^{-\frac{ap}{2}}.$$

Подстановка значений интегралов в выражение (5.14) дает изображение периодического интеграла

$$F\left(p\right)=\frac{2}{a\left(1-e^{-ap}\right)}\cdot\left(\frac{1}{p^2}\cdot e^{-ap}-\frac{2}{p^2}e^{-\frac{ap}{2}}+\frac{1}{p^2}\right)=\frac{2\left(1-e^{-\frac{ap}{2}}\right)^2}{ap^2\left(1-e^{-ap}\right)}. \quad ◄$$

<u>Пример 5.20.</u> Найти изображение прямоугольного импульса с периодом $2l$ (рис. 28):

$$\varphi\left(t\right)=\begin{cases}3, & 0<t\le l;\\ 0, & l<t<2l.\end{cases}$$

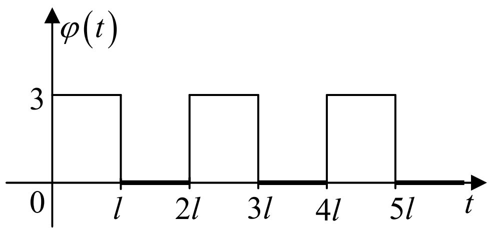


Рис. 28

► По формуле (5.13) находим

$$F\left(p\right)=\frac{1}{1-e^{-2lp}}\int\limits_0^{l} e^{-pt}3\,dt=$$

$$
= \frac{3}{1-e^{-2lp}} e^{-pt} \left(-\frac{1}{p} \right) \Bigg|_0^l =
$$

$$
= \frac{3\left(1-e^{-pl}\right)}{p\left(1-e^{-2lp}\right)} = \frac{3}{p\left(1+e^{-lp}\right)}. \qquad \blacktriangleleft
$$

5.5. ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ И ЕЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ

Рассмотрим функцию

$$
\delta_h(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{h}, & 0 < t \le h, \\ 0, & t < 0, t > h, \end{cases} \qquad (5.15)
$$

график которой представлен на рис. 29.

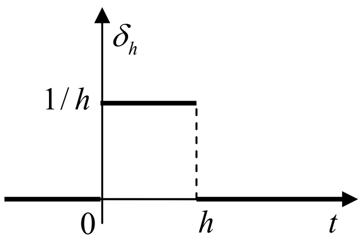


Рис. 29

Если эту функцию трактовать как силу, действующую за промежуток времени от 0 до h, а остальное время равное нулю, то, очевидно, импульс этой силы будет равен единице.

Запишем функцию (5.15) в виде $\delta_h(t) = \dfrac{1}{h}\left(I(t) - I(t-h)\right)$ и найдем ее изображение. С учетом формулы (5.2), свойств линейности и запаздывания имеем

$$
\delta_h(t) \risingdotseq \frac{1}{h}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-ph} \right) = \frac{1-e^{-ph}}{ph}. \qquad (5.16)
$$

В инженерных приложениях бывает удобно рассматривать силы, действующие мгновенно, но имеющие конечный импульс. Поэтому вводят функцию как предел функции $\delta_h(t)$ при $h \to 0$:

$$
\delta(t) = \lim_{h \to 0} \delta_h(t).
$$

Эту функцию называют **единичной импульсной функцией** или **дельта**-функцией (δ -функция).

Переходя к пределу в выражении (5.16), получим изображение δ -функции:

$$\delta(t) \fallingdotseq \lim_{h\to 0}\frac{1-e^{-ph}}{ph}=1 .$$

Итак,

$$\boxed{\delta(t) \fallingdotseq 1}.$$

Функция $\delta(t-t_0)$ трактуется как сила, мгновенно, в момент $t=t_0$, сообщающая единичной массе скорость равную единице.

В силу теоремы запаздывания будем иметь

$$\boxed{\delta(t-t_0) \fallingdotseq e^{-pt_0}}.$$

5.6. ТАБЛИЦА ОРИГИНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

Для удобства пользования полученными изображениями поместим их в одну таблицу.

Таблица 1.

№	Оригинал	Изображение	Примечания
1.	1	$\frac{1}{p}$	
2.	$t^{-\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{p}}$	
3.	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$n\in N$
4.	$e^{\mp at}$	$\frac{1}{p\pm a}$	

5.	$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	
6.	$\cos\omega t$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$	
7.	$sh\,\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$	
8.	$ch\,\omega t$	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$	
9.	$t^n \cdot e^{-at}$	$\dfrac{n!}{(p+a)^{n+1}}$	$n \in N$
10.	$e^{-at}\cos\omega t$	$\dfrac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$	
11.	$e^{-at}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$	
12.	$e^{-at} sh\,\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p+a)^2-\omega^2}$	
13.	$e^{-at} ch\,\omega t$	$\dfrac{p+a}{(p+a)^2-\omega^2}$	

ГЛАВА VI
НАХОЖДЕНИЕ ОРИГИНАЛА ПО ИЗОБРАЖЕНИЮ

Оригинал по изображению находится с помощью обратного преобразования Лапласа по формуле обращения

$$f(t) = L^{-1}\left[F(p)\right] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt}F(p)\,dp,$$

где путь интегрирования – любая прямая $\operatorname{Re} p = \alpha$, параллельная мнимой оси и лежащая правее прямой $\operatorname{Re} p = S_0$ (рис. 30).

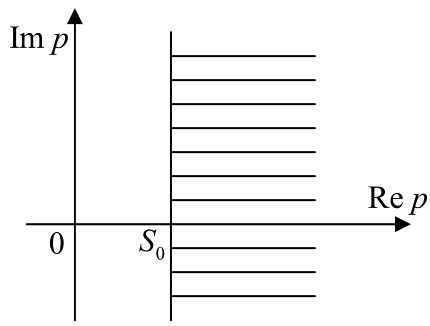


Рис. 30

Непосредственное применение формулы обращения часто затруднительно. Поэтому на практике применяются теоремы разложения и правила преобразования к виду, представленному в таблице 1.

6.1. ПРИМЕНЕНИЕ ТАБЛИЦЫ И ТЕОРЕМ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Приведем ряд известных приемов нахождения оригинала.

1^0. Если изображение отличается от табличного на постоянный множитель, то его следует умножить и одновременно поделить на этот множитель.

Пример 6.1. Найти оригиналы по изображениям:

а) $F(p)=\dfrac{5}{(p-1)^4}$; б) $F(p)=\dfrac{3}{p^2+5}$.

► а) Запишем изображение в виде $F(p)=\dfrac{5}{3!}\cdot\dfrac{3!}{(p-1)^4}$ и по формуле 9 из таблицы 1 получаем $f(t)=\dfrac{5}{6}t^3\,e^t$.

б) Представим изображение в виде

$F(p)=\dfrac{3}{p^2+5}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{p^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}$ и по формуле 5 из таблицы 1 находим $f(t)=\dfrac{3}{\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}t$. ◄

Пример 6.2. Найти оригиналы по изображениям:

а) $F(p)=\dfrac{2p}{(p+4)^3}$; б) $F(p)=\dfrac{4p-1}{(p-2)^2}$; в) $F(p)=\dfrac{p^4+3p+6}{p^4(p+2)}$;

г) $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p+1}$.

► Представим дроби в виде суммы двух слагаемых, а затем воспользуемся свойством линейности и формулами из таблицы 1:

а) $F(p)=\dfrac{2(p+4)-8}{(p+4)^3}=\dfrac{2}{(p+4)^2}-\dfrac{8}{2!}\cdot\dfrac{2!}{(p+4)^3}=$

$=2\cdot\dfrac{1}{(p+4)^2}-4\cdot\dfrac{2!}{(p+4)^3}$. Поэтому $f(t)=2t\,e^{-4t}-4t^2\,e^{-4t}$.

б) $$F(p)=\frac{4p-1}{(p-2)^2}=\frac{4(p-2)+7}{(p-2)^2}=4\cdot\frac{1}{p-2}+7\cdot\frac{1}{(p-2)^2}.$$

Тогда $f(t)=4e^{2t}+7te^{2t}$.

в) $$F(p)=\frac{p^4+3(p+2)}{p^4(p+2)}=\frac{1}{p+2}+\frac{3}{3!}\cdot\frac{3!}{p^4}=\frac{1}{p+2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3!}{p^4}.$$

Отсюда $f(t)=e^{-2t}+\frac{1}{2}t^3$.

г) Поскольку $\frac{1}{p+1}\risingdotseq e^{-t}$, то с помощью теоремы запаздывания находим $f(t)\risingdotseq e^{-(t-1)}I(t-1)$. ◄

2^0. Если знаменатель дроби содержит квадратный трехчлен, то в нем выделяется полный квадрат: $ap^2+bp+c=$ $=a\left(\left(p+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)$, а затем преобразуют к формуле из таблицы 1.

<u>Пример 6.3.</u> Найти оригинал по изображению
$$F(p)=\frac{p+8}{p^2+3p+5}.$$

► Выделим полный квадрат в знаменателе
$$F(p)=\frac{(p+3/2)+13/2}{(p+3/2)^2+11/4}=\frac{p+3/2}{(p+3/2)^2+\left(\sqrt{11}/2\right)^2}+$$
$$+\frac{13}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{11}}\cdot\frac{\sqrt{11}/2}{(p+3/2)^2+\left(\sqrt{11}/2\right)^2}.$$

Воспользовавшись формулами (10) и (11) из таблицы 1, находим
$$f(t)=e^{-3/2\cdot t}\cos\frac{\sqrt{11}}{2}t+\frac{13}{\sqrt{11}}e^{-3/2\cdot t}\sin\frac{\sqrt{11}}{2}t.$$ ◄

3^0. Если оригинал представляет собой правильную дробь, то следует ее разложить на простейшие дроби и для каждой из полученных дробей найти оригинал.

Пример 6.4. Для данных изображений найти оригиналы:

а) $F(p)=\dfrac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$; б) $F(p)=\dfrac{1}{(p+1)(p+3)^3}$.

► а) Разлагаем $F(p)$ на сумму элементарных дробей:

$$\frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}=\frac{A}{p+1}+\frac{B}{p-2}+\frac{Cp+D}{p^2+4}.$$

Находим неизвестные коэффициенты:

$$p+2=A(p-2)(p^2+4)+B(p+1)(p^2+4)+(Cp+D)(p+1)(p-2).$$

Подставляем действительные корни знаменателя: $p=-1$, $p=2$ в последнее тождество, получаем

$$\begin{array}{l|l} p=-1 & 1=-15A \\ p=2 & 4=24B. \end{array}$$

Отсюда $A=-\dfrac{1}{15}$, $B=\dfrac{1}{6}$.

Преобразуем правую часть тождества:

$$p+2=(A+B+C)p^3+(B-2A-C+D)p^2+(4A+4B-2C-D)p+$$
$$+(4B-8A-2D).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях p, получаем систему уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ B-2A-C+D=0 \\ A=-\dfrac{1}{15} \\ B=\dfrac{1}{6}. \end{cases}$$

Решая ее, находим $C=-\dfrac{1}{10}$, $D=-\dfrac{2}{5}$. Следовательно,

$$F(p)=-\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{p+1}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{10}\cdot\frac{p}{p^2+4}-\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{p^2+4}.$$

Используя свойство линейности и таблицу 1 оригиналов и изображений, получаем

$$f(t)=-\frac{1}{15}e^{-t}+\frac{1}{6}e^{2t}-\frac{1}{10}\cos 2t-\frac{1}{5}\sin 2t.$$

б) Представим $F(p)$ в виде

$$F(p)=\frac{1}{(p+1)(p+3)^3}=\frac{A}{p+1}+\frac{B}{(p+3)^3}+\frac{C}{(p+3)^2}+\frac{D}{p+3},$$

где A, B, C, D – неопределенные коэффициенты.

Отсюда имеем

$$A(p+3)^3+B(p+1)+C(p+1)(p+3)+D(p+1)(p+3)^2=1.$$

Подставляя последовательно в последнее тождество $p=-1$, $p=-3$, $p=0$, $p=-2$, получаем $A=\dfrac{1}{8}$, $B=-\dfrac{1}{2}$, $D=-\dfrac{1}{8}$, $C=-\dfrac{1}{4}$.

Следовательно,

$$F(p)=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{p+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p+3)^3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(p+3)^2}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{p+3}.$$

По формулам (4), (9) из таблицы 1 находим

$$f(t)=\frac{1}{8}\left(e^{-t}-2t^2e^{-3t}-2te^{-3t}-e^{-3t}\right)=\frac{1}{8}e^{-t}-\frac{1}{8}e^{-3t}\left(2t^2+2t+1\right). \quad ◄$$

Пример 6.5. Найти оригинал, если известно его изображение $F(p)=\dfrac{1}{p\left(p^2+4\right)}$.

►**1-ый способ**. Используем приемы разложения на элементарные дроби:

$$F(p)=\frac{1}{p\left(p^2+4\right)}=\frac{A}{p}+\frac{Bp+C}{p^2+4}.$$

Неизвестные коэффициенты A, B, C определяем из тождества $A\left(p^2+4\right)+p\left(Bp+C\right)=1$ или $\left(A+B\right)p^2+pC+4A=1$.

Подставляя корень знаменателя $p=0$, получаем

$$4A=1,\ A=\frac{1}{4}.$$

Далее приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях p:

$$\begin{array}{c|l} p^2 & A+B=0, \qquad B=-\frac{1}{4} \\ p & C=0. \end{array}$$

Итак, $F(p)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{4}\cdot\frac{p}{p^2+4}$.

По таблице 1 оригиналов и изображений находим

$$f(t)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2t.$$

2-ой способ. Обозначим $F_1(p)=\frac{1}{p^2+4}$. Тогда по таблице 1 имеем оригинал $f_1(t)=\frac{1}{2}\sin 2t$.

Рассмотрим функцию $F(p)=\frac{F_1(p)}{p}$. По формуле (5.11) интегрирования оригинала получаем

$$f(t)=\int_0^t\frac{1}{2}\sin 2\tau\,d\tau=-\frac{1}{4}\cos 2\tau\Big|_0^t=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2t. \qquad ◄$$

6.2. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМ РАЗЛОЖЕНИЯ

1^0. Первая теорема разложения.

Если изображение $F(p)$ *искомой функции может быть разложено в степенной ряд по степеням* $\frac{1}{p}$, *то есть*

$$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{p^{n+1}}=\frac{a_0}{p}+\frac{a_1}{p^2}+\ldots+\frac{a_n}{p^{n+1}}+\ldots,$$

причем этот ряд сходится к $F(p)$ *при* $|p|>R$, *где* $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\neq\infty$, *то функция*

$$f(t)=L^{-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{p^{n+1}}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}a_nL^{-1}\left[\frac{1}{p^{n+1}}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{t^n}{n!}=$$

$$=a_0+a_1\frac{t}{1!}+a_2\frac{t^2}{2!}+\ldots+a_n\frac{t^n}{n!}+\ldots,\quad t\geq 0, \tag{6.1}$$

является оригиналом, соответствующим изображению $F(p)$.

2^0. Вторая теорема разложения.

Если изображение $F(p)$ *является однозначной функцией и имеет лишь конечное число особых точек* $p_1, p_2,\ldots, p_n$, *лежащих в конечной части плоскости, то оригинал* $f(t)$ *определяется по формуле*

$$\boxed{f(t)=\sum_{k=1}^{n}\underset{p_k}{res}\left[e^{pt}F(p)\right]}. \tag{6.2}$$

<u>Замечание 1.</u> Если все полюсы $p_1,p_2,\ldots,p_n$ функции $F(p)$ простые, то по формуле (4.4) получаем

$$\underset{p_k}{res}\left[F(p)e^{pt}\right]=\lim_{p\to p_k}\left[F(p)(p-p_k)e^{pt}\right],$$

а формула (6.2) принимает вид

$$\boxed{f(t)=L^{-1}F(p)=\sum_{k=1}^{n}\lim_{p\to p_k}\left[F(p)(p-p_k)e^{pt}\right]}. \qquad (6.3)$$

Замечание 2. Если изображение $F(p)$ является правильной дробно-рациональной функцией, то есть $F(p)=\dfrac{F_1(p)}{F_2(p)}$, где $F_1(p)$ и $F_2(p)$ – многочлены, а знаменатель $F_2(p)$ имеет простые корни $p_1,\ p_2,...,\ p_n$, то по формуле (4.5) получаем

$$\underset{p_k}{res}\frac{F_1(p)}{F_2(p)}e^{pt}=\lim_{p\to p_k}\frac{F_1(p)}{F_2'(p)}e^{pt}=\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}e^{p_k t},\quad k=\overline{1,n},$$

а формула (6.2) принимает вид

$$\boxed{f(t)=L^{-1}F(p)=\sum_{k=1}^{n}\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}\cdot e^{p_k t}}. \qquad (6.4)$$

Замечание 3. Если изображение $F(p)$ является правильной дробно-рациональной функцией, то есть $F(p)=\dfrac{F_1(p)}{F_2(p)}$, где $F_1(p)$ и $F_2(p)$ – многочлены, а знаменатель имеет корни $p_1,\ p_2,...,\ p_n$ кратностей $r_1,\ r_2,...,\ r_n$ соответственно, то с учетом формулы (4.6) оригинал вычисляется по формуле

$$\boxed{\begin{aligned}&f(t)=\sum_{k=1}^{n}\underset{p_k}{res}\left[e^{pt}F(p)\right]=\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(r_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{r_k-1}\left((p-p_k)^{r_k}\dfrac{F_1(p)}{F_2(p)}e^{pt}\right)}{dp^{r_k-1}}.\end{aligned}} \qquad (6.5)$$

Замечание 4. При наличии у знаменателя пар мнимых сопряженных корней выражение оригинала упрощается. В этом случае каждой паре мнимых сопряженных корней $p=\alpha\pm i\beta$

соответствуют слагаемые $\underset{\alpha+i\beta}{res} F(p)e^{pt}$ и $\underset{\alpha-i\beta}{res} F(p)e^{pt}$, являющимися также числами сопряженными, а потому их сумма равна удвоенной действительной части каждого из них, то есть

$$\underset{\alpha+i\beta}{res} F(p)e^{pt} + \underset{\alpha-i\beta}{res} F(p)e^{pt} = 2\operatorname{Re}\underset{\alpha+i\beta}{res} F(p)e^{pt}.$$

Оригинал можно определить по формуле

$$\boxed{\begin{aligned} f(t) &= L^{-1}(F(p)) = L^{-1}\left(\frac{F_1(p)}{F_2(p)}\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{r}\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}e^{p_k t} + 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{S}\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)}e^{p_k t}, \end{aligned}} \tag{6.6}$$

где r – число действительных корней знаменателя $F_2(p)$, S – число пар сопряженных комплексных корней $F_2(p)$.

Пример 6.6. Найти оригинал для функции $F(p) = \frac{1}{p^2}\sin\frac{1}{p}$.

► Используя формулу разложения в ряд Тейлора функции

$$\sin z = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} z^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

для заданного изображения получаем:

$$F(p) = \frac{1}{p^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}\cdot\frac{1}{p^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!\,p^{2n+1}},\ a_{2n-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}.$$

Согласно первой теореме разложения имеем

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}\cdot\frac{t^{2n}}{(2n)!}.$$ ◄

Пример 6.7. Найти оригинал для функции $F(p) = \frac{1}{p}e^{\frac{1}{p}}$.

► С помощью разложения в ряд Тейлора $e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$

находим разложение

$$F\left(p\right)=\frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{p^{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!\,p^{n+1}},\quad a_{n}=\frac{1}{n!}.$$

Используя первую теорему разложения, получаем

$$f\left(t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n}}{\left(n!\right)^{2}}. \qquad ◄$$

Пример 6.8. Найти оригинал по его изображению $F(p)=\dfrac{p^{2}-p-2}{p^{3}-p^{2}-6p}$.

► Имеем $F_1(p)=p^2-p-2;\ F_2(p)=p^3-p^2-6p=p(p-3)(p+2)$. Корни знаменателя $p_1=0,\ p_2=3,\ p_3=-2$ – простые;

$F_2'(p)=(p^3-p^2-6p)'=3p^2-2p-6$.

По формуле (6.5) находим оригинал

$$\frac{p^{2}-p-2}{p^{3}-p^{2}-6p}\fallingdotseq\frac{F_1\left(0\right)}{F_2'\left(0\right)}e^{0t}+\frac{F_1\left(3\right)}{F_2'\left(3\right)}e^{3t}+\frac{F_1\left(-2\right)}{F_2'\left(-2\right)}e^{-2t}.$$

$$f\left(t\right)=\frac{1}{3}+\frac{4}{15}e^{3t}+\frac{2}{5}e^{-2t}. \qquad ◄$$

Пример 6.9. Найти оригинал по изображению $F\left(p\right)$ из примера 6.4.(б) по второй теореме разложения.

► Функция имеет два полюса: простой $p_1=-1$ и полюс третьего порядка $p_2=-3$.

Оригинал определим по формуле (6.3):

$$f\left(t\right)=\underset{p_1=-1}{res}\frac{e^{pt}}{\left(p+1\right)\left(p+3\right)^{3}}+\underset{p_2=-3}{res}\frac{e^{pt}}{\left(p+1\right)\left(p+3\right)^{3}}.$$

Находим вычеты. Так как вычет в простом полюсе определяется по формуле $\underset{p_k}{res}F\left(p\right)=\lim\limits_{p\to p_k}F\left(p\right)\left(p-p_k\right)$ или (6.5), то

$$\underset{p_1=-1}{res}\frac{e^{pt}}{(p+1)(p+3)^3}=\lim_{p\to-1}\frac{e^{pt}(p+1)}{(p+1)(p+3)^3}=\lim_{p\to-1}\frac{e^{pt}}{(p+3)^3}=\frac{1}{8}e^{-t}.$$

Поскольку $p_2=-3$ – полюс третьего порядка, поэтому вычет вычисляем по формуле (6.6):

$$\underset{p_2=-3}{res}\frac{e^{pt}}{(p+1)(p+3)^3}=\frac{1}{2!}\lim_{p\to-3}\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{e^{pt}(p+3)^3}{(p+1)(p+3)^3}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{p\to-3}\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{e^{pt}}{p+1}\right)=\frac{1}{2}\lim_{p\to-3}\frac{d}{dp}\left(\frac{e^{pt}(pt+t-1)}{(p+1)^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{p\to-3}\frac{\left(te^{pt}(pt+t-1)+e^{pt}t\right)(p+1)^2-2(p+1)e^{pt}(pt+t-1)}{(p+1)^4}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{p\to-3}\frac{e^{pt}\left(\left(pt^2+t^2\right)(p+1)-2(pt+t-1)\right)}{(p+1)^3}=$$

$$=-\frac{1}{4}t^2e^{-3t}-\frac{1}{4}te^{-3t}-\frac{1}{8}e^{-3t}=-\frac{1}{8}e^{-3t}\left(2t^2+2t+1\right).$$

Итак, объединяя полученные результаты, имеем

$$f(t)=\frac{1}{8}e^{-t}-\frac{1}{8}e^{-3t}\left(2t^2+2t+1\right).$$ ◄

<u>Пример 6.10.</u> Решить пример 6.4.(а), используя вторую теорему разложения.

► Функция $F(p)=\dfrac{p+2}{(p+1)(p-2)\left(p^2+4\right)}$ имеет простые полюса $p_1=-1,\ p_2=2,\ p_3=2i,\ p_4=-2i$. Применим вторую теорему разложения с учетом замечаний:

$$f(t)=\underset{p=-1}{res}F(p)e^{pt}+\underset{p=2}{res}F(p)e^{pt}+2\,\mathrm{Re}\underset{p=2i}{res}F(p)e^{pt}.$$

$$\underset{p_1=-1}{res}\,F(p)e^{pt}=\lim_{p\to-1}\frac{(p+2)(p+1)e^{pt}}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}=\lim_{p\to-1}\frac{(p+2)e^{pt}}{(p-2)(p^2+4)}=$$

$$=-\frac{1}{15}e^{-t};$$

$$\underset{p_2=2}{res}\,F(p)e^{pt}=\lim_{p\to2}\frac{(p+2)(p-2)e^{pt}}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}=\lim_{p\to2}\frac{(p+2)e^{pt}}{(p+1)(p^2+4)}=$$

$$=\frac{1}{6}e^{2t}.$$

Вычислим вычет в точке $p=2i$ с помощью замечания 4. Так как

$$F(p)=\frac{F_1(p)}{F_2(p)},\; F_1(p)=\frac{p+2}{(p+1)(p-2)},\; F_2(p)=p^2+4,$$

$F_2'(p)=2p$, то последовательно находим

$$\operatorname{Re}\underset{p=2i}{res}\,F(p)e^{pt}=\operatorname{Re}\underset{p=2i}{res}\frac{(p+2)e^{pt}}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}=$$

$$=\operatorname{Re}\lim_{p\to2i}\frac{\dfrac{(p+2)e^{pt}}{(p+1)(p-2)}}{p^2+4}=\operatorname{Re}\lim_{p\to2i}\frac{\dfrac{(p+2)e^{pt}}{(p+1)(p-2)}}{(p^2+4)'}=$$

$$=\operatorname{Re}\lim_{p\to2i}\frac{(p+2)e^{pt}}{(p+1)(p-2)\cdot2p}=\operatorname{Re}\frac{(2i+2)e^{2it}}{(2i+1)(2i-2)\cdot4i}=$$

$$=\frac{1}{4}\operatorname{Re}\frac{(i+1)e^{2it}}{(2i+1)(-1-i)}=-\frac{1}{4}\operatorname{Re}\frac{e^{2it}}{2i+1}=-\frac{1}{4}\operatorname{Re}\frac{(1-2i)e^{2it}}{(2i+1)(1-2i)}=$$

$$=\frac{1}{20}\operatorname{Re}(2i-1)e^{2it}.$$

Далее, с учетом формулы Эйлера (1.10) получаем

$$2\operatorname{Re}\underset{p=2i}{res} F(p)e^{pt} = \frac{1}{10}\operatorname{Re}(2i-1)(\cos 2t + i\sin 2t) =$$

$$= \frac{1}{10}\operatorname{Re}(2i\cos 2t - \cos 2t - 2\sin 2t - i\sin 2t) = -\frac{1}{10}\cos 2t - \frac{1}{5}\sin 2t.$$

Объединяя результаты, окончательно находим оригинал

$$f(t) = \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{15}e^{-t} - \frac{1}{10}\cos 2t - \frac{1}{5}\sin 2t\ .$$ ◄

6.3. ПОНЯТИЕ О СВЕРТКЕ. ТЕОРЕМА О СВЕРТКЕ

Пусть даны две функции: $a(t)$ и $b(t)$. **Сверткой** функций $a(t)$ и $b(t)$ называется функция $c(t)$, определяемая равенством

$$\boxed{c(t) = \int_0^t a(\tau)b(t-\tau)\,d\tau = a(t)*b(t)}. \qquad (6.7)$$

Теорема. *Свертка функций подчиняется переместительному закону*

$$a(t)*b(t) = b(t)*a(t).$$

Доказательство. Справедливость этого утверждения устанавливаем заменой переменных в интеграле (6.7):

$$a(t)*b(t) = \int_0^t a(\tau)b(t-\tau)\,d\tau = \begin{vmatrix} t-\tau = u, & d\tau = -du \\ \tau = t-u, & u_{\text{н}} = t, \quad u_{\text{в}} = 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\int_t^0 a(t-u)b(u)\,du = \int_0^t b(u)a(t-u)\,du = b(t)*a(t).$$

Пример 6.10. Найти свертку функций $a(t) = e^t$, $b(t) = \cos t$.

► По определению свертки (6.7) и переместительного свойства свертки находим

$$c(t) = a(t)*b(t) = \int_0^t e^{\tau}\cos(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t e^{t-u}\cos u\,du =$$

$$= e^{t}\int_0^t e^{-u}\cos u\,du\,.$$

Последний интеграл возвратный. Вычислим его двукратным интегрированием по частям:

$$\int_0^t e^{-\tau}\cos\tau\,d\tau = \begin{vmatrix} u = e^{-\tau}, & du = -e^{-\tau}d\tau \\ dv = \cos\tau\,d\tau, & v = \sin\tau \end{vmatrix} = e^{-\tau}\sin\tau\Big|_0^t +$$

$$+\int_0^t e^{-\tau}\sin\tau\,d\tau = \begin{vmatrix} u = e^{-\tau}, & du = -e^{-\tau}d\tau \\ dv = \sin\tau\,d\tau, & v = -\cos\tau \end{vmatrix} = e^{-t}\sin t - e^{-\tau}\cos\tau\Big|_0^t -$$

$$-\int_0^t e^{-\tau}\cos\tau\,d\tau = e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t + 1 - \int_0^t e^{-\tau}\cos\tau\,d\tau\,.$$

Отсюда $\displaystyle\int_0^t e^{-\tau}\cos\tau\,d\tau = \frac{e^{-t}\left(\sin t - \cos t\right)+1}{2}$.

Поэтому свертка $\displaystyle e^{t} * \cos t = \frac{\sin t - \cos t}{2} + \frac{e^{t}}{2}$. ◄

6.4. УМНОЖЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Теорема о свертке. *Если* $f_1(t) \risingdotseq F_1(p)$, $f_2(t) \risingdotseq F_2(p)$, *то свертка функций отображается в произведение изображений*

$$\boxed{f_1(t) * f_2(t) \risingdotseq F_1(p)F_2(p)}. \tag{6.8}$$

Операции умножения двух функций в пространстве изображений соответствует операция свертки их оригиналов в пространстве оригиналов.

Доказательство. Напомним, что мы считаем, что $f_1(t) = f_2(t) = 0$ при $t < 0$. Обозначим изображение свертки, то есть $c(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\,d\tau$ через $F(p)$.

По формуле (5.1) имеем

$$F(p)=\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}c(t)\,dt=\int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}\left(\int\limits_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau\right)dt\,.$$

Это двукратный интеграл. Область его определения $D: 0\le t<\infty,\ 0\le\tau\le t$, где интеграл сходится абсолютно. Поэтому можно изменить порядок интегрирования и, учитывая, что $f_2(t-\tau)=0$ для $0<t<\tau$, находим

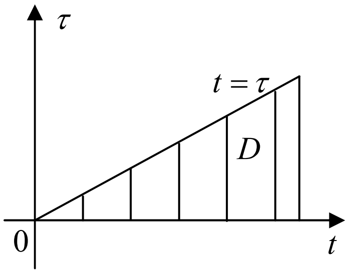


Рис. 30

$$F(p)=\int\limits_0^{+\infty} f_2(\tau)\,d\tau\int\limits_\tau^{+\infty} e^{-pt}f_1(t-\tau)\,dt=$$

$$=\left|\begin{matrix} t-\tau=u, & u_{\text{н}}=0 \\ t=\tau+u, & u_{\text{в}}=\infty \end{matrix}\right|=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty} e^{-p\tau}f_2(\tau)\,d\tau\int\limits_0^{+\infty} e^{-pu}f_1(u)\,du=$$

$=F_1(p)F_2(p)$, то есть

$\int\limits_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau \fallingdotseq F_1(p)F_2(p)$, что и требовалось доказать.

<u>Пример 6.11.</u> Найти оригинал $f(t)$, соответствующий изображению $F(p)=\dfrac{p}{(p-1)(p^2+1)}$.

► Представим $F(p)$ в виде произведения изображений:

$$F(p)=F_1(p)F_2(p)=\frac{1}{p-1}\cdot\frac{p}{p^2+1}\,.$$

Из таблицы 1 оригиналов и изображений находим

$$\frac{1}{p-1}\fallingdotseq e^t,\ \ \frac{p}{p^2+1}\fallingdotseq \cos t\,.$$

Согласно теореме об умножении изображений и результата примера 6.10. получаем искомый оригинал

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{p}{(p-1)(p^2+1)}\right]=e^t*\cos t=\frac{1}{2}\left(\sin t-\cos t+e^t\right). \quad ◄$$

Пример 6.12. Найти оригинал, зная изображение $F(p)=\dfrac{p^2}{\left(p^2+1\right)^2}$.

► Представим $F(p)$ в виде произведения изображений:

$$F(p)=F_1(p)F_2(p)=\frac{p}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+1}.$$

Поскольку $\dfrac{p}{p^2+1}\risingdotseq\cos t$, то, используя соотношение (6.8) и определение свертки (6.7) находим

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{p^2}{\left(p^2+1\right)^2}\right]=\cos t*\cos t=\int_0^t\cos\tau\cos(t-\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t\left(\cos(2\tau-t)+\cos t\right)d\tau=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin(2\tau-t)+\tau\cos t\right)\Bigg|_0^t=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin t+t\cos t\right). \quad ◄$$

В практических вычислениях важную роль играет следствие из теоремы о свертке (формула Дюамеля).

Интеграл Дюамеля. Пусть функция $f(t)$ непрерывна на $[0;+\infty)$, а функция $g(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0;+\infty)$ и $F(p)\risingdotseq f(t)$, $G(p)\risingdotseq g(t)$. Тогда имеет место соответствие

$$pF(p)G(p)\risingdotseq g(0)f(t)+\int_0^t f(\tau)g'(t-\tau)\,d\tau. \qquad (6.9)$$

Доказательство. По теореме о свертке имеем

$$F(p)G(p) \doteq \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau .$$

Отсюда из теоремы о дифференцировании оригинала вытекает формула (6.9).

6.5. ОПЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО НЕОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Методы операционного исчисления удобно применять при решении некоторых дифференциальных уравнений.

Пусть задано дифференциальное уравнение порядка n с постоянными коэффициентами

$$a_0 x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n x(t) = f(t), \qquad (6.10)$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – действительные числа.

Задача Коши для уравнения (6.10) состоит в том, что требуется найти решение $x(t)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

$$x(0) = x_0, x'(0) = x'_0, \ldots, \; x_0^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)} \; . \qquad (6.11)$$

Предполагается, что правая часть $f(t)$ и искомая функция $x(t)$ являются функциями-оригиналами. Пусть $x(t) \doteq X(p)$ и $f(t) \doteq F(p)$. Применяя формулу дифференцирования оригинала (5.10) и свойство линейности преобразования Лапласа, получаем, что дифференциальному уравнению (6.10), связывающему оригиналы $x(t)$ и $f(t)$, соответствует более простое алгебраическое уравнение. Его называют операторным уравнением.

$$a_0\left(p\,X(p)-p^{n-1}x_0-\ldots-x_0^{(n-1)}\right)+a_1\left(p^{n-1}\,X(p)-p^{n-2}x_0-\ldots-x_0^{(n-2)}\right)+$$
$$+\ldots+a_nX(p)=F(p). \qquad (6.12)$$

В операторном уравнении (6.12) уже учтены начальные условия (6.11). Преобразуя уравнение (6.12), имеем

$$X(p)\left(a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n\right)=F(p)+G(p),$$

где $G(p)=a_0x_0p^{n-1}+\left(a_0x_0'+a_1x_0\right)p^{n-2}+\ldots$.

Обозначим множитель при $X(p)$ через $\Psi(p)$:

$$\Psi(p)=a_0p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n.$$

Этот многочлен называется **характеристическим**.

Тогда уравнение (6.12) примет вид

$$X(p)\Psi(p)=F(p)+G(p). \qquad (6.13)$$

Решим операторное уравнение (6.13) относительно $X(p)$:

$$X(p)=\frac{F(p)+G(p)}{\Psi(p)}.$$

Затем, найдя оригинал для $X(p)$, получим искомое решение уравнения (6.10).

Допустим, что $G(p)\equiv 0$, то есть все начальные данные (6.11) являются нулевыми. Правую часть $f(t)$ в уравнении (6.10) можно истолковать как **входной сигнал** (или ток, или напряжение) для некоторой физической системы, описываемой уравнением (6.10); тогда $F(p)$ – изображение сигнала (или операторный сигнал). Решение $x(t)$ есть реакция (или отклик) системы на входной сигнал $f(t)$; $X(p)$ – изображение отклика (или операторный отклик). В этой интерпретации можно сказать, что операторный отклик получается умножением операторного сигнала на выражение $W(p)=\dfrac{1}{\Psi(p)}$, называемое **передаточной функцией** системы.

После того как найдено решение $X(p)$ операторного уравнения, остается перейти к оригиналу $x(t)$ – решению поставленной задачи.

Итак, решение задачи Коши (6.10), (6.11) определяется по следующему алгоритму:

1. Перейти от исходного уравнения к операторному уравнению с помощью таблицы оригиналов и изображений и свойств преобразования Лапласа.
2. Решить операторное уравнение, то есть найти изображение искомого решения.
3. Применить обратное преобразование Лапласа: найти оригинал для полученного в пункте 2 изображения.

Пример 6.13. Решить операционным методом задачу Коши:
$y''+y=t^3+6t,\ y(0)=0,\ y'(0)=0$.

► Пусть $y(t)\fallingdotseq Y(p)$, тогда, используя теорему о дифференцировании оригинала, получим
$y''\fallingdotseq p^2Y(p)-p\,y(0)-y'(0)=p^2Y(p)$. Находим изображение правой части $t^3\fallingdotseq\dfrac{3!}{p^4},\ 6t\fallingdotseq\dfrac{6}{p^2}$.

Подставляя эти выражения в исходное дифференциальное уравнение, получаем операторное уравнение

$$p^2Y(p)+Y(p)=\frac{6}{p^4}+\frac{6}{p^2}.$$

Отсюда находим изображение решения $Y(p)=\dfrac{6}{p^4}$, а затем с помощью таблицы 1 искомую функцию $y(t)=t^3$. ◄

Пример 6.14. Система автоматического регулирования описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2x_{\text{вых}}}{dt^2}+3\frac{dx_{\text{вых}}}{dt}=e^t$$

с начальными условиями: $x_{\text{вых}}(0)=x'_{\text{вых}}(0)=0$.

Определить: а) передаточную функцию $W(p)=\dfrac{F_{\text{вых}}(p)}{F_{\text{вх}}(p)}$;

б) кривую разгона $x_{\text{вых}}(t)$.

► Пусть $x_{\text{вых}}(t)\risingdotseq F_{\text{вых}}(p)$, тогда с учетом начального условия, формулы (5.10) имеем

$$\frac{dx_{\text{вых}}}{dt}\risingdotseq pF_{\text{вых}}(p),\ \frac{d^2x_{\text{вых}}}{dt^2}\risingdotseq p^2F_{\text{вых}}(p).$$

Найдем изображение входного сигнала с помощью таблицы 1: $e^t\risingdotseq\dfrac{1}{p-1}$. Подставляя эти выражения в дифференциальное уравнение, получим операторное уравнение

$$p^2F_{\text{вых}}(p)+3pF_{\text{вых}}(p)=\frac{1}{p-1}.$$

Отсюда находим изображение по Лапласу выходного сигнала

$$F_{\text{вых}}(p)=\frac{1}{p(p+3)(p-1)}.$$

Поскольку $F_{\text{вх}}(p)=\dfrac{1}{p-1}$, поэтому передаточная функция примет вид

$$W(p)=\frac{1}{p(p+3)(p-1)}:\frac{1}{(p-1)}=\frac{1}{p(p+3)}.$$

Найдем оригинал $x_{\text{вых}}(t)$, зная изображение $F_{\text{вых}}(p)$; для этого разложим его на элементарные дроби:

$$F_{\text{вых}}(p)=\frac{1}{p(p+3)(p-1)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+3}+\frac{C}{p-1}.$$

Неизвестные коэффициенты A,B,C определим из тождества

$$1=A(p+3)(p-1)+Bp(p-1)+Cp(p+3).$$

Подставляя в тождество последовательно корни знаменателя дроби $F_{\text{вых}}(p)$ $p=0,\ p=-3,\ p=1$, находим $A=-\frac{1}{3},\ B=\frac{1}{12}$, $C=\frac{1}{4}$. Таким образом, имеем

$$F_{\text{вых}}(p)=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{p+3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p-1}.$$

Используя формулы (1), (4) из таблицы 1, находим кривую разгона

$$x_{\text{вых}}(t)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{12}e^{-3t}+\frac{1}{4}e^{t}.$$ ◄

Во многих практических задачах правая часть дифференциальных уравнений задается графически. В этом случае используется алгоритм решения уравнения, описанный выше.

Пример 6.15. Найти решение дифференциального уравнения $x''+x=f(t)$ при нулевых начальных условиях $x(0)=x'(0)=0$, где $f(t)$ – функция, изображенная на рис. 31.

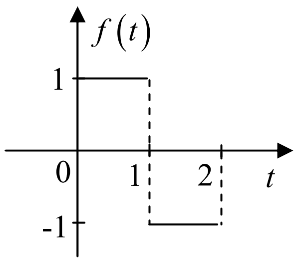


Рис. 31

► Запишем $f(t)$ с помощью единичной функции Хевисайда $f(t)=I(t)-2\big(I(t-1)+I(t-2)\big)$.

Пользуясь теоремой запаздывания, находим

$$f(t) \fallingdotseq F(p) = \frac{1}{p} - \frac{2}{p} e^{-p} + \frac{1}{p} e^{-2p}.$$

Так как начальные условия нулевые, то, полагая $x(t) \fallingdotseq X(p)$, $x''(t) \fallingdotseq p^2 X(p)$, приходим к операторному уравнению

$$\left(p^2+1\right) X(p) = \frac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p}.$$

Отсюда находим

$$X(p) = \frac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p\left(p^2+1\right)}.$$

Преобразуем $X(p)$; для этого разложим дробь на сумму элементарных дробей:

$$\frac{1}{p\left(p^2+1\right)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp+C}{p^2+1}.$$

Имеем тождество

$$1 = A\left(p^2+1\right) + Bp^2 + Cp,$$

из которого, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, находим

$$\begin{array}{c|l} p^2 & A+B=0, \\ p & C=0, \\ p^0 & A=1, \quad B=-1. \end{array}$$

Таким образом,

$$\frac{1}{p\left(p^2+1\right)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1} \quad \text{и}$$

$$X(p) = \frac{1}{p} - \frac{2e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p} - \frac{p}{p^2+1} + \frac{2pe^{-p}}{p^2+1} - \frac{pe^{-2p}}{p^2+1}.$$

Так как $\dfrac{1}{p} \risingdotseq I(p)$, $\dfrac{p}{p^2+1} \risingdotseq \cos t$, то снова применяя теорему запаздывания, получаем

$$x(t) = 1 - 2I(t-1) + I(t-2) - \cos t + 2\cos\cdot I(t-1) - I(t-2)\cos t =$$
$$= 2\left(\sin^2\frac{t}{2} - 2I(t-1)\sin^2\frac{t-1}{2} + I(t-2)\sin^2\frac{t-2}{2}\right). \qquad ◄$$

6.6. ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ ДЮАМЕЛЯ

Выше была определена формула Дюамеля (6.9). Эта формула играет особую роль при решении линейных дифференциальных уравнений (6.10) с нулевыми начальными условиями.

Пусть требуется решить дифференциальное уравнение (6.10) при нулевых начальных условиях

$$x(0) = x'(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0\,. \qquad (6.14)$$

Воспользуемся формулой Дюамеля. Для этого рассмотрим также неоднородное уравнение, левая часть которого совпадает с исходным уравнением (6.10), а правая часть $I(t)$ – единичная функция Хевисайда:

$$a_0 v^{(n)}(t) + a_1 v^{(n-1)}(t) + a_2 v^{(n-2)}(t) + \ldots + a_n v(t) = I(t) \qquad (6.15)$$

с нулевыми начальными условиями $v(0) = v'(0) = \ldots = v^{(n-1)}(0) = 0$.

Обозначим через $v(t)$ решение последнего уравнения. Применяя преобразование Лапласа к уравнению (6.15), получаем операторное уравнение

$$V(p)\Psi(p) = \frac{1}{p}, \qquad (6.16)$$

где $\Psi(p)$ – характеристический многочлен.

Отсюда имеем

$$\Psi(p) = \frac{1}{pV(p)}. \tag{6.17}$$

Теперь будем определять решение уравнения (6.10) с начальными условиями (6.14). В этом случае в уравнении (6.13) $G(p) \equiv 0$, поэтому из (6.13) и (6.17) получаем

$$X(p) = \frac{F(p)}{\Psi(p)} = pV(p)F(p),$$

то есть левую часть формулы Дюамеля (6.9).

Следовательно,

$$pV(p)F(p) \fallingdotseq f(t)v(0) + \int_0^t f(\tau)v'(t-\tau)d\tau.$$

Учитывая, что $v(0) = 0$, получаем

$$X(p) = pV(p)F(p) \fallingdotseq \int_0^t f(\tau)v'(t-\tau)d\tau.$$

Отсюда решение $x(t)$ уравнения (6.10) при нулевых начальных условиях (6.14) будет иметь вид

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)v'(t-\tau)d\tau, \tag{6.18}$$

где $v(t)$ – решение задачи (6.13), (6.14).

Формула (6.18) позволяет получить решение уравнения (6.10) при любой правой части, зная решение уравнения (6.15), то есть по формуле Дюамеля можно найти реакцию системы на любой сигнал, если известна ее реакция на единичный скачок.

<u>Пример 6.16.</u> Используя формулу Дюамеля, решить уравнение при заданных начальных условиях

$$x''(t) - x(t) = \frac{1}{1+e^t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

► Рассмотрим вспомогательную задачу

$$v''(t) - v(t) = 1, \quad v(0) = v'(0) = 0.$$

Поскольку $v(t) \risingdotseq V(p)$, $v'(t) \risingdotseq pV(p)$, $v''(t) \risingdotseq p^2V(p)$, $1 \risingdotseq \dfrac{1}{p}$,

то операторное уравнение для этой задачи принимает вид:

$$p^2V(p) - V(p) = \frac{1}{p}.$$

Отсюда $V(p) = \dfrac{1}{p\left(p^2-1\right)}$. Определим оригинал $v(t)$ по изображению $V(p)$. По таблице 1 получаем $\dfrac{1}{p^2-1} \risingdotseq \operatorname{sh} t$. С помощью теоремы об интегрировании оригинала находим

$$\frac{1}{p\left(p^2-1\right)} \risingdotseq \int_0^t \operatorname{sh}\tau d\tau = \operatorname{ch}\tau \Big|_0^t = \operatorname{ch} t - 1.$$

Таким образом, имеем

$$v(t) = \operatorname{ch} t - 1, \; v'(t) = \operatorname{sh} t.$$

Оригинал $x(t)$ будем определять по формуле Дюамеля при $f(t) = \dfrac{1}{1+e^t}$:

$$x(t) = \int_0^t \frac{1}{1+e^\tau} \operatorname{sh}(t-\tau) d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \frac{e^{t-\tau} - e^{-(t-\tau)}}{1+e^\tau} d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}e^t \int_0^t \frac{e^{-\tau}d\tau}{1+e^\tau} - \frac{1}{2}e^{-t}\int_0^t \frac{e^\tau d\tau}{1+e^\tau}.$$

Вычислим первый интеграл J_1:

$$J_1 = \frac{1}{2}e^t \int_0^t \frac{e^{-\tau}d\tau}{1+e^\tau} = \left| \begin{array}{ll} 1+e^\tau = z; & \tau = \ln(z-1); \\ e^\tau = z-1; & d\tau = \dfrac{dz}{z-1}; \\ e^{-\tau} = \dfrac{1}{z-1}; & z_{\text{н}} = 2 \quad z_{\text{в}} = 1+e^t. \end{array} \right| = \frac{1}{2}e^t \int_2^{1+e^t} \frac{dz}{z(z-1)^2}.$$

Подынтегральную функцию разложим на элементарные дроби:

$$\frac{1}{z(z-1)^2}=\frac{A}{z}+\frac{B}{(z-1)^2}+\frac{C}{z-1}.$$

Подставляя в тождество $1=A(z-1)^2+Bz+Cz(z-1)$ последовательно корни знаменателя: $z_1=0, z_2=1$, находим $A=1,\ B=1$.

Приравняем коэффициенты в левой и правой части тождества при z. Имеем уравнение $0=-2A+B-C$. Отсюда имеем $C=-1$.

Таким образом, получаем

$$J_1=\frac{1}{2}e^t\int_0^{1+e^t}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{z-1}\right)dz=\frac{e^t}{2}\left(\ln|z|-\frac{1}{z-1}-\ln|z-1|\right)\Bigg|_2^{1+e^t}=$$

$$=\frac{e^t}{2}\left(\ln\left(1+e^t\right)-t-\frac{1}{e^t}-\ln 2+1\right).$$

Далее вычислим второй интеграл:

$$J_2=\frac{1}{2}e^{-t}\int_0^t\frac{e^\tau d\tau}{1+e^\tau}=\left|d\left(1+e^\tau\right)=e^\tau d\tau\right|=\frac{1}{2}e^{-t}\int_2^t\frac{d\left(1+e^\tau\right)}{1+e^\tau}=$$

$$=\frac{1}{2}e^{-t}\ln\left(1+e^\tau\right)\Big|_0^t=\frac{1}{2}e^{-t}\left(\ln\left(1+e^t\right)-\ln 2\right).$$

Объединяя результаты $x(t)=J_1-J_2$, находим

$$x(t)=\frac{1}{2}\left(e^t-te^t-1\right)+\operatorname{sh}t\cdot\ln\frac{1+e^t}{2}.$$ ◄

6.7. ОПЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Решение системы линейных дифференциальных уравнения с постоянными коэффициентами операционным методом производится по той же схеме, что и решение одного дифференциального уравнения порядка n. Отличие состоит лишь в том, что вместо одного операторного уравнения мы получим систему уравнений, линейных относительно изображений искомых функций.

Пример 6.17. Операционным методом найти решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + y = 1, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + x = 0 \end{cases}$$

при нулевых начальных условиях $x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = 0$.

► Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$, $y(t) \risingdotseq Y(p)$, тогда с учетом начальных условий имеем $x'(t) \risingdotseq pX(p)$, $y''(t) \risingdotseq p^2Y(p)$. Получим систему операторных уравнений примет вид

$$\begin{cases} p^2X(p) + Y(p) = \dfrac{1}{p}, \\ p^2Y(p) + X(p) = 0. \end{cases}$$

Решим систему уравнений по правилу Крамера. Имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} p^2 & 1 \\ 1 & p^2 \end{vmatrix} = p^4 - 1, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{p} & 1 \\ 0 & p^2 \end{vmatrix} = p, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} p^2 & \dfrac{1}{p} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{p}.$$

Поэтому

$$X(p)=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{p}{p^4-1}=\frac{p}{(p-1)(p+1)\left(p^2+1\right)},$$

$$Y(p)=\frac{\Delta y}{\Delta}=-\frac{1}{p(p-1)(p+1)\left(p^2+1\right)}.$$

Восстановим оригинал по изображению. Для этого разложим $X(p)$ на сумму элементарных дробей:

$$X(p)=\frac{A}{p-1}+\frac{B}{p+1}+\frac{Cp+D}{p^2+1}=\frac{p}{(p-1)(p+1)\left(p^2+1\right)}.$$

Неизвестные коэффициенты A, B, C, D находим из тождества

$$p=A(p+1)\left(p^2+1\right)+B(p-1)\left(p^2+1\right)+(Cp+D)(p-1)(p+1).$$

Подставляя нули знаменателя $p=1,\ p=-1$, получим $A=\frac{1}{4},\ B=\frac{1}{4}$.

Далее, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях p в левой и правой частях тождества, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} A+B+C=0, \\ A-B-D=0. \end{cases}$$

Откуда находим $C=-\frac{1}{2},\ D=0$. Таким образом,

$$X(p)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p-1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+1}.$$

Аналогично определяем

$$Y(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p^2+1}.$$

С помощью таблицы 1 оригиналов и изображений находим решение системы

$$x(t)=\frac{1}{4}e^t+\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos t,\qquad y(t)=1-\frac{1}{4}e^t-\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos t. \blacktriangleleft$$

6.8. ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Интегральное уравнение Вольтера второго рода

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x k(x-t)\cdot\varphi(t)\,dt, \qquad (6.19)$$

ядро $k(x-t)$ которого зависит от разности $x-t$, называется интегральным уравнением типа свертки. Если $f(x)$ и $k(x)$ – заданные функции, являющиеся оригиналами, то искомая функция $\varphi(x)$ будет удовлетворять условиям оригинала. Следовательно, может быть найдено изображение по Лапласу функций $f(x)$, $k(x)$ и $\varphi(x)$.

Пусть $f(x) \fallingdotseq F(p)$, $\varphi(x) \fallingdotseq \Phi(p)$, $k(x) \fallingdotseq K(p)$. Применяя к обеим частям уравнения (6.19) преобразование Лапласа и используя теорему свертывания (6.7), получаем

$$\Phi(p) = F(p) + K(p)\cdot\Phi(p).$$

Отсюда находим изображение решения $\Phi(p) = \dfrac{F(p)}{1-K(p)}$ $\left(K(p) \neq 1\right)$. Оригинал $\varphi(x)$ для $\Phi(p)$ будет решением интегрального уравнения (6.19).

<u>Пример 6.18.</u> Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \sin x + 2\int_0^x \cos(x-t)\cdot\varphi(t)\,dt.$$

► Пусть $\varphi(x) \fallingdotseq \Phi(p)$. Применяя преобразование Лапласа к обеим частям уравнения и учитывая, что $\sin x \fallingdotseq \dfrac{1}{p^2+1}$; $\cos x \fallingdotseq \dfrac{p}{p^2+1}$;

$$\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\,dt = \cos t * \varphi(t) \risingdotseq \frac{p}{p^2+1}\cdot\Phi(p),$$ получим

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2+1} + \frac{2p}{p^2+1}\cdot\Phi(p).$$

Отсюда находим

$$\Phi(p)\cdot\left(1-\frac{2p}{p^2+1}\right) = \frac{1}{p^2+1},$$

или

$$\Phi(p) = \frac{1}{(p-1)^2}.$$

С помощью таблицы 1 получаем решение данного интегрального уравнения $\varphi(x) = x\cdot e^x$. ◄

Преобразование Лапласа может быть использовано при решении систем интегральных уравнений Вольтера вида

$$\varphi_i(x) = f_i(x) + \sum_{j=1}^{s}\int_0^x k_{ij}(x-t)\varphi_j(t)\,dt, \quad j = 1,2,...,s, \tag{6.20}$$

где $k_{ij}(x), f_i(x)$ – известные непрерывные функции, имеющие изображение по Лапласу.

Применив к обеим частям равенства (6.20) преобразование Лапласа, получим

$$\Phi_i(p) = F_i(p) + \sum_{j=1}^{s} K_{ij}(p)\cdot\Phi_j(p) \quad (i = 1,2,...,s).$$

Это система линейных алгебраических уравнений относительно $\Phi_i(p)$. Решая ее, найдем $\Phi_i(p)$, оригиналы для которых будут решениями исходной системы интегральных уравнений (6.20).

Пример 6.19. Решить систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = 1 - 2\int\limits_0^x e^{2(x-t)}\varphi_1(t)dt + \int\limits_0^x \varphi_2(t)dt, \\ \varphi_2(x) = 4x - \int\limits_0^x \varphi_1(t)dt + 4\int\limits_0^x (x-t)\varphi_2(t)dt. \end{cases}$$

► Переходя к изображениям и используя теорему о свертке (6.7), получим

$$\begin{cases} \Phi_1(p) = \dfrac{1}{p} - \dfrac{2}{p-2}\Phi_1(p) + \dfrac{1}{p}\Phi_2(p), \\ \Phi_2(p) = \dfrac{4}{p^2} - \dfrac{1}{p}\Phi_1(p) + \dfrac{4}{p^2}\Phi_2(p). \end{cases}$$

Решая полученную систему относительно $\Phi_1(p), \Phi_2(p)$, найдем

$$\Phi_1(p) = \frac{p}{(p+1)^2} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2};$$

$$\Phi_2(p) = \frac{3p+2}{(p-2)(p+1)^2} = \frac{8}{9}\cdot\frac{1}{p-2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(p+1)^2} - \frac{8}{9}\cdot\frac{1}{p+1}.$$

Оригиналы для $\Phi_1(p)$ и $\Phi_2(p)$ равны соответственно:

$$\varphi_1(x) = e^{-x} - xe^{-x},$$

$$\varphi_2(x) = \frac{8}{9}e^{2x} + \frac{1}{3}xe^{-x} - \frac{8}{9}e^{-x}.$$

Функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ дают решение исходной системы интегральных уравнений. ◄

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

I . ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Задача 1. Найти сумму, разность, произведение и частное двух комплексных чисел z_1 и z_2. Изобразить $z_1, z_2, z_1+z_2, -z_1, \overline{z}_2$ на комплексной плоскости.

1.1. $z_1 = 2-3i,\ z_2 = 4-2i$.

1.2. $z_1 = -3+2i,\ z_2 = 3-5i$.

1.3. $z_1 = -5+2i,\ z_2 = 1-2i$.

1.4. $z_1 = -8+5i,\ z_2 = -1+3i$.

1.5. $z_1 = 2+i,\ z_2 = 1-3i$.

1.6. $z_1 = -2+i,\ z_2 = 5-2i$.

1.7. $z_1 = 2+3i,\ z_2 = 1-5i$.

1.8. $z_1 = -2+3i,\ z_2 = 3-2i$.

1.9. $z_1 = 3+i,\ z_2 = 2+5i$.

1.10. $z_1 = -3+i,\ z_2 = -2+5i$.

1.11. $z_1 = 1-2i,\ z_2 = 5-i$.

1.12. $z_1 = 2-i,\ z_2 = 4+3i$.

1.13. $z_1 = -2-3i,\ z_2 = -3+2i$.

1.14. $z_1 = 3-i,\ z_2 = 2-5i$.

1.15. $z_1 = -3-i,\ z_2 = -2+3i$.

1.16. $z_1 = 3+2i,\ z_2 = -2-5i$.

1.17. $z_1 = -3+2i,\ z_2 = 1-3i$.

1.18. $z_1 = -3+4i,\ z_2 = 2-3i$.

1.19. $z_1 = 4-3i,\ z_2 = 3-5i$.

1.20. $z_1 = -4+3i,\ z_2 = -3+5i$.

1.21. $z_1 = -4+3i,\ z_2 = 3+5i$.

1.22. $z_1 = 3+5i,\ z_2 = 4-3i$.

1.23. $z_1 = 3-4i,\ z_2 = -2+3i$.

1.24. $z_1 = 5-i,\ z_2 = 2+3i$.

1.25. $z_1 = 1-2i,\ z_2 = -1+i$.

1.26. $z_1 = 3-2i,\ z_2 = -2+4i$.

1.27. $z_1 = 3+4i,\ z_2 = 3-2i$.

1.28. $z_1 = -4+3i,\ z_2 = 3+5i$.

1.29. $z_1 = 2+3i,\ z_2 = -3-4i$.

1.30. $z_1 = 3-2i,\ z_2 = 5+i$.

Задача 2. Представить в тригонометрической и показательной формах комплексные числа z_1, z_2. Вычислить:

а) $z_1 \cdot z_2$, б) $\dfrac{z_1}{z_2}$, в) z_1^4.

2.1. $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i$;

$z_2 = i^6 + i^{105} + \dfrac{1}{i} - \dfrac{1}{i^{17}}$.

2.2. $z_1 = \left(1 + i\sqrt{3}\right)/4$;

$z_2 = i^{37} + i^{36} - \dfrac{1}{i^5} - i^{117}$.

2.3. $z_1 = -2\sqrt{3} + 2i$;

$z_2 = i^{19} + i^{95} - \dfrac{1}{i^3} + \dfrac{1}{i^{15}}$.

2.4. $z_1 = (1 - i)/2$;

$z_2 = \dfrac{1}{i^{13}} + \dfrac{1}{i^{23}} + \dfrac{1}{i^{33}} + i^{106}$.

2.5. $z_1 = -8 + \dfrac{8}{i}$;

$z_2 = i + i^{11} + i^{21} + i^{31} + \dfrac{1}{i^{41}}$.

2.6. $z_1 = \dfrac{2 + 2i}{i}$;

$z_2 = \dfrac{1}{i^{19}} + i^{39} - \dfrac{1}{i^{49}} + i^{56}$.

2.7. $z_1 = -1 + i$;

$z_2 = (-i)^{19} + \dfrac{1}{i^{17}} + \dfrac{1}{i^{36}} - i^{29}$.

2.8. $z_1 = 2 - 2\sqrt{3}i$;

$z_2 = (-i)^8 + \dfrac{1}{i^8} - \dfrac{1}{i^{105}} - i^{95}$.

2.9. $z_1 = 1/(1 + i)$;

$z_2 = i^{47} + \dfrac{1}{i^{22}} - (-i)^{13} + i^{48}$.

2.10. $z_1 = \sqrt{3} + 3i$;

$z_2 = i^7 + (-i)^9 + \dfrac{1}{(-i)^5} + i^{87}$.

2.11. $z_1 = -1 - \sqrt{3}i$;

$z_2 = i^{16} + \dfrac{1}{(-i)^{19}} + i^{38} - \dfrac{1}{i^{16}}$.

2.12. $z_1 = -2 + 2\sqrt{3}i$;

$z_2 = (-i)^5 + (-i)^{12} + \dfrac{1}{i^{49}} - \dfrac{1}{i^{86}}$.

2.13. $z_1 = 4\sqrt{3} - 4i$;

$z_2 = \dfrac{1}{(-i)^3} + \dfrac{1}{(-i)^{13}} + \dfrac{1}{(-i)^{23}} + i^{48}$.

2.14. $z_1 = \left(2 + 2\sqrt{3}i\right)/3$;

$z_2 = (-i)^{23} + i^{47} - \dfrac{1}{i^{48}} - \dfrac{1}{(-i)^{49}}$.

$z_1 = 1/(1-i);$

$z_2 = (-i)^{25} + i^{43} + \dfrac{1}{(-i)^{15}} + i^{28}.$

$z_1 = 2\sqrt{3} + 2i;$

$z_2 = \dfrac{1}{(-i)^{17}} + i^{39} - \dfrac{1}{i^{16}} + (-i)^{49}.$

$z_1 = -1 + \sqrt{3}i;$

$z_2 = i^{25} + \dfrac{1}{(-i)^{107}} + \dfrac{1}{i^{217}} - (-i)^{316}.$

$z_1 = (-1+i)/i;$

$z_2 = i^{36} + \dfrac{1}{(-i)^{37}} + i^{115} + \dfrac{1}{i^{17}}.$

$z_1 = \dfrac{-3+3i}{2};$

$z_2 = (-i)^{36} + i^{213} - \dfrac{1}{i^{15}} + \dfrac{1}{(-i)^{39}}.$

$z_1 = \dfrac{1-i}{i};$

$z_2 = (-i)^{32} + \dfrac{1}{(-i)^{15}} + i^{41} - i^{213}.$

$z_1 = 5 - 5\sqrt{3}i;$

$z_2 = \dfrac{1}{i^{48}} - \dfrac{1}{(-i)^{19}} - i^{83} + i^{26}.$

$z_1 = 4\sqrt{3} + 4i;$

$z_2 = \dfrac{1}{(-i)^{31}} + i^{39} - i^{62} + \dfrac{1}{(-i)^{22}}.$

$z_1 = -6 + \dfrac{6}{i};$

$z_2 = \dfrac{1}{i^{24}} - \dfrac{1}{(-i)^{47}} + i^{34} - (-i)^{43}.$

$z_1 = \dfrac{4}{-1+i};$

$z_2 = i^{17} + (-i)^{33} - \dfrac{1}{(-i)^{41}} - i^{49}.$

$z_1 = -3 + 3i;$

$z_2 = \dfrac{1}{(-i)^{32}} + \dfrac{1}{(-i)^{35}} + i^{47} + i^{26}.$

$z_1 = 2 - 2/i;$

$z_2 = i^{83} - (i)^{15} + \dfrac{1}{i^{13}} - i^{28}.$

$z_1 = 1/(-2+2i);$

$z_2 = \dfrac{1}{(-i)^{19}} - i^{18} + \dfrac{1}{i^{12}} - i^{32}.$

$z_1 = -i + 1;$

$z_2 = i^{96} - \dfrac{1}{i^{101}} + i^{37} + i^{19}.$

$z_1 = \dfrac{2-2\sqrt{3}i}{3};$

$z_2 = \dfrac{1}{(i)^{105}} + i^{202} + \dfrac{1}{i^{16}} - i^{38}.$

$z_1 = \dfrac{-1+i}{4};$

$z_2 = \dfrac{1}{i^{18}} - i^{37} + i^{16} - i^{86}.$

Задача 3. Найти действительную и мнимую части комплексного числа z.

3.1. $z=(1-i)^{20}$;

3.2. $z=\left(2\sqrt{3}-2i\right)^{16}$;

3.3. $z=\dfrac{1}{(1+i)^{7}}$;

3.4. $z=\left(-\sqrt{3}+3i\right)^{7}$;

3.5. $z=(-4-4i)^{15}$;

3.6. $z=\dfrac{1}{(-3+3i)^{6}}$;

3.7. $z=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)^{5}$;

3.8. $z=\dfrac{1}{(-4-4i)^{5}}$;

3.9. $z=\left(-4\sqrt{3}-4i\right)^{17}$;

3.10. $z=\left(\dfrac{1}{-\sqrt{3}+i}\right)^{10}$;

3.11. $z=(-3+3i)^{14}$;

3.12. $z=\dfrac{1}{(-5+5i)^{7}}$;

3.13. $z=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)^{10}$;

3.14. $z=\left(\dfrac{-1}{1-i}\right)^{8}$;

3.15. $z=\dfrac{1}{(7-7i)^{12}}$;

3.16. $z=(-5+5i)^{7}$;

3.17. $z=\dfrac{1}{(1+i)^{6}}$;

3.18. $z=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)^{7}$;

3.19. $z=\left(3-\sqrt{3}i\right)^{7}$;

3.20. $z=\dfrac{1}{\left(\sqrt{3}-i\right)^{16}}$;

3.21. $z=\left(-6\sqrt{3}+6\sqrt{3}i\right)^{18}$;

3.22. $z=\dfrac{1}{\left(-2+2\sqrt{3}i\right)^{12}}$;

3.23. $z=\left(\sqrt{3}+3i\right)^5$;

3.24. $z=\dfrac{1}{\left(-1/2-\sqrt{3}\cdot i/2\right)^{13}}$;

3.25. $z=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)^6$;

3.26. $z=\dfrac{1}{\left(-3+3i\right)^{14}}$;

3.27. $z=\dfrac{1}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}i\right)^6}$;

3.28. $z=\left(4-4i\right)^{12}$;

3.29. $z=\left(-2\sqrt{3}+2i\right)^7$;

3.30. $z=\left(3\sqrt{3}+3\sqrt{3}i\right)^{19}$.

Задача 4. Найти все корни уравнений:

4.1. а) $z^2+2z+5=0$;
б) $z^4+16=0$;
в) $z=\sqrt{-5-12i}$.

4.2. а) $z^2-2z+5=0$;
б) $z^5+32=0$;
в) $z=\sqrt{24+10i}$.

4.3. а) $z^2+z+0,5=0$;
б) $z^6+1=0$;
в) $z=\sqrt{21-20i}$.

4.4. а) $z^2+4z+8=0$;
б) $z^6+64=0$;
в) $z=\sqrt{-24+10i}$.

4.5. а) $z^2+2z+2=0$;
б) $z^4+81=0$;
в) $z=\sqrt{7+24i}$.

4.6. а) $5z^2+z+0,5=0$;
б) $16z^4+1=0$;
в) $z=\sqrt{-8+6i}$.

4.7. а) $z^2-z+0,5=0$;
б) $z^5+243=0$;
в) $z=\sqrt{-21-20i}$.

4.8. а) $z^2+iz+2=0$;
б) $32z^5+1=0$;
в) $z=\sqrt{-16+30i}$.

4.9. а) $2z^2-iz+1=0$;
б) $z^6+1-i=0$;
в) $z=\sqrt{8+6i}$.

4.10. а) $z^2+2iz+3=0$;
б) $16z^4+81=0$;
в) $z=\sqrt{9+40i}$.

4.11. а) $3z^2-2iz+1=0$;

б) $z^2+2iz+i-1=0$;

в) $z=\sqrt{8+6i}$.

4.12. а) $z^2+3z-6,25=0$;

б) $32z^5-243=0$;

в) $z=\sqrt{16+30i}$.

4.13. а) $0,5z^2+(1+i)z+1=0$;

б) $z^4-16=0$;

в) $z=\sqrt{-12+16i}$.

4.14. а) $iz^2+2z+1=0$;

б) $z^5-32=0$;

в) $z=\sqrt{-15+8i}$.

4.15. а) $z^2+(2i-3)z+5-i=0$;

б) $z^3+27=0$;

в) $z=\sqrt{9-40i}$.

4.16. а) $z^2-2z+5=0$;

б) $z^3+64=0$;

в) $z=\sqrt{-21+20i}$.

4.17. а) $z^2+2iz-5=0$;

б) $z^4-81=0$;

в) $z=\sqrt{7-24i}$.

4.18. а) $z^2-2iz+3=0$;

б) $81z^4+1=0$;

в) $z=\sqrt{16-30i}$.

4.19. а) $z^2+(5-2i)z+5(1-i)=0$;

б) $243z^5+1=0$;

в) $z=\sqrt{3+4i}$.

4.20. а) $iz^2+(3-5i)z-7,5=0$;

б) $z^5+32=0$;

в) $z=\sqrt{12-16i}$.

4.21. а) $z^2+4iz+5=0$;

б) $z^6-64=0$;

в) $z=\sqrt{-9+40i}$.

4.22. а) $-iz^2+2z+5i=0$;

б) $27z^3+8=0$;

в) $z=\sqrt{9-30i}$.

4.23. а) $z^2+2z+2=0$;

б) $z^3-i=0$;

в) $z=\sqrt{12+16i}$.

4.24. а) $z^2+2z+10=0$;

б) $z^4+i=0$;

в) $z=\sqrt{-3+4i}$.

4.25. а) $z^2-2z+2=0$;

б) $z^3+1/8=0$;

в) $z=\sqrt{-5+12i}$.

4.26. а) $z^2+(2-i)z+(3-i)=0$;

б) $z^3-i/27=0$;

в) $z=\sqrt{3+4i}$.

4.27. а) $z^2+4z+13=0$;

б) $z^3+8i=0$;

в) $z=\sqrt{-7+24i}$.

4.28. а) $iz^2+(2-3i)z-(3+i)=0$;

б) $z^3-27i=0$;

в) $z=\sqrt{3-4i}$.

4.29. а) $5z^2+2z+1=0$;
б) $z^5+1+\sqrt{3}i=0$;
в) $z=\sqrt{15+8i}$.

4.30. а) $z^2+4z+13=0$;
б) $z^3-i/8=0$;
в) $z=\sqrt{8-6i}$.

Задача 5. Найти действительные значения x и y из уравнения:

5.1. $(5+2i)x+(6-5i)y=-2+14i$;
5.2. $(5-2i)x-(7-3i)y=5-3i$;
5.3. $(4+8i)x+(7+5i)y=3-3i$;
5.4. $(5-8i)x+(7+3i)y=2-i$;
5.5. $(2+3i)x-(5-4i)y=-1+10i$;
5.6. $(7-2i)x-(5+2i)y=3-4i$;
5.7. $(15-18i)x+(5+3i)y=20-15i$;
5.8. $(14-5i)x+(2+9i)y=13-3i$;
5.9. $(7-8i)x-(15+7i)y=31+17i$;
5.10. $(5+13i)x-(7-13i)y=23-13i$;
5.11. $(5-13i)x-(7+13i)y=17-13i$;
5.12. $(5+18i)x-(14-5i)y=-11+13i$;
5.13. $(5-18i)x-(14+5i)y=-10-5i$;
5.14. $(12-4i)x+(3+3i)y=15-i$;
5.15. $(1+8i)x-(17+4i)y=-19-20i$;
5.16. $(9-8i)x-(17+13i)y=-8+5i$;
5.17. $(13-18i)x+(14+5i)y=-12+8i$;
5.18. $(5-5i)x+(7+7i)y=2+12i$;
5.19. $(10+7i)x-(11+3i)y=-12+i$;
5.20. $(7-8i)x+(3+4i)y=-2-20i$;
5.21. $(5+3i)x+(2-i)y=7+2i$;
5.22. $(7-3i)x+(3+2i)y=10-i$;
5.23. $(3-i)x-(2+3i)y=-1-7i$;
5.24. $(5+2i)x+(3-2i)y=11-2i$;

5.25. $(3-2i)x+(5-4i)y=1-8i$;
5.26. $(2+i)x-(3+2i)y=-1-3i$;
5.27. $(4-i)x+(2+3i)y=6+2i$;
5.28. $(5+2i)x-(1+2i)y=3-3i$;
5.29. $(6-2i)x+(3+i)y=9-i$;
5.30. $(2+5i)x+(4-i)y=6+4i.$

Задача 6. Найти комплексные числа z_1, z_2, удовлетворяющие системе уравнений:

6.1. $\begin{cases} iz_1+(1+i)z_2=2-2i \\ 2iz_1+(3+2i)z_2=3+3i \end{cases}$;

6.2. $\begin{cases} iz_1+(1+i)z_2=1+2i \\ 2iz_1+(3+2i)z_2=2+3i \end{cases}$;

6.3. $\begin{cases} (1+i)z_1-(1-i)z_2=1+i \\ (1-i)z_1+(1+i)z_2=1+3i \end{cases}$;

6.4. $\begin{cases} iz_1-(1-i)z_2=2+2i \\ 2iz_1+(3+2i)z_2=1-3i \end{cases}$;

6.5. $\begin{cases} (1+i)z_1-(1-i)z_2=1-i \\ (1-i)z_1-(1+i)z_2=1+3i \end{cases}$;

6.6. $\begin{cases} iz_1+(1+i)z_2=2+2i \\ 2iz_1+(3+2i)z_2=5-3i \end{cases}$;

6.7. $\begin{cases} iz_1+(1-i)z_2=2+2i \\ 2iz_1-(3+2i)z_2=5+3i \end{cases}$;

6.8. $\begin{cases} (1+i)z_1+(1-i)z_2=1+i \\ (1-i)z_1-(1+i)z_2=1+2i \end{cases}$;

6.9. $\begin{cases} (1+i)z_1+(1-i)z_2=1-i \\ (1-i)z_1+(1+i)z_2=1+3i \end{cases}$;

6.10. $\begin{cases} (2+i)z_1+(2-i)z_2=6 \\ (3+2i)z_1+(3-2i)z_2=8 \end{cases}$;

6.11. $\begin{cases} iz_1+(1+i)z_2=-2+2i \\ 2iz_1+(3+2i)z_2=-4+5i \end{cases}$;

6.12. $\begin{cases} (1+i)z_1+(1-i)z_2=1+i \\ (1-i)z_1+(1+i)z_2=1+3i \end{cases}$;

6.13. $\begin{cases} (1+i)z_1+(1-i)z_2=1+i \\ (1-i)z_1+(1+i)z_2=1+3i \end{cases}$;

6.14. $\begin{cases} (2-i)z_1+(3+2i)z_2=7+3i \\ (1+i)z_1-(1+i)z_2=-4+2i \end{cases}$;

6.15. $\begin{cases} (2-3i)z_1+(1-i)z_2=5+2i \\ (2-i)z_1-(1-i)z_2=-1+2i \end{cases}$;

6.16. $\begin{cases} (3+4i)z_1-(2+i)z_2=-9+3i \\ (-2+i)z_1+(1+2i)z_2=3+i \end{cases}$;

6.17. $\begin{cases} (2+3i)z_1-(4-i)z_2=-12 \\ (1-i)z_1+(3+2i)z_2=5+8i \end{cases}$;

6.18. $\begin{cases} iz_1+(2-i)z_2=3i \\ (2+3i)z_1-4iz_2=3+5i \end{cases}$;

6.19. $\begin{cases} iz_1 + (2+3i) z_2 = 3i - 3 \\ (2-i) z_1 + 4iz_2 = 2 - i \end{cases}$;

6.20. $\begin{cases} (5+3i) z_1 - (4+i) z_2 = 5 - 7i \\ (-1+i) z_1 + 3iz_2 = -3 + 5i \end{cases}$;

6.21. $\begin{cases} (7+i) z_1 + 2iz_2 = 7i - 1 \\ (1-2i) z_1 + (1+3i) z_2 = 2 + i \end{cases}$;

6.22. $\begin{cases} (4+3i) z_1 - 4iz_2 = 1 + 7i \\ (1-i) z_1 + (2+5i) z_2 = 2 \end{cases}$;

6.23. $\begin{cases} (1+2i) z_1 - iz_2 = 7 - i \\ (2+3i) z_1 + (1-2i) z_2 = 13 - i \end{cases}$;

6.24. $\begin{cases} (1-i) z_1 + (2-3i) z_2 = 6 - i \\ iz_1 - (1+3i) z_2 = 2 - 3i \end{cases}$;

6.25. $\begin{cases} (2+3i) z_1 - (4-i) z_2 = 3i - 7 \\ (-1+2i) z_1 + (2-3i) z_2 = 4i \end{cases}$;

6.26. $\begin{cases} (2+i) z_1 + (2-i) z_2 = 6 \\ (3+2i) z_1 + (3-2i) z_2 = 8 \end{cases}$;

6.27. $\begin{cases} (1-i) z_1 - (1+i) z_2 = 1 + 3i \\ (1+i) z_1 - (1-i) z_2 = 1 - i \end{cases}$;

6.28. $\begin{cases} 2iz_1 + (3+2i) z_2 = 5 - 3i \\ iz_1 + (1+i) z_2 = 2 + 2i \end{cases}$;

6.29. $\begin{cases} iz_1 + (3+2i) z_2 = 5 - i \\ (1+2i) z_1 - (1-2i) z_2 = 1 + 3i \end{cases}$;

6.30. $\begin{cases} 2z_1 + (3-i) z_2 = 5i + 1 \\ (1+3i) z_1 - 4iz_2 = 1 + i \end{cases}$.

Задача 7. Найти комплексное число, для которого имеет место соотношение:

7.1. $|z| + z = 9 + 3i$; **7.2.** $|z| + z = 9 - 3i$; **7.3.** $|z| - z = 1 - 3i$;

7.4. $|z| - z = 1 + 3i$; **7.5.** $|z| + z = 18 + 12i$; **7.6.** $|z| + z = 1 + 3i$;

7.7. $|z| - z = 8 - 12i$; **7.8.** $|z| + z = 2 - 4i$; **7.9.** $|z| - z = 9 - 3i$;

7.10. $|z| - z = 8 + 4i$; **7.11.** $|z| + z = 1 - 3i$; **7.12.** $|z| - z = 9 + 3i$;

7.13. $|z| + z = 25 + 5i$; **7.14.** $|z| - z = 1 - 5i$; **7.15.** $|z| - z = 2 + 4i$;

7.16. $|z| + z = 2 + 4i$; **7.17.** $|z| - z = 8 - 4i$; **7.18.** $|z| + z = 8 + 4i$;

7.19. $|z| - z = 2 - 4i$; **7.20.** $|z| + z = 8 - 4i$; **7.21.** $|z| + z = 2 - 3i$;

7.22. $|z| - z = 1 + 2i$; **7.23.** $|z| + z = 9 + 3i$; **7.24.** $|z| - z = 1 - 3i$;

7.25. $|z| + z = 2 + i$; **7.26.** $|z| - z = 1 - 4i$; **7.27.** $|z| + z = 3 - i$;

7.28. $|z| + z = 4 - 3i$; **7.29.** $|z| - z = 2 + 4i$; **7.30.** $|z| + z = -1 + 2i$.

Задача 8. Найти действительную и мнимую части комплексного числа:

8.1. а) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+3i\right)$; б) $\operatorname{ch}\left(3+\frac{\pi i}{4}\right)$; в) $\ln(-1-i)$; г) $\operatorname{Arcsin}(-4i)$.

8.2. а) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-2i\right)$; б) $\operatorname{sh}\left(1+\frac{\pi i}{2}\right)$; в) $\left(-1+i\cdot\sqrt{3}\right)^{-3i}$; г) $\operatorname{Arcctg}\left(\frac{2\sqrt{3}+3i}{7}\right)$.

8.3. а) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+i\right)$; б) $\operatorname{ch}\left(1+\frac{\pi i}{2}\right)$; в) $\ln\left(1-i\sqrt{3}\right)$; г) $\operatorname{Arcsin}\left(\frac{i}{2}\right)$.

8.4. а) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+2i\right)$; б) $\operatorname{sh}\left(1-\frac{\pi i}{2}\right)$; в) $(-i)^{5i}$; г) $\operatorname{Arctg}\left(\frac{-2\sqrt{3}+3i}{3}\right)$.

8.5. а) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+i\right)$; б) $\operatorname{ch}(1+i\pi)$; в) $\ln\left(3+i\cdot\sqrt{3}\right)$; г) $\operatorname{Arccos}(-2)$.

8.6. а) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+i\right)$; б) $\operatorname{sh}\left(1-\frac{\pi i}{3}\right)$; в) i^{i}; г) $\operatorname{Arccos}(3i)$.

8.7. а) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+i\right)$; б) $\operatorname{ch}\left(1+\frac{\pi i}{4}\right)$; в) $\ln\left(1+i\cdot\sqrt{3}\right)$; г) $\operatorname{Arctg}\left(\frac{3-4i}{5}\right)$.

8.8. а) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-i\right)$; б) $\operatorname{sh}(2-i\pi)$; в) i^{-i}; г) $\operatorname{Arctg}\left(\frac{4-3i}{5}\right)$.

8.9. а) $\cos i$; б) $\operatorname{ch}(1+i)$; в) $\ln(1+i)$; г) $\operatorname{Arccos}(-3i)$.

8.10. а) $\cos(-3i)$; б) $\operatorname{sh}\left(1+\frac{\pi}{4}i\right)$; в) $i^{-i/\pi}$; г) $\operatorname{Arccos}(-5)$.

8.11. а) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-i\right)$; б) $\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{2}-i\right)$; в) $\ln\left(3-3i\sqrt{3}\right)$; г) $\operatorname{Arctg}(2i)$.

8.12. а) $\sin i$; б) $\operatorname{sh}\left(1-\frac{\pi}{2}i\right)$; в) i^{2i}; г) $\operatorname{Arccos}(-2i)$.

8.13. а) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+i\right)$; б) $\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{4}-i\right)$; в) $\ln\left(1-i\sqrt{3}\right)$; г) $\operatorname{Arctg}\left(\frac{i}{2}\right)$.

8.14. а) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-i\right)$; б) $\mathrm{sh}\left(\frac{\pi}{4}+i\right)$; в) $\ln\left(\sqrt{3}i+1\right)$; г) $\mathrm{Arccos}(i)$.

8.15. а) $\cos(1-i)$; б) $\mathrm{ch}\left(\frac{\pi}{6}+i\right)$; в) $\ln(1-i)$; г) $\mathrm{Arcsin}\ (i)$.

8.16. а) $\sin\left(\frac{2}{1-i}\right)$; б) $\mathrm{sh}\left(\frac{\pi}{3}-i\right)$; в) $\ln\left(\frac{1}{1+i}\right)$; г) $\mathrm{Arcsin}\ (\text{-}3)$.

8.17. а) $\cos\left(\frac{2}{1-i}\right)$; б) $\mathrm{ch}(2+\pi i)$; в) $\ln\left(\frac{1+i}{2}\right)$; г) $\mathrm{Arccos}(-1)$.

8.18. а) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+i\right)$; б) $\mathrm{ch}(1+\pi i)$; в) $\ln(3+3i)$; г) $\mathrm{Arcsin}\left(\frac{i}{3}\right)$.

8.19. а) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-2i\right)$; б) $\mathrm{sh}(2-\pi i)$; в) i^{3i}; г) $\mathrm{Arccos}\left(\frac{i}{2}\right)$.

8.20. а) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-i\right)$; б) $\mathrm{ch}\left(1-\frac{\pi}{4}i\right)$; в) $\ln\left(1-i\sqrt{3}\right)$; г) $\mathrm{Arctg}\left(\frac{3+4i}{5}\right)$.

8.21. а) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+2i\right)$; б) $\mathrm{sh}(1-i\pi)$; в) i^{-2i}; г) $\mathrm{Arctg}\left(\frac{i}{3}\right)$.

8.22. а) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+i\right)$; б) $\mathrm{ch}(2+i)$; в) $\ln\left(\sqrt{3}+i\right)$; г) $\mathrm{Arctg}(1-i)$.

8.23. а) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-2i\right)$ б) $\mathrm{sh}(2-i)$; в) i^{3i}; г) $\mathrm{Arcsin}\left(-\frac{i}{2}\right)$.

8.24. а) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+2i\right)$ б) $\mathrm{ch}(1-2i)$; в) $\ln(-1+i)$; г) $\mathrm{Arctg}(1+2i)$.

8.25. а) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+i\right)$; б) $\mathrm{sh}(2-3i)$; в) i^{-2i}; г) $\mathrm{Arccos}(1-i)$.

8.26. а) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-i\right)$; б) $\mathrm{ch}(2+5i)$; в) $\ln(-2+2i)$; г) $\mathrm{Arcsin}(-3i)$.

8.27. а) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+2i\right)$; б) $\mathrm{sh}(-3+2i)$; в) i^{-5i}; г) $\mathrm{Arccos}(-5i)$.

8.28. а) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+3i\right)$; б) $\operatorname{ch}(-1+3i)$; в) $\ln(-4-4i)$; г) $\operatorname{Arctg}\left(\frac{i}{4}\right)$.

8.29. а) $\sin\left(\frac{\pi}{6}-i\right)$; б) $\operatorname{sh}(-2+3i)$; в) i^{3i}; г) $\operatorname{Arcctg}(1-i)$.

8.30. а) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+i\right)$; б) $\operatorname{ch}(1-4i)$; в) $\ln(-2+2i)$; г) $\operatorname{Arcsin}(4i)$.

Задача 9. Построить область, заданную неравенствами:

9.1. а) $|z-1+2i|\le 1$, $|z+2|>2$;

б) $\frac{\pi}{2}<\arg(z-i)\le\pi$, $|z-i|<2$;

в) $\operatorname{Re}(z+1)>0$, $0<\operatorname{Im}(z+1)<3$.

9.2. а) $|z+1-3i|\ge 2$, $|z|<2$;

б) $-\frac{\pi}{2}<\arg(z)\le\frac{\pi}{2}$, $z\cdot\bar{z}<4$;

в) $\operatorname{Re}(z-2i)>1$, $0<\operatorname{Im}(z-2i)<3$.

9.3. а) $|z-2+i|\le 2$, $\operatorname{Re}z>2$;

б) $\frac{\pi}{3}<\arg(z-i)\le\frac{2\pi}{3}$, $1\le|z-i|<2$;

в) $\operatorname{Re}(z+2i)>0$, $0<\operatorname{Im}(z+2i)<2$.

9.4. а) $|z+1-3i|\ge 2$, $|z+2i|<1$;

б) $\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{3\pi}{4}$, $|z|<3$;

в) $\operatorname{Im}(z+i)\ge 2$, $0<\operatorname{Re}(z+i)<3$.

9.5. а) $|z-2i|<2$, $|z-i|>2$;

б) $-\frac{\pi}{2}<\arg(z+i-1)\le\frac{\pi}{2}$, $|z+i-1|<2$;

в) $\operatorname{Re} z > 1,\qquad 0 < \operatorname{Im} z < \pi$.

9.6. а) $|z+i| \le 2,\qquad |z-i| > 2$;

б) $-\dfrac{\pi}{6} < \arg(z-i) \le \pi,\qquad |z-i| < 2$;

в) $1 < \operatorname{Re} z > 2,\qquad 0 < \operatorname{Im} z < 3x$.

9.7. а) $|z-1-i| \le 1,\qquad \operatorname{Im} z > 1,\ \operatorname{Re} z \ge 1$;

б) $-\dfrac{\pi}{2} < \arg(z-i) < \dfrac{\pi}{4},\qquad 1 < |z-i| < 2$;

в) $4 < \operatorname{Re}(z+i) \le 6,\qquad \operatorname{Im}(z+i) < 2x+1$.

9.8. а) $|z-2+i| \le 2,\qquad \operatorname{Im} z < -1,\ \operatorname{Re} z \ge 1$;

б) $\dfrac{\pi}{4} < \arg(z+1) \le \dfrac{5\pi}{4},\qquad |z+1| > 3$;

в) $\operatorname{Re}(z+i) > 4,\qquad 0 \le \operatorname{Im} z \le 3$.

9.9. а) $|z-2+i| \le 2,\qquad \operatorname{Im} z < 1,\ \operatorname{Re} z \ge 3$;

б) $\pi < \arg(z+3) \le \dfrac{3\pi}{2},\qquad 1 \le |z+3| \le 2$;

в) $\operatorname{Im}(z-1) \ge 3,\qquad -3 < \operatorname{Re}(z-1) < 2$.

9.10. а) $|z-1-i| \ge 1,\qquad 0 < \operatorname{Im} z < 2$;

б) $-\dfrac{\pi}{2} < \arg(z-1+i) \le 0,\qquad |z-1+i| > 4$;

в) $\operatorname{Im}(z+1) \ge 2,\qquad 0 < \operatorname{Re}(z+1) < 3$.

9.11. а) $|z+i| \le 2,\qquad |z-i| > 2$;

б) $-\dfrac{\pi}{2} < \arg(z+3i) \le \pi,\qquad |z+3i| < 3$;

в) $|\operatorname{Re} z| \le 1,\qquad |\operatorname{Im} z| < 2$.

9.12. а) $|z+1| \ge 1,\qquad |z+i| < 1$;

б) $\frac{\pi}{2} < \arg(z-i) < \frac{3\pi}{4}$, $1 < |z-i| < 3$;

в) $\operatorname{Re} z > 2$, $\operatorname{Im} z < 3$.

9.13. а) $|z+i| \geq 1$, $|z| < 2$;

б) $-\frac{\pi}{4} < \arg(z-2i+1) \leq \frac{3\pi}{4}$, $|z-2i+1| < 1$;

в) $1 < \operatorname{Re}(z+1) < 2$, $\operatorname{Im}(z+1) > 1$.

9.14. а) $|z-1-i| < 2$, $|z+i| > 1$;

б) $0 < \arg(z-1-i) \leq \frac{\pi}{2}$, $|z-1-i| < \sqrt{5}$;

в) $\operatorname{Im}(z+i) < 2$, $3 < \operatorname{Re}(z+i) \leq 4$.

9.15. а) $|z+1-i| \leq 3$, $|z+1| > 1$;

б) $\frac{\pi}{4} < \arg(z-i) < \frac{\pi}{2}$, $|z-i| < 3$;

в) $0 < \operatorname{Im} z < 2$, $0 \leq \operatorname{Re} z < 4$.

9.16. а) $|z+2-i| > 1$, $|z+1-i| < 4$;

б) $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}$, $z \cdot \overline{z} < 9$;

в) $\operatorname{Im}(z+2i) < 3$, $\operatorname{Re}(z+2i) > 1$.

9.17. а) $|z-2i| > 1$, $|z+2-i| < 3$;

б) $-\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4}$, $z \cdot \overline{z} > 1$;

в) $\operatorname{Im} z > -2$, $0 < \operatorname{Re} z \leq 4$.

9.18. а) $|z+1-i| > 1$, $|z+i| \leq 4$;

б) $0 < \arg z < \frac{\pi}{6}$, $|z| < 3$;

в) $0 < \operatorname{Im}(z+1) < 1$, $\operatorname{Re}(z+1) \geq 2$.

9.19. а) $|z-1-i| \le 2$, $|z+2i| > 2$;

б) $-\frac{\pi}{2} < \arg(z+1-i) < \frac{\pi}{2}$, $|z+1-i| < 3$;

в) $\mathrm{Im}(z-i) > 1$, $2 < \mathrm{Re}(z-i) \le 3$.

9.20. а) $|z-2+i| > 1$, $|z| < 4$;

б) $-\frac{\pi}{3} < \arg(z-i) < \frac{\pi}{3}$, $|z-i| > 2$;

в) $|\mathrm{Im}\, z| \le 1$, $\mathrm{Re}\, z > 3$.

9.21. а) $|z-i| < 3$, $|z+1-2i| > 2$;

б) $\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{2}$, $z \cdot \overline{z} < 3$;

в) $\mathrm{Im}\, z > -2$, $4 < \mathrm{Re}\, z < 6$.

9.22. а) $|z+2i| > 1$, $|z-1+2i| < 4$;

б) $-\frac{\pi}{6} < \arg(z+2i) < \frac{\pi}{6}$, $|z+2i| \le 1$;

в) $0 < \mathrm{Im}(z+1) < 1$, $\mathrm{Re}(z+1) > 4$.

9.23. а) $|z+1-3i| < 2$, $|z+1| > 1$;

б) $-\frac{\pi}{6} < \arg(z+2i) < \frac{\pi}{6}$, $|z+2i| \le 1$;

в) $\mathrm{Im}\, z < 2$, $\mathrm{Re}\, z > 4$.

9.24. а) $|z-1+2i| > 1$, $|z| < 4$;

б) $-\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{3}$, $|z| > 1$;

в) $0 \le \mathrm{Im}(z-2i) \le 3$, $\mathrm{Re}(z-2i) > 1$.

9.25. а) $|z+2i| < 4$, $|z+2-3i| > 1$;

б) $\frac{\pi}{2} < \arg(z+i) < \pi$, $|z+i| < 4$;

в) $1 \le \operatorname{Im}(z+i) < 4,$ $\operatorname{Re}(z+i) > -2$.

9.26. а) $|z+1| \le 2,$ $|z+2-3i| > 1$;

б) $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4},$ $z \cdot \overline{z} < 2$;

в) $0 < \operatorname{Im}(z-2) < 4,$ $\operatorname{Re}(z-2) < 3$.

9.27. а) $|z-2+i| \le 2,$ $|z-1| > 1$;

б) $\frac{\pi}{2} < \arg(z+i) < \frac{3\pi}{4},$ $|z+i| < 1$;

в) $-2 < \operatorname{Im} z \le 2,$ $\operatorname{Re} z \ge 4$.

9.28. а) $|z+2-i| < 3,$ $|z+1| > 1$;

б) $0 \le \arg(z+2i) < \frac{\pi}{3},$ $|z+2i| > 1$;

в) $0 \le \operatorname{Im} z \le 2,$ $\operatorname{Re} z > -3$.

9.29. а) $|z+2i-1| < 3,$ $|z+2| > 1$;

б) $0 < \arg z < \frac{\pi}{4},$ $z \cdot \overline{z} < 3$;

в) $3 < \operatorname{Im}(z+i) < 4,$ $\operatorname{Re}(z+i) < 2$.

9.30. а) $|z+2-i| \le 3,$ $|z-2i| > 1$;

б) $-\frac{\pi}{2} < \arg(z+1) < \frac{\pi}{2},$ $|z+1| < 2$;

в) $0 \le \operatorname{Im}(z+2) < 3,$ $\operatorname{Re}(z+2) \le 3$.

Задача 10. Является ли дифференцируемой функция:

10.1. $f(z) = x^2 - y^2 - x + i(2xy - y)$;

10.2. $f(z) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$;

10.3. $f(z) = e^{xy} \sin x + ie^{xy} \cos x$;

10.4. $f(z)=e^{x}\operatorname{ch}(yx)+ie^{y}\operatorname{sh}(yx)$;

10.5. $f(z)=y+2\left(x^{2}-y^{2}\right)+i\left(-y-\dfrac{y}{x^{2}+y^{2}}\right)$;

10.6. $f(z)=\operatorname{sh}xy+2x^{2}-i\operatorname{ch}xy$;

10.7. $f(z)=e^{x}\sin y+i\cos y$;

10.8. $f(z)=e^{y}\operatorname{sh}(xy)-ie^{y}\operatorname{ch}(x+y)$;

10.9. $f(z)=\ln(x+y)+i\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$;

10.10. $f(z)=x^{2}+ixy$;

10.11. $f(z)=\left(x^{3}-3xy^{2}\right)+i\left(3x^{2}y-y^{3}\right)$;

10.12. $f(z)=\sin x\operatorname{ch}y-i\cos x\operatorname{sh}y$;

10.13. $f(z)=e^{y}\cos x+ie^{x}\sin y$;

10.14. $f(z)=e^{-\frac{x}{y}}+i\sqrt[3]{i+x^{2}y^{2}}$;

10.15. $f(z)=\sqrt{1+\ln(xy)}+i\cos\dfrac{y}{x}$;

10.16. $f(z)=\dfrac{x-iy}{x^{2}+y^{2}}$;

10.17. $f(z)=\left(x^{2}+y^{2}\right)+e^{2xy}i$;

10.18. $f(z)=\left(x^{2}-y^{2}\right)+2ixy$;

10.19. $f(z)=x^{2}-y^{2}+xy+\dfrac{1}{2}(2-i)\left(x^{2}+y^{2}\right)$;

10.20. $f(z)=xe^{xy}-iye^{xy}$;

10.21. $f(z)=x^{3}-3xy^{2}+i\left(3x^{2}-y^{3}\right)$;

10.22. $f(z)=x^{2}-y^{2}-3x+2+i(-3y+2xy)$;

10.23. $f(z)=x^{3}+6x^{2}y-3y^{2}x+i\left(x^{2}-y^{2}+2i\right)$;

10.24. $f(z)=2ie^{x+iy}$;

10.25. $f(z)=\dfrac{1}{x^2+y^2}+ie^{xy}$;

10.26. $f(z)=\cos xe^{x+iy}$;

10.27. $f(z)=\sqrt{1-x^2}e^{\frac{x}{y}}+ie^{\frac{y}{x}}$;

10.28. $f(z)=\operatorname{sh}(xy)e^{x^2-y^2+2xyi}$;

10.29. $f(z)=\cos x\operatorname{sh} y+i\sin x\operatorname{ch} y$;

10.30. $f(z)=\dfrac{y}{\sqrt{1-x^3}}+ie^{xy}$.

Задача 11. Доказать аналитичность функции $f(z)$ и найти ее производную:

11.1. $f(z)=z^2-iz+2$;

11.2. $f(z)=z^2+2iz-1$;

11.3. $f(z)=z^3+1$;

11.4. $f(z)=z^2+3z-2i$;

11.5. $f(z)=z^2-2z+2$;

11.6. $f(z)=z^3+z$;

11.7. $f(z)=z^2-(2+i)z+1$;

11.8. $f(z)=2z^3+iz-1$;

11.9. $f(z)=z^2+3z+2$;

11.10. $f(z)=z^2+(1-i)z$;

11.11. $f(z)=z^2-iz$;

11.12. $f(z)=z^2-iz+2$;

11.13. $f(z)=z^2+z+1$;

11.14. $f(z)=z^2-2z+1$;

11.15. $f(z)=z^2+3z-1$;

11.16. $f(z)=z^2-3z+2$;

11.17. $f(z)=z^2-z-1$;

11.18. $f(z)=z^2+(3-i)z+1$;

11.19. $f(z)=3z^2-2z+i$;

11.20. $f(z)=z^3-2z$;

11.21. $f(z)=z^2+9$;

11.22. $f(z)=z^3+2z$;

11.23. $f(z)=z^2+3z+4$;

11.24. $f(z)=\overline{z}^2\cdot z$;

11.25. $f(z)=z^3+10$; **11.26.** $f(z)=z^2-2z+1$;

11.27. $f(z)=z^2+(2+i)z+4$; **11.28.** $f(z)=z^3+iz-1$;

11.29. $f(z)=z^2-(2+i)z+1$; **11.30.** $f(z)=z^2(z-i)$.

Задача 12. Найти нули функции и определить их порядок:

12.1. $f(z)=(z^2-4)^3 z$; **12.2.** $f(z)=(z^2+9)^2$;

12.3. $f(z)=z^2\cdot(z+3)$; **12.4.** $f(z)=(1-z)^2(z^2+9)$;

12.5. $f(z)=(z+1)^2(z-i)$; **12.6.** $f(z)=z-z^3$;

12.7. $f(z)=(z^2+9)(z-1)$; **12.8.** $f(z)=(z-1)^2(z^2+1)$;

12.9. $f(z)=(1-z)^2$ **12.10.** $f(z)=z^2-z^5$

12.11. $f(z)=z(1-z^2)$ **12.12.** $f(z)=z^2(z-1)$

12.13. $f(z)=z^2(z^2+9)$ **12.14.** $f(z)=(z^2+1)^2$

12.15. $f(z)=(z+i)(z-1)^2$; **12.16.** $f(z)=z(z+1)(z-1)^3$;

12.17. $f(z)=(z^2+i)^3$; **12.18.** $f(z)=(z^2+4)^2$;

12.19. $f(z)=z^2\cdot(z+2-i)$; **12.20.** $f(z)=(1-z)z^3$;

12.21. $f(z)=(z-1)^2(z^2+4)$; **12.22.** $f(z)=z^2(z-i)$;

12.23. $f(z)=z(z^2+9)$; **12.24.** $f(z)=(z^2-z^4)(z+2i)$;

12.25. $f(z)=z(z^2+4)$; **12.26.** $f(z)=(1-z)^2$;

12.27. $f(z)=(z-1)(z^2+16)$; **12.28.** $f(z)=z(1-z^2)$;

12.29. $f(z)=z\cdot(z^2+9)$; **12.30.** $f(z)=(4+z^2)(z+1)$.

Задача 13. Определить характер особых точек:

13.1. а) $f(z)=\dfrac{1-e^{z+i}}{z+i}$, $z_0=-i$;

б) $f(z)=\dfrac{\cos z-1}{\sin^2 z-z^2}$, $z_0=0$;

в) $f(z)=(z+3)\cdot\cos\left(\dfrac{1}{z+3}\right)$, $z_0=-3$.

13.2. а) $f(z)=\dfrac{e^z}{z-3}$, $z_0=3$;

б) $f(z)=z\cdot\cos\dfrac{1}{z+2i}$, $z_0=-2i$;

в) $f(z)=\dfrac{\cos(z+1)-1}{(z+1)^3}$, $z_0=-1$.

13.3. а) $f(z)=\dfrac{1-e^{z(z+2)}}{z+2}$, $z_0=-2$;

б) $f(z)=\dfrac{\cos(z-1)-1}{\sin^2(z-1)-(z-1)^2}$, $z_0=1$;

в) $f(z)=z\cdot\cos\dfrac{1}{z+3}$, $z_0=-3$.

13.4. а) $f(z)=\dfrac{1-\cos(z+2i)}{(z+2i)^4}$, $z_0=-2i$;

б) $f(z)=\sin\dfrac{z}{z-3}$, $z_0=3$;

в) $f(z)=\dfrac{e^{z+i}-1}{z+i}$, $z_0=-i$.

13.5. а) $f(z)=\dfrac{1-e^{z-1}}{z-1}$, $z_0=1$;

б) $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^3(z+1)^2}$, $z_0=0$;

в) $f(z)=\sin\dfrac{z}{z-2}$, $z_0=2$.

13.6. а) $f(z)=\dfrac{1-e^{z+4}}{(z+4)^6}$, $z_0=-4$;

б) $f(z)=(z-1)\cdot\cos\dfrac{1}{z-1}$, $z_0=1$;

в) $f(z)=\dfrac{z^2-\sin z^2}{z^6}$, $z_0=0$.

13.7. а) $f(z)=(z-i)\cdot e^{1/(z-i)}$, $z_0=i$;

б) $f(z)=\dfrac{\sin(z-i)}{(z-i)^5}$, $z_0=i$;

в) $f(z)=\dfrac{1-e^{z+2}}{z+2}$, $z_0=-2$.

13.8. а) $f(z)=\sin\dfrac{z}{z+2}$, $z_0=-2$;

б) $f(z)=\dfrac{1-\cos(z+i)}{(z+i)^2}$, $z_0=-i$;

в) $f(z)=\dfrac{z}{z^5-3z^4}$, $z_0=\infty$.

13.9. а) $f(z)=\dfrac{1-e^{z-i}}{(z-i)^6}$, $z_0=i$;

б) $f(z)=\dfrac{\cos(z+2i)-1}{(z+2i)^2}$, $z_0=-2i$;

в) $f(z)=\dfrac{z-\pi}{\left(e^{iz}+1\right)^3}$, $z_0=\pi$.

13.10. а) $f(z)=\dfrac{1-e^{z-3}}{(z-3)^3}$, $z_0=3$;

б) $f(z)=z\cdot\cos\dfrac{1}{z+2i}$, $z_0=-2i$;

в) $f(z)=\dfrac{z-\pi/2}{e^{iz}-i}$, $z_0=\pi/2$.

13.11. а) $f(z)=\dfrac{1-e^{z-3}}{(z-3)^6}$, $z_0=3$;

б) $f(z)=\dfrac{z+2-\sin(z+2)}{1-\cos(z+2)}$, $z_0=-2$;

в) $f(z)=(z-1)\cdot\cos\left(\dfrac{1}{z-1}\right)$, $z_0=1$.

13.12. а) $f(z)=z\cdot e^{1/(z+i)}$, $z_0=-i$;

б) $f(z)=\dfrac{1-\dfrac{(z-i)^2}{2}-\cos(z-i)}{(z-i)^4}$, $z_0=i$;

в) $f(z)=\dfrac{z}{(z+2)^3}$, $z_0=-2$.

13.13. а) $f(z)=\dfrac{1-e^z}{\sin z-z+z^3/6}$, $z_0=0$;

б) $f(z)=\dfrac{\cos z-1}{z^2}$, $z_0=0$;

в) $f(z)=\cos\dfrac{z}{z+5}$, $z_0=-5$.

13.14. а) $f(z)=e^{1/z}+\dfrac{z^5}{(z+1)^3}$, $z_0=-1$;

б) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z-3\pi/2}$, $z_0=3\pi/2$;

в) $f(z)=\cos\left(\dfrac{3z}{z+4}\right)$, $z_0=-4$.

13.15. а) $f(z)=\dfrac{1-e^{z-i}}{(z-i)^4}$, $z_0=i$;

б) $f(z)=z^2\cdot\cos\dfrac{1}{z+2}$, $z_0=-2$;

в) $f(z)=\dfrac{\cos(z+1)-1}{z\cdot(z+1)^2}$, $z_0=-1$.

13.16. а) $f(z)=\dfrac{1-e^{z+i}}{z+i}$, $z_0=-i$;

б) $f(z)=\dfrac{\cos z-1}{\sin^2 z-z^2}$, $z_0=0$;

в) $f(z)=z\cdot\cos\dfrac{1}{z-2i}$, $z_0=2i$.

13.17. а) $f(z)=\dfrac{1-e^{z-3}}{(z-3)^3}$, $z_0=3$;

б) $f(z)=z\cdot\cos\dfrac{1}{z+2i}$, $z_0=-2i$;

в) $f(z)=\dfrac{\cos(z+4)-1}{(z+4)^3}$, $z_0=-4$.

13.18. а) $f(z)=\dfrac{1-e^{i(z+2)}}{z+2}$, $z_0=-2$;

б) $f(z)=\dfrac{\cos(z-1)-1}{\sin^2(z-1)-(z-1)^2}$, $z_0=1$;

в) $f(z)=z\cdot\cos\dfrac{1}{z+3}$, $z_0=-3$.

13.19. а) $f(z)=\dfrac{1-\cos(z+2i)}{(z+2i)^4}$, $z_0=-2i$;

б) $f(z)=\sin\dfrac{z}{z-3}$, $z_0=3$;

в) $f(z)=\dfrac{e^{z+i}-1}{z+i}$, $z_0=-i$.

13.20. а) $f(z)=\dfrac{1-e^{z-1}}{z-1}$, $z_0=1$;

б) $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^3(z+1)^2}$, $z_0=0$;

в) $f(z)=\sin\dfrac{z}{z-2}$, $z_0=2$.

13.21. а) $f(z)=\dfrac{1-e^{z+4}}{(z+4)^6}$, $z_0=-4$;

б) $f(z)=(z+2)\cdot\cos\dfrac{1}{z+2}$, $z_0=-2$;

в) $f(z)=\dfrac{z^2-\sin z^2}{z^6}$, $z_0=0$.

13.22. а) $f(z)=(z-i)\cdot e^{1/(z-i)}$, $z_0=i$;

б) $f(z)=\dfrac{\sin(z-i)}{(z-i)^5}$, $z_0=i$;

в) $f(z)=\dfrac{1-e^{z+2}}{z+2}$, $z_0=-2$.

13.23. а) $f(z)=\sin\frac{z}{z-2}$, $z_0=2$;

б) $f(z)=\frac{1-\cos(z+i)}{(z+i)^2}$, $z_0=-i$;

в) $f(z)=\frac{z}{z^5-3z^4}$, $z_0=0$.

13.24. а) $f(z)=\frac{1-e^{z-i}}{(z-i)^6}$, $z_0=i$;

б) $f(z)=\frac{\cos(z+2i)-1}{(z+2i)^2}$, $z_0=-2i$;

в) $f(z)=\frac{z}{e^z-1}$, $z_0=0$.

13.25. а) $f(z)=\frac{1-e^{z-3}}{(z-3)^3}$, $z_0=3$;

б) $f(z)=z\cdot\cos\frac{1}{z+2i}$, $z_0=-2i$;

в) $f(z)=\frac{z-\pi/2}{\cos z}$, $z_0=\pi/2$.

13.26. а) $f(z)=\frac{1-e^{z-2}}{(z-2)^6}$, $z_0=2$;

б) $f(z)=\frac{z+2-\sin(z+2)}{1-\cos(z+2)}$, $z_0=-2$;

в) $f(z)=(2z-4)\cdot\cos\left(\frac{1}{z-2}\right)$, $z_0=2$.

13.27. а) $f(z)=z\cdot e^{1/(z+i)}$, $z_0=-i$;

б) $f(z)=\dfrac{1-\dfrac{(z-i)^2}{2}-\cos(z-i)}{(z-i)^4}$, $z_0=i$;

в) $f(z)=\dfrac{z}{(z+2)^3}$, $z_0=-2$.

13.28. а) $f(z)=\dfrac{1-e^z}{\sin z-z+z^3/6}$, $z_0=0$;

б) $f(z)=\dfrac{\cos z-1}{z^2}$, $z_0=0$;

в) $f(z)=\cos\dfrac{z}{z-3}$, $z_0=3$.

13.29. а) $f(z)=e^{1/z}+\dfrac{z^5}{(z+1)^3}$, $z_0=-1$;

б) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z-3\pi/2}$, $z_0=3\pi/2$;

в) $f(z)=\cos\left(\dfrac{3z}{z+4}\right)$, $z_0=-4$.

13.30. а) $f(z)=\dfrac{1-e^{z-i}}{(z-i)^4}$, $z_0=i$;

б) $f(z)=z^2\cdot\cos\dfrac{1}{z+2}$, $z_0=-2$;

в) $f(z)=\dfrac{\cos(z+3)-1}{z\cdot(z+3)^2}$, $z_0=-3$.

Задача 14. Найти особые точки и определить характер:

14.1. $f(z)=\dfrac{e^z}{(z+2)^3}$;

14.2. $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^2+4}$;

14.3. $f(z)=\dfrac{z+2}{(z-1)^3(z+1)}$;

14.4. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3}$;

14.5. $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+i)^3}$;

14.6. $f(z)=\dfrac{1}{\sin z}$;

14.7. $f(z)=\dfrac{\cos z}{(z^2-i^2)^3}$;

14.8. $f(z)=\dfrac{1}{e^z-z}$;

14.9. $f(z)=\dfrac{1}{1-\sin z}$;

14.10. $f(z)=e^{1/(z+2)}$;

14.11. $f(z)=\cos\dfrac{1}{z}$;

14.12. $f(z)=\dfrac{z}{z^5+2z^4+z^3}$;

14.13. $f(z)=\dfrac{z^2}{\cos z-1}$;

14.14. $f(z)=\dfrac{z^2-3z+2}{z^2-2z+1}$;

14.15. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$;

14.16. $f(z)=\dfrac{\sin z}{4z+3}$;

14.17. $f(z)=z^2\cdot\sin\dfrac{z}{z+1}$;

14.18. $f(z)=\dfrac{z}{\sin z}$;

14.19. $f(z)=\dfrac{z^2-1}{z-1}$;

14.20. $f(z)=\dfrac{1}{e^z-3}$;

14.21. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^5}$;

14.22. $f(z)=\dfrac{e^{1/z}}{1-z}$;

14.23. $f(z)=\operatorname{tg}\dfrac{1}{z-1}$;

14.24. $f(z)=e^{1/(z-3i)}$;

14.25. $f(z)=\operatorname{tg}^2 z$;

14.26. $f(z)=\dfrac{e^z}{(z-3)^3}$;

14.27. $f(z)=\dfrac{z+2}{z(z+1)(z-1)^3}$;

14.28. $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+i)^3}$;

14.29. $f(z)=\dfrac{e^{z+e}}{z+e}$;

14.30. $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z}$.

Задача 15. Найти вычеты:

15.1.

а) $\underset{z=0}{res}\dfrac{\cos z-1}{z\sin z}$;

б) $\underset{z=i}{res}\dfrac{e^{\pi z}}{(z-i)^2}$;

в) $\underset{z=\infty}{res}(z-4)\cos\dfrac{1}{z^2}$;

г) $\underset{z=-2i}{res}\sin\left(\dfrac{z}{z+2i}\right)$.

15.2.

а) $\underset{z=1}{res}\dfrac{z-1-\sin(z-1)}{(z-1)^3}$;

б) $\underset{z=-1}{res}\dfrac{e^z}{z^2(z+1)^3}$;

в) $\underset{z=\infty}{res}(z-4)\cos\dfrac{3}{z}$;

г) $\underset{z=0}{res}\left(\cos\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z}\right)$.

15.3.

а) $\underset{z=0}{res}\left(\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{e^z-1}\right)$;

б) $\underset{z=1}{res}\left(z\sin z\cdot\dfrac{2}{z-1}\right)$;

в) $\underset{z=2i}{res}\dfrac{e^{z^2}}{z\cdot(z-2i)^2}$;

г) $\underset{z=\infty}{res}\left(2z\cdot\cos\dfrac{1}{z}\right)$.

15.4.

а) $\underset{z=0}{res}\dfrac{5z^2}{1-\cos z}$;

б) $\underset{z=0}{res}\dfrac{\operatorname{tg} z}{z^2-\dfrac{\pi}{4}z}$;

в) $\underset{z=\infty}{res}\cos\dfrac{1}{z}$;

г) $\underset{z=2}{res}\cos\dfrac{z}{z-2}$.

15.5.

а) $\underset{z=0}{res}\dfrac{1-\cos z}{\sin^2 z}$;

б) $\underset{z=2}{res}\dfrac{z}{(z-1)\cdot(z-2)^2}$;

в) $\underset{z=2}{res}\dfrac{1}{z-2}\cdot e^{\frac{z}{z-2}}$;

г) $\underset{z=\infty}{res}\dfrac{2z}{z^2+1}$.

15.6.

а) $\underset{z=0}{res}\dfrac{z^2}{1-\cos z}$;

б) $\underset{z=1}{res}\dfrac{1+\cos\pi z}{(z-1)^3}$;

в) $\underset{z=\infty}{res}(z+2)\cos\dfrac{1}{z}$;

г) $\underset{z=2i}{res}\dfrac{e^{z-2i}}{(z-2i)^3}$.

15.7.

а) $\underset{z=0}{res}\dfrac{z-\dfrac{z^3}{6}-\sin z}{z^5}$;

б) $\underset{z=i}{res}\dfrac{e^{z-i}}{(z-i)^3}$;

в) $\underset{z=\infty}{res}(z-2)e^{\frac{1}{z}}$;

г) $\underset{z=1}{res}\cos\dfrac{z}{z-1}$.

15.8.

а) $\underset{z=0}{res}\dfrac{z^2}{1-\cos 2z}$;

б) $\underset{z=1}{res}\dfrac{\sin z\pi}{(z-1)^3}$;

в) $\underset{z=\infty}{res}(z+2)\cos\dfrac{1}{z}$;

г) $\underset{z=2}{res}\dfrac{\sin \pi z}{(z-2)^3}$.

15.9.

а) $\underset{z=0}{res}\dfrac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}$;

б) $\underset{z=0}{res}\dfrac{\cos(z-1)}{z^3}$;

в) $\underset{z=0}{res}(z-1)^2 e^{\frac{1}{z}}$;

г) $\underset{z=\infty}{res}\sin\left(\dfrac{2}{z-1}\right)$.

15.10.

а) $\underset{z=0}{res}\dfrac{3z^2}{1-\cos z}$;

б) $\underset{z=0}{res}\dfrac{e^z}{z^3(z-1)}$;

в) $\underset{z=\infty}{res}(z+2)\cos\dfrac{1}{z}$;

г) $\underset{z=1}{res}\cos\left(\dfrac{3}{z-1}\right)$.

15.11.

а) $\underset{z=1}{res}\dfrac{\sin(z-1)}{(z-1)^2}$;

б) $\underset{z=i}{res}\dfrac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}$;

в) $\underset{z=1}{res}\left(z\cos\dfrac{2}{z-1}\right)$;

г) $\underset{z=\infty}{res}\dfrac{z}{2z+1}$.

15.12.

а) $\underset{z=0}{res}\dfrac{5z^2}{1-\cos 2z}$;

б) $\underset{z=1}{res}\dfrac{e^{2z}}{z^2(z-1)}$;

в) $\underset{z=\infty}{res}\cos\dfrac{1}{z}$;

г) $\underset{z=0}{res}(z+2)e^{\frac{1}{z}}$.

15.13.

а) $\underset{z=0}{res}\dfrac{1-e^z}{z^2-4z}$;

15.14.

а) $\underset{z=0}{res}\dfrac{z^2}{1-\cos 3z}$;

б) $\underset{z=1}{res}\dfrac{\cos z\pi}{(z-1)^2}$;

в) $\underset{z=0}{res}(z+1)e^{\frac{2}{z}}$;

г) $\underset{z=\infty}{res}(z-1)^2\sin\dfrac{1}{z}$.

б) $\underset{z=-1}{res}\dfrac{e^{-\frac{1}{z^2}}}{z+1}$;

в) $\underset{z=\infty}{res}(z+2)\cos\dfrac{1}{z}$;

г) $\underset{z=0}{res}(z-1)\cdot e^{\frac{3}{z}}$.

15.15. а) $\underset{z=1}{res}\dfrac{z+1-\sin(z+1)}{(z+1)^3}$;

б) $\underset{z=-\pi}{res}\dfrac{e^{2iz}-1}{z+\pi}$;

в) $\underset{z=0}{res}\dfrac{z^3+1}{z}e^{\frac{1}{z}}$;

г) $\underset{z=\infty}{res}\dfrac{\sin^2 z}{z^3}$.

15.16. а) $\underset{z=\frac{\pi}{2}}{res}\left(z-\dfrac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg} z$;

б) $\underset{z=0}{res}\dfrac{\cos z}{z^3}$;

в) $\underset{z=\infty}{res}(z+2)\cos\dfrac{2}{z}$;

г) $\underset{z=1}{res}\, z^2\cdot e^{\frac{1}{1-z}}$.

15.17. а) $\underset{z=0}{res}\dfrac{\sin z-z}{z^3}$;

б) $\underset{z=1}{res}\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^5}$;

в) $\underset{z=2}{res}\left(z^3\cos\dfrac{1}{z-2}\right)$;

г) $\underset{z=\infty}{res}(z-1)e^{\frac{1}{z}}$.

15.18. а) $\underset{z=0}{res}\left(\dfrac{z^2}{1-\cos 2z}\right)$;

б) $\underset{z=1}{res}\left(e^{\frac{1}{z}}+\dfrac{z^5}{(z+1)^3}\right)$;

в) $\underset{z=\infty}{res}(z-1)\cos\dfrac{3}{z}$;

г) $\underset{z=2}{res}\dfrac{z}{z^2-4}$.

15.19. а) $\underset{z=0}{res}\left(\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{\sin z}\right)$;

б) $\underset{z=i}{res}\dfrac{z}{(z^2+1)^2}$;

15.20. а) $\underset{z=1}{res}\dfrac{z-\sin z}{z^3}$;

б) $\underset{z=-1}{res}\dfrac{e^z}{(z+1)^2}$;

в) $\underset{z=1}{res}\, z \cdot e^{\frac{2}{z-1}}$;

г) $\underset{z=0}{res}\,(z+2)^2 \cdot \sin\frac{1}{z}$.

в) $\underset{z=\infty}{res}\,(z+2)\cos\frac{1}{z}$;

г) $\underset{z=-i}{res}\,\frac{z}{z-i}$.

15.21. а) $\underset{z=0}{res}\,\frac{2z^2}{1-\cos 4z}$;

б) $\underset{z=1}{res}\,\frac{\sin z\pi}{(z-1)^3}$;

в) $\underset{z=\infty}{res}\,(z+2)\cos\frac{1}{z}$;

г) $\underset{z=1}{res}\,\frac{z}{z-1}$.

15.22. а) $\underset{z=0}{res}\,\frac{4z^2}{1-\cos 3z}$;

б) $\underset{z=1}{res}\,\frac{z^4}{(z-1)^2}$;

в) $\underset{z=\infty}{res}\,(z+2)\cos\frac{1}{z}$;

г) $\underset{z=0}{res}\, z^2 \cdot e^{\frac{1}{z}}$.

15.23. а) $\underset{z=0}{res}\,\frac{1-e^z}{z^2-z}$;

б) $\underset{z=1}{res}\,\frac{\sin z\pi}{(z-1)^2}$;

в) $\underset{z=\infty}{res}\,(z-i)\cos\frac{1}{z}$;

г) $\underset{z=0}{res}\,(z+2)\cdot e^{\frac{3}{z}}$.

15.24. а) $\underset{z=0}{res}\,\frac{1-e^{2z}}{z(z-1)}$;

б) $\underset{z=1}{res}\,\frac{1}{z(z^2-1)}$;

в) $\underset{z=\infty}{res}\,(z+1)\cos\frac{1}{z}$;

г) $\underset{z=0}{res}\,(z-i)\cdot e^{\frac{1}{z}}$.

15.25. а) $\underset{z=0}{res}\,\frac{e^{z-1}}{z-z^2}$;

б) $\underset{z=2}{res}\,\frac{\sin z\pi}{(z-2)^2}$;

в) $\underset{z=\infty}{res}\,(z+2)\cos\frac{1}{z}$;

г) $\underset{z=0}{res}\,(z+3)\cdot e^{\frac{2}{z}}$.

15.26. а) $\underset{z=0}{res}\,\frac{z-\sin z}{z^3}$;

б) $\underset{z=1}{res}\,\frac{\sin z}{(z-1)^2}$;

в) $\underset{z=\infty}{res}\,(z-i)\cos\frac{1}{2z}$;

г) $\underset{z=0}{res}\, z^3 \cdot e^{\frac{1}{z}}$.

15.27. а) $\underset{z=0}{res}\dfrac{5z^2}{1-\cos z}$;

б) $\underset{z=2}{res}\dfrac{z^2}{z-2}$;

в) $\underset{z=-1}{res}\dfrac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2}$;

г) $\underset{z=0}{res}\, z^2\cdot e^{\frac{5}{z}}$.

15.28. а) $\underset{z=0}{res}\dfrac{5z^2}{1-\cos z}$;

б) $\underset{z=2}{res}\dfrac{z^2+1}{z-2}$;

в) $\underset{z=i}{res}\dfrac{e^{\pi z}}{z-i}$;

г) $\underset{z=0}{res}\, z\cdot e^{\frac{3}{z}}$.

15.29. а) $\underset{z=1}{res}\dfrac{z^6}{\left(z-1\right)^3}$;

б) $\underset{z=1}{res}\dfrac{e^{2z}}{\left(z-1\right)^5}$;

в) $\underset{z=2}{res}\left(z^3\cos\dfrac{1}{z-2}\right)$;

г) $\underset{z=\infty}{res}\left(z-1\right)e^{\frac{1}{z}}$.

15.30. а) $\underset{z=2}{res}\dfrac{e^z}{\left(z+1\right)^2}$;

б) $\underset{z=3}{res}\dfrac{\sin z\pi}{\left(z-3\right)^2}$;

в) $\underset{z=\infty}{res}\, z^2\sin\dfrac{1}{z}$;

г) $\underset{z=-1}{res}\, z^2\cdot e^{\frac{2}{1+z}}$.

Задача 16. Найти вычеты функции $f\left(z\right)$ во всех особых точках:

16.1. $f\left(z\right)=\dfrac{1}{z\left(z+5\right)^2}$;

16.2. $f\left(z\right)=\dfrac{z^2+1}{\left(z^2+9\right)^2}$;

16.3. $f\left(z\right)=\dfrac{z^2-4}{z^2\left(z+3\right)}$;

16.4. $f\left(z\right)=\dfrac{1}{\left(z-1\right)^2\left(z+3\right)}$;

16.5. $f\left(z\right)=\dfrac{3z^2+5z-4}{z^2\left(z-4\right)}$;

16.6. $f\left(z\right)=\dfrac{z}{\left(z^2+2z\right)^2}$;

16.7. $f(z)=\dfrac{z}{z^3-8}$;

16.8. $f(z)=\dfrac{z-1}{z^3+8}$;

16.9. $f(z)=\dfrac{2}{z^2(z+5)}$;

16.10. $f(z)=\dfrac{1}{z(z+1)^2}$;

16.11. $f(z)=\dfrac{2z^2}{(z^2-1)^2}$;

16.12. $f(z)=\dfrac{1}{(z^2-z)^2}$;

16.13. $f(z)=\dfrac{z-1}{(z^2+z)^2}$;

16.14. $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2(z-4)}$;

16.15. $f(z)=\dfrac{z+6}{z(z+1)^2}$;

16.16. $f(z)=\dfrac{z}{z^3+8}$;

16.17. $f(z)=\dfrac{1}{(z^2-3z+2)^2}$;

16.18. $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2(z-1)}$;

16.19. $f(z)=\dfrac{1}{z(z+4)^2}$;

16.20. $f(z)=\dfrac{1}{(z+2)^2(z-1)}$;

16.21. $f(z)=\dfrac{z^3+1}{z(z-1)^2}$;

16.22. $f(z)=\dfrac{z}{(z^2-1)^2}$;

16.23. $f(z)=\dfrac{1}{z^3-1}$;

16.24. $f(z)=\dfrac{z}{(z^2+1)^2}$;

16.25. $f(z)=\dfrac{2z^2+2z-1}{z^2(z+3)}$;

16.26. $f(z)=\dfrac{z^2-3z-1}{z(z-1)^2}$;

16.27. $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2(z+1)}$;

16.28. $f(z)=\dfrac{z^2-2z-2}{(z^2-1)z^2}$;

16.29. $f(z)=\dfrac{1}{z^3+1}$;

16.30. $f(z)=\dfrac{2}{z^3+z^2}$.

Задача 17. Вычислить интеграл $\int\limits_{\tilde{A}} f(z)\,dz$, где Г – отрезок прямой между точками $z_1,\ z_2$:

17.1. $f(z)=\overline{z}\cdot(1+z)^2,\quad z_1=2,\ z_2=2i$;

17.2. $f(z)=|z|\cdot\overline{z},\quad z_1=-1,\ z_2=i$;

17.3. $f(z)=\operatorname{Im}z\cdot(z+2),\quad z_1=0,\ z_2=2+2i$;

17.4. $f(z)=\operatorname{Re}z\cdot(1-z)^2,\quad z_1=i,\ z_2=-3$;

17.5. $f(z)=iz^2-z,\quad z_1=-2i,\ z_2=2$;

17.6. $f(z)=iz^3,\quad z_1=0,\ z_2=-1+i$;

17.7. $f(z)=\operatorname{Im}z\cdot(1-iz),\quad z_1=-2,\ z_2=2i$;

17.8. $f(z)=\operatorname{Re}z\cdot(1+iz),\quad z_1=1,\ z_2=i$;

17.9. $f(z)=(1-iz)^2\cdot z,\quad z_1=0,\ z_2=-2-2i$;

17.10. $f(z)=\overline{z}\cdot(1+i)^2,\quad z_1=-3i,\ z_2=3$;

17.11. $f(z)=i\operatorname{Im}z\cdot|z|,\quad z_1=2i,\ z_2=-2$;

17.12. $f(z)=i\operatorname{Re}z\cdot z^2,\quad z_1=0,\ z_2=3-3i$;

17.13. $f(z)=i^3\cdot(1-i)^3,\quad z_1=3,\ z_2=3i$;

17.14. $f(z)=2i\cdot(1+2i)^2,\quad z_1=-2,\ z_2=-2i$;

17.15. $f(z)=\overline{z}\cdot\operatorname{Im}z,\quad z_1=0,\ z_2=2+2i$;

17.16. $f(z)=i^5\operatorname{Re}z\cdot(1+i),\quad z_1=-3,\ z_2=-3i$;

17.17. $f(z)=i^3\cdot(2-z)^3,\quad z_1=-2i,\ z_2=4$;

17.18. $f(z)=\operatorname{Re}z\cdot|z|\cdot i^7,\quad z_1=0,\ z_2=-1+2i$;

17.19. $f(z)=\operatorname{Im}z\cdot|z|\cdot(1-i),\quad z_1=-3i,\ z_2=6$;

17.20. $f(z)=z\cdot\overline{z}\cdot\operatorname{Re}z,\quad z_1=2i,\ z_2=-4$;

17.21. $f(z)=i^3\cdot(-1-i)^2,\quad z_1=0,\ z_2=-2-3i$;

17.22. $f(z)=\operatorname{Im}z\cdot|z|\cdot i^5,\quad z_1=4,\ z_2=4i$;

17.23. $f(z)=\operatorname{Re}z\cdot(1-z)\cdot i^3,\quad z_1=-2,\ z_2=-4i$;

17.24. $f(z)=i^3\cdot\bar{z}+i,\quad z_1=0,\ z_2=2-4i$;

17.25. $f(z)=\operatorname{Re}z\cdot i^5+2,\quad z_1=2i,\ z_2=-6$;

17.26. $f(z)=\operatorname{Im}z\cdot(2+i)^3,\quad z_1=-4i,\ z_2=8$;

17.27. $f(z)=i^5\cdot(1-iz)^3,\quad z_1=0,\ z_2=2+3i$;

17.28. $f(z)=\bar{z}\cdot\operatorname{Re}z\cdot i^3,\quad z_1=3,\ z_2=6i$;

17.29. $f(z)=|z|\cdot i^5+z,\quad z_1=-3,\ z_2=-6i$;

17.30. $f(z)=\operatorname{Im}z\cdot i^7+iz,\quad z_1=0,\ z_2=-1+2i$.

Задача 18. Вычислить интеграл $\int\limits_C f(z)dz$ по замкнутому контуру C с помощью вычетов:

18.1. $\int\limits_{|z-3|=2}\dfrac{2z}{\cos z}\,\mathrm{d}z$;

18.2. $\int\limits_{|z+1|=2}\dfrac{\sin 3z}{z^2(z-2)^2}\,\mathrm{d}z$;

18.3. $\int\limits_{|z-i|=2}\dfrac{\sin z}{z^3}\,\mathrm{d}z$;

18.4. $\int\limits_{|z|=12} ze^{\frac{1}{z}}\,\mathrm{d}z$;

18.5. $\int\limits_{|z+1|=2}\dfrac{z^2-2}{(2z-3)z^2}\,\mathrm{d}z$;

18.6. $\int\limits_{|z+1-i|=2}\dfrac{\sin z}{z\cdot(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z$;

18.7. $\int\limits_{|z|=2}\dfrac{z+3}{(z-1)^2(z-3)}\,\mathrm{d}z$;

18.8. $\int\limits_{|z-i|=2}\dfrac{4}{(z^2+4)^2}\,\mathrm{d}z$;

18.9. $\int\limits_{|z+2i|=2}\dfrac{1-z}{(z+1)^2(z^2+1)}\,\mathrm{d}z$;

18.10. $\int\limits_{|z+3|=2}\dfrac{z+1}{(z+3)^2(z-2)^2}\,\mathrm{d}z$;

18.11. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin(z+1)}{z^2-1}\,dz$; **18.12.** $\oint\limits_{|z|=7} z^2 e^{\frac{3}{z}}\,dz$;

18.13. $\oint\limits_{|z+2i|=2} \frac{ze^z}{z^4+8z^2-9}\,dz$; **18.14.** $\oint\limits_{|z-2i|=2} \frac{z-8}{z^3+1}\,dz$;

18.15. $\oint\limits_{|z-i|=2} \frac{ze^z}{z^2+3z+2}\,dz$; **18.16.** $\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{\sin z}{z(z-1)^2}\,dz$;

18.17. $\oint\limits_{|z+i|=1} \frac{3z}{z^4-1}\,dz$; **18.18.** $\oint\limits_{|z-2+i|=2} \frac{z}{(z+3)(z-2)^2}\,dz$;

18.19. $\oint\limits_{|z+3+2i|=2} \frac{1}{z\cdot(z^2+6z+10)}\,dz$; **18.20.** $\oint\limits_{|z-4|=\frac{9}{2}} \frac{\sin 3z}{z^2(z^2+9)}\,dz$;

18.21. $\oint\limits_{|z+3|=2} \frac{e^{2z}}{z^2(z+2)^2}\,dz$; **18.22.** $\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{2z-3}{z^2(z+3)}\,dz$;

18.23. $\oint\limits_{|z-3|=2} \frac{\cos 2z}{z^3-8}\,dz$; **18.24.** $\oint\limits_{|z-2i|=2} \frac{z^3}{z^4-1}\,dz$;

18.25. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{4z}{\sin^2 z}\,dz$; **18.26.** $\oint\limits_{|z-1-i|=2} \frac{z}{(z+2)(z^2+1)^2}\,dz$;

18.27. $\oint\limits_{|z+3|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+2)^2(z-1)}\,dz$; **18.28.** $\oint\limits_{|z-2i|=\frac{3}{2}} \frac{\cos z}{z(z^2+2z+5)}\,dz$;

18.29. $\oint\limits_{|z-2|=\frac{3}{2}} \frac{e^{z-1}}{z(z-1)^2(z-4)}\,dz$; **18.30.** $\oint\limits_{|z+\frac{5}{2i}|=1} \frac{-z+4}{(z^2+4)(z^2-9)}\,dz$.

Задача 19. Найти и построить область сходимости ряда Лорана:

19.1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1-i}{2i}\right)^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3-4i}{z-1-i}\right)^n$;

19.2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+3i}{3}\right)^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{2+3i}\right)^n$;

19.3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{n!}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin in}{(z-i)^n}$;

19.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh} n}{(z-i)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{n!}$;

19.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot 3^n}{(z+2-i)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2-i)^n}{(4i+2)^n\cdot 7^n(3n-1)}$;

19.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2in}{(z+i-1)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z+i-1)^n}{(5i+3)^n\, n!(2n+n^3)}$;

19.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(z+3i-1)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z+3i-1)^n}{(4i+5)^n(2n+3)}$;

19.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(4+3i)^n}{(z-2)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^n}{(6+8i)^n(n^2+1)}$;

19.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n(z+3)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n(z+3)^n}{3n+1}$;

19.10. $-\frac{i}{2(z-i)}+\frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{(2i)^n}$;

19.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{(z+1)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{(i+n)^n}$;

19.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n+2}{(z+3i)^n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z+3i)^n}{3^{\pi}n!}$;

19.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^4 z^n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n\cdot 2^n}$;

19.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+i)z^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{2^{n+1}(n^2+3)}$;

19.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-2)^n}{n-i}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z+1)^n}{(2n-1)!}$;

19.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^{\pi}(z+i)^{\pi}}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2+i)^n(z+i)^n}{5n+1}$;

19.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n+4}{(z+2)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+2)^n}{(2i+1)}$;

19.18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cdot 3^{-n}}{(z+i-1)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2+i)(z+i-1)}{5n+1}$;

19.19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2 5^n}{(z+3-i)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+3-i)^n}{(2+4i)^{\pi}\cdot 3^n(2n+1)}$;

19.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3n+4)n^2}{(z+2)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+2)^n}{(2i-1)^n}$;

19.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{(z+2i+1)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+2i+1)^n}{(3i+5)^n(4n-1)}$;

19.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sh} n}{(z-2i)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z-2i)^n}{3^n+4}$;

19.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2\cdot 5^n}{(z+3-i)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+3-i)^n}{(4i+1)^n 2^n(n+3)}$;

19.24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(3n+4)}{(z-2)^n (5i+4)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{5^n (n^3+1)}$;

19.25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(z+3)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+3)^n}{(2i+1)^n (4^n+3)}$;

19.26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(z+3i-1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+3i-1)^n}{(5+4i)^n (3+2n)}$;

19.27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n (z+1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n (z+2)^n}{3n+2}$;

19.28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(z+1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{(n+i)^n}$;

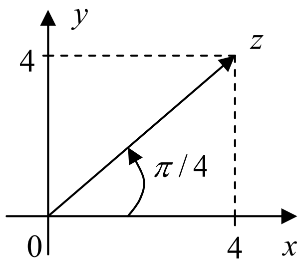
19.29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(z+i+1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1+i)^n}{(3i+1)^n (4n-1)}$;

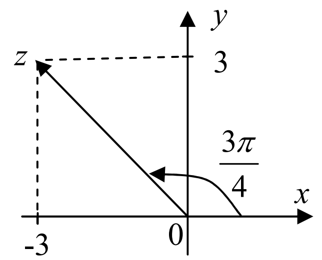
19.30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(z+2)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{(2i+1)^n (4^n+1)}$.

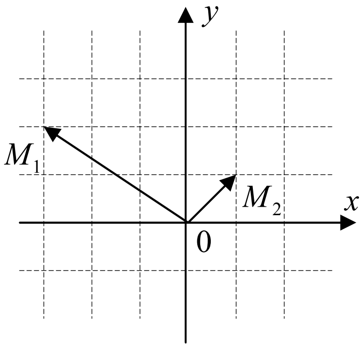
Тематические тестовые задания для самопроверки

№	Задания	Правильный ответ
1.	Вычислить $i^{-3}+\frac{2}{i^{15}}-i$. а) $2i$; б) $-i$; в) $1+i$; г) $-1+i$.	а)
2.	Дано: $z_1=1+i,\ z_2=2-i$. Тогда $\frac{z_1}{z_2}$ равно… а) $\frac{1}{2}-i$; б) $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$; в) $\frac{1}{3}+i$; г) $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$.	б)
3.	Комплексные числа $z_1=a+2i$ и $z_2=4+2bi$ являются комплексно-сопряженными при… а) $a=4;\ b=1$; б) $a=-4;\ b=-1$; в) $a=4;\ b=-1$; г) $a=-4;\ b=1$.	в)
4.	Если $z=3-i$, тогда $\overline{z}$ имеет вид… а) $-3-i$; б) $3+i$; в) $\frac{1}{3-i}$; г) $-3+i$	б)
5.	Модуль комплексного числа $z=3-4i$ равен… а) 5; б) –5; в) 3; г) 4.	а)
6.	Как связаны модули двух сопряженных комплексных чисел. а) $\lvert z\rvert>\lvert\overline{z}\rvert$; б) $\lvert z\rvert=\lvert\overline{z}\rvert$; в) $\lvert z\rvert<\lvert\overline{z}\rvert$; г) $\lvert z\rvert=2\lvert\overline{z}\rvert$	б)
7.	Корнями уравнения $z^2-2iz-5=0$ являются… а) $2\pm i$; б) $i\pm 2$; в) $\pm 2i$; г) $1\pm 2i$.	б)

8.	Какие из перечисленных комплексных чисел записаны в тригонометрической форме: $z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $z_2 = -2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, $z_3 = 4\left(\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}\right)$, $z_4 = -3\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$, $z_5 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$. а) z_1, z_4; б) z_2, z_4; в) z_1, z_5; г) z_3	в)
9.	Дано комплексное число $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{21} + i\sin\frac{\pi}{21}\right)$. Тогда z^4 равно… а) $81\left(\cos\frac{\pi}{21} + i\sin\frac{\pi}{21}\right)$; б) $3\left(\cos\frac{4\pi}{21} + i\sin\frac{4\pi}{21}\right)$; в) $81\left(\cos^4\frac{\pi}{21} + i\sin^4\frac{\pi}{21}\right)$; г) $81\left(\cos\frac{4\pi}{21} + i\sin\frac{4\pi}{21}\right)$.	в)
10.	Мнимая часть комплексного числа $z = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^2$ имеет вид… а) $\sin\frac{\pi}{3}$; б) $\sin\frac{2\pi}{3}$; в) $i\sin\frac{2\pi}{3}$; г) $i\sin\frac{\pi}{3}$.	б)

11.	Тригонометрическая форма комплексного числа $z=\left(1+i\sqrt{3}\right)^3$ имеет вид… а) $2\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)$; б) $8\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)$; в) $2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; в) $8\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.	б)
12.	 На рисунке представлена геометрическая иллюстрация комплексного числа $z=x+iy$. Тогда тригонометрическая форма этого числа имеет вид… а) $8\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; б) $4\left(\sin\frac{\pi}{4}+i\cos\frac{\pi}{4}\right)$; в) $4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; г) $4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.	в)
13.	Произведение двух комплексных чисел $z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15}\right)$ и $z_2=3\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)$ равно… а) $6\left(\cos\frac{4\pi}{15}+i\sin\frac{4\pi}{15}\right)$; б) $-6\left(\cos\left(\frac{\pi}{15}+\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{15}+\frac{\pi}{5}\right)\right)$; в) $\sqrt{6}\left(\cos\frac{4\pi}{15}+i\sin\frac{4\pi}{15}\right)$.	а)

14.	 На рисунке представлена геометрическая иллюстрация комплексного числа $z = x + iy$. Тогда показательная форма этого числа имеет вид… а) $3e^{\frac{3\pi}{4}i}$; б) $3\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$; в) $\sqrt{3}e^{\frac{3\pi}{4}i}$; г) $2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$.	б)
15.	Показательная форма комплексного числа $z = \frac{2}{1+i}$ имеет вид… а) $\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$; б) $\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{3}i}$; в) $\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i+2\pi n}$; г) $2e^{-\frac{\pi}{3}i}$.	а)
16.	Показательная форма комплексного числа $1-i^{25}$ имеет вид… а) $2e^{-\frac{\pi}{4}i}$; б) $2e^{\frac{\pi}{4}i}$; в) $\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$.	в)
17.	Алгебраическая форма комплексного числа $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ имеет вид… а) $2-i$; б) $3+\sqrt{3}i$; в) $\sqrt{3}+i$; г) $1+\sqrt{3}i$.	в)
18.	Алгебраическая форма комплексного числа $z = e^{\frac{\pi}{2}i}$ имеет вид… а) i; б) 1; в) $-i$.	а)

19.	 Комплексные числа z_1 и z_2 заданы соответственно радиус-векторами $\overline{\mathrm{OM}_1}$ и $\overline{\mathrm{OM}_2}$. Тогда сумма $z_1 + z_2$, записанная в алгебраической форме, имеет вид… а) $-4+i$; б) $-2+3i$; в) $2-3i$; г) $4-i$.	б)
20.	Если $f(z) = 2z^2 + 4$, тогда значение производной этой функции в точке $z_0 = 2+i$ равно… а) $2+i$; б) $4+4i$; в) $8+4i$; г) $8+i$.	в)
21.	Если $z = x+iy$ и $f(z) = e^{-4z}$, то $f'(z)$ имеет вид… а) $-4e^{-4x}(\cos 4y - i\sin 4y)$; б) $e^{-4x}(\cos 4y - i\sin 4y)$; в) $-4e^{-4x}(\cos 4y + i\sin 4y)$; г) $e^{-4x}(\sin 4y + i\cos 4y)$.	в)
22.	У аналитической функции $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ известна действительная часть $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$. Тогда мнимая часть $v(x,y)$ может иметь вид… а) $3xy + y^3$; б) $-3xy^2 + y^3$; в) $3x^2y - y^3$; г) $3xy - y^2$.	в)

23.	Образом точки $z_0 = \dfrac{1+i}{2}$ при отображении $W = (z-i)^2$ является… а) $-\dfrac{i}{2}$; б) $1-\dfrac{i}{2}$; в) $\dfrac{i}{2}$; г) $-2-\dfrac{3}{2}i$.	а)
24.	Отображения w_0 точки $z_0 = \sqrt{3}+i$ функцией $w = \ln z$ равно… а) $\ln 2$; б) $\ln 2 + i\left(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k\right), k \in z$; в) $\ln 2 + i\left(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k\right), k \in z$; г) $\ln 2 + i\left(\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k\right), k \in z$.	в)
25.	Точка $z = 2i$ для функции $f(z) = \dfrac{1}{z\left(z^2+4\right)^2}$ является полюсом… а) 5 порядка; б) 4 порядка; в) 2 порядка; г) 1 порядка.	в)
26.	Особыми точками функции $f(z) = \dfrac{z+2i}{z^3+8i}$ являются… а) $z_1 = i,\ z_2 = -2i,\ z_3 = 2i$; б) $z_1 = 2i,\ z_2 = \sqrt{3}-i,\ z_3 = -\sqrt{3}-i$; в) $z_1 = \sqrt{3}+i,\ z_2 = -2i,\ z_3 = 2i$.	б)
27.	Вычет функции $f(z) = \dfrac{z+2}{z^2-2z-3}$ в точке $z = 3$ равен… а) $\dfrac{1}{4}$; б) $-\dfrac{3}{4}$; в) $\dfrac{5}{4}$; г) 4.	в)

28.	Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{2^n n}$ равен… а) 2; б) $1/2$; в) 1; г) –2.	а)
29.	Ряд Тейлора для функции $f(z)$, аналитической в точке z_0 имеет вид… 1) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$, $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$, $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{(z-z_0)^n}$, $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. а) 1), 2); б) 1), 3); в) 2).	б)
30.	Интеграл $\int_{\gamma}\frac{e^z}{z}dz$, где γ – окружность $\lvert z\rvert = 1$, равен... а) $2\pi i f(0)$; б) $2\pi i\, e$; в) $2\pi\, e^i$.	а)

II. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Задача 1. Найти изображения $F(p)$ следующих функций:

1.1. а) $f(t) = \operatorname{ch} 3t + 4e^{-2t} + 1$;

б) $f(t) = \cos^2 3t - t^2 + \sin t \cdot \sin 2t$.

1.2. а) $f(t) = t \cdot e^{3t} - \cos 4t + 3 \operatorname{sh} 2t$;

б) $f(t) = t^2 \cdot e^{-5t} + \sin^2 5t + \dfrac{cht}{\sqrt{t}}$.

1.3. а) $f(t) = e^{-3t} \cdot (\cos 4t + \sin 5t) - t^3 \cdot e^{2t}$;

б) $f(t) = \cos 5t \cdot \cos t + e^{3t} \cdot \operatorname{ch} t + \dfrac{\operatorname{sh} t}{\sqrt{t}}$.

1.4. а) $f(t) = t^3 \cdot e^t + e^{2t} \cdot \sin 3t + t \cdot \sin t$;

б) $f(t) = t \cdot e^{t-3} + \cos 5t \cdot \cos 3t - \dfrac{\cos t}{\sqrt{t}}$.

1.5. а) $f(t) = \dfrac{t^6 \cdot e^{-3t}}{6!} + t \cdot \operatorname{ch} 4t + t^2 \cdot e^{5t}$;

б) $f(t) = \sin 3t \cdot \sin 2t + \cos^2 5t + \dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}$.

1.6. а) $f(t) = t \cdot \sin 2t + \cos 2t \cdot \cos 5t + 1$;

б) $f(t) = \cos^3 t + t^3 \cdot e^{t+3} - \dfrac{\operatorname{sh} t}{\sqrt{t}}$.

1.7. а) $f(t) = \dfrac{t^5}{2} - \sin^2 3t + e^{2t} \cdot \cos 5t$;

б) $f(t) = e^{-t} \cdot \cos^2 t + t \cdot \cos 2t + e^{2t} \cdot \operatorname{ch} 3t$.

1.8. а) $f(t) = \dfrac{t^5 \cdot e^{3t}}{5!} + e^{-4t} \cdot \operatorname{ch} 3t + 5$;

б) $f(t) = 3\cos^2 5t - \dfrac{\cos t}{\sqrt{t}} + t^2 \cdot e^{t+2}$.

1.9. а) $f(t)=\cos 3t\cdot\cos 2t+t^4-5\,\mathrm{sh}\,3t$;

б) $f(t)=t^5\cdot e^{2t}+\dfrac{cht}{\sqrt{t}}-\sin t\cdot\sin 6t$.

1.10. а) $f(t)=t\cdot e^{-t+2}+t\cdot\cos t-3\,\mathrm{sh}\,5t$;

б) $f(t)=e^{4t}sh3t-\dfrac{\sin 5t}{\sqrt{t}}+t^3\cdot e^{2t}$.

1.11. а) $f(t)=t^4\cdot e^{7t}-2+5\,\mathrm{sh}\,8t$;

б) $f(t)=te^{2t}\sin 3t+e^{5t}\cos^2 4t+\dfrac{\mathrm{sh}\,6t}{\sqrt{t}}$.

1.12. а) $f(t)=\dfrac{\sin^2 8t}{3}+2t^2-e^{2t}\cos 3t$;

б) $f(t)=e^{4t}\,\mathrm{ch}\,2t+e^{-3t}\cos 4t+t^3e^{-5t}$.

1.13. а) $f(t)=4+\dfrac{\cos^2 t}{5}+\sin 4t\cdot\sin 6t$;

б) $f(t)=e^{3t}\sin t\sin 4t-\dfrac{\sin 3t}{\sqrt{t}}+t^2e^{t-5}$.

1.14. а) $f(t)=3\sin^2 7t-t\cos 2t+t^7$;

б) $f(t)=\left(t^2-t+1\right)\cos 3t+\dfrac{\mathrm{ch}\,5t}{\sqrt{t}}$.

1.15. а) $f(t)=6+\cos 8t\cdot\cos 2t-t\cdot\cos t$;

б) $f(t)=\dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}+e^{3t}\sin 5t+\cos^2 5t$.

1.16. а) $f(t)=\mathrm{ch}\,3t\cos 5t+\dfrac{t^7e^{3t}}{7!}+e^{-3t+2}$;

б) $f(t)=\dfrac{\cos 4t}{\sqrt{t}}-t^3e^{5t}+t\cdot\sin t\cdot\sin 3t$.

1.17. а) $f(t)=\sin 3t\sin 4t+t^5-e^{4t}\,\mathrm{sh}\,3t$;

б) $f(t)=\frac{\sin^2 t}{\sqrt{t}}+t^2e^{4t}-6t\cdot sh8t$.

1.18. а) $f(t)=e^{-3t}\,\mathrm{sh}\,4t+e^{2t}t^2+\frac{t^3e^{2t}}{3!}$;

б) $f(t)=-\frac{\cos^2 t}{\sqrt{t}}+7t^3\cdot\cos t+\frac{t^4e^{2t}}{3!}$.

1.19. а) $f(t)=e^{5t}\cdot\sin 2t+t^4\cdot 3!-3!$;

б) $f(t)=t\cdot\sin 5t+\frac{\sin 3t}{\sqrt{t}}+e^{-4t}t^3$.

1.20. а) $f(t)=\frac{\sin^2 4t}{5}-\frac{1}{5!}+2t^3e^{4t}$;

б) $f(t)=e^{-4t}\cos t\cos 4t+\frac{\cos 2t}{\sqrt{t}}+t$.

1.21. а) $f(t)=t\left(\mathrm{sh}\,t+e^{-2t}\right)+t^3e^{5t}$;

б) $f(t)=\frac{sh3t}{\sqrt{t}}-t^5e^{4t}+e^{6t}\sin 3t$.

1.22. а) $f(t)=\frac{\sin 3t\cdot\sin 7t}{3!}-e^{5t}sh3t+2!$;

б) $f(t)=(t+2)\cos 3t+t^2e^{-5t}+\frac{\sin t}{\sqrt{t}}$.

1.23. а) $f(t)=\mathrm{sh}\,2t\cdot\sin 5t+e^{4t}\cos 3t+t^2e^{-3t}$;

б) $f(t)=\frac{ch5t}{\sqrt{t}}-\frac{t^3e^{-4t}}{3!}+3!\cos^2 3t$.

1.24. а) $f(t)=\frac{\cos 5t\cdot\cos 8t}{2!}-2!+t^3e^{4t}$;

б) $f(t)=e^{2t}\cos 2t\cdot\cos t-\mathrm{sh}\,3t\cdot\cos^2 t+\frac{t^7e^{2t}}{7!}$.

1.25. а) $f(t)=\cos^2 3t+t\cdot\sin 2t+e^{-4t}\,\mathrm{sh}\,3t$;

б) $f(t)=\dfrac{\cos 7t\cdot\cos 2t}{7!}-7!\cdot t^3\cdot e^{8t}+sh3t\cdot e^{2t}$.

1.26. а) $f(t)=\dfrac{\sin^2 3t}{4!}-e^{8t}ch3t+2!$;

б) $f(t)=\sin^3 4t+t^2e^{-3t}+\dfrac{t^4e^{-3t}}{4!}$.

1.27. а) $f(t)=t^7\cdot e^{2t}-7!+e^{4t}sh2t$;

б) $f(t)=\dfrac{\operatorname{ch} t}{\sqrt{t}}+e^{-4t}\operatorname{sh} 3t+e^t\cos^2 t$.

1.28. а) $f(t)=\dfrac{\cos 9t\cdot\cos t}{3!}+3!\cdot t^3\cdot e^3-\dfrac{\cos 5t}{2}$;

б) $f(t)=\dfrac{t^7\cdot e^{2t}}{7!}+\dfrac{\sin 4t}{\sqrt{t}}+e^t\operatorname{sh} 3t$.

1.29. а) $f(t)=\dfrac{t^5}{5!}-5!+t\cdot e^{5t}$;

б) $f(t)=t^4\cdot e^{2+t}+\cos 3t\cdot\operatorname{ch} 3t-t\cdot e^{-t}\sin 2t$.

1.30. а) $f(t)=\dfrac{\cos 4t\cdot\cos t}{2}-2!\cdot e^{2t}\cdot t^2+2!$;

б) $f(t)=t\cdot e^{3t}\cdot\cos 2t+\dfrac{t^9\cdot e^{-3t}}{9!}+t^2\cdot e^{t-2}$.

Задача 2. Используя теорему об интегрировании изображения найти изображение следующих функций:

2.1. $f(t)=\dfrac{1-e^t}{t}$.

2.2. $f(t)=e^{2t}\cdot\dfrac{\cos 7t-\cos t}{t}$.

2.3. $f(t)=\dfrac{\sin t}{t}$.

2.4. $f(t)=e^{2t}\cdot\dfrac{\sin 3t\cdot\sin t}{t}$.

2.5. $f(t)=\dfrac{1-\cos t}{t}$.

2.6. $f(t)=e^{3t}\cdot\dfrac{\sin^2 t}{t}$.

2.7. $f(t)=\dfrac{e^{3t}-1}{t}$.

2.8. $f(t)=e^{5t}\cdot\dfrac{\operatorname{sh}3t}{t}$.

2.9. $f(t)=\dfrac{\cos 4t-\cos t}{t}$.

2.10. $f(t)=e^{4t}\cdot\dfrac{e^{3t}-1}{t}$.

2.11. $f(t)=\dfrac{e^{t}-e^{2t}}{t}$.

2.12. $f(t)=e^{-3t}\cdot\dfrac{\cos t-\cos 3t}{t}$.

2.13. $f(t)=\dfrac{\sin 5t-\sin t}{t}$.

2.14. $f(t)=e^{5t}\,\dfrac{\sin^2 t}{t}$.

2.15. $f(t)=\dfrac{e^{t}-1-t}{t}$.

2.16. $f(t)=e^{5t}\cdot\dfrac{\operatorname{sh}t}{t}$.

2.17. $f(t)=\dfrac{\operatorname{sh}t}{t}$.

2.18. $f(t)=e^{-4t}\cdot\dfrac{e^{5t}-e^{6t}}{t}$.

2.19. $f(t)=\dfrac{e^{3t}-e^{4t}}{t}$.

2.20. $f(t)=e^{3t}\cdot\dfrac{\operatorname{sh}8t}{t}$.

2.21. $f(t)=\dfrac{\sin^2 t}{t}$.

2.22. $f(t)=e^{2t}\cdot\dfrac{1-\cos 3t}{t}$.

2.23. $f(t)=e^{-3t}\cdot\dfrac{\sin t}{t}$.

2.24. $f(t)=e^{-4t}\cdot\dfrac{\sin^2 t}{t}$.

2.25. $f(t)=e^{-2t}\cdot\dfrac{1-\cos t}{t}$.

2.26. $f(t)=e^{7t}\cdot\dfrac{\operatorname{sh}3t}{t}$.

2.27. $f(t)=\dfrac{\operatorname{sh}2t}{t}$.

2.28. $f(t)=e^{4t}\cdot\dfrac{\cos 3t-1}{t}$.

2.29. $f(t)=\dfrac{2-e^{3t}}{t}$.

2.30. $f(t)=e^{2t}\cdot\dfrac{\cos 8t-\cos t}{t}$.

Задача 3. Используя теорему об интегрировании оригинала, найти изображения следующих функций:

3.1. $\int\limits_0^t \sin t\,\mathrm{d}t$.

3.2. $\int\limits_0^t t^2e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

3.3. $\int\limits_0^t \operatorname{ch} 4t \,\mathrm{d}t$.

3.4. $\int\limits_0^t \operatorname{sh} 3t \,\mathrm{d}t$.

3.5. $\int\limits_0^t t^3 e^{-2t} \,\mathrm{d}t$.

3.6. $\int\limits_0^t \cos^2 2t \,\mathrm{d}t$.

3.7. $\int\limits_0^t t \cdot \sin 2t \,\mathrm{d}t$.

3.8. $\int\limits_0^t t \cdot e^t \cdot \sin 2t \,\mathrm{d}t$.

3.9. $\int\limits_0^t t \cdot \cos 4t \,\mathrm{d}t$.

3.10. $\int\limits_0^t t \cdot \cos^2 t \,\mathrm{d}t$.

3.11. $\int\limits_0^t t \cdot \sin^2 3t \,\mathrm{d}t$.

3.12. $\int\limits_0^t t^3 e^t \,\mathrm{d}t$.

3.13. $\int\limits_0^t t \cdot e^{2t} \cos 3t \,\mathrm{d}t$.

3.14. $\int\limits_0^t \left(t - \cos t\right) \mathrm{d}t$.

3.15. $\int\limits_0^t \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t$.

3.16. $\int\limits_0^t \left(\sin t + t^2\right) \mathrm{d}t$.

3.17. $\int\limits_0^t e^{-t} t^3 \,\mathrm{d}t$.

3.18. $\int\limits_0^t t \cdot e^{2t} \cos 3t \,\mathrm{d}t$.

3.19. $\int\limits_0^t t \cdot \sin^2 t \,\mathrm{d}t$.

3.20. $\int\limits_0^t t^3 \cdot e^{-3t} \,\mathrm{d}t$.

3.21. $\int\limits_0^t e^{-2t} \cos^2 t \,\mathrm{d}t$.

3.22. $\int\limits_0^t e^{2t} \operatorname{sh} 3t \,\mathrm{d}t$.

3.23. $\int\limits_0^t e^{2t} t^5 \,\mathrm{d}t$.

3.24. $\int\limits_0^t t^3 \operatorname{sh} t \,\mathrm{d}t$.

3.25. $\int\limits_0^t \operatorname{sh} 2t \cdot \sin 3t \,\mathrm{d}t$.

3.26. $\int\limits_0^t t^3 \cdot e^{4t} \,\mathrm{d}t$.

3.27. $\int\limits_0^t \operatorname{ch} t \cdot \cos 2t \, \mathrm{d}t$.

3.28. $\int\limits_0^t t \cdot e^{5t} \cdot \sin t \, \mathrm{d}t$.

3.29. $\int\limits_0^t \frac{\sin 3t}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$.

3.30. $\int\limits_0^t t \cdot e^{2t} \cdot \cos 3t \, \mathrm{d}t$.

Задача 4. Используя теоремы опережения и запаздывания найти изображения $F(p)$ соответствующих оригиналов:

4.1. а) $f(t) = \sin(t+2)$; б) $f(t) = (3t-9)^5$.

4.2. а) $f(t) = \operatorname{sh}(t+3)$; б) $f(t) = \cos^2(t-2)$.

4.3. а) $f(t) = \operatorname{ch}(t+2)$; б) $f(t) = (4t-16)^3$.

4.4. а) $f(t) = \cos(t+3)$; б) $f(t) = \sin^2(t-3)$.

4.5. а) $f(t) = (t+4)^2$; б) $f(t) = \operatorname{ch}(3t-9)$.

4.6. а) $f(t) = \sin(t+4)$; б) $f(t) = (5t-10)^4$.

4.7. а) $f(t) = \operatorname{sh}(t+5)$; б) $f(t) = \cos(3t-9)$.

4.8. а) $f(t) = \operatorname{ch}(t+4)$; б) $f(t) = \sin(5t-25)$.

4.9. а) $f(t) = \cos(t+2)$; б) $f(t) = (4t-8)^5$.

4.10. а) $f(t) = (t+2)^2$; б) $f(t) = \cos^2(t-4)$.

4.11. а) $f(t) = \sin(t+5)$; б) $f(t) = \operatorname{ch}(4t-16)$.

4.12. а) $f(t) = \operatorname{sh}(t+6)$; б) $f(t) = (6t-12)^3$.

4.13. а) $f(t) = \operatorname{ch}(t+9)$; б) $f(t) = \sin(4t-24)$.

4.14. а) $f(t) = \cos(t+7)$; б) $f(t) = (4t-12)^6$.

4.15. а) $f(t) = (t+3)^2$; б) $f(t) = \sin^2(t-5)$.

4.16. а) $f(t) = \sin(8t+16)$; б) $f(t) = \cos(3t-12)$.

4.17. а) $f(t) = \operatorname{sh}(2t+4)$; б) $f(t) = (3t-15)^3$.

4.18. а) $f(t) = \operatorname{ch}(3t+6)$; б) $f(t) = \sin(8t-16)$.

4.19. а) $f(t)=\cos(4t+8)$; б) $f(t)=\operatorname{sh}(3t-18)$.

4.20. а) $f(t)=(3t+9)^2$; б) $f(t)=\cos^2(t-6)$.

4.21. а) $f(t)=\sin(2t+4)$; б) $f(t)=(6t-18)^5$.

4.22. а) $f(t)=\operatorname{sh}(5t+10)$; б) $f(t)=\cos(7t-14)$.

4.23. а) $f(t)=\operatorname{ch}(6t+12)$; б) $f(t)=\sin(9t-18)$.

4.24. а) $\cos(7t+14)$; б) $f(t)=(3t-9)^4$.

4.25. а) $f(t)=(5t+15)^2$; б) $f(t)=\sin^2(t-7)$.

4.26. а) $f(t)=\sin(3t+12)$; б) $f(t)=\operatorname{ch}(4t-20)$.

4.27. а) $f(t)=\operatorname{sh}(4t+16)$; б) $f(t)=(7t-21)^5$.

4.28. а) $f(t)=\operatorname{ch}(5t+20)$; б) $f(t)=\sin(5t-20)$.

4.29. а) $f(t)=\cos(6t+18)$; б) $f(t)=\operatorname{sh}(5t-15)$.

4.30. а) $f(t)=(7t+21)^2$; б) $f(t)=\cos^2(t-4)$.

Задача 5. Найти свертки заданных оригиналов и изображения сверток:

5.1. $f_1(t)=\cos t$; $f_2(t)=\sin t$.

5.2. $f_1(t)=t$; $f_2(t)=e^{3t}$.

5.3. $f_1(t)=e^{2t}$; $f_2(t)=e^{-4t}$.

5.4. $f_1(t)=e^{4t}$; $f_2(t)=\sin 2t$.

5.5. $f_1(t)=\cos 4t$; $f_2(t)=\cos 6t$.

5.6. $f_1(t)=e^{3t}$; $f_2(t)=\sin 5t$.

5.7. $f_1(t)=t$; $f_2(t)=t\cdot e^{2t}$.

5.8. $f_1(t)=t$; $f_2(t)=\sin t$.

5.9. $f_1(t)=\cos 2t$; $f_2(t)=\sin 2t$.

5.10. $f_1(t)=t^2$; $f_2(t)=\cos 2t$.

5.11. $f_1(t) = t$; $f_2(t) = t \cdot \sin t$.

5.12. $f_1(t) = \sin 4t$; $f_2(t) = \sin 2t$.

5.13. $f_1(t) = \operatorname{sh} t$; $f_2(t) = \operatorname{ch} t$.

5.14. $f_1(t) = \cos t$; $f_2(t) = t^3$.

5.15. $f_1(t) = e^{4t}$; $f_2(t) = t^2$.

5.16. $f_1(t) = \sin t$; $f_2(t) = t^2$.

5.17. $f_1(t) = t^2$; $f_2(t) = t \cdot e^{4t}$.

5.18. $f_1(t) = 4t$; $f_2(t) = e^{2t}$.

5.19. $f_1(t) = t^2$; $f_2(t) = \sin t$.

5.20. $f_1(t) = t^2$; $f_2(t) = e^{3t}$.

5.21. $f_1(t) = t \cdot \cos t$; $f_2(t) = t$.

5.22. $f_1(t) = t \cdot \sin t$; $f_2(t) = t$.

5.23. $f_1(t) = 5t$; $f_2(t) = t \cdot e^{3t}$.

5.24. $f_1(t) = t^2$; $f_2(t) = e^{7t}$.

5.25. $f_1(t) = \operatorname{sh} t$; $f_2(t) = \cos 2t$.

5.26. $f_1(t) = \sin 3t$; $f_2(t) = \operatorname{ch} t$.

5.27. $f_1(t) = e^{3t}$; $f_2(t) = \operatorname{sh} t$.

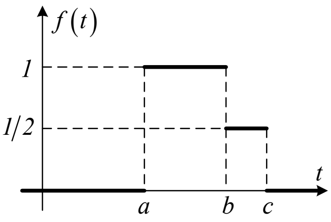
5.28. $f_1(t) = \operatorname{ch} t$; $f_2(t) = e^{4t}$.

5.29. $f_1(t) = t$; $f_2(t) = t \cdot \cos t$.

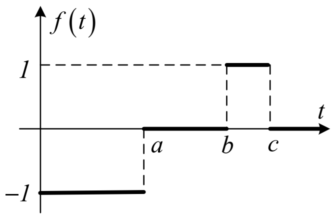
5.30. $f_1(t) = t \cdot \operatorname{sh} t$; $f_2(t) = t$.

Задача 6. По данному графику оригинала найти:
а) изображение ступенчатой функции, используя теорему запаздывания;
б) изображение для периодической функции;
в) изображение, используя преобразование Лапласа.

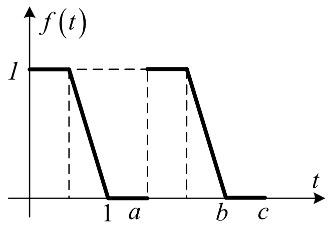
6.1. а)



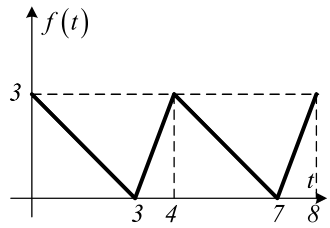
6.2. а)



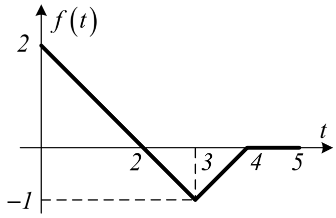
б)



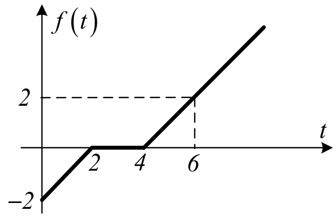
б)



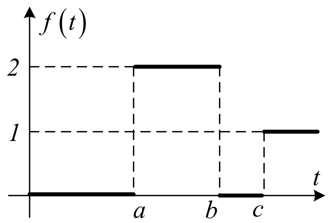
в)



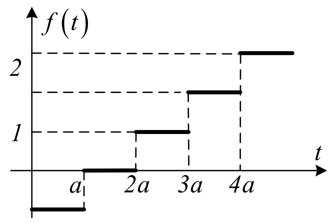
в)



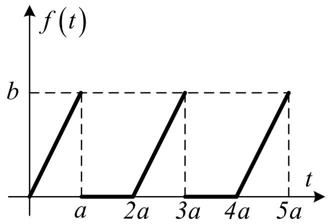
6.3. а)



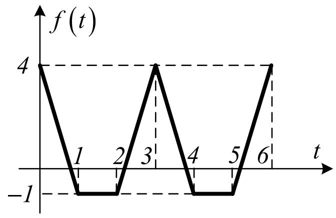
6.4. а)



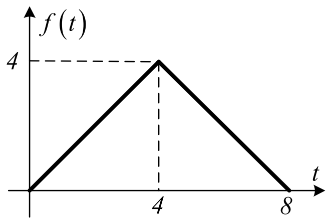
б)



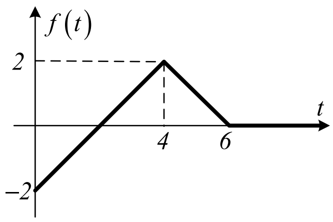
б)



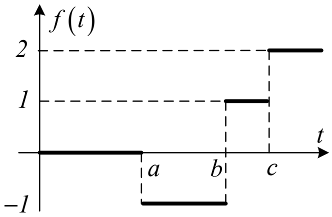
в)



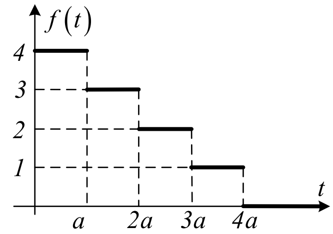
в)



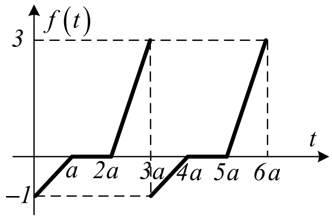
6.5. а)



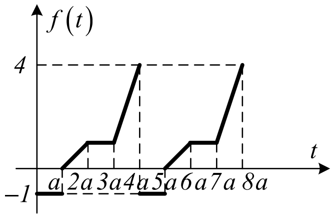
6.6. а)



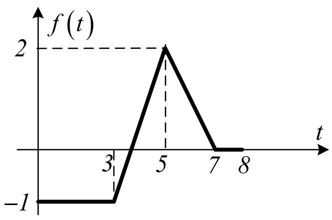
б)



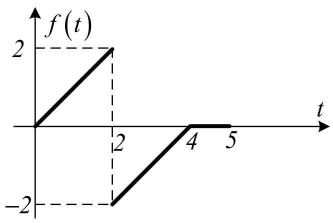
б)



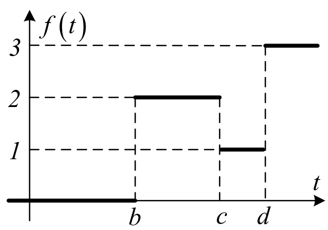
в)



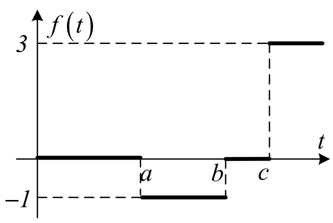
в)



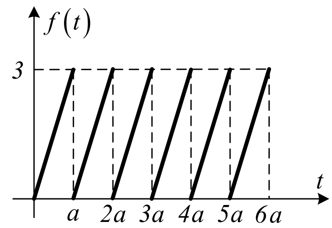
6.7. а)



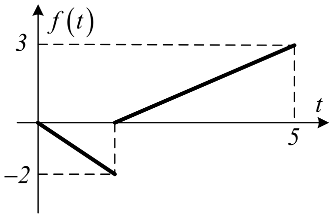
6.8. а)



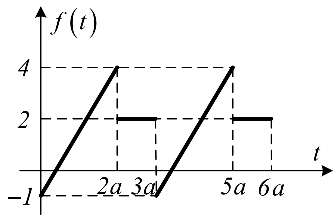
б)



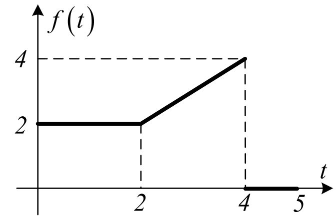
в)



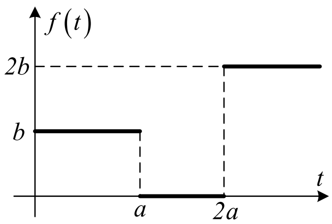
б)



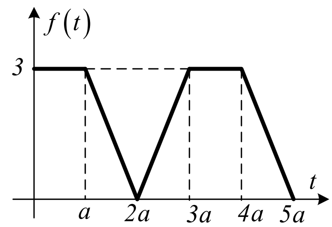
в)



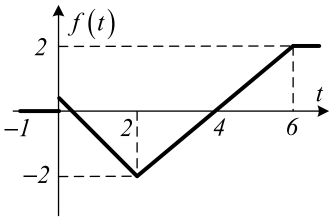
6.9. а)



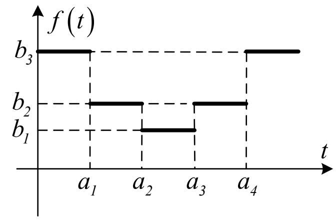
б)



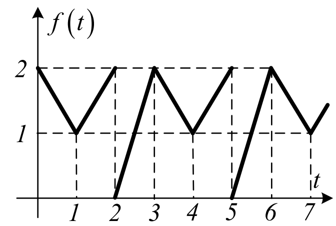
в)



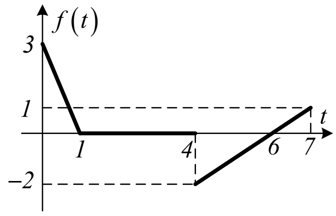
6.10. а)

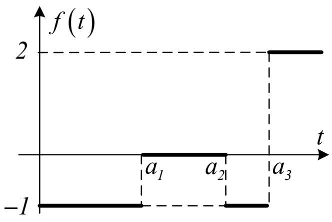


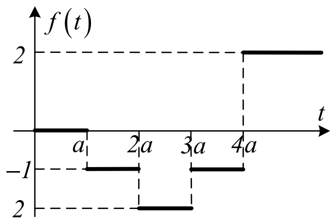
б)

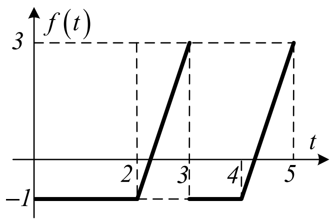


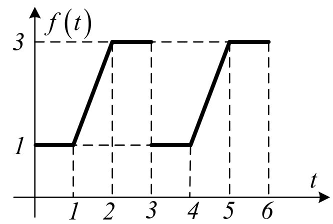
в)

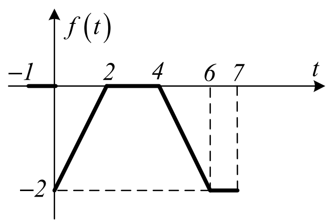


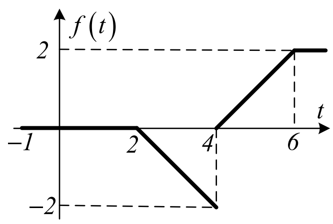
6.11. а)


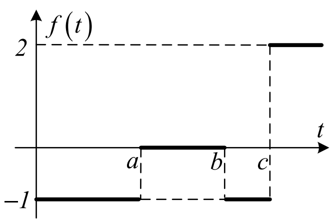
6.12. а)


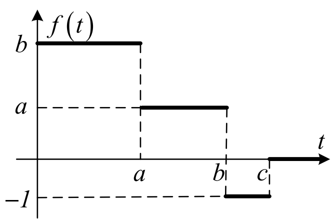
б)


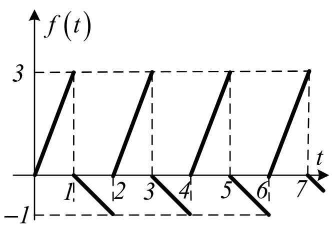
б)


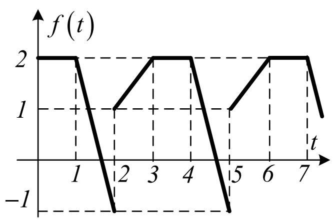
в)


в)


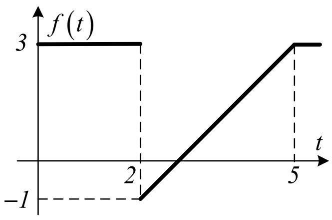
6.13. а)


6.14. а)


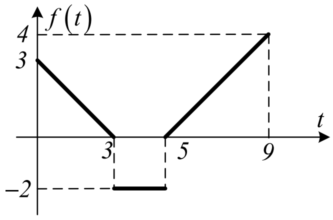
б)


б)


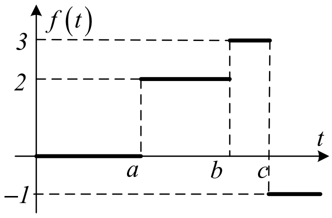
в)



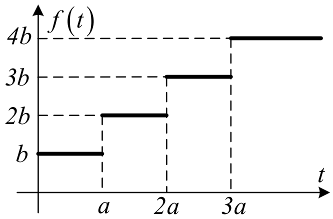
в)



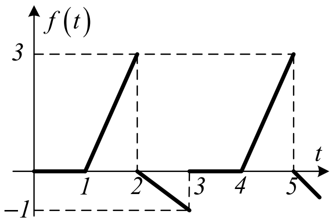
6.15. а)



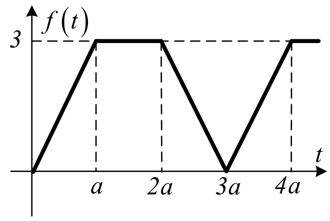
6.16. а)



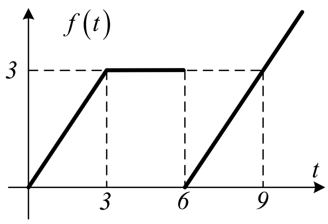
б)



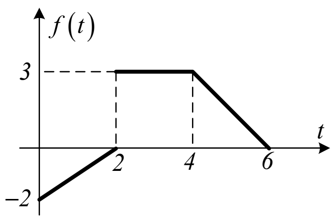
б)



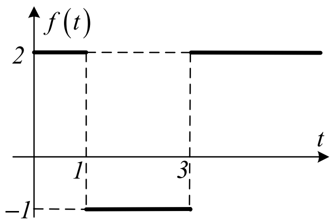
в)



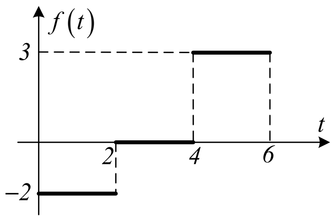
в)



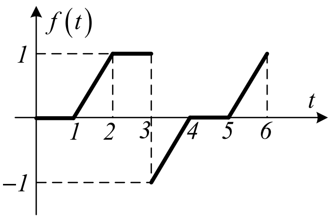
6.17. а)



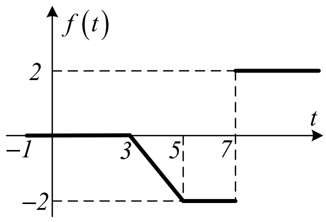
6.18. а)



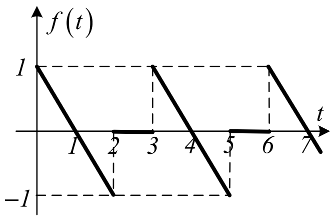
б)



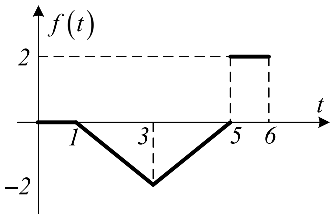
в)



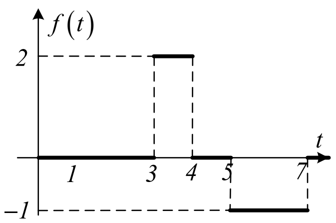
б)



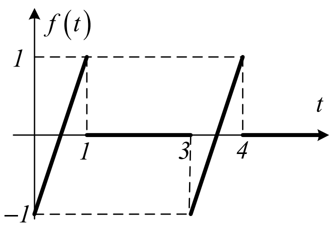
в)



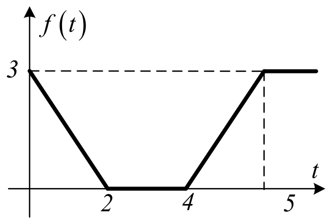
6.19. а)



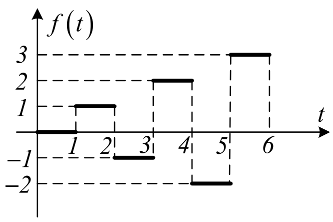
б)



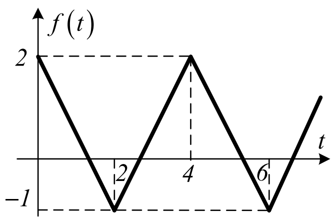
в)



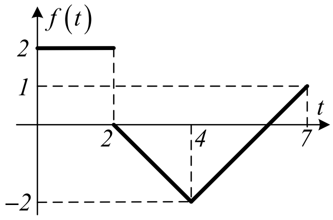
6.20. а)



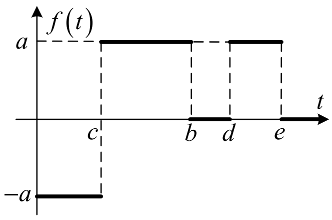
б)



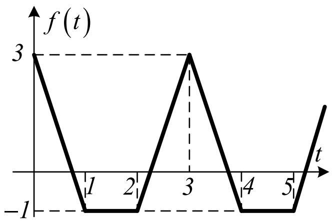
в)



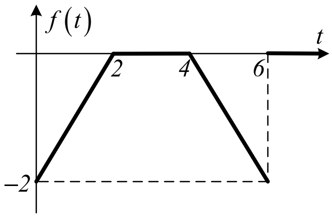
6.21. а)



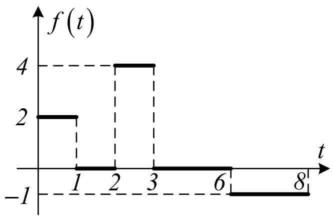
б)



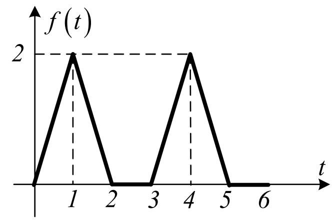
в)



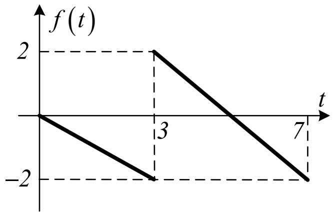
6.22. а)



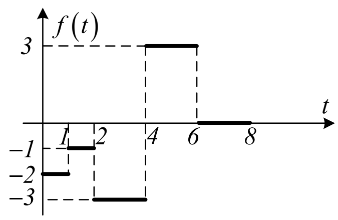
б)



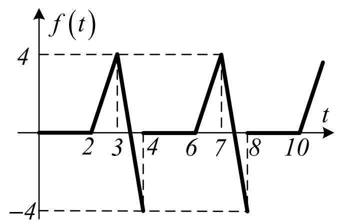
в)



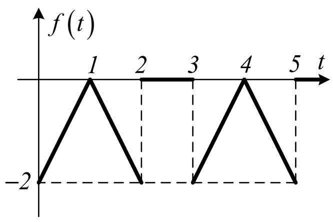
6.23. а)



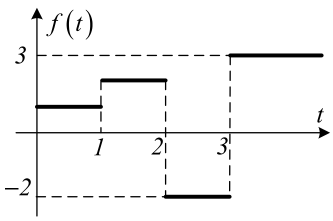
б)



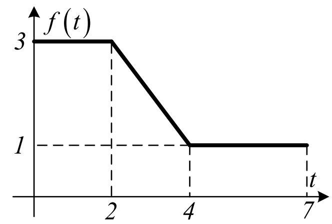
6.24. а)



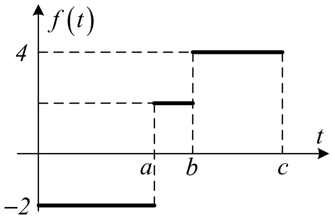
б)



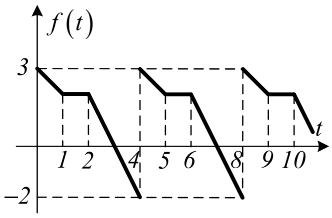
в)



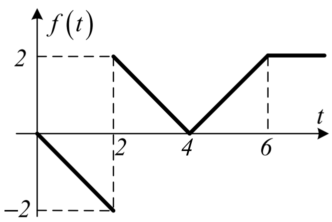
6.25. а)



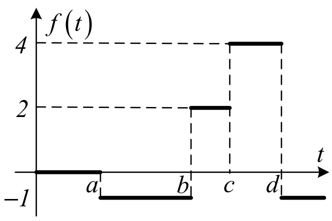
б)



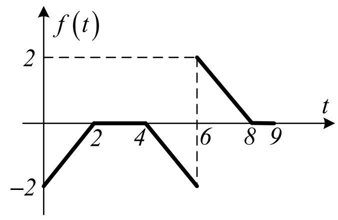
в)



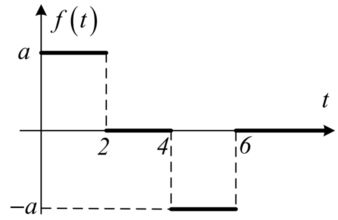
6.27. а)



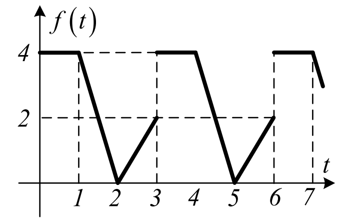
в)



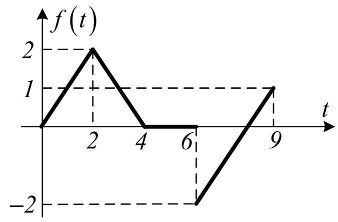
6.26. а)



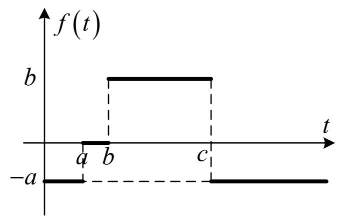
б)



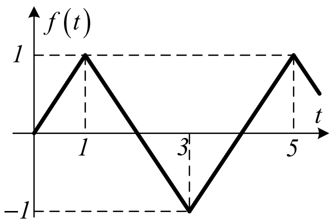
в)



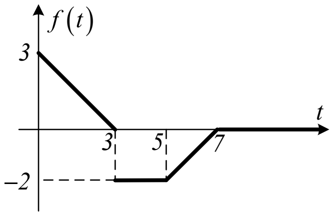
6.28. а)



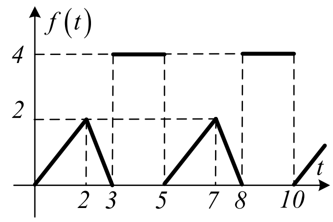
б)



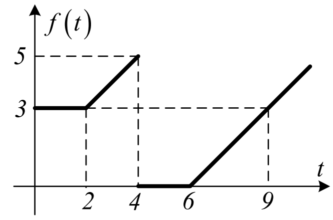
в)



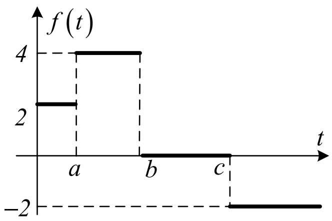
б)



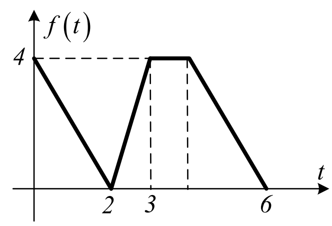
в)



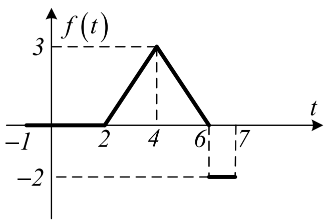
6.29. а)



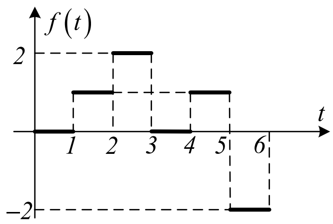
б)



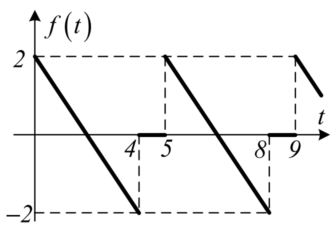
в)



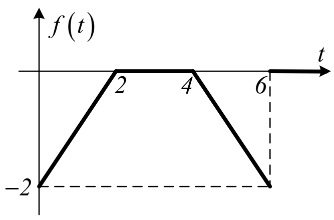
6.30. а)



б)



в)



Задача 7. Восстановить оригинал по изображению $F(p)$:

7.1. а) $F(p)=\dfrac{p}{p^2+2p+5}$; б) $F(p)=\dfrac{p-3}{\left(p^2+4p+8\right)^2}$.

7.2. а) $F(p)=\dfrac{p}{p^2+2p+5}$; б) $F(p)=\dfrac{2p^2+20p+2}{\left(p^2+2p+5\right)\left(p^2+2p-3\right)}$.

7.3. а) $F(p)=\dfrac{3}{p^2-4p-5}$; б) $F(p)=\dfrac{11p^2+14p-36}{\left(p^2-4p+8\right)\left(p^2+2p+1\right)}$.

7.4. а) $F(p)=\dfrac{1}{p^2+6p+10}$; б) $F(p)=\dfrac{3p+2}{\left(p^2+2p+5\right)^2}$.

7.5. а) $F(p)=\dfrac{p+1}{p^2-4p+13}$; б) $F(p)=\dfrac{4p+1}{\left(p^2+8p+17\right)^2}$.

7.6. а) $F(p)=\dfrac{p+2}{p^2+2p+3}$; б) $F(p)=\dfrac{11p^2+6p+19}{\left(p^2+4p+3\right)\left(p^2-2p+5\right)}$.

7.7. а) $F(p)=\dfrac{p+4}{p^2+4p+5}$; б) $F(p)=\dfrac{7p^2+10p+2}{\left(p^2+2p+2\right)\left(p^2+5p+6\right)}$.

7.8. а) $F(p)=\dfrac{2p+1}{p^2+2p+3}$; б) $F(p)=\dfrac{2p+1}{\left(p^2-2p+10\right)^2}$.

7.9. а) $F(p)=\dfrac{3p-2}{p^2-4p+5}$; б) $F(p)=\dfrac{7p^2-59p+6}{\left(p^2-4p+20\right)\left(p^2+6p+9\right)}$.

7.10. а) $F(p)=\dfrac{p-2}{p^2-6p+18}$; б) $F(p)=\dfrac{-9p^2+29p+31}{\left(p^2+6p+10\right)\left(p^2-6p+9\right)}$.

7.11. а) $F(p)=\dfrac{p-3}{p^2+4p+8}$; б) $F(p)=\dfrac{p-2}{\left(p^2-6p+18\right)^2}$.

7.12. а) $F(p)=\dfrac{2p+1}{p^2-2p+10}$; б) $F(p)=\dfrac{p-3}{\left(p^2+4p+5\right)^2}$.

7.13. а) $F(p)=\dfrac{p-3}{p^2+4p+5}$; б) $F(p)=\dfrac{2p^2-15p+33}{\left(p^2-6p+10\right)\left(p^2-4p+3\right)}$.

7.14. а) $F(p)=\dfrac{p+2}{p^2-6p+13}$; б) $F(p)=\dfrac{15p^2+3p+34}{\left(p^2+4p+8\right)\left(p^2-6p+5\right)}$.

7.15. а) $F(p)=\dfrac{p+5}{p^2+4p+13}$; б) $F(p)=\dfrac{p-2}{\left(p^2+2p+17\right)^2}$.

7.16. а) $F(p)=\dfrac{p-1}{p^2-8p+17}$; б) $F(p)=\dfrac{p+2}{\left(p^2-6p+13\right)^2}$.

7.17. а) $F(p)=\dfrac{2p+1}{p^2+6p+10}$; б) $F(p)=\dfrac{3p+2}{\left(p^2+6p+18\right)^2}$.

7.18. а) $F(p)=\dfrac{2p-1}{p^2-4p+13}$; б) $F(p)=\dfrac{32p^2+p+10}{\left(p^2-4p+5\right)\left(p^2+6p+8\right)}$.

7.19. а) $F(p)=\dfrac{3p+2}{p^2+6p+18}$; б) $F(p)=\dfrac{5p^2+19p+3}{\left(p^2+6p+13\right)\left(p^2-2p-8\right)}$.

7.20. а) $F(p)=\dfrac{p-1}{p^2+3p+5}$; б) $F(p)=\dfrac{p-5}{\left(p^2+4p+13\right)^2}$.

7.21. а) $F(p)=\dfrac{p+2}{p^2+4p+6}$; б) $F(p)=\dfrac{2p+3}{\left(p^2+10p+26\right)^2}$.

7.22. а) $F(p)=\dfrac{2p-1}{p^2+2p+5}$; б) $F(p)=\dfrac{32-13p}{\left(p^2-6p+13\right)\left(p^2-8p+16\right)}$.

7.23. а) $F(p)=\dfrac{2p+3}{p^2-4p+7}$; б) $F(p)=\dfrac{-2p^2-16p+22}{\left(p^2+2p+10\right)\left(p^2-4p+4\right)}$.

7.24. а) $F(p)=\dfrac{p+5}{p^2+3p+7}$; б) $F(p)=\dfrac{p-1}{\left(p^2-8p+17\right)^2}$.

7.25. а) $F(p)=\dfrac{p-4}{p^2-5p+7}$; б) $F(p)=\dfrac{4p^2-12p-22}{\left(p^2-4p+13\right)\left(p^2+3p-4\right)}$.

7.26. а) $F(p)=\dfrac{p+4}{p^2+4p+5}$; б) $F(p)=\dfrac{2p+1}{\left(p^2+6p+10\right)^2}$.

7.27. а) $F(p)=\dfrac{p-3}{p^2-4p+7}$; б) $F(p)=\dfrac{2p+5}{\left(p^2-10p+26\right)^2}$.

7.28. а) $F(p)=\dfrac{p+3}{p^2+5p+9}$; б) $F(p)=\dfrac{3p^2-32p+9}{\left(p^2+2p+17\right)\left(p^2+4p+4\right)}$.

7.29. а) $F(p)=\dfrac{2p+1}{p^2-3p+7}$; б) $F(p)=\dfrac{17p+55}{\left(p^2+4p+13\right)\left(p^2+8p+16\right)}$.

7.30. а) $F(p)=\dfrac{2p+2}{p^2+4p-6}$; б) $F(p)=\dfrac{2p-1}{\left(p^2-4p+13\right)^2}$.

Задача 8. Найти оригинал, учитывая, что изображения представляются в виде суммы элементарных дробей:

8.1. $\dfrac{p^2+2p-1}{(p-1)\left(p^2+2p+5\right)}$.

8.2. $\dfrac{p^2+3p-1}{(p-2)\left(p^2-2p+2\right)}$.

8.3. $\dfrac{p^2+4p-1}{(p-3)\left(p^2+4p+5\right)}$.

8.4. $\dfrac{p^2+4p-2}{(p-4)\left(p^2-4p+6\right)}$.

8.5. $\dfrac{p^2+3p-3}{(p-5)\left(p^2+3p+4\right)}$.

8.6. $\dfrac{p^2-3p-2}{(p-6)\left(p^2-3p+5\right)}$.

8.7. $\dfrac{p^2+4p-1}{(p-7)\left(p^2+5p+7\right)}$.

8.8. $\dfrac{p^2-5p+3}{(p-8)\left(p^2-5p+8\right)}$.

8.9. $\dfrac{2p^2+p-1}{(p-9)\left(2p^2+3p+2\right)}$.

8.10. $\dfrac{2p^2+2p+1}{(p+1)\left(2p^2-3p+3\right)}$.

8.11. $$\frac{2p^2+2p-1}{(p+2)\left(2p^2+4p+3\right)}.$$ **8.12.** $$\frac{2p^2-3p+2}{(p+3)\left(2p^2-4p+4\right)}.$$

8.13. $$\frac{2p^2+3p-1}{(p+4)\left(2p^2+5p+5\right)}.$$ **8.14.** $$\frac{2p^2+2p+1}{(p+5)\left(2p^2+5p+6\right)}.$$

8.15. $$\frac{2p^2-3p+1}{(p+6)\left(2p^2-5p+5\right)}.$$ **8.16.** $$\frac{2p^2-2p+2}{(p+7)\left(2p^2-5p+6\right)}.$$

8.17. $$\frac{-p^2+2p+1}{(p+8)\left(-p^2+2p-2\right)}.$$ **8.18.** $$\frac{-p^2+3p+1}{(p+9)\left(-p^2+2p-3\right)}.$$

8.19. $$\frac{-p^2+3p+1}{(p-1)\left(-p^2+4p-5\right)}.$$ **8.20.** $$\frac{-p^2+2p-1}{(p+1)\left(-p^2+4p-6\right)}.$$

8.21. $$\frac{-p^2+3p+1}{(p-2)\left(-p^2+4p-7\right)}.$$ **8.22.** $$\frac{-p^2+2p+1}{(p+2)\left(-p^2+4p-8\right)}.$$

8.23. $$\frac{-2p^2+2}{(p-3)\left(-p^2+p-1\right)}.$$ **8.24.** $$\frac{-2p^2-2}{(p+3)\left(-2p^2+p-3\right)}.$$

8.25. $$\frac{-2p^2-1}{(p-4)\left(-2p^2+p-4\right)}.$$ **8.26.** $$\frac{-2p^2-2}{(p+4)\left(-2p^2+p-5\right)}.$$

8.27. $$\frac{-2p^2-3}{(p-5)\left(-2p^2+p-6\right)}.$$ **8.28.** $$\frac{-2p^2-5}{(p+5)\left(-2p^2+p-7\right)}.$$

8.29. $$\frac{-2p^2-1}{(p-6)\left(-2p^2+p-8\right)}.$$ **8.30.** $$\frac{-2p^2-3}{(p+6)\left(-2p^2+p-9\right)}.$$

Задача 9. Пользуясь теоремой о свертке, найти оригиналы изображений:

9.1. $\dfrac{2}{\left(p^2+9\right)^2}$. **9.2.** $\dfrac{4}{\left(p^2-2\right)\left(p^2-3\right)}$.

9.3. $\dfrac{p^2}{\left(p^2+8\right)^2}$. **9.4.** $\dfrac{p}{\left(p^2+4\right)\left(p^2+5\right)}$.

9.5. $\dfrac{3}{\left(p^2+6\right)^2}$. **9.6.** $\dfrac{1}{\left(p^2-6\right)\left(p^2-7\right)}$.

9.7. $\dfrac{p}{\left(p^2-9\right)^2}$. **9.8.** $\dfrac{p^2}{\left(p^2+8\right)\left(p^2+9\right)}$.

9.9. $\dfrac{4}{\left(p^2-8\right)^2}$. **9.10.** $\dfrac{5}{\left(p^2+4\right)\left(p^2-8\right)}$.

9.11. $\dfrac{p^2}{\left(p^2+7\right)^2}$. **9.12.** $\dfrac{p}{\left(p^2+6\right)\left(p^2+9\right)}$.

9.13. $\dfrac{5}{\left(p^2-7\right)^2}$. **9.14.** $\dfrac{7}{\left(p^2+8\right)\left(p^2+3\right)}$.

9.15. $\dfrac{p}{\left(p^2-6\right)^2}$. **9.16.** $\dfrac{p^2}{\left(p^2-4\right)\left(p^2-6\right)}$.

9.17. $\dfrac{6}{\left(p^2+5\right)^2}$. **9.18.** $\dfrac{8}{\left(p^2+2\right)\left(p^2+9\right)}$.

9.19. $\dfrac{p^2}{\left(p^2-5\right)^2}$. **9.20.** $\dfrac{p}{\left(p^2+1\right)\left(p^2-4\right)}$.

9.21. $\dfrac{7}{\left(p^2+4\right)^2}$. **9.22.** $\dfrac{9}{\left(p^2+6\right)\left(p^2-7\right)}$.

9.23. $\dfrac{p}{\left(p^2-4\right)^2}$. **9.24.** $\dfrac{p^2}{\left(p^2+5\right)\left(p^2-8\right)}$.

9.25. $\dfrac{8}{\left(p^2+3\right)^2}$. **9.26.** $\dfrac{2}{\left(p^2+9\right)\left(p^2-2\right)}$.

9.27. $\dfrac{p^2}{\left(p^2-3\right)^2}$. **9.28.** $\dfrac{p}{\left(p^2+6\right)\left(p^2+9\right)}$.

9.29. $\dfrac{9}{\left(p^2+2\right)^2}$. **9.30.** $\dfrac{3}{\left(p^2+7\right)\left(p^2+1\right)}$.

Задача 10. С помощью теоремы о разложении найти оригиналы следующих изображений:

10.1. а) $\dfrac{1}{(p-9)(p+8)(p-1)}$;

б) $\dfrac{p}{\left(p^2-4\right)^2}$;

в) $\dfrac{p-2}{(p+1)\left(p^2+1\right)^2}$.

10.2. а) $\dfrac{1}{(p+2)(p-8)(p+8)}$;

б) $\dfrac{p}{(p-1)^2(p+9)^3}$;

в) $\dfrac{p}{p^4-16}$.

10.3. а) $\dfrac{1}{(p-8)(p+7)(p-2)}$;

б) $\dfrac{p}{\left(p^2-9\right)^2}$;

в) $\dfrac{p+1}{(p-2)\left(p^2+4\right)}$.

10.4. а) $\dfrac{1}{(p+3)(p-7)(p+7)}$;

б) $\dfrac{p}{(p-2)^3(p+8)^2}$;

в) $\dfrac{p}{\left(p^2-2p+10\right)(p+2)}$.

10.5. а) $\dfrac{1}{(p-7)(p+6)(p-3)}$;

б) $\dfrac{p}{\left(p^2-16\right)^2}$;

в) $\dfrac{p+2}{(p-3)\left(p^2+9\right)}$.

10.6. а) $\dfrac{1}{(p+4)(p-6)(p+6)}$;

б) $\dfrac{p}{(p-3)^2(p+7)^3}$;

в) $\dfrac{p}{p^4-256}$.

10.7. а) $\dfrac{1}{(p-6)(p+5)(p-4)}$;

б) $\dfrac{p}{\left(p^2-25\right)}$;

в) $\dfrac{p-3}{(p-4)\left(p^2+25\right)}$.

10.8. а) $\dfrac{1}{(p+5)(p-4)(p+4)}$;

б) $\dfrac{p}{(p-4)^3(p+6)^2}$;

в) $\dfrac{p}{\left(p^2+6p+10\right)(p+5)}$.

10.9. а) $\dfrac{1}{(p-5)(p+4)(p-6)}$;

б) $\dfrac{p}{\left(p^2-36\right)^2}$;

в) $\dfrac{p+4}{(p-5)\left(p^2+16\right)}$.

10.10. а) $\dfrac{1}{(p+6)(p-5)(p+5)}$;

б) $\dfrac{p}{(p-5)^2(p+4)^3}$;

в) $\dfrac{p}{\left(p^2+4\right)(p+5)}$.

10.11. а) $\dfrac{1}{(p-4)(p+3)(p-5)}$;

б) $\dfrac{p}{\left(p^2-49\right)^2}$;

в) $\dfrac{p+3}{(p-6)\left(p^2+49\right)}$.

10.12. а) $\dfrac{1}{(p+7)(p-3)(p+3)}$;

б) $\dfrac{p}{(p-6)^3(p+5)^2}$;

в) $\dfrac{p}{\left(p^2+9\right)(p+6)}$.

10.13. а) $\dfrac{1}{(p-3)(p+2)(p-7)}$;

б) $\dfrac{p}{\left(p^2-1\right)^2}$;

в) $\dfrac{p-4}{(p-7)\left(p^2+64\right)}$.

10.14. а) $\dfrac{1}{(p+8)(p-2)(p+2)}$;

б) $\dfrac{p}{(p-7)^2(p+3)^3}$;

в) $\dfrac{1}{p\left(p^2+81\right)}$.

10.15. а) $\dfrac{1}{(p-2)(p+1)(p-8)}$;

б) $\dfrac{p}{\left(p^2-64\right)^2}$;

в) $\dfrac{p-5}{(p-8)\left(p^2+81\right)}$.

10.16. а) $\dfrac{1}{(p+9)(p-1)(p+1)}$;

б) $\dfrac{p}{(p-8)^3(p+2)^2}$;

в) $\dfrac{1}{p\left(p^2+64\right)}$.

10.17. а) $\dfrac{1}{(p-1)(p+9)(p-9)}$;

б) $\dfrac{p}{\left(p^2-81\right)^2}$;

в) $\dfrac{p}{p^4-1}$.

10.18. а) $\dfrac{1}{(p-1)(p-9)(p+5)}$;

б) $\dfrac{p}{(p-9)^2(p+1)^3}$;

в) $\dfrac{1}{p\left(p^2+36\right)}$.

10.19. а) $\dfrac{1}{(p+1)(p-9)(p+9)}$;

б) $\dfrac{p}{\left(p^2-100\right)^2}$;

в) $\dfrac{p}{(2p+5)(p-1)}$.

10.20. а) $\dfrac{1}{(p-2)(p-8)(p-4)}$;

б) $\dfrac{2p-1}{(p-1)^3(p-2)}$;

в) $\dfrac{1}{p\left(p^2+49\right)}$.

10.21. а) $\dfrac{1}{(p-3)(p-7)(p-2)}$;

б) $\dfrac{3p+1}{(p-2)(p-3)^3}$;

в) $\dfrac{1}{p^2\left(p^2+25\right)}$.

10.22. а) $\dfrac{1}{(p-4)(p-6)(p-3)}$;

б) $\dfrac{4p-1}{(p-3)^3(p+5)}$;

в) $\dfrac{p}{\left(p^2+16\right)(p+1)}$.

10.23. а) $\dfrac{1}{(p-5)(p-4)(p-1)}$;

б) $\dfrac{5p+2}{(p-4)(p+3)^3}$;

в) $\dfrac{1}{p\left(p^2+25\right)(p+5)}$.

10.24. а) $\dfrac{1}{(p-6)(p-5)(p-7)}$;

б) $\dfrac{6p-1}{(p-5)^3(p+4)}$;

в) $\dfrac{p}{\left(p^2+25\right)(p-1)}$.

10.25. а) $\dfrac{1}{(p-7)(p-3)(p-6)}$;

б) $\dfrac{7p+2}{(p-6)^3(p+7)}$;

в) $\dfrac{1}{p\left(p^2+9\right)}$.

10.26. а) $\dfrac{1}{(p-8)(p-2)(p-9)}$;

б) $\dfrac{8p-3}{(p-7)(p-4)^3}$;

в) $\dfrac{p}{\left(p^2+36\right)(p+2)}$.

10.27. а) $\dfrac{1}{(p-9)(p-1)(p-8)}$;

б) $\dfrac{9p+4}{(p-8)^3(p-5)}$;

в) $\dfrac{1}{p\left(p^2+4\right)}$.

10.28. а) $\dfrac{1}{(p+1)(p+9)(p+6)}$;

б) $\dfrac{p^2}{(p-9)(p+6)^3}$;

в) $\dfrac{p}{p^4-81}$.

10.29. а) $\dfrac{1}{(p+2)(p+8)(p+5)}$;

10.30. а) $\dfrac{1}{(p+3)(p+7)(p+4)}$;

б) $\dfrac{p^2}{(p+1)^3(p+8)}$;

в) $\dfrac{p}{(p^2-4p+5)(p-3)}$.

б) $\dfrac{p^2}{(p+2)(p+9)^3}$;

в) $\dfrac{p}{(p^2+1)(p-3)}$.

Задача 11. Найти оригиналы следующих изображений:

11.1. $\dfrac{p}{p^2+4}\left(e^{-p}+3e^{-3p}\right)$.

11.2. $\dfrac{1}{p^2-4}\cdot e^{-2p}+\dfrac{e^{-p}}{(p-2)^3}$.

11.3. $\dfrac{p}{p^2+5}\left(e^{-2p}+4e^{-4p}\right)$.

11.4. $\dfrac{p}{p^2+6}\cdot e^{-3p}+\dfrac{e^{-2p}}{(p-3)^4}$.

11.5. $\dfrac{p}{p^2-1}\left(e^{-5p}+3e^{-6p}\right)$.

11.6. $\dfrac{2}{p^2+3}\cdot e^{-7p}+\dfrac{e^{-5p}}{(p+1)^5}$.

11.7. $\dfrac{4}{p^2-9}\left(e^{-6p}+8e^{-p}\right)$.

11.8. $\dfrac{p}{p^2-9}\left(e^{-2p}+5e^{-3p}\right)$.

11.9. $\dfrac{3p}{p^2+25}\cdot e^{-4p}+\dfrac{3}{(p+1)^3}\cdot e^{-p}$.

11.10. $\dfrac{2}{p^2+16}\left(e^{-p}+4e^{-7p}\right)$.

11.11. $\dfrac{4}{p^2+9}\cdot e^{-p}+\dfrac{5}{(p-2)^4}\cdot e^{-2p}$.

11.12. $\dfrac{3p}{p^2+25}\left(e^{-4p}+5e^{-5p}\right)$.

11.13. $\dfrac{7p}{p^2-16}\cdot e^{-7p}+\dfrac{6}{(p+3)^5}\cdot e^{-3p}$.

11.14. $\dfrac{4}{p^2-36}\left(e^{-6p}-7e^{-3p}\right)$.

11.15. $\dfrac{8}{p^2-25}e^{-2p}+\dfrac{7}{(p-4)^6}e^{-4p}$.

11.16. $\dfrac{3p}{p^2-49}\left(e^{-p}-9e^{-2p}\right)$.

11.17. $\dfrac{6p}{p^2+36}e^{-3p}+\dfrac{8}{(p+5)^3}e^{-5p}$.

11.18. $\dfrac{4}{p^2+3}\left(e^{-8p}-3e^{-p}\right)$.

11.19. $\dfrac{7p}{p^2-64}e^{-2p}+\dfrac{9}{(p-6)^6}e^{-5p}$. **11.20.** $\dfrac{5p}{p^2-7}\left(e^{-6p}-4e^{-5p}\right)$.

11.21. $\dfrac{3}{p^2+25}e^{-8p}+\dfrac{7}{(p+7)^4}e^{-7p}$. **11.22.** $\dfrac{4p}{p^2+8}\left(e^{-9p}-3e^{-p}\right)$.

11.23. $\dfrac{7}{p^2-7}\cdot e^{-p}-\dfrac{3}{(p-8)^3}\cdot e^{-8p}$. **11.24.** $\dfrac{6p}{p^2-10}\left(e^{-7p}-6e^{-8p}\right)$.

11.25. $\dfrac{9p}{p^2+49}e^{-4p}+\dfrac{4}{(p+9)^5}e^{-9p}$. **11.26.** $\dfrac{7}{p^2+64}\left(e^{-4p}-2e^{-7p}\right)$.

11.27. $\dfrac{10p}{p^2-25}e^{-6p}+\dfrac{7}{(p+2)^7}e^{-p}$. **11.28.** $\dfrac{8p}{p^2-100}\left(e^{-p}+4e^{-9p}\right)$.

11.29. $\dfrac{4}{p^2+3}\cdot e^{-2p}-\dfrac{8}{(p-4)^2}\cdot e^{-2p}$. **11.30.** $\dfrac{9}{p^2-16}\left(e^{-7p}-8e^{-9p}\right)$.

Задача 12. Средствами операционного исчисления найти частные решения дифференциальных уравнений при указанных начальных условиях:

12.1. а) $y''+4y=\sin 2t$, y(0)=0, $y'(0)=1$. б) $y''+y=6e^{-t}$, $y(0)=3, y'(0)=1$.

12.2. а) $y''+2y'+y=\sin t$, y(0)=0, $y'(0)=-1$. б) $y''+y'=t^2+2t$, $y(0)=0, y'(0)=-2$.

12.3. а) $y''+2y'=2+e^{t}$, y(0)=1, $y'(0)=2$. б) $y''+y'+y=7e^{2t}$, $y(0)=1$, $y'(0)=4$.

12.4. а) $y''+2y'+2y=1$, y(0)=0, $y'(0)=0$. б) $y''-9y=\sin t-\cos t$, $y(0)=-3, y'(0)=2$.

12.5. а) $2y''-y'=\sin 3t$, y(0)=2, $y'(0)=1$. б) $2y''-y'=\sin 3t$, $y(0)=2, y'(0)=1$.

12.6. а) $y''+y=\cos t$, y(0)=-1, $y'(0)=-1$. б) $y''+y=sh\,t$, $y(0)=2, y'(0)=1$.

12.7. а) $y''+y'+y=7e^{2t}$, $y(0)=1,\ y'(0)=4$. б) $y''-3y'+2y=2+e^{t}$, $y(0)=1, y'(0)=0.$

12.8. а) $y''+3y'=e^{-3t}$, $y(0)=0,\ y'(0)=-1$. б) $y''-2y'-3y=2$, $y(0)=1, y'(0)=1.$

12.9. а) $y''+4y'+4y=t^3e^{2t}$, $y(0)=1, y'(0)=2.$ б) $2y''+5y'=29\cos t$, $y(0)=-1, y'(0)=0.$

12.10. а) $y''+y'=t^2+2t$, $y(0)=4,\ y'(0)=-2$. б) $y''+4y=8\sin 2t$, $y(0)=3, y'(0)=-1.$

12.11. а) $y''-2y'=e^t(t^2+t-3)$, $y(0)=2, y'(0)=2$. б) $y''+4y=4e^{2t}+4t^2$, $y(0)=1, y'(0)=2.$

12.12. а) $y''+2y'+y=t+2$, $y(0)=0,\ y'(0)=2$. б) $y''-3y'+2y=12e^{3t}$, $y(0)=2, y'(0)=6.$

12.13. а) $y''+y'=t^2+2t$, $y(0)=0,\ y'(0)=-2$. б) $y''+2y'+10y=2e^{-t}\cos 3t$, $y(0)=5, y'(0)=1.$

12.14. а) $y''+y=\operatorname{sh} t$, $y(0)=2,\ y'(0)=1$. б) $y''+y'-2y=e^{-t}$, $y(0)=-1, y'(0)=0.$

12.15. а) $y''+4y=\sin 2t$, $y(0)=1,\ y'(0)=-2$. б) $y''+y'=2\cos t$, $y(0)=0, y'(0)=1.$

12.16. а) $y''-3y'+2y=e^{t}$, $y(0)=1,\ y'(0)=0$. б) $y''-y'=t^2$, $y(0)=0, y'(0)=1.$

12.17. а) $y''-2y'-3y=2t$, $y(0)=1,\ y'(0)=1$. б) $y''-y'=\cos 3t$, $y(0)=1, y'(0)=1.$

12.18. а) $y''-y'=t^2$, $y(0)=0$, $y'(0)=1.$ б) $y''+y'-2y=-2(t+1)$ $y(0)=1,\ y'(0)=1$

12.19. а) $y''-y=2\operatorname{sh} t$, $y(0)=0,\ y'(0)=1$. б) $y''+2y'=2+e^{t}$, $y(0)=1, y'(0)=2.$

12.20. а) $y''+y'+y=t^2+t$, $y(0)=1,\ y'(0)=-3.$ б) $y''+2y'=\sin(t/2)$, $y(0)=-2, y'(0)=4.$

12.21. а) $y''+4y=8\sin 2t,$ y(0)=3, $y'(0)=-1.$ б) $y''+4y'+29=e^{-2t},$ $y(0)=0, y'(0)=1.$

12.22. а) $y''+y=2\cos t,$ y(0)=0, $y'(0)=1.$ б) $2y''+3y'+y=3e^{t},$ $y(0)=0, y'(0)=1.$

12.23. а) $y''+4y'+29=e^{-2t},$ y(0)=0, $y'(0)=1.$ б) $y''+4y=\sin 2t,$ $y(0)=0, y'(0)=1.$

12.24. а) $y''-2y'+5y=1-t,$ y(0)= $y'(0)=0$. б) $y''+y'+y=t^2+t,$ $y(0)=1, y'(0)=-3.$

12.25. а) $y''-9y=\operatorname{sh} t,$ y(0)=-1, $y'(0)=3$. б) $y''-y'-6y=2,$ $y(0)=1, y'(0)=0.$

12.26. а) $2y''+3y'+y=3e^{t},$ y(0)=0, $y'(0)=1$. б) $y''+4y'+4y=t^3+e^{2t},$ $y(0)=1, y'(0)=2.$

12.27. а) $y''+y=6e^{-t},$ y(0)=3, $y'(0)=1.$ б) $y''+4y=\sin t+10\cos t,$ $y(0)=-2, y'(0)=3.$

12.28. а) $y''+y=6e^{-t},$ y(0)=3, $y'(0)=1.$ б) $y''+3y'-10y=$ $=47\cos 3t-\sin 3t,$ $y(0)=3, y'(0)=-1.$

12.29. а) $y''-2y'-3y=2t,$ y(o)=1, $y'(0)=1.$ б) $y''-2y'=e^{t}\left(t^2+t-3\right),$ $y(0)=2, y'(0)=2.$

12.30. а) $y''-2y'-3y=2-t,$ y(0)=1, $y'(0)=1.$ б) $y''-y=4\sin t+5\cos 2t,$ $y(0)=-1, y'(0)=-2.$

Задача 13. Операционным методом найти решение дифференциального уравнения с условием $y(0)=0, y'(0)=0.$

13.1. $y''-y=th\,t.$

13.2. $y''-y'=\dfrac{1}{1+e^{t}}.$

13.3. $y''-2y'+y=\dfrac{e^{t}}{1+t^2}.$

13.4. $y''-2y'+2y=e^{t}\cos t.$

13.5. $y''-y'=th^2\,t.$

13.6. $y''-y=\dfrac{1}{ch\,t}.$

13.7. $y''-y'=\dfrac{e^t}{1-e^t}.$

13.8. $y''-2y'+y=\dfrac{e^t}{t+1}.$

13.9. $y''+y'=\dfrac{e^{2t}}{3+e^t}.$

13.10. $y''-2y'=\dfrac{e^t}{ch\,t}.$

13.11. $y''-y'=\dfrac{1}{1+ch\,t}.$

13.12. $y''-2y'=\dfrac{1}{1+e^t}.$

13.13. $y''-4y'+4y=\dfrac{2e^{2t}}{ch^2\,2t}.$

13.14. $y''-4y=\dfrac{1}{ch^3\,2t}.$

13.15. $y''-y=\dfrac{1}{ch^2 t}.$

13.16. $y''+y'=\dfrac{e^t}{1+e^t}.$

13.17. $y''+2y'+y=\dfrac{e^{-t}}{(t+1)^2}$

13.18. $y''-y'=\dfrac{e^t}{\left(1+e^{\frac{t}{2}}\right)^2}$

13.19. $y''+y=\dfrac{1}{ch^3 t}$

13.20. $y''+y'=\dfrac{e^{2t}}{(1+e^t)^2}$

13.21. $y''+2y'+y=\dfrac{te^{-t}}{t+1}$

13.22. $y''+y'=\dfrac{e^{2t}}{2+e^t}$

13.23. $y''+y=\dfrac{sh\,t}{ch^2 t}$

13.24. $y''+y'=\dfrac{e^t}{(1+e^t)^2}$

13.25. $y''+2y'+y=\dfrac{e^t}{1+t^2}$

13.26. $y''-2y'+y=\dfrac{e^t}{ch^2 t}$

13.27. $y''+2y'+y=\dfrac{e^t}{ch^2 t}$

13.28. $y''-4y=th^2\,2t$

13.29. $y''+2y'=\dfrac{1}{ch^2 t}$

13.30. $y''+y'=\dfrac{1}{(1+e^t)^2}$

Задача 14. Операционным методом решить задачу Коши для соответствующих систем линейных дифференциальных уравнений:

14.1. а) $\begin{cases} x' = x + 3y + 2, \\ y' = x - y + 1; \end{cases}$ $x(0) = -1,\ y(0) = 2.$

б) $\begin{cases} x' - 2x - 4y = \cos t, \\ y' + x + 2y = \sin t; \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0$.

14.2. а) $\begin{cases} x' = -x + 3y + 1, \\ y' = x + y; \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 2.$

б) $\begin{cases} x' = x + 3y + 3, \\ y' = x - y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 1$.

14.3. а) $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = 2x - y + 9; \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

б) $\begin{cases} x' + 5x - 2y = e^t, \\ y' - x + 6y = e^{-2t}; \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0$.

14.4. а) $\begin{cases} x' = x + 2y + 1, \\ y' = 4x - y; \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

б) $\begin{cases} x' + y = 2e^t, \\ y' + x = 2e^t; \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1$.

14.5. а) $\begin{cases} x' = 2x + 5y, \\ y' = x - 2y + 2; \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 1.$

б) $\begin{cases} x' + y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t; \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0$.

14.6. а) $\begin{cases} x' = -2x + 5y + 1, \\ y' = x + 2y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 2.$

б) $\begin{cases} x' - 2x + y = 3 - 2t, \\ y' + x + 2y = 4 + t; \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 2$.

14.7. а) $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = -5x - 3y + 2; \end{cases}$ $x(0) = 2,\ y(0) = 0.$

б) $\begin{cases} x' - x - 2y = -9t, \\ y' - 2x - y = 4e^t; \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 2$.

14.8. а) $\begin{cases} x' = -3x - 4y + 1, \\ y' = 2x + 3y; \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 2.$

б) $\begin{cases} x' + x - y = \sin t, \\ y' + 2x = \sin t; \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 1.$

14.9. а) $\begin{cases} x' = -2x + 6y + 1, \\ y' = 2x + 2; \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

б) $\begin{cases} x' + x - y = e^t, \\ y' + y - x = e^t; \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 1.$

14.10. а) $\begin{cases} x' = 2x + 3y + 1, \\ y' = 4x - 2y; \end{cases}$ $x(0) = -1,\ y(0) = 0.$

б) $\begin{cases} x' - x - 2y = -9t, \\ y' - 2x - y = 4e^t; \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 2.$

14.11. а) $\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 5.$

б) $\begin{cases} 4x' + 3x - y' = \sin t, \\ x' + y = \cos t; \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 1.$

14.12. а) $\begin{cases} x' = 2x - 2y, \\ y' = -4x; \end{cases}$ $x(0) = 3,\ y(0) = 1.$

б) $\begin{cases} x' - x - 2y = t, \\ y' - 2x - y = t; \end{cases}$ $x(0) = 2, y(0) = 4.$

14.13. а) $\begin{cases} x' = -x - 2y + 1, \\ y' = -\dfrac{3}{2}x + y; \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

б) $\begin{cases} x' - y = 2e^t, \\ y' - x = t^2; \end{cases}$ $x(0) = -2, y(0) = -1.$

14.14. а) $\begin{cases} x' = 3x + 5y + 2, \\ y' = 3x + y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 2.$

б) $\begin{cases} x' - y = -5\cos t, \\ y' - 2x - y = 0; \end{cases}$ $x(0) = -1, y(0) = 3.$

14.15. а) $\begin{cases} x' = 3x + 2y, \\ y' = \dfrac{5}{2}x - y + 2; \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

б) $\begin{cases} x' - 3x - 2y = 4e^{5t}, \\ y' - x - 2y = 0; \end{cases}$ $x(0) = 3, y(0) = 1.$

14.16. а) $\begin{cases} x' = 2y + 1, \\ y' = 2x + 3; \end{cases}$ $x(0) = -1,\ y(0) = 0.$

б) $\begin{cases} x' - 2x + 4y = 4e^{-2t}, \\ y' - 2x + 2y = 0; \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 1.$

14.17. а) $\begin{cases} x' = 2x + 8y + 1, \\ y' = 3x + 4y; \end{cases}$ $x(0) = 2,\ y(0) = 1.$

б) $\begin{cases} x' - x - y = e^{2t}, \\ y' + 2x - 4y = e^{2t}; \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 2.$

14.18. а) $\begin{cases} x' = 2x + 2y + 2, \\ y' = 4y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

б) $\begin{cases} x' - x + 2y = t, \\ y' - x + y = 2; \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0.$

14.19. а) $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 4x + y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

б) $\begin{cases} x' - 3x - y = e^{t}, \\ y' + 4x + 2y = te^{t}; \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0.$

14.20. а) $\begin{cases} x' = x - 2y + 1, \\ y' = -3x; \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

б) $\begin{cases} x' + x + 2y = 2e^{-t}, \\ y' - 3x - 4y = e^{-t}; \end{cases}$ $x(0) = y(0) = -1.$

14.21. а) $\begin{cases} x' = 3y + 2, \\ y' = x + 2y; \end{cases}$ $x(0) = -1,\ y(0) = 1.$

б) $\begin{cases} x' - 4x - 5y = 4, \\ y' + 4x + 4y = 4t; \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 3.$

14.22. а) $\begin{cases} x' = x + 4y + 1, \\ y' = 2x + 3y; \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

б) $\begin{cases} x' - 7x + 2y = 8te^{-t}, \\ y' - 8x + y = 0; \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = \frac{1}{2}.$

14.23. а) $\begin{cases} x' = 2y, \\ y' = 2x + 3y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 2,\ y(0) = 1.$

б) $\begin{cases} x' - 3x + 4y = e^{-t}, \\ y' - x + 2y = e^{-t}; \end{cases}$ $x(0) = -1, y(0) = 1.$

14.24. а) $\begin{cases} x' = -2x + y + 2, \\ y' = 3x; \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

б) $\begin{cases} x' - x - y = 3t + 6, \\ y' + 10x + y = 6t + 3; \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 0.$

14.25. а) $\begin{cases} x' = 4x + 3, \\ y' = x + 2y; \end{cases}$ $x(0) = -1,\ y(0) = 0.$

б) $\begin{cases} x' + x + y = e^{2t}, \\ y' - 2x - 2y = 2e^{2t}; \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1.$

14.26. а) $\begin{cases} x' = y + 3, \\ y' = x + 2; \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

б) $\begin{cases} x' - 4x + y = e^{t}, \\ y' - x - 2y = 3e^{t}; \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 1.$

14.27. а) $\begin{cases} x' = x + 3y + 3, \\ y' = x - y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

б) $\begin{cases} x' - 5x - 3y = 0, \\ y' + 3x + y = 9te^{5t}; \end{cases}$ $x(0) = \frac{1}{3}, y(0) = 0.$

14.28. а) $\begin{cases} x' = -x + 3y + 2, \\ y' = x + y + 1; \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

б) $\begin{cases} x' - 11x + 2y = 2te^{-t}, \\ y' - 18x + y = 0; \end{cases}$ $x(0) = -\frac{2}{3}, y(0) = 0.$

14.29. а) $\begin{cases} x' = 3y, \\ y' = 3x + 1; \end{cases}$ $x(0) = 2,\ y(0) = 0.$ б) $\begin{cases} x' + 5x + 2y = 24e^t, \\ y' + 3x + 4y = 0; \end{cases}$ $x(0) = 0, y(0) = 2.$

14.30. а) $\begin{cases} x' = x + 3y, \\ y' = x - y; \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 0.$ б) $\begin{cases} x' + 2x + y = 6t, \\ y' + 4x + 5y = 0; \end{cases}$ $x(0) = 2, y(0) = 3.$

Задача 15. Решить операционным методом интегральные уравнения:

15.1. а) $\int_0^x cos(x-t) f(t)\,\mathrm{d}t = \sin x$; б) $f(x) = e^x - \int_0^x e^{x-t} f(t)\,\mathrm{d}t$.

15.2. а) $\int_0^x e^{x-t} f(t)\,\mathrm{d}t = x$; б) $f(x) = \sin x + \int_0^x (x-t) f(t)\,\mathrm{d}t$.

15.3. а) $\int_0^x e^{x-t} f(t)\,\mathrm{d}t = \sin x$; б) $f(x) = x + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f(t)\,\mathrm{d}t$.

15.4. а) $\int_0^x e^{2(x-t)} f(t)\,\mathrm{d}t = x^2 e^x$; б) $f(x) = x + \int_0^x \sin(x-t) f(t)\,\mathrm{d}t$.

15.5. а) $\int_0^x \mathrm{ch}(x-t) f(t)\,\mathrm{d}t = x^3 e^{2x}$; б) $f(x) = \cos x + \int_0^x e^{x-t} f(t)\,\mathrm{d}t$.

15.6. а) $\int_0^x \cos(x-t) f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{sh}\, x$; б) $f(x) = 1 + x + \int_0^x \cos(x-t) f(t)\,\mathrm{d}t$.

15.7. а) $\int_0^x \cos(x-t) f(t)\,\mathrm{d}t = x + x^2$; б) $f(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^x (x-t) e^{-(t-x)} f(t)\,\mathrm{d}t$.

15.8. а) $\int_0^x \mathrm{ch}(x-t) f(t)\,\mathrm{d}t = x$; б) $f(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f(t)\,\mathrm{d}t$.

15.9. а) $\int_0^x e^{x-t} f(t)\,\mathrm{d}t = x^2$; б) $f(x) = x + 2\int_0^x (x-t)\cdot\sin(x-t) f(t)\,\mathrm{d}t$.

15.10. а) $\int\limits_0^x \sin(x-t)f(t)\,dt = xe^{2x}$; б) $f(x)=\sin x + 2\int\limits_0^x \cos(x-t)f(t)\,dt$.

15.11. а) $\int\limits_0^x \cos(x-t)f(t)\,dt = x\cdot\sin x$; б) $f(x)=1-2x-4x^3+\int\limits_0^x\left(3+6(x-t)-4\cdot(x-t)^2\right)f(t)\,dt$

15.12. а) $\int\limits_0^x \operatorname{sh}(x-t)f(t)\,dt = x^3e^{-x}$; б) $f(x)=e^x - 2\int\limits_0^x \cos(x-t)f(t)\,dt$.

15.13. а) $\int\limits_0^x \sin(x-t)f(t)\,dt = x^3$; б) $f(x)=1+\frac{1}{6}\int\limits_0^x (x-t)^3 f(t)\,dt$.

15.14. а) $\int\limits_0^x e^{x-t}f(t)\,dt = x\left(e^{2x}+e^x-2\right)$; б) $f(x)=x-\int\limits_0^x \operatorname{sh}(x-t)f(t)\,dt$.

15.15. а) $\int\limits_0^x \operatorname{ch}(x-t)f(t)\,dt = \operatorname{sh} t$; б) $f(x)=\operatorname{sh} x-\int\limits_0^x \operatorname{ch}(x-t)f(t)\,dt$.

15.16. а) $\int\limits_0^x e^{2(x-t)}f(t)\,dt = xe^{3x}$; б) $f(x)=x-\int\limits_0^x e^{x-t}f(t)\,dt$.

15.17. а) $\int\limits_0^x \sin(x-t)f(t)\,dt = \cos x$; б) $f(x)=e^{2x}+\int\limits_0^x e^{t-x}f(t)\,dt$.

15.18. а) $\int\limits_0^x e^{x-t}f(t)\,dt = \cos x$; б) $f(x)=1+2\int\limits_0^x \cos(x-t)f(t)\,dt$.

15.19. а) $\int\limits_0^x \sin(x-t)f(t)\,dt = x\cos x$; б) $f(x)=\sin x+\int\limits_0^x e^{-2(x-t)}f(t)\,dt$.

15.20. а) $\int\limits_0^x \sin(x-t)f(t)\,dt = \operatorname{ch} x$; б) $f(x)=\cos 3x+\int\limits_0^x e^{-(x-t)}f(t)\,dt$.

15.21. а) $\int\limits_0^x \sin(x-t)f(t)\,dt = x+x^3$; б) $f(x)=\sin 2x-\frac{8}{3}\int\limits_0^x \operatorname{sh} 3(x-t)f(t)\,dt$.

15.22. а) $\int\limits_0^x \operatorname{sh}(x-t)f(t)\,dt = x^2$; б) $f(x)=\cos 5x-\frac{7}{4}\int\limits_0^x \operatorname{sh} 4(x-t)f(t)\,dt$.

15.23. а) $\int\limits_0^x \operatorname{ch}(x-t)f(t)\,dt = x+x^2$; б) $f(x)=\operatorname{sh} 3x-\frac{4}{5}\int\limits_0^x \sin 5(x-t)f(t)\,dt$.

15.24. а) $\int\limits_0^x \operatorname{sh}(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = xe^x$; б) $f(x) = \operatorname{ch}4x - \frac{1}{3}\int\limits_0^x \operatorname{sh}3(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

15.25. а) $\int\limits_0^x (x-t)^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}x^3$; б) $f(x) = \cos x + \int\limits_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

15.26. а) $\int\limits_0^x \cos(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = 1-\cos x$; б) $f(x) = e^{4x} - \int\limits_0^x e^{-3(x-t)}f(t)\,\mathrm{d}t$.

15.27. а) $\int\limits_0^x e^{3(x-t)}f(t)\,\mathrm{d}t = x^3$; б) $f(x) = x^2 + \int\limits_0^x e^{-(t-x)}f(t)\,\mathrm{d}t$.

15.28. а) $\int\limits_0^x \sin(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = x-\sin x$; б) $f(x) = x + \int\limits_0^x (x-t)^3 f(t)\,\mathrm{d}t$.

15.29. а) $\int\limits_0^x (x-t)^3 f(t)\,\mathrm{d}t = x^4 + x^5$; б) $f(x) = x^2 + \int\limits_0^x \cos(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

15.30. а) $\int\limits_0^x \operatorname{ch}(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = x^2 - \operatorname{sh}x$; б) $f(x) = 1-2x + \int\limits_0^x \cos(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

Задача 16. Операционным методом решить интегральные системы уравнений:

16.1.
$$\begin{cases} 2\varphi'_1(x)+\varphi_1(x)-2\varphi_2(x)+\int\limits_0^x (1+x-t)\cdot\varphi_2(t)\,dt = 0, \\ \varphi'_1(x)-\varphi'_2(x)+\varphi_1(x)+\int\limits_0^x e^{x-t}\cdot\varphi_1(t)\,dt = 0; \end{cases}$$
$\varphi_1(0)=0; \varphi_2(0)=1.$

16.2.
$$\begin{cases} \varphi_1(x) = x + \int\limits_0^x \varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt, \\ \varphi_3(x) = \sin x + \frac{1}{2}\int\limits_0^x (x-t)\cdot\varphi_1(t)\,dt. \end{cases}$$

16.3. $\begin{cases} \varphi_1(x) = \sin x + \int\limits_0^x \varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \cos x - \int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt. \end{cases}$

16.4. $\begin{cases} \varphi_1(x) = e^{2x} + \int\limits_0^x \varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \int\limits_0^x e^{2(x-t)}\varphi_1(t)\,dt. \end{cases}$

16.5. $\begin{cases} \varphi''_1(x) - \varphi_2(x) + \int\limits_0^x (x-t)e^{x-t} \cdot \varphi_2(t)\,dt = e^x, \\ \varphi''_2(x) - \varphi'_1(x) - \varphi'_2(x) + \int\limits_0^x \cos(x-t) \cdot \varphi_1(t)\,dt = 1, \end{cases}$

$\varphi_1(0) = 2, \varphi_1'(0) = 0; \varphi_2(0) = 1, \varphi'_2(0) = 1.$

16.6. $\begin{cases} \varphi_1(x) = x + 1 + \int\limits_0^x \varphi_3(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = -x + \int\limits_0^x (x-t) \cdot \varphi_1(t)\,dt, \\ \varphi_3(x) = \cos x - 1 - \int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt. \end{cases}$

16.7. $\begin{cases} \varphi_1(x) = 1 - 2\int\limits_0^x e^{2(x-t)} \cdot \varphi_1(t)\,dt + \int\limits_0^x \varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = 4x - \int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt + 4\int\limits_0^x (x-t) \cdot \varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$

16.8. $\begin{cases} \varphi_1(x) = e^x + \int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt - \int\limits_0^x e^{(x-t)} \cdot \varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = -x - \int\limits_0^x (x-t) \cdot \varphi_1(t)\,dt + \int\limits_0^x \varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$

16.9. $$\begin{cases} \varphi_1(x) = x + \int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt + \int\limits_0^x (x-t)\cdot\varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \int\limits_0^x e^{(x-t)}\cdot\varphi_1(t)\,dt + \int\limits_0^x \varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

16.10. $$\begin{cases} \varphi_1(x) = e^x - \int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt + 4\int\limits_0^x e^{(x-t)}\cdot\varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \int\limits_0^x e^{-(x-t)}\cdot\varphi_1(t)\,dt + \int\limits_0^x \varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

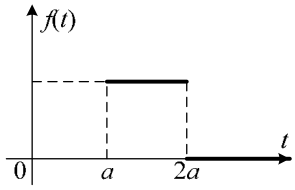
16.11. $$\begin{cases} \varphi_1(x) = 2x - \int\limits_0^x (x-t)\cdot\varphi_1(t)\,dt + \int\limits_0^x \varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = -2 - 4\int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt + 3\int\limits_0^x (x-t)\cdot\varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

16.12. $$\begin{cases} \varphi_1(x) = 2 - \int\limits_0^x (x-t)\cdot\varphi_1(t)\,dt - 4\int\limits_0^x \varphi_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \int\limits_0^x \varphi_1(t)\,dt - \int\limits_0^x (x-t)\cdot\varphi_2(t)\,dt. \end{cases}$$

Тематические тестовые задания для самопроверки

№	Задания	Правильный ответ
31.	Преобразование Лапласа имеет вид: 1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$; 2) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{pt} f(t)\,dt$; 3) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$. а) 1); б) 3); в) 2).	б)
32.	Найти изображение гиперболической функции $\operatorname{sh} at$. а) $\dfrac{a}{p^2 - a^2}$; б) $\dfrac{p}{p^2 + a^2}$; в) $\dfrac{a}{p^2 + a^2}$.	а)
33.	Найти изображение функции $\int\limits_0^t e^{\tau} d\tau$. а) $\dfrac{1}{p}$; б) $\dfrac{1}{p-1}$; в) $\dfrac{1}{p(p-1)}$.	в)
34.	Найти оригинал по изображению $\dfrac{p-3}{(p-3)^2 + 16}$. а) $e^{4t}\cos 3t$; б) $e^{3t}\sin 4t$; в) $e^{3t}\cos 4t$.	в)
35.	Свертка оригиналов $f_1(t) = t,\ f_2(t) = \cos t$	в)

	имеет вид: 1) $t*\cos t=\int_0^t (t-\tau)\cos\tau d\tau$, 2) $t*\cos t=\int_0^t (t-\tau)\sin\tau d\tau$, 3) $t*\cos t=\int_0^t \tau\sin(t-\tau)d\tau$. а) 2); б) 3); в) 1).	
36.	Найти изображение свертки $\mathrm{ch}(3t)*t^7$. а) $\frac{8!p}{p^7(p^2-9)}$; б) $\frac{8!}{p^6(p^2+9)}$; в) $\frac{p}{(p^2-9)}\cdot\frac{7!}{p^8}$.	в)
37.	Найти оригинал для изображения $\frac{7}{p^2+5}$. а) $\frac{7}{\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}\,t$; б) $\frac{\sqrt{5}}{7}\sin\sqrt{5}\,t$; в) $\frac{\sqrt{5}}{7}\cos\sqrt{5}\,t$.	а)
38.	Найти изображение выражения $x''(t)+2x'(t)$, если $x(0)=3$, $x'(0)=0$. а) $p^2X(p)+2pX(p)$; б) $p^2X(p)-3p-3$; в) $p^2X(p)-3p+2pX(p)-3$.	в)
39.	Изображение периодического оригинала с периодом, равным a , есть…	а)

	а) $F(p)=\dfrac{1}{1-e^{-a\,p}}\cdot\int\limits_0^a e^{-pt}f(t)\,dt$; б) $F(p)=\dfrac{1}{1-e^{a\,p}}\cdot\int\limits_0^a e^{pt}f(t)\,dt$; в) $F(p)=\dfrac{1}{1-e^{a\,p}}\cdot\int\limits_0^a e^{-pt}f(t)\,dt$.	
40.	Изображение единичной функции Хевисайда равно… а) $-\dfrac{1}{p}$; б) $\dfrac{1}{p}$; в) $1+p$.	б)
41.	Оригинал задан графически  Изображение имеет вид: а) $F(p)=\dfrac{1}{p}e^{-ap}-\dfrac{1}{p}e^{-2ap}$; б) $F(p)=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p}e^{-2ap}$; в) $F(p)=\dfrac{1}{p}e^{-ap}-e^{-2ap}$; г) $F(p)=e^{-ap}-\dfrac{1}{p}e^{-2ap}$.	а)
42.	Формула Дюамеля имеет вид: а) $f(0)\varphi(0)+\int\limits_0^t f(\tau)\varphi'(t-\tau)\,d\tau \doteqdot pF(p)\Phi(p)$;	г)

	б) $f(t)\varphi(0)+\int\limits_0^t f(\tau)\varphi'(t-\tau)\,d\tau \risingdotseq F(p)\Phi(p)$; в) $f(0)\varphi(0)+\int\limits_0^{+\infty} f(\tau)\varphi'(t-\tau)\,d\tau \risingdotseq pF(p)\Phi(p)$; г) $f(t)\varphi(0)+\int\limits_0^t f(\tau)\varphi'(t-\tau)\,d\tau \risingdotseq pF(p)\Phi(p)$.	
43.	Если $f(t)\risingdotseq F(p)$ и интеграл $\int\limits_p^{+\infty} F(z)\,dz$ сходится, то он служит изображением функции: а) $t\cdot f(t)$; б) $\dfrac{f(t)}{t}$; в) $t^2\cdot f(t)$; г) $\dfrac{f(t)}{t^2}$.	б)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Краснов М.Л.*, *Киселев А.Н.*, *Макаренко Г.Н.* Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: «Наука». 1978. – 256с.

2. *Лунгу К.Н., Норин В.П., Письменный Д.Г., Шевченко Ю.А.* Сборник задач по высшей математики. 2 курс / под ред. С.Н. Федина. – М: Айрис-пресс., 2004. – 592с.

3. Математический энциклопедический словарь. /под ред. Ю.В. Прохорова. – М: Совет. энциклопедия, 1988 – 847с.

4. *Пантелеев А.В.*, *Якимова А.С.* Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах: учебное пособие. – М.: Высшая школа, 2001. – 445с.

5. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.2. – М.: «Наука». 1972. – 576с.

6. Сборник типовых расчетов по высшей математике: учебное пособие. / под ред. В.Б. Миносцева. – М.: МГИУ, 2001. – 511с.

7. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики: учебное пособие для втузов / под ред. Г.И. Кручковича, – М.: «Высшая школа», 1970. – 512с.

8. *Соломенцев Е.Д.* Функции комплексного переменного и их применения. – М.: Высшая школа, 1988. – 168с.