Министерство образования и науки Российской Федерации
Нижнекамский химико-технологический институт (филиал)
Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования
«Казанский национальный исследовательский технологический университет»

Л.В. Бакеева, О.В. Шемелова

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ И НЕКОТОРЫЕ ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Нижнекамск
2014

УДК 519.17
Б 19

Печатаются по решению редакционно-издательского совета Нижнекамского химико-технологического института (филиала) ФГБОУ ВПО «КНИТУ».

Рецензенты:

Брылевская Л.И., кандидат физико-математических наук, доцент;
Гайфутдинов А.Н., кандидат физико-математических наук, доцент.

Бакеева, Л.В.
Б 19 Элементы теории графов и некоторые ее приложения : методические указания / Л.В. Бакеева, О.В. Шемелова. – Нижнекамск : Нижнекамский химико-технологический институт (филиал) ФГБОУ ВПО «КНИТУ». – 2014. – 53 с.

Приведены основные теоретические сведения теории графов. Даны методические указания к самостоятельному решению задач на графах

Рекомендованы для формирования профессиональных компетенций при подготовке бакалавров технических направлений.

Подготовлены на кафедре математики НХТИ.

УДК 519.17

ВВЕДЕНИЕ

Теорию графов начали разрабатывать для решения некоторых задач о геометрических конфигурациях, состоящих из точек и линий. В этих задачах несущественно, соединены ли точки конфигурации отрезками прямых или криволинейными дугами, какова длина линий и другие геометрические характеристики конфигурации. Важно лишь то, что каждая линия соединяет какие-либо две из заданных точек.

Теория графов в последнее время хорошо используется в различных отраслях науки и техники, экономике и социологии.

Во многих прикладных задачах изучаются системы связей между различными объектами. Объекты обозначают точками и называют ***вершинами***, а связи между вершинами отмечают линиями и называют ***ребрами*** (дугами). Такие системы и образуют графы. Граф может изображать сеть улиц в городе: вершины графа – перекрестки, а дуги – улицы. В виде графов можно представить блок-схемы программ (вершины – блоки, а дуги – разрешенные переходы от одного блока к другому), электрические цепи, географические карты, молекулы химических соединений, связи между людьми и группами людей и так далее.

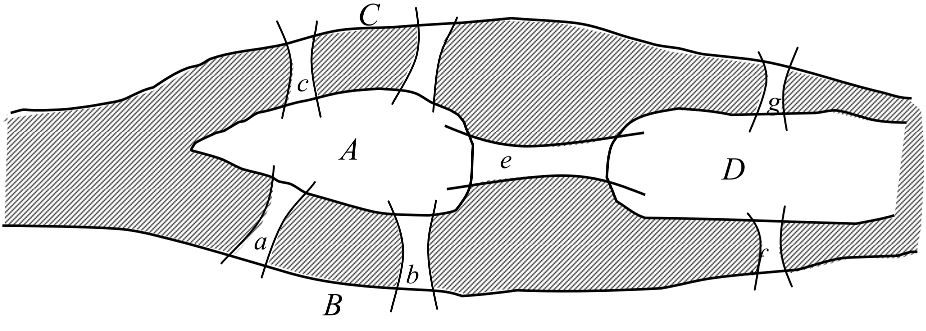


Рис. 1

Основы теории графов разработал швейцарский математик, механик, физик, астроном **Леонард Эйлер** (1707–1783), решавший задачу о разработке замкнутого маршрута по мостам в г.

Кенигсберге (рис. 1). Расположение мостов в г. Кенигсберге в его время было следующим:

Требовалось пройти каждый мост по одному разу и вернуться в исходную часть города.

Л. Эйлер построил граф задачи (рис. 2), в котором каждой части города соответствуют вершина, а каждому мосту – ребро, и доказал, что такая задача решения не имеет.

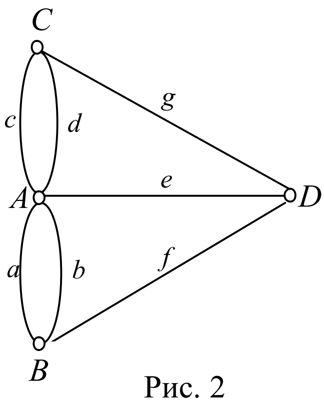


Рис. 2

Быстрое развитие теория графов получила с созданием электронно-вычислительной техники, которая позволяла решить многие задачи алгоритмизации. Графические изображения наглядно представляют различные взаимосвязи: пространственное расположение объектов, временные зависимости процессов и явлений, логические, структурные причинно-следственные и другие взаимосвязи. На языке теории графов формулируются и решаются многие задачи управления, в том числе задачи сетевого планирования и управления, анализа и проектирования организационных структур управления, анализа процессов функционирования и целеполагания, многие задачи принятия решений в условиях неопределенности и другие.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Графы и их составляющие характеризуются определенными свойствами и набором допустимых преобразований (операций) над ними.

Графом G называется совокупность двух множеств: вершин V и ребер E, между элементами которых определено ***отношение инцидентности***, то есть каждое ребро $e \in E$ инцидентно ровно двум вершинам $v', v'' \in V$, которые оно соединяет (рис. 3). При этом вершина $v'(v'')$ и ребро e называются инцидентными друг другу, а вершины v' è v'', являющиеся для ребра e концевыми точками, называются смежными. Часто вместо $v \in V$ и $e \in E$ пишут $v \in G$ è $e \in G$.

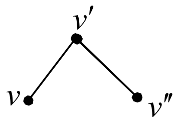


Рис. 3

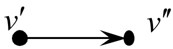


Рис. 4

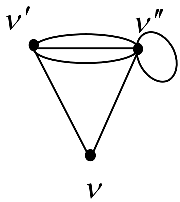


Рис. 5

Ребро, соединяющее две вершины, может иметь направление от одной вершины к другой; в этом случае оно называется ***направленным*** или ***ориентированным***, или ***другой*** и изображается стрелкой, направленной от вершины, называемой ***началом*** (v'), к вершине, именуемой ***концом*** (v'') (рис. 4).

Граф, содержащий направленные ребра (дуги) с началом v' и концом v'', называется ***ориентированным*** или (***орграфом***), а ненаправленные ***неориентированным*** (***графом***).

Ребра, инцидентные одной и той же паре вершин называется ***параллельными***, или ***кратными*** (рис. 5).

Граф, содержащий кратные ребра, именуется ***мультиграфом*** (рис. 5).

Ребро, концевые вершины которого совпадают, называется ***петлей*** (рис. 5).

Граф называется ***конечным***, если множество его элементов (вершин и ребер) конечно, и ***пустым***, если его множество вершин V (а значит и ребер E) пусто.

Граф без ***петель*** и ***кратных*** ребер именуется ***полным***, если каждая пара вершин соединена ребром (рис. 6).

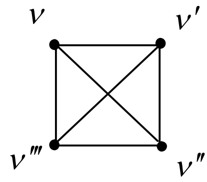


Рис. 6

Дополнением графа G называется граф $\overline{G}$, имеющий те же вершины, что и граф G, и содержащий только те ребра, которые нужно добавить к графу G, чтобы получить полный граф (рис. 7).

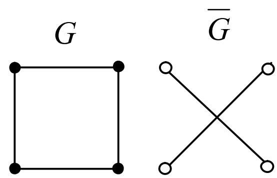


Рис. 7

Каждому неориентированному графу ***канонически соответствует*** ориентированный граф с тем же множеством вершин, в котором каждое ребро заменено ориентированными ребрами, инцидентными тем же вершинам и имеющим противоположные направления (рис. 8).

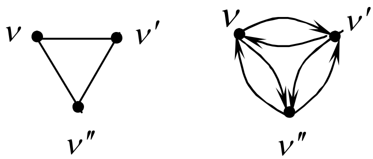


Рис. 8

Локальной степенью (или просто ***степенью***) вершины $v \in V$ н-графа G называется количество ребер $\rho(v)$, инцидентных вершине. В н-графе сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер m графа, m четна (предполагается, что в графе с петлями петля дает вклад 2 в степень вершины):

$$\sum_{V \in G} \rho(v) = 2m,$$

отсюда следует, что в н-графе число вершин нечетной степени четно.

Для вершин орграфа определяются две локальные степени:

$\rho_1(v)$ – число ребер с началом в вершине v, или количество выходящих из v ребер;

$\rho_2(v)$ – количество входящих v ребер, для которых эта вершина является концом.

Петля дает вклад 1 в обе эти степени. В орграфе суммы степеней всех вершин $\rho_1(v)$, $\rho_2(v)$ равны количеству ребер m этого графа, а значит и равны между собой:

$$\sum_{V \in G} \rho_1(v) = \sum_{V \in G} \rho_2(v) = m .$$

Пример 1. Чему равны степени вершин графов G_1 и G_2 (рис. 9).

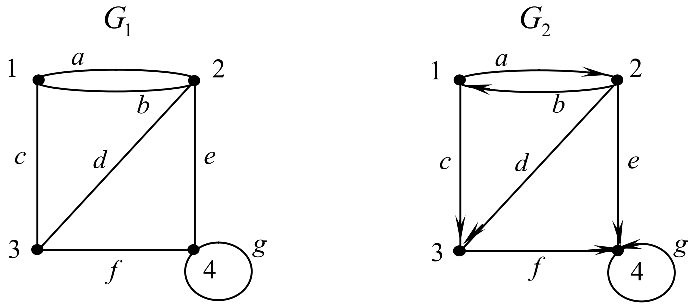


Рис. 9

Оба графа имеют по четыре вершины: $V = \{1,2,3,4\}$. Степени вершин неориентированного графа G_1: $\rho(1) = 3,\ \rho(2) = 4,\ \rho(3) = 3,\ \rho(4) = 4$.

$$\sum_{v \in G_1} \rho(v) = \rho(1) + \rho(2) + \rho(3) + \rho(4) = 3 + 4 + 3 + 4 = 14 ,$$

вдвое больше числа ребер графа, то есть:

$$14 = 2m ,\ m = 7$$ – число ребер графа.

Степени вершин ориентированного графа G_2 :

$$\rho_1(1) = 2,\ \rho_1(2) = 3,\ \rho_1(3) = 1,\ \rho_1(4) = 1,$$

$$\rho_2(1) = 1,\ \rho_2(2) = 1,\ \rho_2(3) = 2,\ \rho_2(4) = 3.$$

Суммы степеней вершин первого и второго типа графа G_2 совпадают и равны числу ребер графа:

$$\sum_{v \in G_2} \rho_1(v) = 2 + 3 + 1 + 1 = 7,$$

$$\sum_{v \in G_2} \rho_2(v) = 1 + 1 + 2 + 3 = 7,$$

$$\sum_{v \in G_2} \rho_1(v) = \sum_{v \in G_2} \rho_2(v) = 7 = m. \ \square$$

Граф называется ***регулярным***, если степени всех его вершин равны.

Граф называется ***кубическим***, если степени всех его вершин равны 3.

Граф называется ***платоновым***, если он образован вершинами и ребрами пяти правильных многогранников – Платоновых тел: тетраэдра, куба, октаэдра, додекаэдра и икосаэдра.

Графы G_1 и G_2 равны (рис. 10), то есть $G_1 = G_2$, если их множества вершин и ребер (выраженных через пары инцидентных им вершин) совпадают: $V_1 = V_2$ è $E_1 = E_2$.

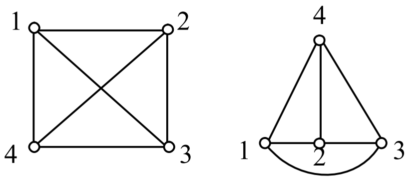


Рис. 10

Пример 2. Показать, что графы G_1 и G_2 равны (рис. 10).

Запишем множество вершин и ребер:

для графа G_1:

$V_1 = \{1,2,3,4\}$

$E_1 = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$;

для графа G_2:

$V_2 = \{1,2,3,4\}$

$E_2 = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$.

Так как $V_1 = V_2$ è $E_1 = E_2$, то $G_1 = G_2$. $\square$

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ГРАФОВ

Граф может быть задан одним из следующих способов.

1. ***Графически***.

2. ***В виде двух множеств вершин*** V ***и ребер*** Å, когда каждое ребро $e \in E$ определено парой инцидентных ему концевых вершин (ν', ν'').

3. ***Матрицей смежности*** $\|\delta_{kl}\|$ – квадратной матрицей размера $n \times n$: по вертикали и горизонтали перечисляются все вершины $\nu_j \in V$, а на пересечении k-й и l-й вершины в случае н-графа проставляется число, равное числу ребер, соединяющих эти вершины, для орграфа в δ_{kl} равно числу ребер с началом в k-й вершине и концом в l-й.

4. ***Списком ребер*** графа, представленным двумя столбцами: в левом перечисляются все ребра $e_j \in E$, а в правом – инцидентные ему вершины ν'_j, ν''_j; для н-графа порядок вершин в строке произвольный, для орграфа первым стоит номер вершины, обозначающей начало ребра.

<u>Построение списка ребер по матрице смежности</u>

Элементу матрицы, расположенному в i-й строке и j-м столбце соответствует δ_{ij} строк списка ребер (при $\delta_{ij} = 0$ – ни одной строки), в каждой из которых записаны номера i, j. Для н–графа эти строки соответствуют только элементам верхнего правого треугольника матрицы смежности, то есть элементом δ_{ij} $\tilde{n} j \geq i$, а для орграфа нужно рассматривать все элементы δ_{ij}.

5. ***Матрицей инцидентности*** $\|\varepsilon_{ij}\|$ размера $m \times n$: по вертикали и горизонтали указываются вершины и ребра соответственно, а на пересечении i-й вершины и j-го ребра в случае н-графа проставляется 1, если они инцидентны, и 0 – в противном случае, то есть

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ åñëè ðåáðî } å_i \text{ èíöèäåíòíî âåðøèíå } \nu_j, \\ 0 - \text{ â ïðîòèâíîì ñëó÷àå;} \end{cases}$$

а в случае орграфа:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{если вершина } \nu_j - \text{началом ребра } e_i, \\ 1, & \text{если вершина } \nu_j - \text{конец ребра } e_i, \\ \alpha, & (\text{любое число, отличное от } -1, 1, 0), \\ & \text{если } e_i - \text{петля,} \\ & \text{а } \nu_j - \text{инцидентная ей вершина,} \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Пример 3. Задать граф G (рис. 11) матрицей смежности, списком ребер и матрицей инцидентности.

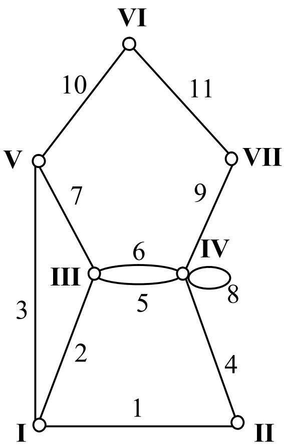


Рис. 11

Матрица смежности:

G	I	II	III	IV	V	VI	VII
I	0	1	1	0	1	0	0
II	1	0	0	1	0	0	0
III	1	0	0	2	1	0	0
IV	0	1	2	1	0	0	1
V	1	0	1	0	0	1	0
VI	0	0	0	0	1	0	1
VII	0	0	0	1	0	1	0

Список ребер:

Ребра	Вершины		Ребра	Вершины	
1	I	II	6	III	IV
2	I	III	7	III	V
3	I	V	8	IV	IV
4	II	IV	9	IV	VII
5	III	IV	10	V	VI
			11	VI	VII

Матрица инцидентности:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
I	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
II	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
III	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0
IV	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0
V	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0
VI	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
VII	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1

□

Список ребер графа является, по существу, сокращенным представлением матрицы инцидентности (в каждой ее строке только два элемента отличны от 0 или один, если ребро – петля).

При наличии матрицы инцидентности число всех вершин и число ребер графа определяется по размеру матрицы:

- число вершин $|V|$ графа равно числу строк;
- число ребер $|E|$ равно числу столбцов n матрицы.

По списку ребер:

- число ребер – число строк в списке,
- число вершин равно максимальному номеру перечисленных номеров вершин.

По матрице смежности:

- число ребер: матрица смежности н-графа симметрична относительно главной диагонали $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, и все его ребра определяются верхним правым треугольником матрицы, расположенным над диагональю, включая последнюю. Таким образом, число ребер н-графа по матрице смежности равно сумме элементов δ_{ij}, расположенных на диагонали и выше, то есть равно

$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \geq i}}^{n} \delta_{ij}$. Ребра орграфа определяются всеми элементами δ_{ij} матрицы смежности, отсюда их число равно $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}$.

- число вершин графа определяется порядком n матрицы.

МАРШРУТЫ, ЦЕПИ, ЦИКЛЫ

Пусть G – неориентированный граф.

Маршрутом в G называется такая последовательность ребер $M(l_1, l_2, l_3, ..., l_n)$, в которой каждые два соседних ребра l_{i-1} и l_i имеют общую вершину.

В маршруте одно и то же ребро может встречаться несколько раз.

Начало маршрута – вершина ν_0, инцидентная ребру l_1 и не инцидентная l_2; ***конец маршрута*** – вершина u инцидентная ребру l_n и не инцидентная ребру l_{n-1}.

Маршрут, в котором совпадают его начало и конец $\nu_0 = u$, называется ***циклическим***.

Маршрут, в котором все ребра разные, называется ***цепью***.

Цепь, не пересекающая себя, то есть не содержащая повторяющихся вершин, именуется ***простой цепью***.

Циклический маршрут называется ***циклом***, если он является цепью, и ***простым циклом***, когда это – простая цепь.

Вершины $V', V'' \in G$ называются ***связными***, если существует маршрут M с началом V' и с концом V''.

Связные маршрутом вершины связны также и простой цепью.

Граф G называется ***связным***, если все его вершины связны между собой.

Пусть G – ориентированный граф.

Последовательность ребер, в которой конец каждого предыдущего ребра l_{i-1} совпадает с началом следующего l_i, называется ***путем*** (в нем все ребра проходят по их ориентации).

В пути одно и то же ребро может встречаться несколько раз. Началом пути является начало v_0 ребра l_1, концом пути – конец ν_n ребра l_n.

Путь называется ***ориентированной цепью*** (или просто ***цепью***), если каждое ребро встречается в нем не более одного раза, и ***простой цепью***, если любая вершина графа G инцидентна не более чем двум его ребрам.

Контур – путь, в котором $\nu_0 = u$. Контур называется ***циклом***, если он является цепью, и ***простым циклом***, когда это простая цепь.

Граф, не содержащий циклов, называется ***ациклическим***.

Вершина $\nu'' \in G$ называется ***достижимой*** из вершины $\nu' \in G$, если существует путь $L(\nu', \ldots, \nu'')$ с началом ν' и концом ν''.

Орграф G именуется ***связным***, если он связен без учета ориентации дуг, и ***сильно связен***, если из любой вершины ν' в любую ν'' существует путь.

Пусть G – н-граф.

Число ребер маршрута (пути) называется его ***длиной***.

Расстоянием $\rho(\nu', \nu'')$ между вершинами ν' и ν'' н-графа G называется минимальная длина простой цепи с началом ν' и концом ν''.

Матрица $p = (p_{ij})$, в которой $p_{ij} = \rho(v'v'')$, называется ***матрицей расстояний***.

Для фиксированной вершины v величина

$$\varepsilon(v) = \max\{\rho(v\ \ v') | v' \in G\}$$

называется ***эксцентриситетом вершины*** v, т.е. эксцентриситет вершины равен расстоянию от данной вершины до наиболее удаленной от нее.

Максимальный среди всех эксцентриситетов вершин называется ***диаметром графа*** и обозначается

$$d(G): d(G) = \max\{\varepsilon(v) | v \in G\}.$$

Вершина v называется ***периферийной***, если $\varepsilon(v) = d(G)$.

Минимальный из эксцентриситетов графа G называется ***радиусом графа*** и обозначается

$$r(G): r(G) = \min\{\varepsilon(v) | v \in G\}.$$

Вершина v называется ***центральной***, если $\varepsilon(v) = r(G)$. Множество всех центральных вершин называется ***центром графа***.

Пример 4. Построить матрицу расстояний для графа (см. рис. 11). Определить диаметр, радиус и центр граф.

	I	*II*	*III*	*IV*	*V*	*VI*	*VII*	$\varepsilon(v)$
I	0	1	1	2	1	2	3	3
II	1	0	2	1	2	3	2	2
III	1	2	0	1	1	2	2	2
IV	2	1	1	1	2	2	1	2
V	1	2	1	2	0	1	2	2
VI	2	3	2	2	1	0	1	3
VII	3	2	2	1	2	1	0	2

$$d(G) = 3, \quad r(G) = 2$$

За центр графа можем принять множество вершин:

$$\{\mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV}, \mathrm{V}, \mathrm{VII}\} \subset V(G),$$

а $\{\mathrm{I}, \mathrm{VII},\} \subset V(G)$ – множество периферийных вершин. □

ЭЙЛЕРОВЫ И ГАМИЛЬТОНОВЫ ЦИКЛЫ

Выше были введены понятия «путь» и «цикл» для связного графа. Особый интерес для математиков представляют так называемые два цикла, имеющие практическое применение – эйлеров цикл и гамильтонов цикл.

Пути и циклы Эйлера

Пусть *G(V, E)* – граф. Цикл, который включает все ребра и вершины графа *G*, называется ***эйлеровым циклом***. Граф, в котором существует эйлеров цикл называется ***эйлеровым***.

Теорема Эйлера. Связный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда степень каждой его вершины четная.

Данная теорема служит критерием существования эйлерова цикла в графе, потому что эйлеровых графов с числом вершин n среди множества графов с тем же числом вершин почти нет. Эта теорема справедлива также и для мультиграфов, и для псевдографов, исключая тот случай, когда псевдограф имеет только одну вершину.

Эта теорема была сформулирована в процессе решения Леонардом Эйлером задачи о кенигсбергских моста (приложение). На графе к задаче о кенигсбергских мостах нельзя построить эйлеров цикл, так как этот граф имеет вершины нечетной степени. Вообще эйлеров граф – это такой граф, который можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не повторяя линий.

Для построения эйлерова цикла применяется так называемый алгоритм Флери (в рамках данных указаний не будем рассматривать его реализацию).

В задаче о кенигсбергских мостах можно было бы поставить такой вопрос: «Возможно, ли пройти каждый мост по одному разу, но не обязательно возвращаться в исходную точку?»

Пусть *G(V, E)* – граф. Путь, который включает каждое ребро графа *G* только один раз, называется ***эйлеровым путем***. Эйлеров путь, который не является циклом, называется ***собственным эйлеровым путем***.

Теорема. Граф (мультиграф или псевдограф) имеет собственный эйлеров путь тогда и только тогда, когда он связный и ровно две его вершины имеют нечетную степень.

Согласно этой теореме: задача о кенигсбергских мостах так же не имеет и эйлерова пути.

Пусть *G(V, E)* - ориентированный граф. Ориентированный цикл, который включает все ребра и вершины графа *G*, называется ***эйлеровым циклом***.

Теорема. Ориентированный граф имеет эйлеров цикл тогда и только тогда, когда он связный и полустепень захода каждой вершины равна ее полустепени исхода.

<u>Пути и циклы Гамильтона</u>

Пусть *G(V, E)* – граф. ***Гамильтонов путь*** – это простой путь, который проходит через каждую вершину графа *G*. ***Гамильтонов цикл*** – это простой цикл, который проходит через каждую вершину графа *G*.

Выше был приведен изящный критерий существования у графа эйлерова цикла. К сожалению, никому не удалось установить необходимые и достаточные условия существования у графа гамильтонова цикла. Тем не менее, доказано ряд теорем, в которых приводятся некоторые условия существования у графа гамильтонова цикла. Но эти теоремы мы рассматривать не будем. Сформулируем, в качестве иллюстрации и без решения, одну из задач, в которой требуется отыскать гамильтонов цикл в взвешенном графе минимальной длины.

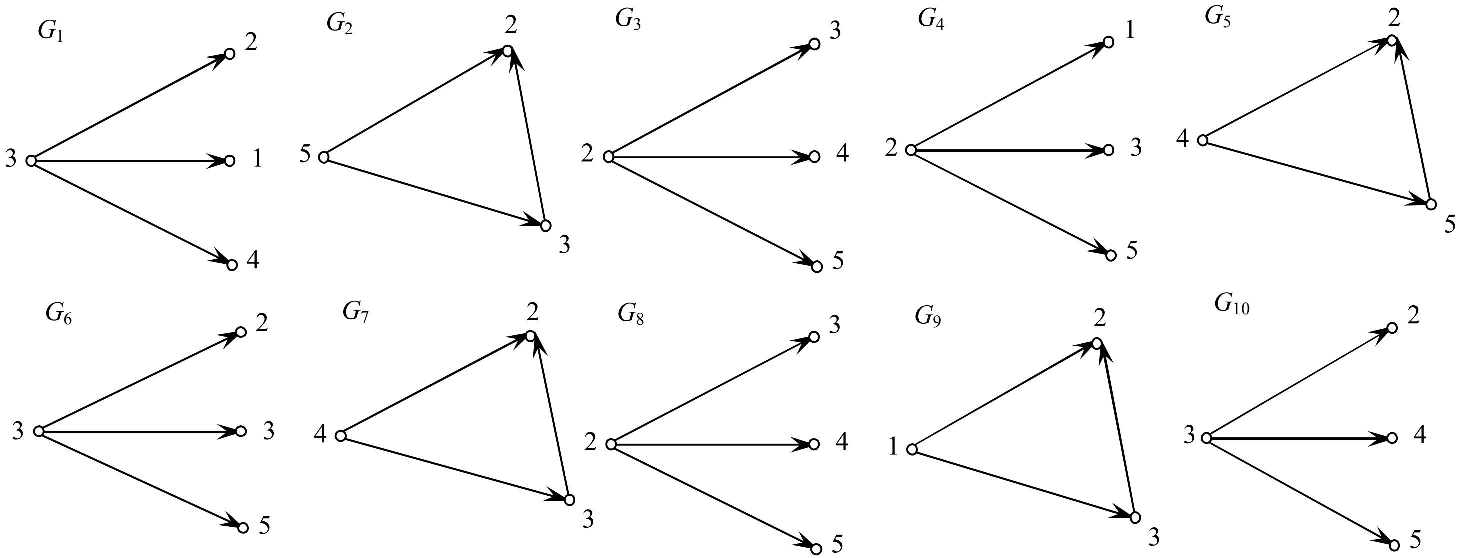
Задача коммивояжера (развозчика продукции или бродячего торговца): коммивояжер должен посетить один и только один раз каждый из *n* городов и вернуться в исходный пункт. Его маршрут должен минимизировать суммарную длину пройденного пути. С помощью математического инструментария строится математическая модель задачи, решение которой реализует алгоритм Литтла.

Индивидуальные задания

Задача 1.

Объединением графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называется граф $G_1 \cup G_2$, у которого множество вершин и множество дуг объединено, то есть $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.

Даны графы:



Построить матрицы смежности и инцидентности графа G, если G:

1. $G_1 \cup G_2 \cup G_3$.
2. $G_1 \cup G_2 \cup G_6$
3. $G_1 \cup G_2 \cup G_8$.
4. $G_1 \cup G_2 \cup G_{10}$.
5. $G_1 \cup G_5 \cup G_3$.
6. $G_1 \cup G_5 \cup G_6$.
7. $G_1 \cup G_5 \cup G_8$.
8. $G_1 \cup G_5 \cup G_{10}$.
9. $G_1 \cup G_7 \cup G_3$.
10. $G_1 \cup G_7 \cup G_6$.
11. $G_1 \cup G_7 \cup G_8$.
12. $G_1 \cup G_7 \cup G_{10}$.
13. $G_1 \cup G_9 \cup G_3$.
14. $G_1 \cup G_9 \cup G_6$.
15. $G_1 \cup G_9 \cup G_8$.
16. $G_1 \cup G_9 \cup G_{10}$.
17. $G_4 \cup G_2 \cup G_3$.
18. $G_4 \cup G_2 \cup G_6$.
19. $G_4 \cup G_2 \cup G_8$.
20. $G_4 \cup G_2 \cup G_{10}$.
21. $G_4 \cup G_5 \cup G_3$.
22. $G_4 \cup G_5 \cup G_6$.
23. $G_4 \cup G_5 \cup G_8$.
24. $G_4 \cup G_5 \cup G_{10}$.
25. $G_4 \cup G_7 \cup G_3$.
26. $G_4 \cup G_7 \cup G_6$.
27. $G_4 \cup G_7 \cup G_8$.
28. $G_4 \cup G_7 \cup G_{10}$.
29. $G_4 \cup G_9 \cup G_3$.
30. $G_4 \cup G_9 \cup G_6$.

Задача 2.

В таблице для каждого варианта заданы декартовы координаты вершин н-графа и перечислены ребра графа. Построить граф на плоскости Oxy и найти:

1) таблицу степеней вершин;
2) матрицу смежности;
3) матрицу инцидентности;
4) таблицу расстояний в графе;
5) определить эксцентриситет вершин графа;
6) определить диаметр графа и периферийные вершины;
7) определить радиус и центр графа;
8) определить количество маршрутов длины 2;
9) выписать все маршруты длины 3 с началом в вершине x_3.

Вариант	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	Список ребер
1	(1;3)	(3;5)	(6;5)	(2;2)	(3;3)	(1;0)	(3;0)	(6;2)	$(x_1; x_2)$, $(x_2; x_5)$, $(x_2; x_3)$, $(x_2; x_4)$, $(x_1; x_6)$, $(x_2; x_7)$, $(x_6; x_7)$, $(x_7; x_8)$, $(x_3; x_8)$
2	(4;6)	(2;4)	(4;4)	(6;4)	(2;0)	(4;1)	(6;0)	(9;2)	$(x_1; x_2)$, $(x_2; x_5)$, $(x_2; x_3)$, $(x_1; x_4)$, $(x_4; x_7)$, $(x_6; x_7)$, $(x_1; x_3)$, $(x_3; x_4)$, $(x_5; x_6)$, $(x_3; x_8)$
3	(2;3)	(2;6)	(3;7)	(3;5)	(5;6)	(5;4)	(6;6)	(4;1)	$(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, $(x_4; x_6)$, $(x_3; x_4)$, $(x_5; x_6)$, $(x_3; x_5)$, $(x_5; x_7)$, $(x_7; x_8)$

4	(1;1)	(2;2)	(2;4)	(2;5)	(3;5)	(5;5)	(3;2)	(5;2)	$(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, $(x_5; x_6)$, $(x_3; x_5)$, $(x_6; x_8)$, $(x_2; x_7)$, $(x_7; x_8)$, $(x_5; x_7)$, $(x_1; x_4)$, $(x_3; x_4)$
5	(1;4)	(3;5)	(5;4)	(1;2)	(5;2)	(1;0)	(5;0)	(7;1)	$(x_1; x_2)$, $(x_2; x_4)$, $(x_2; x_5)$, $(x_2; x_3)$, $(x_4; x_5)$, $(x_6; x_7)$, $(x_5; x_7)$, $(x_4; x_6)$, $(x_7; x_8)$, $(x_3; x_8)$
6	(1;7)	(2;7)	(6;7)	(8;5)	(6;2)	(2;2)	(6;5)	(4;5)	$(x_2; x_3)$, $(x_2; x_6)$, $(x_2; x_8)$, $(x_3; x_4)$, $(x_3; x_7)$, $(x_3; x_8)$, $(x_4; x_5)$, $(x_4; x_7)$, $(x_5; x_6)$, $(x_5; x_7)$, $(x_6; x_8)$, $(x_1; x_2)$, $(x_1; x_6)$
7	(1;5)	(2;4)	(4;4)	(5;5)	(4;2)	(2;2)	(1;1)	(3;3)	$(x_1; x_2)$, $(x_2; x_5)$, $(x_2; x_3)$, $(x_1; x_4)$, $(x_4; x_7)$, $(x_6; x_7)$, $(x_1; x_3)$, $(x_3; x_4)$, $(x_5; x_6)$, $(x_3; x_8)$
8	(1;2)	(2;4)	(3;5)	(4;4)	(4;3)	(2;2)	(2;3)	(4;2)	$(x_1; x_3)$, $(x_2; x_3)$, $(x_2; x_5)$, $(x_3; x_4)$, $(x_3; x_5)$, $(x_4; x_5)$, $(x_4; x_8)$, $(x_5; x_7)$, $(x_7; x_8)$, $(x_1; x_6)$, $(x_6; x_7)$
9	(0;2)	(1;4)	(2;5)	(3;6)	(4;5)	(5;4)	(6;2)	(3;2)	$(x_1; x_2)$, $(x_3; x_4)$, $(x_2; x_3)$, $(x_2; x_6)$, $(x_5; x_6)$, $(x_3; x_5)$, $(x_1; x_8)$, $(x_7; x_8)$, $(x_3; x_7)$, $(x_6; x_7)$
10	(2;2)	(2;5)	(3;6)	(5;6)	(3;4)	(4;5)	(4;4)	(5;4)	$(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, $(x_3; x_4)$, $(x_3; x_5)$, $(x_3; x_6)$, $(x_4; x_6)$, $(x_4; x_8)$, $(x_5; x_6)$, $(x_1; x_7)$
11	(1;3)	(2;4)	(3;7)	(2;5)	(5;2)	(2;2)	(1;1)	(4;2)	$(x_2; x_3)$, $(x_3; x_5)$, $(x_5; x_7)$, $(x_1; x_4)$, $(x_1; x_2)$, $(x_6; x_8)$, $(x_7; x_8)$, $(x_3; x_6)$, $(x_4; x_5)$
12	(2;2)	(1;4)	(3;5)	(5;5)	(6;2)	(1;0)	(3;2)	(4;1)	$(x_1; x_3)$, $(x_2; x_3)$, $(x_3; x_4)$, $(x_4; x_5)$, $(x_4; x_6)$, $(x_5; x_7)$, $(x_1; x_8)$, $(x_4; x_7)$, $(x_1; x_6)$
13	(2;3)	(2;1)	(5;4)	(8;5)	(4;2)	(2;2)	(6;2)	(5;0)	$(x_2; x_3)$, $(x_2; x_4)$, $(x_4; x_5)$, $(x_5; x_7)$, $(x_4; x_6)$, $(x_6; x_8)$, $(x_1; x_8)$, $(x_3; x_7)$, $(x_2; x_8)$

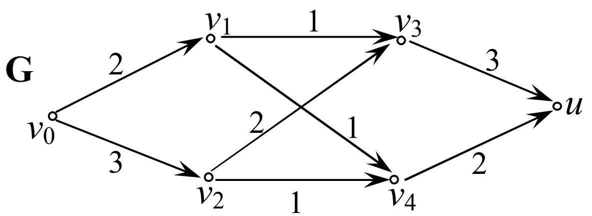
14	(2;4)	(3;5)	(3;6)	(4;5)	(0;5)	(1;1)	(4;1)	(1;3)	$(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, $(x_3; x_4)$, $(x_4; x_5)$, $(x_5; x_6)$, $(x_6; x_7)$, $(x_7; x_8)$, $(x_1; x_8)$, $(x_1; x_5)$, $(x_1; x_7)$, $(x_3; x_6)$, $(x_2; x_6)$
15	(3;5)	(4;4)	(5;6)	(5;5)	(5;0)	(4;5)	(1;5)	(2;4)	$(x_1; x_2)$, $(x_3; x_4)$, $(x_5; x_6)$, $(x_7; x_8)$, $(x_1; x_3)$, $(x_5; x_7)$, $(x_2; x_4)$, $(x_6; x_8)$, $(x_1; x_4)$, $(x_2; x_5)$, $(x_3; x_6)$, $(x_4; x_7)$
16	(4;6)	(2;6)	(3;7)	(3;4)	(4;2)	(8;1)	(6;4)	(1;0)	$(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, $(x_3; x_7)$, $(x_7; x_6)$, $(x_6; x_8)$, $(x_5; x_8)$, $(x_4; x_5)$, $(x_1; x_4)$, $(x_2; x_4)$, $(x_3; x_4)$, $(x_1; x_5)$
17	(4;0)	(6;4)	(8;1)	(3;4)	(2;6)	(7;7)	(9;3)	(1;2)	$(x_1; x_3)$, $(x_3; x_7)$, $(x_7; x_6)$, $(x_6; x_5)$, $(x_5; x_8)$, $(x_8; x_1)$, $(x_4; x_8)$, $(x_2; x_4)$, $(x_2; x_3)$, $(x_4; x_5)$, $(x_2; x_6)$
18	(4;1)	(6;2)	(3;1)	(8;0)	(2;6)	(7;7)	(9;3)	(5;8)	$(x_1; x_5)$, $(x_3; x_5)$, $(x_2; x_3)$, $(x_2; x_7)$, $(x_7; x_8)$, $(x_6; x_8)$, $(x_6; x_4)$, $(x_3; x_4)$, $(x_3; x_8)$, $(x_5; x_8)$
19	(4;1)	(6;2)	(3;1)	(10;5)	(4;5)	(0;7)	(1;8)	(5;8)	$(x_1; x_3)$, $(x_1; x_5)$, $(x_1; x_6)$, $(x_2; x_3)$, $(x_2; x_4)$, $(x_2; x_5)$, $(x_4; x_8)$, $(x_6; x_8)$, $(x_7; x_8)$
20	(10;5)	(8;0)	(4;5)	(1;4)	(3;1)	(0;7)	(0;8)	(5;8)	$(x_1; x_7)$, $(x_2; x_3)$, $(x_4; x_5)$, $(x_4; x_6)$, $(x_6; x_8)$, $(x_3; x_7)$, $(x_1; x_5)$, $(x_3; x_6)$
21	(10;5)	(8;0)	(8;4)	(1;4)	(4;2)	(0;6)	(7;7)	(4;5)	$(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, $(x_3; x_4)$, $(x_4; x_5)$, $(x_5; x_7)$, $(x_6; x_7)$, $(x_6; x_8)$, $(x_7; x_8)$, $(x_2; x_8)$, $(x_1; x_7)$
22	(4;0)	(8;0)	(8;4)	(1;4)	(4;2)	(8;6)	(2;2)	(4;5)	$(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, $(x_3; x_8)$, $(x_4; x_5)$, $(x_5; x_6)$, $(x_1; x_6)$, $(x_2; x_2)$, $(x_5; x_7)$, $(x_1; x_7)$, $(x_7; x_4)$, $(x_6; x_8)$
23	(5;0)	(5;8)	(1;8)	(9;8)	(1;5)	(9;5)	(3;2)	(7;2)	$(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, $(x_2; x_4)$, $(x_3; x_5)$, $(x_2; x_5)$, $(x_5; x_8)$, $(x_4; x_7)$, $(x_1; x_8)$, $(x_7; x_8)$, $(x_7; x_6)$, $(x_4; x_5)$, $(x_6; x_6)$

24	(5;5)	(5;8)	(2;7)	(8;7)	(1;5)	(9;5)	(3;2)	(7;2)	$(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, $(x_5; x_7)$, $(x_7; x_8)$, $(x_8; x_6)$, $(x_6; x_4)$, $(x_4; x_2)$, $(x_1; x_3)$, $(x_1; x_5)$, $(x_1; x_7)$, $(x_1; x_8)$, $(x_1; x_4)$
25	(5;4)	(5;8)	(2;7)	(8;7)	(3;5)	(7;5)	(2;2)	(8;2)	$(x_1; x_5)$, $(x_1; x_6)$, $(x_1; x_7)$, $(x_1; x_8)$, $(x_5; x_6)$, $(x_3; x_5)$, $(x_2; x_3)$, $(x_2; x_4)$, $(x_4; x_6)$, $(x_2; x_5)$, $(x_2; x_6)$
26	(5;4)	(5;8)	(2;7)	(8;7)	(3;5)	(7;5)	(2;2)	(8;2)	$(x_4; x_7)$, $(x_1; x_8)$, $(x_2; x_3)$, $(x_2; x_4)$, $(x_3; x_4)$, $(x_3; x_7)$, $(x_4; x_8)$, $(x_7; x_8)$, $(x_3; x_5)$, $(x_5; x_6)$, $(x_4; x_6)$
27	(2;8)	(9;8)	(5;6)	(3;5)	(7;5)	(4;5)	(2;2)	(9;2)	$(x_1; x_2)$, $(x_1; x_4)$, $(x_2; x_5)$, $(x_4; x_7)$, $(x_5; x_8)$, $(x_7; x_8)$, $(x_4; x_0)$, $(x_5; x_6)$, $(x_3; x_4)$, $(x_3; x_5)$
28	(2;8)	(9;8)	(5;6)	(3;5)	(7;5)	(4;5)	(2;2)	(9;2)	$(x_1; x_2)$, $(x_2; x_8)$, $(x_1; x_7)$, $(x_7; x_8)$, $(x_3; x_4)$, $(x_4; x_6)$, $(x_5; x_6)$, $(x_3; x_5)$, $(x_1; x_4)$, $(x_4; x_7)$, $(x_2; x_5)$, $(x_5; x_8)$
29	(2;8)	(5;9)	(9;8)	(7;5)	(9;2)	(5;0)	(2;2)	(3;5)	$(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, $(x_3; x_4)$, $(x_4; x_5)$, $(x_5; x_6)$, $(x_6; x_7)$, $(x_7; x_8)$, $(x_1; x_8)$, $(x_1; x_4)$, $(x_4; x_7)$, $(x_3; x_8)$, $(x_5; x_8)$
30	(9;8)	(5;9)	(2;8)	(3;5)	(2;2)	(5;0)	(9;2)	(7;5)	$(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, $(x_3; x_4)$, $(x_4; x_8)$, $(x_8; x_4)$, $(x_1; x_3)$, $(x_2; x_8)$, $(x_5; x_6)$, $(x_6; x_7)$, $(x_7; x_8)$, $(x_5; x_7)$, $(x_4; x_6)$

ВЗВЕШЕННЫЕ ГРАФЫ (СЕТИ).

Когда графы используются для моделирования реальных систем, их вершинам, или ребрам, или и тем, и другим приписываются некоторые числа. Природа этих чисел может быть самая разнообразная. Например, если граф представляет собой модель автодорожной (локальной) сети, то число, приписанное ребру, может указывать длину дорожного полотна между двумя населенными пунктами (длину кабеля между двумя рабочими станциями) сети; или наибольший вес грузоподъемности транспорта, который допустим для этого участка пути; или пропускная способность (среднее число машин, объем информационного потока) проходящих через этот участок в определенный момент времени; или вероятность перехода по дуге и т.п. Что бы ни означали эти числа, принято называть их весами, а граф с заданными весами вершин и или ребер - взвешенным графом.

Взвешенным графом $G_V = (V, E, C)$ называется ориентированный граф, определенный на множествах вершин (V), дуг (E) и весовых функций $(C = \{c : c(v) \geq 0\}$ èëè $C = \{c : c(e) \geq 0\})$.
Например.



Взвешенный граф, наряду с другими способами задания, может быть задан ***матрицей весов*** – квадратной матрицей размера $n \times n$, по вертикали и горизонтали которой перечисляются все вершины $v_j \in V$, а на пересечении *i*-й строки и *j*-го столбца записывается число, равное значению весовой функции ребра, соединяющих эти вершины.
Тогда, матрица весов взвешенного графа G будет иметь вид

G	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	u
v_0	0	2	3	0	0	0
v_1	0	0	0	1	1	0
v_2	0	0	0	2	1	0
v_3	0	0	0	0	0	3
v_4	0	0	0	0	0	2
u	0	0	0	0	0	0

Итак, если функциональное назначение большинства физически реализованных взвешенных графов состоит в том, что они служат носителями систем потоков, т.е. систем, в которых некоторые объекты текут, движутся или транспонируются по системе каналов (дуг сети) ограниченной пропускной способности, то решение многочисленных подобных практических задач приводит к теории потоков в сетях. Данная теория разрабатывает решения общей задачи, которая называется ***задача об оптимальном потоке***. В рамках нашего пособия мы рассмотрим решение частного случая этой задачи - ***задачи определения максимальной величины потока***. Введем основные понятия на сетях и рассмотрим алгоритм построения потока максимальной мощности.

Сетью называется связный ориентированный граф $G(V,E)$ без петель с выделенными вершинами v_0 – ***истоком*** и u – ***стоком***, причем каждой дуге поставлено в соответствие некоторое натуральное число $c(v_i, v_j)$ – ***пропускная способность дуги*** (***исток*** – это вершина, из которой дуги только выходят, а ***сток*** – вершина, у в которую дуги только входят).

Пропускная способность дуги характеризует максимальное количество вещества, которое может пропустить за единицу времени дуга (v_i, v_j).

Поток $\varphi(v_i, v_j)$ в сети определяет способ пересылки некоторых объектов из одной вершины графа в другую по направлению дуги, поэтому не превышает пропускной способности $c(v_i, v_j)$ этой дуги, т.е. $0 \le \varphi(v_i, v_j) \le c(v_i, v_j)$. Будем считать, что если существует дуга из v_i в v_j, то нет дуги из v_j в v_i. Таким образом, рассматривается поток вещества только в одну сторону.

Формулировка задачи о максимальном потоке: на сети с заданными пропускными способностями дуг сформировать максимальный по величине поток $\varphi_{\max}$ между ее истоком и стоком. Этот поток обеспечивается назначением в каждой дуге (v_i, v_j) величины $\varphi(v_i, v_j)$ передаваемого ею потока.

Задача о максимальном потоке в сети должна удовлетворять следующим условиям:

– ***условие сохранения потока в сети***: сумма потоков дуг, выходящих из истока сети, должна быть равна сумме потоков дуг, входящих в сток

$$\sum_{(v_0, v_i) \in E} \varphi(v_0, v_i) = \sum_{(v_j, u) \in E} \varphi(v_i, u);$$

– ***условие сохранения потока в вершинах сети:*** для вершины *v*, не являющейся стоком или истоком, т.е. $v \ne v_0, v \ne u$, количество единиц потока, входящего в вершину, должно быть равно количеству единиц потока, выходящего из нее (сохранение потока)

$$\sum_{(v_i, v) \in E} \varphi(v_i, v) = \sum_{(v, v_j) \in E} \varphi(v, v_j);$$

– ***величина потока***: максимальный поток на пути от истока v_0 к стоку u определяется той дугой $(v_i; v_j)$, которая имеет минимальную пропускную способность из всех дуг, принадлежащих этому пути.

Дуга называется ***насыщенной,*** если пропускная способность $c(v_i, v_j)$ дуги (v_i, v_j) равна потоку этой дуги $\varphi(v_i, v_j)$.

Путь, содержащий насыщенную дугу, называется ***насыщенным***.

Поток, содержащий любой насыщенный путь с началом в вершине v_0 и с концом в вершине u, называется ***насыщенным***.

Разрезом сети называется множество дуг, исключение которых из сети сделало бы орграф несвязным, т.е. разрывает все пути с началом в вершине v_0 и с концом в вершине u.

Предположим, что дана некоторая сеть. Разобьем множество вершин V этой сети на два непересекающихся подмножества A и B ($A \cup B = V; A \cap B = \varnothing$) так, чтобы исток v_0 попал в подмножество A, а сток u – в подмножество B, т.е. $v_0 \in A, u \in B$. В этом случае говорят, что ***на сети произведен разрез***, отделяющий исток v_0 от стока u.

Пусть $R(A/B)$ - разрез на сети, представляющий совокупность дуг, которые связывают подмножества вершин A и B. В разрез входят дуги, обозначим их R^+, начальные вершины которых принадлежат подмножеству A, а конечные – подмножеству B, т.е. $R^+ = \{(v_i, v_j) \mid v_i \in A, v_j \in B\}$. А также в разрез входят дуги, обозначим их R^-, начальные вершины которых принадлежат подмножеству B, а конечные – подмножеству A, т.е. $R^- = \{(v_i, v_j) \mid v_i \in B, v_j \in A\}$.

Пропускной способностью или ***величиной разреза*** $R(A/B)$ называется величина $C(A/B)$, которая определяется следующей формулой:

$$C(A/B) = C(R^{+}) - C(R^{-}) = \sum_{v_i \in A, v_j \in B} c(v_i, v_j) - \sum_{v_i \in B, v_j \in A} c(v_i, v_j).$$

Потоком через разрез $R(A/B)$ называется величина $\Phi(A/B)$, которая определяется следующей формулой:

$$\Phi(A/B) = \Phi(R^{+}) - \Phi(R^{-}) = \sum_{v_i \in A, v_j \in B} \varphi(v_i, v_j) - \sum_{v_i \in B, v_j \in A} \varphi(v_i, v_j).$$

Утверждение:* Поток в сети будет максимальным, если величина этого потока** $\Phi_{\max}$ ***больше величины любого другого потока в этой сети.

Если на сети сформирован некоторый поток, то для ответа на вопрос: будет ли он максимальным, используют *теорему Форда-Фалкерсона*.

Теорема Форда-Фалкерсона: Максимальный поток в сети равен минимальной пропускной способности разреза:

$$\Phi_{\max} = C_{\min}(A/B).$$

Доказательством теоремы является алгоритм определения максимального потока по сети.

Алгоритм нахождения максимального потока на сети.

Шаг 1. Задание начального потока.

Сформировать произвольный начальный поток (*обычно в качестве начального потока* φ_0 *выбирают нулевой поток, т.е. такой, что для любой дуги* $c(v_i, v_j)$ $\varphi_0(v_i, v_j) = 0$)

Шаг 2. Построение насыщенного потока. Просмотреть пути, соединяющие исток v_0 и сток u. Если существует насыщенный поток, перейти к шагу 3. В противном случае рассмотреть путь L, соединяющий v_0 и u, все дуги которого ненасыщенны. Построить новый поток φ_1 по правилу

$$\varphi_1 = \begin{cases} \varphi_0(v_i, v_j), \text{åñëè } (v_i, v_j) \notin L, \\ \varphi_0(v_i, v_j) + k, \text{åñëè } (v_i, v_j) \in L, \end{cases}$$

$$\text{ãäå } k = \min_{e \in L}(c(e) - \varphi_0(e)) \text{ - êîýôôèöèåí } \text{ ò íàñûùåíèÿ } .$$

Шаг 3. Пометка вершин сети.

1. Вершине v_0 присвоить метку 0.
2. Пусть ω – любая из уже помеченных вершин; ω_i – произвольная непомеченная вершина, смежная с вершиной ω. Вершину ω_i помечаем $+i$, если дуга (ω, ω_i) является *ненасыщенной*, и помечаем $-i$, если поток φ по дуге (ω_i, ω) больше 0, т.е. $\varphi(\omega_i, \omega) > 0$.
3. повторять процесс пункта 2 до тех пор, пока не прекратится появление новых помеченных вершин.

Если в процессе расстановки меток вершин вершина u оказалась помеченной, то перейти к шагу 4; если в процессе расстановки меток вершин вершина u оказалась непомеченной, то искомый поток найден перейти к шагу 5.

Шаг 4. Перераспределение потока.

Рассмотреть последовательность отмеченных вершин $\lambda_i = (u, v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_0)$, каждая из которых имеет метку, равную модулю номера следующей вершины, и путь L_i, соединяющих соседние вершины из последовательности λ_i. Построить новый поток φ_i по приведенному правилу и перейти к пункту 3.

$$\varphi_i = \begin{cases} \varphi_{i-1}(v_i, v_j), \text{åñëè } (v_i, v_j) \notin L, \\ \varphi_{i-1}(v_i, v_j) + k, \text{åñëè } (v_i, v_j) \in L \text{ è âåðøèíà } \text{ èìååò } \text{ ìåòêó } +i, \\ \varphi_{i-1}(v_i, v_j) - k, \text{åñëè } (v_i, v_j) \in L \text{ è âåðøèíà } \text{ èìååò } \text{ ìåòêó } -i, \end{cases}$$

$$\text{ãäå } k = \min_{e \in L}(c(e) - \varphi_{i-1}(e)) - \text{êîýôôèöèåí } \text{ ò íàñûùåíèÿ } .$$

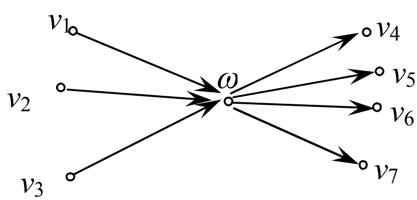
Перераспределение потока сохраняет все его свойства и увеличивает поток на k единиц в вершину u. Перейти к шагу 3.

Шаг 5. Определение максимального потока.

Вершина u осталась непомеченной. Пусть A – множество всех помеченных вершин, B – множество всех непомеченных вершин. Тогда дуги, связывающие два подмножества вершин A и B, определяют разрез $R\left(A/B\right)$. Таким образом, найден поток Φ и разрез $R\left(A/B\right)$, для которого выполняется условие $\Phi_{\max} = C_{\min}(A/B) = \sum\limits_{(v_0,v_j)\in L} \varphi_i(v_0,v_j) = \sum\limits_{(v_i,u)\in L} \varphi_i(v_i,u)$.

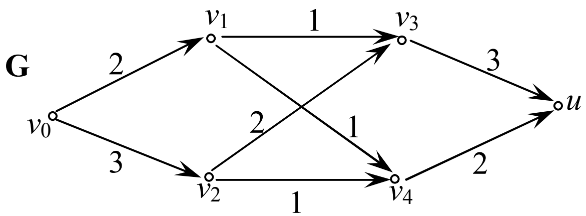
Алгоритм Форда-Фалкерсона является вторым этапом решения задачи о построении максимального потока. Прежде же необходимо определить какой поток для данной сети существует: Максимальный или насыщающий – поток, насыщающий все выходные дуги.

Образом вершины ω, $\Gamma(\omega)$, называется множество вершин, в которые входят дуги выходящие из вершин ω. ***Прообразом*** вершины ω, $\Gamma^{-1}(\omega)$, называется множество вершин, из которых выходят дуги входящие в вершину ω. Например, $\Gamma(\omega) = \{v_4, v_5, v_6, v_7\}$ и $\Gamma^{-1}(\omega) = \{v_1, v_2, v_3\}$ для графа



Теорема о насыщении. Поток, насыщающий все выходные дуги транспортной сети, существует тогда и только тогда, когда для любого подмножества $B \subset \Gamma^{-1}(u)$ выполняется неравенством $F(B) \ge d(B)$, где $\Gamma^{-1}(u)$ – прообраз вершины u; $F(B)$ – поглощающая способность множества B (поглощающая способность множества B есть максимальный суммарный поток, заходящий в множество B, при условии, что выходящий поток из вершин этого множества может быть сколь угодно большим); $d(B)$ – потребность множества B, равная сумме потребностей вершин, входящих в множество B, т.е. сумме пропускных способностей дуг, соединяющих вершины множества B с вершиной u ($d(B) = \sum\limits_{v \in B} d(v)$, $d(v) = c(v,u)$).

Пример. Определить существование насыщающего потока сети, построить существующий (максимальный или насыщенный) поток.



Решение.

<u>Первый этап.</u> Определим, какой существует поток в сети.

Найдем прообраз вершины u: $\Gamma^{-1}(u) = \{v_3, v_4\}$.

Составим все возможные подмножества $\Gamma^{-1}(u)$, кроме пустого: $B_1 = \{v_3\}$, $B_2 = \{v_4\}$, $B_3 = \{v_3, v_4\}$.

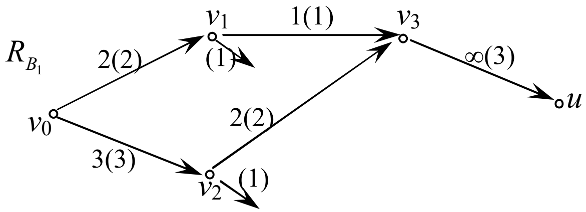
Определим потребность каждого множества $d(B_i)$:

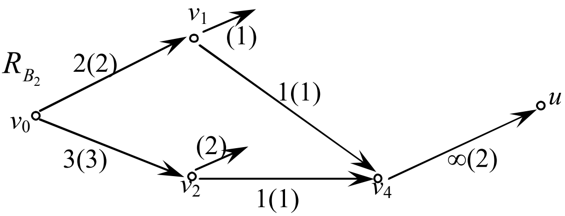
$d(B_1) = d(v_3) = c(v_3, u) = 3$;

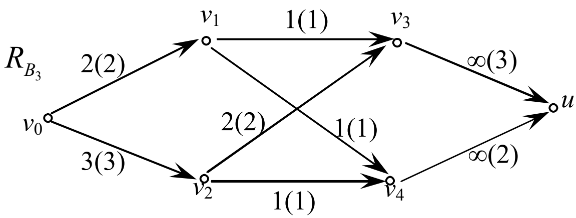
$d(B_2) = d(v_4) = c(v_4, u) = 2$;

$d(B_3) = d(v_3) + d(v_4) = c(v_3, u) + c(v_4, u) = 3 + 2 = 5$.

Определим поглощающию способность каждого множества $F(B_i)$. Для этого построим разрезы сети R_{B_i}, соответствующие каждому из множеств B_i. Тогда $F(B_1) = 3$, $F(B_1) = 2$, $F(B_1) = 5$.







Занесем значения $d(B_i)$ и $F(B_i)$ в таблицу.

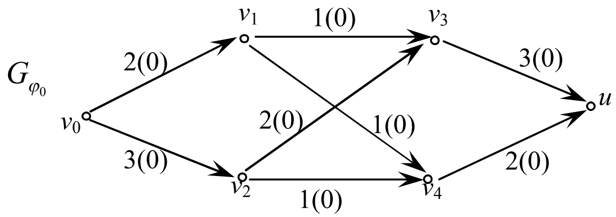
	B_1	B_2	B_3
$F(B_i)$	3	2	5
$d(B_i)$	3	2	5

Из таблицы один видно, что условие теоремы о насыщении выполняется, т.е. поток, насыщающий все входные дуги сети, существует.

Второй этап. Построим существующий (насыщенный) поток, применив алгоритмом Форда-Фалкерсона. *Заметим, что*

<u>максимальный поток строится аналогично построению насыщенного потока.</u>

Шаг 1. Зададим произвольный начальный поток в сети. Пусть начальный поток равен 0, т.е. $\varphi_0(v_i, v_j) = 0$ (*поток будем указывать в скобках рядом с пропускной способностью*).



Шаг 2. Рассмотрим несколько путей, соединяющие исток v_0 и сток u (*необходимо рассмотреть несколько путей, рекомендуется ограничиваться двумя- тремя путями*).

Рассмотрим пути, например

$$L_1 = \big((v_0, v_1), (v_1, v_4), (v_4, u)\big),$$

$$L_2 = \big((v_0, v_2), (v_2, v_3), (v_3, u)\big),$$

$$L_3 = \big((v_0, v_2), (v_2, v_4), (v_4, u)\big).$$

Все дуги путей L_1, L_2 и L_3 ненасыщенны. Определим коэффициент насыщения для каждого из путей:

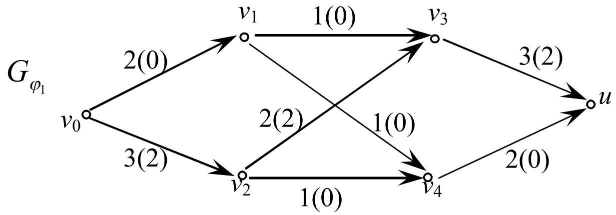
$$k_1 = \min_{e \in L_1}(2 - 0, 1 - 0, 2 - 0) = 1,$$

$$k_2 = \min_{e \in L_2}(3 - 0, 2 - 0, 3 - 0) = 2,$$

$$k_3 = \min_{e \in L_3}(3 - 0, 1 - 0, 2 - 0) = 1.$$

Для построения нового потока рекомендуется выбирать путь, для которого коэффициент насыщения удовлетворяет следующим условиям: принимает наибольшее значение и/или одновременно соответствует нескольким дугам пути.

Учитывая эти условия, строим насыщенный поток по пути L_2, коэффициент которого наибольший $k_2 = 2$. Тогда поток по дугам пути увеличится на 2, отобразим это на сети



Поток φ_1 насыщает дугу (v_2, v_3) пути L_2, следовательно, поток по пути L_2 полный.

Шаг 3 (итерация 1). Присвоим метки вершинам сети G_{φ_1} (*метки обозначим на сети в квадратных скобках*):

- вершине v_0 присвоить метку [0];

- образом вершины v_0 является множество $\Gamma(v_0) = \{v_1, v_2\}$; обе вершины соединены ненасыщенными дугами, поэтому присваиваем им метку [+0]. Прообразом вершины v_0 является пустое множество, т.е. $\Gamma^{-1}(v_0) = \varnothing$.

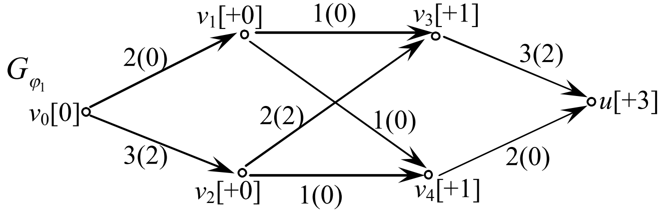
- образом отмеченной вершины v_1 является множество $\Gamma(v_1) = \{v_3, v_4\}$; обе вершины не отмечены и ненасыщенные, поэтому присваиваем им метку [+1]. Прообразом является отмеченная вершина v_0.

- образом отмеченной вершины v_2 является множество $\Gamma(v_2) = \{v_3, v_4\}$; обе вершины являются отмеченными, поэтому метку [+2] им не присваиваем. Прообразом является отмеченная вершина v_0.

- образом отмеченной вершины v_3 является множество $\Gamma(v_3) = \{u\}$; вершина u не отмечена и не насыщенна, поэтому присваиваем метку [+3]. Прообразом является множество $\Gamma^{-1}(v_3) = \{v_1, v_2\}$, вершины которого имеют метки.

- метку [+4] ни одна вершина не получает, т.к. все вершины сети отмечены, в том числе и сток u, поэтому переходим к шагу 4.

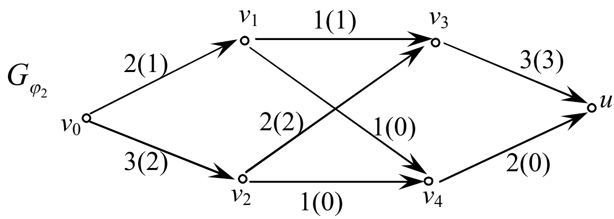
Результат расстановки меток отобразим на сети G_{φ_1}:



<u>Отметим, что задача имеет множество решений, т.к. решение зависит от выбора порядка расстановки меток. В нашем примере мы начали с рассмотрения вершины v_1. Можно было начать с рассмотрения вершины v_2.</u>

Шаг 4 (итерация 1). Рассмотрим последовательность отмеченных вершин $\lambda_{\varphi_1} = (u, v_3, v_1, v_0)$ и путь $L_{\varphi_1} = \big((v_0, v_1), (v_1, v_3), (v_3, u)\big)$. Определим коэффициент насыщения $k_{\phi_1} = \min\limits_{e \in L\varphi_1}(2-0, 1-0, 3-2) = 1$ и построим поток φ_2, увеличивая поток по дугам пути L_{φ_1}. Переходим снова к шагу 3 и снова расставляем метки.

Результат построения потока отобразим на сети G_{φ_2}:



Шаг 3 (итерация 2). Присвоим метки вершинам сети G_{φ_2}.

- вершине v_0 присвоить метку [0];

- образом вершины v_0 является множество $\Gamma(v_0)=\{v_1,v_2\}$; обе вершины соединены ненасыщенными дугами, поэтому присваиваем им метку [+0]. Прообразом вершины v_0 является пустое множество, т.е. $\Gamma^{-1}(v_0)=\varnothing$.

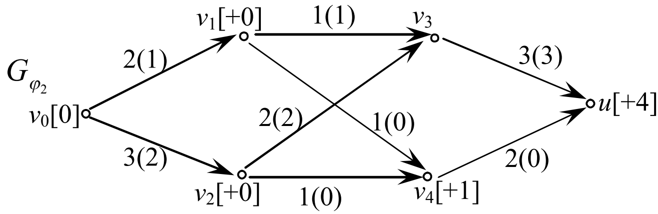
- образом отмеченной вершины v_1 является множество $\Gamma(v_1)=\{v_3,v_4\}$; вершина v_3 соединена насыщенной дугой и метку [+1] не получает, вершина v_4 ненасыщенная, поэтому присваиваем ей метку [+1]. Прообразом вершины v_1 является отмеченная вершина v_0.

- образом отмеченной вершины v_2 является множество $\Gamma(v_2)=\{v_3,v_4\}$; вершина v_3 соединена насыщенной дугой и метки [+2] не получает, вершина v_4 является отмеченной, поэтому метку [+2] ей не присваиваем. Прообразом вершины v_2 является отмеченная вершина v_0.

- образом отмеченной вершины v_4 является множество $\Gamma(v_4)=\{u\}$; вершина u не отмечена и не насыщенна, поэтому присваиваем метку [+4]. Прообразом вершины v_4 является множество $\Gamma^{-1}(v_3)=\{v_1,v_2\}$, вершины которого являются отмеченными.

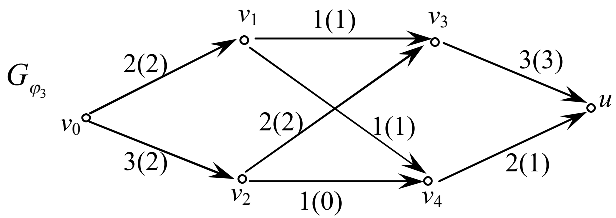
- метку [+3] ни одна вершина не получает, т.к. вершина v_3 соединена с вершинами из своего образа насыщенными дугами и с отмеченными вершинами из своего прообраза.

Результат расстановки меток отобразим на сети G_{φ_2}:



Шаг 4 (итерация 2). Рассмотрим последовательность отмеченных вершин $\lambda_{\varphi_2} = (u, v_4, v_1, v_0)$ и путь $L_{\varphi_2} = \big((v_0, v_1), (v_1, v_4), (v_4, u)\big)$. Определим коэффициент насыщения $k_{\phi_2} = \min\limits_{e \in L\varphi_2}(2-1, 1-0, 2-0) = 1$ и построим поток φ_3, увеличивая поток по дугам пути L_{φ_2}. Переходим снова к шагу 3 и снова расставляем метки.

Результат построения потока отобразим на сети G_{φ_3}:



Шаг 3 (итерация 3). Присвоим метки вершинам сети G_{φ_3}.

- вершине v_0 присвоить метку [0];

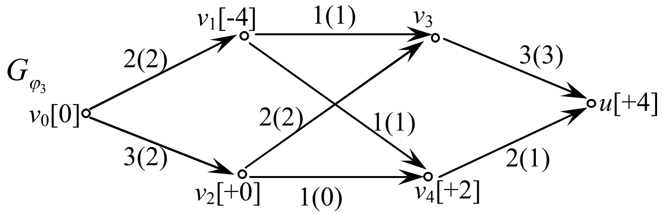
- образом вершины v_0 является множество $\Gamma(v_0) = \{v_1, v_2\}$; вершина v_1 соединена насыщенной дугой и метку [+0] не получает, вершина v_2 соединена ненасыщенной дугой и присваиваем ей метку [+0]. Прообразом вершины v_0 является пустое множество, т.е. $\Gamma^{-1}(v_0) = \varnothing$.

- образом отмеченной вершины v_2 является множество $\Gamma(v_2) = \{v_3, v_4\}$; вершина v_3 соединена насыщенной дугой и метки [+2] не получает, вершина v_4 соединена ненасыщенной дугой и присваиваем ей метку [+2]. Прообразом вершины v_2 является отмеченная вершина v_0.

- образом отмеченной вершины v_4 является множество $\Gamma(v_4)=\{u\}$; вершина u не отмечена и не насыщенна, поэтому присваиваем метку [+4]. Прообразом является множество $\Gamma^{-1}(v_4)=\{v_1,v_2\}$; вершина v_1 неотмеченная и поток $\varphi_3(v_1,v_4)>0$, поэтому присваиваем ей метку [-4].

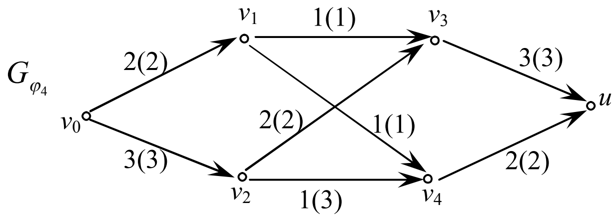
- метки [+1] и [+3] ни одна вершина не получает, т.к. вершины v_1 и v_3 либо соединены с вершинами из своего образа насыщенными дугами, либо с отмеченными вершинами из своего прообраза.

Результат расстановки меток отобразим на сети G_{φ_3}:



Шаг 4 (итерация 3). Рассмотрим последовательность отмеченных вершин $\lambda_{\varphi_3}=(u,v_4,v_2,v_0)$ и путь $L_{\varphi_3}=\big((v_0,v_2),(v_2,v_4),(v_4,u)\big)$. Определим коэффициент насыщения $k_{\phi_3}=\min\limits_{e\in L\varphi_3}(3-2,1-0,2-1)=1$ и построим поток φ_4, увеличивая поток по дугам пути L_{φ_3}. Переходим снова к шагу 3 и снова расставляем метки.

Результат построения потока отобразим на сети G_{φ_4}:



Шаг 3 (итерация 4). Присвоим метки вершинам сети G_{φ_4}.

- вершине v_0 присвоить метку [0];

- образом вершины v_0 является множество $\Gamma(v_0) = \{v_1, v_2\}$; обе вершины соединены насыщенными дугами и метку [+0] не получают. Прообразом вершины v_0 является пустое множество, т.е. $\Gamma^{-1}(v_0) = \varnothing$.

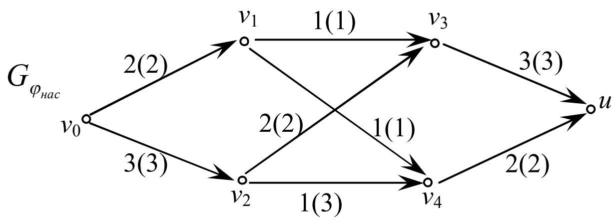
Таким образом, дальнейшая расстановка меток невозможна и вершина (сток сети) u осталась непомеченной вершиной. Переходим к шагу 5.

Шаг 5.

Определим величину насыщенного потока. Вспомним, что в этой задаче условия теоремы о насыщении выполнены и максимальный поток является и насыщенным

$$\Phi_{мах} = \Phi_{нас} = \sum_{(v_i,u)\in L} \varphi_i(v_i,u) = \varphi_3(v_3,u) + \varphi_3(v_4,u) = 3 + 2 = 5\,.$$

Таким образом, $\Phi_{мах} = \Phi_{нас} = 5$ и поток по сети распределен следующим образом: все дуги сети насыщены и поток полный.

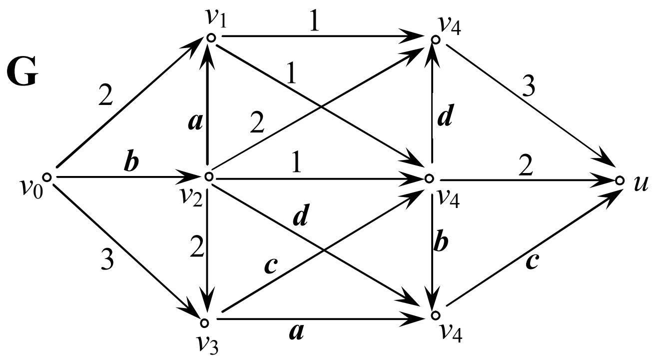


Индивидуальные задания

Задача 3.

В таблице для каждого варианта задана величина пропускной способности соответствующей дуги сети.

Определить существование насыщающего потока сети, построить существующий (максимальный или насыщенный) поток.



№ варианта	A	b	c	D	№ варианта	a	b	c	d
вариант 1	2	3	4	2	***вариант 16***	3	4	2	3
вариант 2	3	2	4	3	***вариант 17***	4	4	3	2
вариант 3	4	2	3	4	***вариант 18***	2	3	3	4
вариант 4	2	3	4	2	***вариант 19***	4	2	2	3
вариант 5	3	4	2	3	***вариант 20***	3	4	4	2
вариант 6	4	4	3	2	***вариант 21***	2	3	4	4
вариант 7	2	3	4	4	***вариант 22***	3	3	2	4
вариант 8	3	2	2	3	***вариант 23***	3	2	2	4
вариант 9	4	4	3	2	***вариант 24***	3	2	4	3
вариант 10	2	3	4	3	***вариант 25***	4	2	3	4
вариант 11	2	4	3	4	***вариант 26***	3	4	2	3
вариант 12	3	2	4	3	***вариант 27***	2	3	3	4
вариант 13	4	3	2	2	***вариант 28***	4	2	3	3
вариант 14	4	4	3	2	***вариант 29***	3	4	3	2
вариант 15	3	4	4	3	***вариант 30***	4	2	3	3

МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ С ДИСКРЕТНЫМ СОСТОЯНИЕМ И НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Марковские случайные процессы названы по имени выдающегося русского математика А.А. Маркова (1856-1922), впервые начавшего изучение вероятностной связи случайных величин и создавшего теорию, которую можно назвать «динамикой вероятностей». В дальнейшем основы этой теории явились исходной базой общей теории случайных процессов и таких прикладных наук, как теория надежности, теория массового обслуживания и другие. В настоящее время теория марковских процессов и ее приложения широко применяются в самых различных областях таких наук, как механика, физика, химия. Например, в исследовании систем, предназначенных для многоразового использования при решении однотипных задач (телефонные системы, ремонтные мастерские, вычислительные комплексы, билетные кассы, магазины, парикмахерские). Каждая система состоит из определенного числа обслуживающих единиц (приборов, устройств, пунктов, станций), которые называют каналами обслуживания. Каналами могут быть линии связи, рабочие точки, вычислительные машины, продавцы и т.п. Систему и ее переходы из одного состояния в другое принято изображать с помощью взвешенных графов, где весовая функция задает вероятность перехода системы из одного состояния в другоеСлучайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем называется ***марковским***, если для любого момента времени t условные вероятности всех состояний системы S в будущем (при $t<t_0$) зависят только от того, когда и каким образом система пришла в это состояние. Другими словами, *в марковском процессе будущее зависит от прошлого только через настоящее*.

Переход системы S из работоспособного состояния в неработоспособное происходит под действием потока отказов, а переход системы из неработоспособного в работоспособное – под действием потока восстановлений. Условимся, что далее будем излагать, предполагая, что переходы из состояния в состояние происходят под действием пуассоновских потоков событий, что позволит при фиксированном настоящем не заботиться о том, когда и как система оказалась в этом состоянии.

Пусть на графе состояний системы S существует стрелка, ведущая из состояния s_i в одно из соседних состояний s_j (рис. 12).

$$\boxed{S_i} \xrightarrow{\lambda_{ij}(t)} \boxed{S_j}$$

Рис. 12

Будем считать, что переход системы из работоспособного состояния s_i в состояние отказа s_j осуществляется под воздействием пуассоновского потока отказов с интенсивностью $\lambda_{ij}(t)$. Переход из s_i в s_j происходит в момент наступления первого отказа.

Вероятность перехода системы из работоспособного состояния s_i, в в котором она находилась в момент времени t, в неработоспособное состояние s_j за элементарный промежуток времени Δt , непосредственно примыкающий к t, приближенно равна $\lambda_{ij}(t)\Delta t$, где $\lambda_{ij}(t)$ - интенсивность пуассоновского потока отказов, переводящего систему из работоспособного состояния s_i в неработоспособное s_j.

Представим для вероятностей $p_i(t)$ систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными (в общем случае) коэффициентами. Эти уравнения называются уравнениями Колмогорова (по имени академика А.Н. Колмогорова):

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} p_j(t)\lambda_{ji}(t) - p_i(t)\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}(t), (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

Первая сумма в правой части формулы распространяется на те значения j, для которых возможен непосредственный переход из состояния отказа s_j в работоспособное состояние s_i (т. е. для которых $\lambda_{ji}(t) \neq 0$), а вторая – на те значения j, для которых возможен непосредственный переход из работоспособного состояния s_i в состояние отказа s_j (т. е. $\lambda_{ij}(t) \neq 0$).

Систему дифференциальных уравнений решают при начальных условиях, задающих вероятности состояний в начальный момент при $t=0$:

$$p_1(0), p_2(0), ..., p_n(0),$$

причем для любого момента времени t выполняется нормировочное условие:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1,\ (t \geq 0).$$

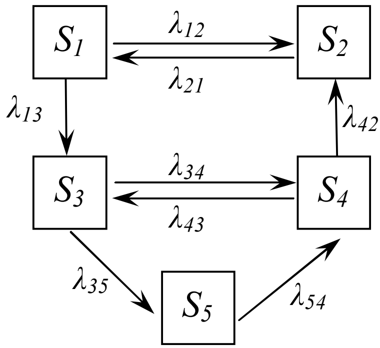
Это следует из того, что в любой момент t события $\{S(t)=s_1\}, \{S(t)=s_2\}, ..., \{S(t)=s_n\}$ образуют полную группу несовместных событий. Нормировочное условие можно использовать вместо одного (любого) из дифференциальных уравнений.

При составлении системы дифференциальных уравнений используют *взвешенный граф состояний системы*, где весовая функция дуги, ведущей из состояния s_i в состояние s_j, соответствует интенсивности $\lambda_{ij}(t), \lambda_{ij}(t) \neq 0$ пуассоновского потока отказов.

Получают систему уравнений по следующему правилу: *для каждого из возможных состояний системы записывается уравнение, в левой части которого $dP_i(t)/dt$, а справа – столько слагаемых, сколько дуг графа соприкасается с данным состоянием. Если дуга направлена в данное состояние, то перед слагаемым ставится плюс, если дуга направлена из данного состояния – минус. Каждое из слагаемых будет равно произведению интенсивности перехода из данного состояния (либо в данное состояние) на вероятность состояния, из которого выходит стрелка.*

Решение системы уравнений осуществляется по известным правилам решения системы дифференциальных уравнений. Однако его можно существенно упростить, если учесть, что рассматриваемый процесс – процесс марковский стационарный, для которого производные $dP_i(t)/dt$ можно принять равными нулю (вероятности состояний не меняются с течением времени). Система дифференциальных уравнений переходит при этом в систему алгебраических уравнений.

Пример 1. Взвешенный граф состояний системы имеет вид



Написать уравнения Колмогорова для вероятностей состояний и указать, при каких начальных условиях их нужно решать, если в начальный момент система S с вероятностью 1/2 находится в состоянии S_1 и с вероятностью 1/2 - в состоянии S_2.

Решение.

Система дифференциальных уравнений Колмогорова имеет вид

$$\begin{cases} dP_1(t)/dt = P_2(t)\lambda_{21} - P_1(t)(\lambda_{12} + \lambda_{13}), \\ dP_2(t)/dt = P_1(t)\lambda_{12} + P_4(t)\lambda_{42} - P_2(t)\lambda_{21}, \\ dP_3(t)/dt = P_1(t)\lambda_{13} + P_4(t)\lambda_{43} - P_3(t)(\lambda_{34} + \lambda_{35}), \\ dP_4(t)/dt = P_3(t)\lambda_{34} + P_5(t)\lambda_{54} - P_4(t)(\lambda_{43} + \lambda_{42}), \\ dP_5(t)/dt = P_3(t)\lambda_{35} - P_5(t)\lambda_{54}. \end{cases}$$

Любое из этих уравнений может быть отброшено, а соответствующая ему вероятность $p_i(t)$ (i=1,2,3,4,5) выражена через остальные с помощью нормировочного условия:

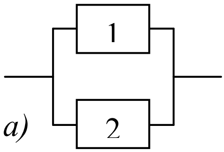
$$p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) + p_4(t) + p_5(t) = 1.$$

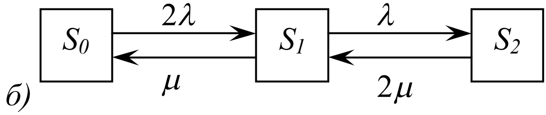
Начальные условия, при которых решается система дифференциальных уравнений, имеют вид:

$$p_1(0) = p_2(0) = 0{,}5,$$

$$p_3(0) = p_4(0) = p_5(0) = 0.$$

Пример 2. Определить вероятности состояний системы, структурная схема и взвешенный граф состояний которой изображены ниже.





Известны интенсивности отказов элементов $\lambda_1 = \lambda_2 = 0{,}02$, а интенсивности восстановления $\mu_1 = \mu_2 = 1{,}0$.

Решение.

Число состояний системы – три. Состояние S_0 – два элемента, входящие в систему, работоспособны. Состояние S_1 – один из элементов, входящих в систему, в отказовом состоянии. Состояние S_2 – оба элемента отказали. Интенсивности переходов системы в состояния S_0, S_1 и S_2 равны:

$$\lambda_{01} = 2\lambda_1 = 2 \cdot 0{,}02 = 0{,}04;$$

$$\lambda_{12} = \lambda_1 = 0{,}02;$$

$$\mu_{21} = 2\mu_1 = 2 \cdot 1{,}0 = 2{,}0;$$

$$\mu_{10} = \mu_1 = 1{,}0.$$

Составим систему дифференциальных уравнений, с помощью которых можно определить вероятности состояний системы:

$$\begin{cases} dP_0(t)/dt = -\lambda_{01}P_0(t) + \mu_{10}P_1(t); \\ dP_1(t)/dt = \lambda_{01}P_0(t) - (\lambda_{12} + \mu_{10})P_1(t) + \mu_{21}P_2(t); \\ dP_2(t)/dt = -\mu_{21}P_2(t) + \lambda_{12}P_1(t). \end{cases}$$

Будем считать рассматриваемый марковский процесс стационарным и производные $dP_i(t)/dt$ примем равными нулю. Полученная система алгебраических уравнений примет вид

$$\begin{cases} 0 = -\lambda_{01}P_0(t) + \mu_{10}P_1(t); \\ 0 = \lambda_{01}P_0 - (\lambda_{12} + \mu_{10})P_1(t) + \mu_{21}P_2(t); \\ 0 = -\mu_{21}P_2(t) + \lambda_{12}P_1(t); \\ P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) = 1. \end{cases}$$

Четвертое уравнение для этой системы (при трех неизвестных) становится необходимым потому, что первые три уравнения сводятся к двум. Решая систему уравнений, получим значения искомых вероятностей

$$P_0(t) = 1/\left[1 + \lambda_{01}/\mu_{10} + \lambda_{01}\lambda_{12}/\mu_{21}\mu_{10}\right] \approx 0{,}9612;$$

$$P_1(t) = P_0(t)\lambda_{01}/\mu_{10} \approx 0{,}0384;$$

$$P_2(t) = P_0(t)\lambda_{01}\lambda_{12}/\mu_{10}\,\mu_{21} \approx 0{,}0004.$$

Индивидуальное задания

Задача 4.

Техническая система S – вычислительный центр (ВЦ), состоящий из трех ЭВМ: 1, 2, 3. Каждая из ЭВМ выходит из строя (отказывает) независимо от других. Потоки отказов ЭВМ – пуассоновские с переменными интенсивностями, равными $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)$. После отказа каждая ЭВМ восстанавливается; потоки восстановлений – пуассоновские с интенсивностями $\mu_1(t), \mu_2(t), \mu_3(t)$; потоки восстановлений тоже независимы. Рассматриваются следующие состояния системы:

S_1 – все ЭВМ исправны

S_2 – ЭВМ 1 отказала, ЭВМ 2 и ЭВМ 3 исправны;

S_3 – ЭВМ 2 отказала, ЭВМ 1 и ЭВМ 3 исправны;

S_4 - ЭВМ 3 отказала, ЭВМ 1 и ЭВМ 2 исправны;

S_5 - ЭВМ 1 и ЭВМ 2 отказали, а ЭВМ 3 исправна;

S_6 - ЭВМ 1 и ЭВМ 3 отказали, а ЭВМ 2 исправна;

S_7 - ЭВМ 2 и ЭВМ 3 отказали, а ЭВМ 1 исправна;

S_8 – все три ЭВМ отказали.

Построить взвешенный граф состояний ВЦ. Составить уравнения Колмогорова для вероятностей состояний $p_1(t),\ldots, p_8(t)$. Записать нормировочное условие, позволяющее указать, при каких начальных условиях решается систему дифференциальных уравнений, если известно, что в начальный момент $t=0$ все ЭВМ исправны.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Леонард Эйлер

15 апреля 1707 – 18 сентября 1783

В 1724 году Петр I учредил Императорскую Академию наук. В начале 1726 года Леонарду пришла депеша, в которой говорилось, что его, по рекомендации братьев Бернулли приглашают на должность адъюнкта по физиологии с окладом 200 рублей в год. Сумма эта была значительно больше того, на что молодой математик мог рассчитывать на родине. Поэтому уже в апреле 1726 год, Эйлер покинул родную Швейцарию, думая, что на время.

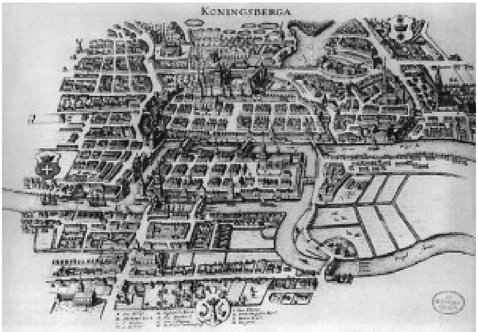
В Санкт-Петербурге молодого Эйлера, меньше чем за год научившегося довольно бегло говорить по-русски, загрузили работой, причем, не всегда связанной с математикой. Однако Эйлер обладал удивительным талантом превращать любое порученное ему задание в красивую математическую задачу: будь то создание карт Российской Империи или написание инструкций для кораблестроителей и артиллеристов или конструирование пожарных насосов. Все эти задания Эйлер аккуратно исполнял, и только требования по вопросам астрологии категорически переадресовывал к придворным астрономам.

В 1731 году Леонард стал академиком и получил место профессора физики с окладом вдвое больше прежнего. А еще через два года он занял должность профессора чистой математики – 600 рублей в год.

В 1735 году Эйлер самостоятельно, без всякой посторонней помощи, за три дня выполнил срочное правительственное картографическое (по другим данным – астрономическое) задание, на которое другие академики просили несколько месяцев. Однако такая интенсивность работы не могла не сказаться на здоровье ученого: из-за чрезвычайного перенапряжения Леонард Эйлер ослеп на правый глаз.

К тому времени его имя уже было известно не только в России, но и далеко за ее пределами. Эйлер обладал необычайно широким математическим кругозором, ему принадлежат замечательные результаты в самых разных областях чистой и прикладной математики. А написанный в 1736 году трактат «Механика, или наука о движении, в аналитическом изложении» принес ученому поистине мировую славу. Именно с него теоретическая механика стала прикладной частью математики.

В том же году Леонарда Эйлера заинтересовала задачка, которую поставил знаменитый философ и ученый Иммануил Кант, гуляя по мостам города Кенигсберга (сейчас этот город называется Калининград). Два острова и берега на реке Прегель, на которой стоял Кенингсберг, были соединены 7 мостами: можно ли пройти по всем данным мостам и при этом вернуться в исходную точку маршрута так, чтобы пройти по каждому мосту только 1 раз. Эйлер нашел правило, используя которое можно было легко и просто получить ответ на данный интересующий всех вопрос. В случае с городом Кенингсбергом и его мостами это оказалось невозможно (об этом Эйлер написал в письме своему другу – ученному, итальянскому инженеру и математику Мариони от 13 марта 1736 г.).



Семь мостов города Кенингсберга стали «виновниками» создания **теории графов**.

Уильям Роуэн Гамильтон

4 августа 1805 — 2 сентября 1865

…Настала пора увлечения математикой. Ещё в десятилетнем возрасте Гамильтону попался латинский перевод «Начал» Евклида, и он детально изучил это сочинение; в 13 лет прочел «Универсальную арифметику» Ньютона; в 16 лет - большую часть «Математических начал натуральной философии» Ньютона. В 17 лет Уильям начал изучение «Небесной механики» Лапласа, там он обнаружил логическую ошибку и сообщил о ней королевскому астроному Ирландии Джону Бринкли. Тот оценил способности юноши и стал помогать его научному развитию. Надо отметить, что крупных учёных в Ирландии было совсем мало, и фактически Гамильтон изучал математику и физику самоучкой, в затруднительных случаях прибегая к помощи Бринкли. Ирландская писательница Мария Эджуорт, с семьёй которой подружился Уильям, назвала его «чудом талантливости, о котором профессор Бринкли говорит, что он может стать вторым Ньютоном»…

…Ещё 22-летним студентом, по рекомендации ушедшего в отставку Бринкли был назначен на его место - профессором астрономии в Дублинском университете и королевским астрономом Ирландии. В университете бывший студент Гамильтон читал курс небесной механики. Пост королевского астронома он занимал на протяжении 38 лет - дольше, чем любой другой на этой должности. Кроме того, Гамильтон стал директором местной обсерватории, куда он сразу переселился и оставался там до конца жизни. Он опубликовал ряд работ по геометрической оптике, представляющих большую ценность для теории оптических инструментов, но чисто астрономическими проблемами занимался мало; комиссии из Лондона дважды подвергали его критике за недостаточное усердие. В 1833 году Гамильтон женился, но брак оказался не слишком удачным, и Гамильтон начал злоупотреблять алкоголем… В период 1834-1835 годов появились классические работы по «гамильтоновой механике». За открытия в оптике и по совокупности научных заслуг вице-король Ирландии возвёл Гамильтона в рыцарское достоинство и назначил ежегодное пособие в 200 фунтов. В 1837 году Гамильтона избрали президентом Ирландской королевской академии и членом-корреспондентом Петербургской академии наук.

В 1857 году Уильям Гамильтон придумал игру. Существует несколько версий того, как это произошло. По одной из версий он описал игру в письме к другу. Согласно другой, он действительно изобрел игру и продал ее производителю игрушек. В любом случае она включала додекаэдр, т.е. правильный многогранник, 12 граней которых представляли собой равные правильные пятиугольники. В каждом из 20 углов, или вершин тела, просверливалась дырочка, в которую вставлялся колышек, изображавший город. Используя веревку, требовалось найти путь через города, посетив каждый город один раз, и вернуться в исходный город. Проблема в таком случае сводилась к нахождению цикла в графе, проходящего через каждую вершину только один раз, исключая начальную. Отсюда любой цикл, обладающий таким свойством, называется гамильтоновым циклом. Этот цикл в некотором смысле противоположен эйлерову циклу, который проходит через все ребра только один раз. До определенного момента оба цикла могут показаться похожими, но на самом деле цикл Гамильтона намного сложнее. Позднее эту задачу назвали задачей коммивояжёра – странствующего торговца (посыльного или путешественника), поскольку у каждого из них возникает вопрос: найти кратчайший путь между конечным множеством мест, расстояние между которыми известно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Яблонский, С.В*. Введение в дискретную математику : учеб. пособие для вузов / *С.В. Яблонский ;* под ред. *В.А. Садовничего*. – 3-е изд., стер. – М. : Высш.шк., 2002. – 384 с.

2. *Белоусов, А.И.* Дискретная математика : учеб. для вузов / *А.И. Белоусов, С.Б. Ткачев ;* под ред. *Зарубина В.С., Крищенко А.П.* – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 744 с.

3. *Кузнецов, О.П.* Дискретная математика для инженера / *О.П. Кузнецов, Г.М. Адельсон-Вельский.* – М. : Энергия, 1980. – 344 с., ил.

4. *Гончарова, Г. А.* Элементы дискретной математики : учебное пособие / *Г.А. Гончарова, А.А. Мочалин*. - М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2003. – 128 с.

5. *Основина, О.Н.* Надежность информационных систем : методические указания к практическим занятиям / *О.Н. Основина.* – С.: СТИ МИСиС, 2006. - 68 с.

6. *Олехник, С. Н.* Старинные занимательные задачи / *С.Н. Олехник, Ю.В. Нестеренко, М.К. Потапов.* – М.: «Наука», 1988. – 160 с.

7. *Полак, Л.С.* Уильям Гамильтон, 1805-1865 / *Л.С. Полак ;* под ред. *А. Т. Григорьян*. – М.: Наука, 1993. – 267 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Бакеева Лариса Викторовна
кандидат педагогических наук, доцент
Шемелова Ольга Васильевна
кандидат физико-математических наук

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ И НЕКОТОРЫЕ ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Корректор Габдурахимова Т.М.
Худ. редактор Федорова Л.Г.

Сдано в набор 04.03.2014.
Подписано в печать 12.03.2014.
Бумага писчая. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 3,3. Тираж 100.
Заказ №11.

НХТИ (филиал) ФГБОУ ВПО «КНИТУ»,
г. Нижнекамск, 423570, ул. 30 лет Победы, д.5а.