Министерство образования и науки Российской Федерации
Нижнекамский химико-технологический институт (филиал)
Федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего профессионального образования
«Казанский национальный исследовательский
технологический университет»

Л.А. Апайчева
А.Г. Багоутдинова
Л.Е. Шувалова

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Лауреат Всероссийского конкурса
Фонда развития отечественного образования

Нижнекамск
2011

УДК 519.21

А 76

Печатается по решению редакционно-издательского совета Нижнекамского химико-технологического института (филиала) ФГБОУ ВПО «КНИТУ».

Рецензенты:

Зайниев Р.М., кандидат физико-математических наук, доцент ИНЭКА;

Ожегова А.В., кандидат физико-математических наук, доцент КГУ.

Апайчева, Л.А.

А 76 Теория вероятностей : учебное пособие / Л.А. Апайчева, А.Г. Багоутдинова, Л.Е. Шувалова. – 2-е изд., перераб. и доп. – Нижнекамск : Нижнекамский химико-технологический институт (филиал) ФГБОУ ВПО «КНИТУ», 2011. – 260 с.

Содержит основные понятия и теоремы теории вероятностей: комбинаторика; случайные события и их вероятности; случайные величины и их важнейшие законы распределения; числовые характеристики; закон больших чисел и центральная предельная теорема. Изложение материала сопровождается большим количеством типовых примеров с решениями. По каждой теме приведено по 30 вариантов задач для расчетно-графических работ.

Предназначено для студентов инженерно-технических и экономических специальностей вузов.

Подготовлено на кафедре математики Нижнекамского химико-технологического института (филиала) ФГБОУ ВПО «КНИТУ».

УДК 519.21

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теорией вероятностей называется математическая наука, изучающая закономерности массовых случайных явлений и процессов.

Теория вероятностей рассматривает не сами реальные случайные явления, а их математические модели. В теории вероятностей изучаются случайные события, случайные величины, случайные векторы, а также функциональные, графические и числовые характеристики случайных величин.

Методы теории вероятностей широко используются в различных отраслях естествознания и техники: в физике, в теории надежности, теории массового обслуживания, теории ошибок наблюдений, теории автоматического управления, теории случайных процессов, математической статистике.

Теория вероятностей зародилась в XVII веке в связи с азартными играми, в трудах французских ученых: Ферма, Паскаля, голландского математика Гюйгенса.

Следующий этап развития теории вероятностей связан с именем Якоба Бернулли (1654 – 1705 гг.). Дальнейшими успехами теория вероятностей обязана Муавру, Лапласу, Гауссу, Пуассону и др.

Большой вклад в теорию вероятностей внесли русские математики П.Л. Чебышев (1821 – 1894 гг.), А.А. Марков (1856 – 1922 гг.), давший начало теории марковских процессов, А.М. Ляпунов (1857 – 1918 гг.), А.Н. Колмогоров (1903 – 1987 гг.), создавший современную систему аксиом и основных понятий вероятностей.

ГЛАВА I

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И КОМБИНАТОРИКИ

1.1. МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Под ***множеством*** понимается любая совокупность однородных предметов. Объекты, из которых состоит данное множество, называют его *элементами* или *точками*.

Как правило, множества обозначаются прописными буквами A, B, C, X, Y, Z и т.д., а его элементы строчными: a, b, c, x, y, z и т.д.

Через Ω обозначим некоторое множество, состоящее из всех предметов какого-либо типа, которое следует изучить. Это множество называется *элементарным* или *универсальным*.

Множество называется конечным, если оно содержит конечное число элементов, и бесконечным, если число элементов бесконечно.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается Ø.

Множество A называется подмножеством множества Ω, если каждый элемент множества A является одновременно элементом множества Ω, т.е. $A \subset \Omega$.

Множества A и B равны $(A = B)$ тогда и только тогда, когда $A \subset B$ и $B \subset A$, т.е. если эти множества состоят из одних и тех же элементов (если $x \in A$, то $x \in B$; обратно, если $x \in B$, то $x \in A$).

Возьмем два подмножества A и B множества Ω и определим операции над множествами.

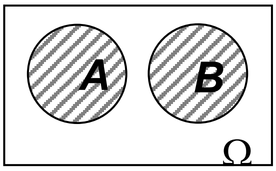
I. Объединением (суммой) множеств A и B называют множество $C = A + B$, элементами которого являются элементы множества *A* или множества *B*, другими словами, множество *C* всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств *A* и *B*. Объединение множеств *A* и *B* обозначают также $A \cup B$, т.е.

$C = A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$ (рис. 1а, б).

II. Пересечением (произведением) множеств *A* и *B* называют множество $C = A \cdot B$ всех элементов, принадлежащих одновременно и множеству *A*, и множеству *B*: $C = A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$ (рис. 1в).

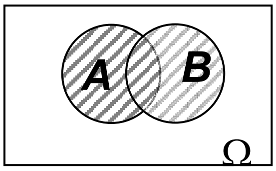
Два множества, пересечение которых есть пустое множество, называется *непересекающимися* (рис. 1г).

Для наглядного графического изображения операции используются диаграммы Эйлера-Венна (рис. 1в, г). В качестве элементарного множества Ω берется множество точек прямоугольника и рассматриваются его подмножества *A* и *B* в виде кругов или каких-то других областей.



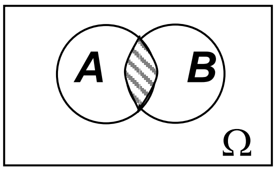
$A \cup B$

а)



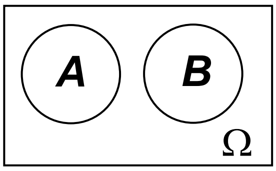
$A \cup B$

б)



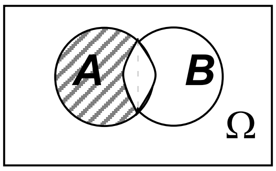
$A \cap B$

в)



$A \cap B = \varnothing$

г)



$A \setminus B$

д)

Пример 1.1.

1) Если A – множество четных положительных чисел, а B – множество нечетных положительных чисел, то $A \cup B$ – множество натуральных чисел.

2) Если A – множество всех чисел, делящихся на 2, а B – множество всех чисел, делящихся на 3, то $A \cap B$ определяет множество всех чисел, делящихся на 6.

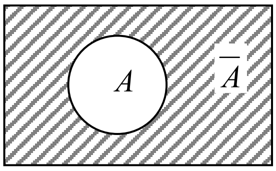
III. Разностью множеств A и B называют множество $A \setminus B$ тех элементов множества A, которые не содержатся в множестве B:

$C = A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$ (рис. 1д).

Если $B \subset A$, то разность $A \setminus B$ называют *дополнением* множества B до множества A.

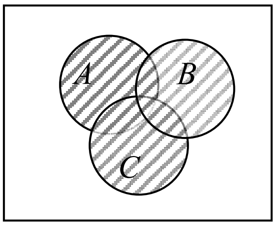
Дополнением множества A называется множество $\overline{A}$, состоящее из всех тех элементов исходного множества Ω, которые не принадлежат A,

$A \cup \overline{A} = \Omega,\ \overline{A} = \Omega \setminus A$.

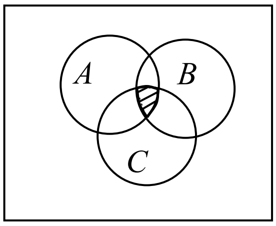


Пример 1.2. Если $A = \{1, 2, 4, 6, 7, 9\}, B = \{1, 5, 4, 7, 8\}$, то $A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, A \cap B = \{1, 4, 7\}, A \setminus B = \{2, 6, 9\}$.

Аналогично введенным выше операциям над двумя множествами определяются операции над множествами A, B, C.



а) $A \cup B \cup C$



б) $A \cap B \cap C$

Рис. 2

Введенные операции обладают следующими свойствами:

1) $A \cup \varnothing = A$;

2) $A \cap \varnothing = \varnothing$;

3) $A \cup A = A$; $\quad A \cap A = A$;

4) $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$ (коммутативность);

5) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ассоциативность);

6) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность).

Декартовым произведением множеств A и B называют множество $A \times B$ всех упорядоченных пар элементов (a, b), где $a \in A, b \in B$. Элементы a и b называют *компонентами* (координатами) пары (a, b).

В частности, если $A = [a,b]$ и $B = [c,d]$, то $C = [a,b] \times [c,d]$ – множество точек прямоугольника, заданного на плоскости XOY.

Пример 1.3. Опыт состоит в случайном выборе одного элемента из множества $E_1 = \{a, b\}$ и одного элемента из множества $E_2 = \{a, b, c\}$. Перечислить состав множества $E = E_1 \times E_2$.

► $E = \{aa, ab, ac, ba, bb, bc\}$.

◄

1.2. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

1.2.1. ПРАВИЛА КОМБИНАТОРИКИ

Комбинаторика – раздел математики, изучающий задачи выбора элементов из заданного множества в соответствии с заданными правилами, в частности, задачи о подсчете числа комбинаций (выборок), получаемых из элементов заданного конечного множества.

В комбинаторике действуют два важных правила, называемые правилами умножения и сложения.

Обозначим через $|X|$, $|Y|$ число элементов множеств X и Y соответственно.

Правило умножения. Число пар в декартовом произведении конечных множеств X и Y равно произведению числа элементов множества X и числа элементов множества Y, т.е.

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y|.$$

В другой формулировке: если из некоторого конечного множества первый объект A_1 (элемент x) может быть выбран n_1 способами, затем после каждого такого выбора второй объект A_2 (элемент y) может быть выбран n_2 способами, то оба объекта (x и y) в указанном порядке можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами.

Это правило распространяется на любое число объектов.

Пример 1.4. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 1,2,5,7,9, если а) цифры могут повторяться; б) цифры не повторяются?

►а) Цифрой разряда тысяч, сотен, десятков и единиц может быть любая из 5 данных, то есть для каждого разряда четырехзначного числа имеется 5 возможных вариантов. Согласно правилу умножения число четырехзначных чисел равно $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$.

б) Поскольку цифры не повторяются, то на первом месте может быть любая из пяти цифр, на втором – любая из оставшихся четырех цифр, на третьем – из оставшихся трех, на последнем – 2, поэтому имеем $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ способов. ◄

Правило суммы. Если конечные множества не пересекаются, то число элементов множества $X \cup Y$ равно сумме числа элементов множества X и числа элементов множества Y.

$$|X \cup Y| = |X| + |Y|, \text{ если } X \cap Y = \varnothing.$$

В другой формулировке: если объект A_1 (элемент x) может быть выбран n_1 способами, а объект A_2 (элемент y) можно выбрать другими n_2 способами, причем выборы объектов A_1 и A_2 не пересекаются, то выбор либо A_1, либо A_2 может быть осуществлен $n_1 + n_2$ способами.

Пример 1.5. На книжной полке стоят 10 различных книг по математике и 6 – по физике. Сколькими способами можно выбрать 2 книги по одному предмету?

►По правилу умножения две книги по математике можно выбрать $10 \cdot 9 = 90$ способами, а по физике – $6 \cdot 5 = 30$ способами. Две книги по одному предмету согласно правилу сложения можно выбрать 90+30=120 способами.

◄

Замечание. Если конечные множества X и Y пересекаются, то число элементов в объединении $X \cup Y$ равно разности между суммой чисел элементов множеств X и Y и числом элементов в пересечении $X \cap Y$, то есть

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|.$$

Эта формула носит название ***формулы включений и исключений***. Формула включений и исключений для множеств X_1, …, X_n имеет вид

$$|X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n| = |X_1| + \ldots + |X_n| - \left(|X_1 \cap X_2| + |X_1 \cap X_3| + \ldots + |X_{n-1} \cap X_n|\right) +$$

$$+\left(|X_1 \cap X_2 \cap X_3| + \ldots + |X_{n-2} \cap X_{n-1} \cap X_n|\right) - \ldots + (-1)^{n+1}\left(|X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n|\right)$$

Пример 1.6. В группе 6 человек знают немецкий, 6 человек – английский, 7 человек – французский, четверо знают немецкий и английский, трое – немецкий и французский, двое – французский и английский, один знает все три языка. Каждый человек в группе знает хотя бы один из этих трех языков. Сколько человек в группе? Сколько человек знает только один из этих языков?

►Пусть X, Y, Z – множество людей в группе, знающих немецкий, английский и французский языки соответственно. Формула включений и исключений имеет в данном случае вид

$$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - \left(|X \cap Y| + |X \cap Z| + |Y \cap Z|\right) + |X \cap Y \cap Z|.$$

Следовательно, $n = 6 + 6 + 7 - 4 - 3 - 2 + 1 = 11$ человек в группе. Только немецкий язык знают

$$|X| - |X \cap Y| - |X \cap Z| + |X \cap Y \cap Z| = 6 - 4 - 3 + 1 = 0 \text{ человек,}$$

только английский знают

$$|Y| - |Y \cap X| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z| = 6 - 4 - 2 + 1 = 1 \text{ человек,}$$

только французский знают

$$|Z| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z| = 7 - 3 - 2 + 1 = 3 \text{ человека.}$$

Итого, только один из трех языков знают $0 + 1 + 3 = 4$ человека. ◄

1.2.2. РАЗМЕЩЕНИЯ, ПЕРЕСТАНОВКИ, СОЧЕТАНИЯ БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ

Пусть дано множество, состоящее из n различных элементов.

Соединениями называют различные комбинации, подчиненные определенным условиям, которые можно составить из элементов заданного конечного множества.

Размещением из n элементов по m элементов $(0 < m \le n)$ называется любое упорядоченное подмножество данного множества, содержащее m элементов.

Из определения вытекает, что ***размещения*** – это соединения (комбинации), состоящие из m элементов, которые отличаются друг от друга либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по m элементов вычисляется по формуле

$$\boxed{A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}}, \qquad (1.1)$$

где $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$, $0! = 1$.

Пример 1.7. Пусть имеются три буквы $\{a,b,c\}$. Из них можно составить следующие размещения по 2: $(a,b),(a,c),(b,c),(b,a),(c,a),(c,b)$.

Их число определяем по формуле (1.1), т.е. $A_3^2 = 3\cdot 2 = 6$.

Пример 1.8. Группа студентов изучает 8 различных дисциплин.

Сколькими способами можно составить расписание занятий в пятницу, если в этот день должно быть 3 разных занятия?

►Число способов составления расписания равно

$$A_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336 . \quad ◄$$

Перестановками из n элементов называется размещение из n элементов по n элементов.

Из определения вытекает, что ***перестановки*** – это соединения (комбинации), состоящие из n элементов и отличающиеся друг от друга только порядком следования элементов.

Число перестановок из n элементов вычисляется по формуле

$$\boxed{P_n = A_n^n = n!}. \tag{1.2}$$

Пример 1.9. Сколько пятизначных четных чисел можно составить из цифр 1,3,4,7,9 если в каждом из этих чисел ни одна цифра не повторяется?

►Цифрой единиц искомого числа может быть только цифра 4, остальные четыре цифры могут стоять на оставшихся четырех местах в любом порядке. Поэтому задача сводится к нахождению числа перестановок:

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 .$$

Всего можно составить 24 числа. ◄

Сочетанием из n элементов по m $\left(0 < m \le n\right)$ элементов называется любое подмножество, которое содержит m элементов данного множества.

Из определения вытекает, что ***сочетания*** – это соединения (комбинации) из m элементов, составленных из данных n элементов, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом. Сочетания отличаются только составом элементов, порядок следования элементов не учитывается.

Число сочетаний из n элементов по m элементов вычисляется по формуле

$$\boxed{C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\,m!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot m}} \tag{1.3}$$

или

$$\boxed{A_n^m = C_n^m \cdot P_m}.$$

Имеют место формулы:

$$C_n^m = C_n^{n-m},\ m \le n,$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

Числа $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^n$ являются коэффициентами в разложении бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n a^0 b^n.$$

Пример 1.10. Из трех элементов $\{a,b,c\}$ составить сочетания по два.

► По формуле (1.3) получаем $C_3^2 = \dfrac{3\cdot 2}{1\cdot 2} = 3$, а именно, имеем следующие сочетания: $(a,b),(a,c),(b,c)$.

◄

Пример 1.11. Сколькими способами можно распределить 10 различных учебников между тремя студентами?

► Число способов распределения учебников между студентами равно числу сочетания из 10 по 3, т.е.

$$C_{10}^{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120. \qquad ◄$$

1.2.3. РАЗМЕЩЕНИЯ, ПЕРЕСТАНОВКИ, СОЧЕТАНИЯ С ПОВТОРЕНИЯМИ

В предыдущем пункте рассматривались соединения, в каждое из которых любой из n различных элементов входит один раз.

РАЗМЕЩЕНИЯ С ПОВТОРЕНИЯМИ

Размещениями из n ***элементов*** по m с ***повторениями*** называются соединения, в каждое из которых входит m элементов, причем один и тот же элемент может повторяться в каждом размещении любое число раз, но не более m.

Размещения с повторениями могут отличаться друг от друга элементами, их порядком и количеством повторений элементов. Число всех размещений из n элементов по m с повторениями вычисляется по формуле

$$\boxed{\widetilde{A}_n^m = n^m}. \tag{1.4}$$

Пример 1.12. Сколько размещений по два элемента с повторениями можно составить из 3 элементов $\{a, b, c\}$?

► По формуле (1.4) число размещений по два с повторениями равно $\widetilde{A}_3^2 = 3^2 = 9$. Составим эти размещения с повторениями: $(a,a),(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),(b,b),(c,c),(b,c),(c,b)$.
◄

Пример 1.13. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4.

►Так как порядок цифр в числе существенен, цифры могут повторяться, то это будут размещения с повторениями из пяти элементов по три $\widetilde{A}_5^3$, но из этого количества нужно отнять то количество чисел, которые начинаются с нуля – $\widetilde{A}_5^2$, так как это уже не трехзначное число. Таким образом, искомое количество трехзначных чисел равно $\widetilde{A}_5^3 - \widetilde{A}_5^2 = 5^3 - 5^2 = 100$.

2-й способ: $n = 4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$.

◄

Пример 1.14. Каждый телефонный номер состоит из шести цифр. Сколько всего телефонных номеров, не содержащих других цифр, кроме 2,3,7?

► Все телефонные номера, составленные из цифр 2,3,7 отличаются друг от друга либо порядком следования, либо самими цифрами (например, 333277, 722223, 227223). Следовательно, это задача о числе размещений в 6 различных местах трех разных цифр с повторениями каждой из них любое число раз, но не более 6 раз.

Число телефонных номеров равно $\widetilde{A}_3^6 = 3^6 = 729$.

Этот же результат можно получить используя правило произведения: первую цифру слева можно выбрать тремя способами, вторую – тоже тремя способами и т.д.. Всего получаем номеров $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6 = 729$.

◄

СОЧЕТАНИЯ С ПОВТОРЕНИЯМИ

Сочетаниями из n ***элементов*** по m с ***повторениями*** называются соединения, содержащие m элементов (без учета порядка следования), причем любой элемент может входить в соединение некоторое число раз, но не больше m.

Число всех сочетаний из n элементов по m с повторениями вычисляется по формуле

$$\boxed{\tilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^m}. \qquad (1.5)$$

Пример 1.15. Сколько сочетаний по два элемента с повторениями можно составить из трех элементов $\{a,b,c\}$?

► По формуле (1.5) число сочетаний по два с повторениями равно $\tilde{C}_3^2 = C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = \dfrac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6$. Имеем: $(a,a),(a,b),(b,b),(b,c)$,
$(\mathrm{c},\mathrm{c}),(\mathrm{a},\mathrm{c})$.
◄

Пример 1.16. В продаже имеются фрукты: апельсины, лимоны, яблоки, груши, бананы. Сколькими способами можно купить набор из 10 фруктов?

► Покупка не зависит от того, в каком порядке будут уложены фрукты. Покупки будут отличаться друг от друга количеством купленных фруктов хотя бы одного вида. Следовательно, количество различных покупок равно числу сочетаний из 5 по 10 с повторениями. Определяем по формуле (1.5). Таким образом, количество различных покупок $\tilde{C}_5^{10} = C_{5+10-1}^{10} = \dfrac{14!}{10!\cdot 4!} = 1001$. ◄

ПЕРЕСТАНОВКИ С ПОВТОРЕНИЯМИ

Перестановки из n элементов множества, в котором имеется k различных элементов, при этом 1-й элемент повторяется n_1 раз, 2-й элемент – n_2 раза, …, k-й элемент – n_k раз, причем $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$, называются ***перестановками*** из n ***элементов*** с ***повторениями***.

Число перестановок с повторениями из n элементов вычисляется по формуле

$$\boxed{P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k)=\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}}. \tag{1.6}$$

В частности, если $n=k+(n-k)$, то есть исходное множество состоит только из элементов двух типов, причем $n_1=k, n_2=n-k$, то

$$P_n(n_1,n_2)=P_n(k,n-k)=\frac{n!}{k!(n-k)!}=C_n^k .$$

Пример 1.17. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «институт»?

►Применим формулу (1.6). Здесь $n=8, n_1=2, n_2=1, n_3=1, n_4=3,$

$n_5=1$. Число способов равно $P_8(2,1,1,3,1)=\dfrac{8!}{2!\,1!\,1!\,3!\,1!}=3360$.

◄

Пример 1.18. Сколькими способами можно переставить буквы слова «теорема» так, чтобы:

1) никакие две гласные не стояли рядом;

2) две буквы «е» не шли подряд?

►1) Имеется $P_3 = 3! = 6$ перестановок согласных. Для каждого размещения согласных имеем 4 места для размещения 4 гласных слова с повторением буквы «е» 2 раза. По формуле (1.6) имеем $P_4(1,1,2) = \frac{4!}{2!} = 12$. По правилу произведения получаем $6 \cdot 12 = 72$ слова.

2) Число различных слов, которые получаются перестановкой букв слова «теорема» равно $P_7(1,1,1,1,1,2) = \frac{7!}{2!} = 2520$. Число слов, в которых две буквы «е» идут подряд равно $P_6 = 6! = 720$. Определим число слов, в которых две буквы «е» не идут подряд. Имеем

2520 –720 = 1800 слов. ◄

Ниже приведем схему подсчета числа комбинаций.

1.2.4. СХЕМА ПОДСЧЕТА ЧИСЛА КОМБИНАЦИЙ

Таблица 1

Комбинации без повторений			
Название комбинации	Характеристический признак отличия	Пример	Формула подсчета числа комбинаций
Размещения	Состав, порядок	Размещения из 3-х элементов a, b, c по 2: $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$ $(\mathrm{ab, bc, ca, ba, cb, ac})$	$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$

Перестановки	Порядок	Перестановки из 3-х элементов a,b,c: $P_3 = 3! = 6$ (abc, bca, cba, cab, bac, acb)	$P_n = n!$
Сочетания	Состав	Сочетания из 3-х элементов a,b,c по 2: $C_3^2 = \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2} = 3$ (ab, ac, bc)	$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$

Комбинации с повторениями			
Размещения с повторениями	Состав, порядок	Размещения из 3-х элементов a,b,c по 2 с повторениями: $\widetilde{A}_3^2 = 3^2 = 9$ $(\text{aa}, \text{ab}, \text{ba}, \text{bb}, \text{ac}, \text{ca}, \text{cc}, \text{bc}, \text{cb})$	$\widetilde{A}_n^m = n^m$
Перестановки с повторениями	Порядок	Перестановки из 4-х элементов $a,a,\ b,b$: $P_4(2,2) = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$ $(\text{aabb}, \text{abba}, \text{bbaa}, \text{baab}, \text{abab}, \text{baba})$	$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot \ldots \cdot n_k!}$ $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$
Сочетания с повторениями	Состав	Сочетания из 3-х элементов a,b,c по 2 с повторениями: $\tilde{N}_3^2 = C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6$ $(\text{ab}, \text{bc}, \text{ca}, \text{aa}, \text{bb}, \text{cc})$	$\widetilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(m+n-1)!}{m!\,(n-1)!}$

ГЛАВА II

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

2.1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ, ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Всевозможные результаты испытаний называются ***элементарными событиями*** ω_i, $i \in N$. Совокупность всех элементарных событий $\Omega = \{\omega_i\}$ называется ***множеством*** (или ***пространством***) элементарных событий.

Будем считать, что Ω ***– конечное или счетное множество.***

Случайным событием ***называется любое подмножество множества элементарных событий*** Ω***:*** $A \subseteq \Omega$.

Множество Ω называется ***достоверным*** событием; в результате испытания оно обязательно должно произойти.

Пустое множество Ø называется ***невозможным*** событием; в результате испытания оно вообще не может произойти.

Случайное событие в результате эксперимента может либо произойти, либо не произойти.

События называются ***несовместными***, если наступление одного из них исключает наступление любого другого. В противном случае события называются ***совместными***.

События называются ***равновозможными***, если в результате испытания ни одно из этих событий не является объективно более возможным.

Несколько событий называются ***единственно возможными***, если в результате испытания обязательно должно произойти хотя бы одно из них.

Несколько событий образуют ***полную группу***, если они являются единственно возможными и несовместными исходами испытания. Пространство элементарных событий образует полную группу попарно несовместных событий, так как появление хотя бы одного из событий полной группы есть достоверное событие.

Например, один раз бросается игральная кость. Возможны следующие 6 элементарных событий (исходов): ω_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ – появление цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6. Эти исходы образуют полную группу несовместных событий (обязательно появится только одна цифра), и они равновозможны, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Пусть событие A состоит в появлении четного числа очков на грани. Этому событию благоприятствуют элементарные события ω_2, ω_4, ω_6, $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$.

Два несовместных события, образующих полную группу, называются ***противоположными*** и обозначаются A и $\overline{A}$. Например, попадание и промах при одном выстреле по цели.

2.2. АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Рассмотрим аксиоматическое определение вероятности, созданное в 1933 г. А.Н. Колмогоровым.

Пусть S – множество всех подмножеств Ω, для которого выполняются следующие свойства:

1) если $A \in S$ и $B \in S$, то $A + B \in S$,

2) если $A \in S$ и $B \in S$, то $A \cdot B \in S$,

3) если $A \in S$, то $\overline{A} \in S$.

Тогда множество S называется ***алгеброй событий***.

Вероятностью называется действительная функция $P(A)$, определенная на алгебре событий S, принимающая действительные значения и удовлетворяющая следующим аксиомам:

Аксиома 1 (неотрицательности): $P(A) \geq 0$. Вероятность неотрицательна.

Аксиома 2 (нормировки): $P(\Omega) = 1$. Вероятность достоверного события равна единице.

Аксиома 3 (аддитивности). Вероятность суммы несовместных событий $A_1, A_2, ..., A_n$ равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n),$$

где $A_i \in S$ $(i = 1, 2, ..., n)$, $S \subseteq \Omega$.

Пространство элементарных событий Ω с заданной алгеброй S и определенной на S вероятностно-неотрицательной мерой $P(A)$, $A \in S$, называется вероятностным пространством и обозначается (Ω, S, P).

Аксиоматическое определение вероятности не дает способа конкретного вычисления вероятности, поэтому используются другие определения вероятности, которые приведем ниже.

2.3. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Вероятностью события A называется отношение числа m исходов, благоприятствующих этому событию, к числу n всех равновозможных несовместных исходов, образующих полную группу:

$$\boxed{P(A)=\frac{m}{n}}. \tag{2.1}$$

Следствием аксиом Колмогорова являются свойства:

1) Вероятность любого события удовлетворяет неравенству

$$0 \le P(A) \le 1.$$

2) Вероятность невозможного события равна нулю, т.е.

$$P(\varnothing)=0.$$

Пример 2.1. В урне содержится 20 шаров, из них 12 белых, 3 черных и 5 красных. Из урны наугад вынимается один шар. Какова вероятность появления белого шара?

► Событие A – из урны вынут белый шар. Здесь m = 12, n = 20.

$$P(A)=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}. \blacktriangleleft$$

Пример 2.2. Одновременно бросаются две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма очков, выпавших на обеих костях, меньше 6?

► Событие A – сумма очков меньше 6. Общее число возможных исходов: $n = 6 \cdot 6 = 36$. Число исходов, благоприятствующих событию A, равно $m = 10$, а именно: $\{1+1, 1+2, 1+3, 1+4, 2+1, 2+2, 2+3, 3+1, 3+2, 4+1\}$. Следовательно, по формуле (2.1) находим

$$P(A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}. ◄$$

Пример 2.3. Из коробки с жетонами, помеченными буквами русского алфавита, вынимают 6 жетонов и располагают их в порядке извлечения. Какова вероятность получить слово "*Москва*", если: 1) жетоны после извлечения возвращаются обратно; 2) жетоны после извлечения обратно не возвращаются?

► Пусть событие A – получено слово "*Москва*". В первом случае пространство элементарных исходов состоит из всех размещений с повторениями из 33 элементов по 6. Их число равно $\overline{A}_{33}^{6} = 33^6$. Поэтому $P(A) = \frac{1}{33^6}$. Во втором случае множество всех равновозможных исходов состоит из всех размещений без повторений из 33 элементов по 6. Их число равно $A_{33}^{6} = 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28$, и потому искомая вероятность равна $P(A) = \frac{1}{33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28}$. ◄

Пример 2.4. Слово "*Миссисипи*" составлено из карточек, на каждой из которых написана одна буква. Затем карточки смешиваются и вынимают без возврата по одной. Найти вероятность появления слова "*Миссисипи*".

► Событие A – появление слова "*Миссисипи*", n равно числу перестановок из 9 букв, $n = 9!$.

Некоторые буквы в слове "*Миссисипи*" повторяются ("*и*" – 4 раза, "*с*" – 3 раза), поэтому возможны перестановки, при которых слово не изменяется. Их число по правилу произведения равно

$$m = 4!\cdot 3! = 144.$$

$$P(A) = \frac{144}{9!} = \frac{1}{2520}.$$

Задачу можно решить другим способом, если рассматривать комбинации букв как перестановки с повторениями, из которых событию A благоприятствует одна комбинация:

$$P(A) = \frac{1}{P_9(1,4,3,1)} = 1 : \frac{9!}{1!\cdot 4!\cdot 3!\cdot 1!} = \frac{144}{9!} = \frac{1}{2520}. \qquad ◄$$

Пример 2.5. **ЗАДАЧА О ВЫБОРКЕ**

В партии из N деталей имеется M стандартных. Наудачу отобраны n деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей ровно k стандартных.

► Изобразим условие задачи в виде схемы:

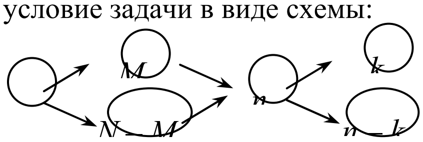


Рис. 3.

общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь n деталей из N, то есть C_N^n – числу испытаний из N элементов по n. Подсчитаем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию (среди n деталей ровно k стандартных). k стандартных деталей можно взять из M стандартных C_M^k способами, при этом остальные $n - k$ деталей должны быть нестандартными. Взять $n - k$ нестандартных деталей из $N - M$ нестандартных деталей можно C_{N-M}^{n-k} способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов по правилу произведения равно $C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}$. Тогда искомая вероятность

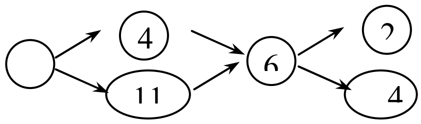
$$\boxed{P(A) = \frac{C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}}. \qquad (2.2)$$

Формула (2.2) находит применение при выборочном контроле и называется ***гипергеометрической формулой***.

◄

Пример 2.6. Из 15 билетов выигрышными являются 4. Какова вероятность того, что среди взятых наудачу 6 билетов будет 2 выигрышных?

► Это задача о выборке. Изобразим условие задачи в виде схемы:



Здесь $n = C_{15}^{6}$ – число способов, которыми можно извлечь 6 билетов из 15. Нас интересует событие A, состоящее в том, что 2 билета выигрышных (2 выигрышных билета выбираются из 4-х выигрышных C_4^2 способами, остальные 4 билета выбираются из 11 невыигрышных C_{11}^4 способами). Поэтому $m = C_4^2 \cdot C_{11}^4$ и

$$P(A) = \frac{C_4^2 \cdot C_{11}^4}{C_{15}^6} = \frac{\dfrac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot\dfrac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}}{\dfrac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}} = \frac{36}{91} \approx 0,395.$$ ◄

Пример 2.7. В лифт девятиэтажного дома вошли 4 человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом этаже, начиная со 2-го. Найти вероятность того, что все пассажиры лифта выйдут на разных этажах.

► Так как любой человек может выйти на каждом из 8 этажей, то всего возможных случаев будет $n = 8^4 = 4096$. Число благоприятствующих исходов $m = A_8^4 = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 1680$. Поэтому $P(A) = \dfrac{A_8^4}{8^4} = 0,41$.

◄

Пример 2.8. В технической библиотеке имеются книги по математике, физике, химии и т.д., всего по 12 разделам науки. Поступили очередные 4 заказа на литературу. Считая, что любой состав заказанной литературы равновозможен, найти вероятность следующих событий: а) A = {заказаны книги из различных разделов науки}, б) B = {заказаны книги из одного и того же раздела науки}.

►Число всех равновозможных исходов равно числу сочетаний с повторениями из 12 элементов по 4, т.е.

$$n = \tilde{C}_{12}^4 = C_{12+4-1}^4 = C_{15}^4 .$$

а) Число исходов, благоприятствующих событию A, равно числу способов отбора без повторения 4 элемента из 12, т.е. числу сочетаний $m = C_{12}^4$. Поэтому

$$P(A) = \frac{C_{12}^4}{C_{15}^4} = \frac{12!}{4!\cdot 8!} \cdot \frac{4!\cdot 11!}{15!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{15 \cdot 14 \cdot 13} = \frac{33}{91} = 0{,}36 .$$

б) Число исходов, благоприятствующих событию равно числу способов выбора одного элемента из 12, т.е. $C_{12}^1 = 12$. Таким образом,

$$P(B) = \frac{C_{12}^1}{C_{15}^4} = \frac{12 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12} \approx 0{,}0088 .$$ ◄

2.4. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Введем одно из важнейших понятий теории вероятностей – понятие частоты случайного события.

Если производится серия из n опытов, в каждом из которых может появиться или не появиться событие A, то ***частотой события*** A в данной серии опытов называется отношение числа опытов, в которых появилось событие A, к общему числу n проведенных опытов.

Относительная частота события A есть

$$W(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число испытаний, в которых событие наступило, а n – общее число произведенных испытаний.

Доказано (теорема Бернулли) и опытным путем подтверждено, что при возрастании n относительная частота $W(A)$ обнаруживает тенденцию приближаться к той вероятности $P(A)$, которая была вычислена (если это возможно) до проведения опыта.

$$W(A) \approx P(A).$$

Пример 2.9. При 16 выстрелах было зарегистрировано 12 попаданий в мишень. Вычислить относительную частоту попаданий в цель.

► $$W(A) = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}.$$

◄

2.5. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Если результат испытания определяется случайным положением точки в некоторой области, причем любые положения точек равновозможны, то вероятность события A равна

$$P(A) = \frac{\text{mes}(\omega)}{\text{mes}(\Omega)}, \tag{2.3}$$

где mes(Ω) – мера (то есть длина, площадь или объем) всей области; mes(ω) – размер той части области, попадание в которую благоприятствует данному событию.

Пример 2.10. Внутри круга радиуса r = 20 см начерчены две непересекающиеся окружности – одна радиусом r_1 = 6 см и вторая r_2 = 8 см. Какова вероятность того, что выбранная наудачу внутри большого круга точка окажется внутри одной из малых окружностей?

►$S = \pi R^2 = 400\pi$ см^2.

$$S_0 = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 = 36\pi + 64\pi = 100\pi \text{ см}^2.$$

По формуле (2.3) имеем

$$P = \frac{S_0}{S} = \frac{100\pi}{400\pi} = \frac{1}{4}.$$ ◄

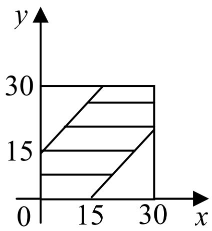


Рис. 4

Пример 2.11. Два друга договорились о встрече между 12 и 12.30 часами дня. Пришедший первым ждет второго 15 минут и уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый наудачу выбирает момент своего прихода.

► Обозначим через x момент прихода первого друга, а через y – время прихода второго друга ($0 \le x \le 30$, $0 \le y \le 30$). Изобразим x и y на плоскости (рис.4).

Все возможные исходы изобразятся точками квадрата $0\le x, y\le 30$. Встреча состоится (событие A), если $|x-y| \le 15$. Неравенство $x-15 \le y \le x+15$ определяет область, заштрихованную на рис. 4. Площадь квадрата $S = 30^2 = 900$, площадь заштрихованной фигуры равна $S_0 = 900 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 15 = 675$.

Искомую вероятность определим по формуле (2.3):

$$P(A) = \frac{S_0}{S} = \frac{675}{900} = 0,75 .$$ ◄

Пример 2.12. Из промежутка [0, 2] наудачу выбирается два числа. Какова вероятность того, что их произведение больше 2?

► Пусть x, y – выбранные числа. Выбрать произвольно два числа $x, y \in [0, 2]$ означает в данной задаче бросить наугад точку $M(x, y)$ внутрь квадрата $0 \le x, y \le 2$. Указанное в условии задачи событие произойдет, если будет выполнено условие $xy > 2$, т.е. брошенная точка попадет внутрь области S_A, ограниченной линиями: $y > 2/x,\ x = 2,\ y = 2$.

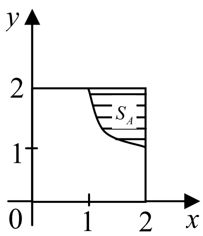


Рис. 5

Событие A – произведение чисел x, y больше 2. Найдем площадь S_A (рис. 5):

$$S_A = \int_1^2 \left(2 - \frac{2}{x}\right) dx = 2x - 2\ln|x| \Big|_1^2 = 2 - 2\ln 2 \approx 0,6 .$$

Площадь квадрата $S = 2^2 = 4$. Следовательно, по формуле (2.3) находим

$$P(A) = \frac{S_0}{S} = \frac{0,6}{4} = 0,15 . \qquad ◄$$

Пример 2.13. В тело V_1 брошена наудачу точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри тела V_2 ($V_2 \subseteq V_1$). Предполагается, что вероятность попадания точки внутрь тела V_2 пропорциональна объему этого тела.

$$V_1 : x^2 + y^2 = 9, \quad 0 \le z \le 6; \qquad V_2 : 2z \ge x^2 + y^2 + 3 .$$

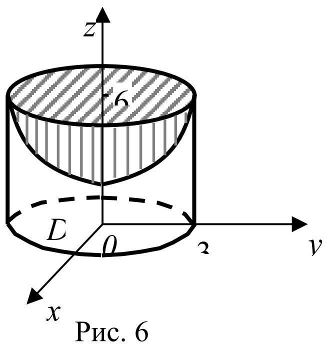


Рис. 6

► Пусть событие A – попадание точки внутрь тела V_2, которое ограничено снизу параболоидом $z = \left(x^2 + y^2 + 3\right)/2$, а сверху – плоскостью $z = 6$. Это тело проектируется в область D плоскости XOY, ограниченную окружностью $x^2 + y^2 = 9$ (рис. 6). Для вычисления объема тела V_2 введем цилиндрические координаты:

$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z, \quad dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\varphi\,dz$. Имеем

$$V_2=\iiint\limits_{V_2} dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{V_2} r\,dr\,d\varphi\,dz=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^3 r\,dr\int\limits_{(r^2+3)/2}^{6} dz=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^3 r\cdot\left(z\Bigg|_{(r^2+3)/2}^{6}\right)dr=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^3 r\cdot\left(6-\frac{r^2+3}{2}\right)dr=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^3\left(9r-r^3\right)dr=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{9r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^3 d\varphi=\frac{81}{8}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi=\frac{81}{8}\cdot\varphi\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{81}{4}\pi$$

.

Так как тело V_1 – круговой цилиндр, где $R = 3$, $H = 6$, то объем его равен: $V_1=\pi R^2 H=\pi 3^2\cdot 6=54\pi$.

Искомую вероятность определим по формуле (2.3):

$$p(A)=\frac{V_2}{V_1}=\frac{81}{4}\pi:54\pi=\frac{3}{8}.$$ ◄

Пример 2.14. Действительная и мнимая части комплексного числа $z=x+i\,y$ произвольным образом выбирается из отрезка [0,6]. Найти вероятность того, что выполняется условие $|z-2-3i|\le|1+i|$.

► Выбрать произвольно число $z=x+i\,y$, $x,y\in[0,6]$, в данной задаче означает бросить точку $M\,(x, y)$ внутрь квадрата $0\le x,\ y\le 6$. Через A обозначим событие –

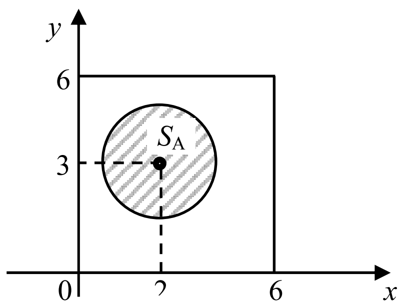


Рис. 7

выполнение условия $\left|z-2-3i\right| \le \left|1+i\right|$, т.е. брошенная точка попадет внутрь области $S_А$. Изобразим данную область $S_А$ на комплексной плоскости. Поскольку $\left|x+iy-2-3i\right| = \left|(x-2)+i\cdot(y-3)\right| = \sqrt{(x-2)^2+(y-3)}$, $\left|1+i\right| = \sqrt{2}$, то область $S_А$ представляет собой круг: $(x-2)^2+(y-3)^2 \le 2$ (рис. 7). Найдем площадь $S_А$:

$$S_A = \pi R^2 = 2\pi.$$

Площадь квадрата $S = 6^2 = 36$. По формуле (2.3) находим

$$p(A) = \frac{S_A}{S} = \frac{2\pi}{36} = \frac{\pi}{18}. \qquad ◄$$

2.6. ДЕЙСТВИЯ НАД СОБЫТИЯМИ

Поскольку событие отождествляется с множеством, то над событиями определяются операции, аналогично действиям над множествами.

Суммой двух событий $A \in \Omega$ ***и*** $B \in \Omega$ называется событие $C = A + B$, состоящее в выполнении события A или события B (рис. 1.а), или обоих событий вместе (рис. 1.б), то есть появления хотя бы одного события.

Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в выполнении хотя бы одного из этих событий (рис. 2.а).

Произведением двух событий $A \in \Omega$ ***и*** $B \in \Omega$ называется событие, состоящее в совместном выполнении события A и события B (рис. 1.в).

Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном выполнении всех этих событий (рис. 2.б).

Противоположным событию A называется событие $\overline{A}$, которое происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A (рис. 8).

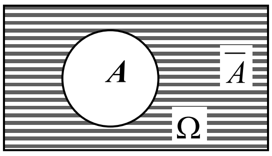


Рис. 8

Операции над событиями обладают следующими свойствами:

1) $A+B=B+A$, $A\cdot B=B\cdot A$ (переместительный закон);

2) $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$;

$A+B\cdot C=(A+B)\cdot(A+C)$ (распределительный закон);

3) $(A+B)+C=A+(B+C)$;

$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$ (сочетательный закон);

4) $A+A=A$, $\quad A\cdot A=A$;

5) $A+\Omega=\Omega$, $\quad A\cdot\Omega=A$;

6) $A+\overline{A}=\Omega$, $\quad A\cdot\overline{A}=\varnothing$;

7) $A-B=A\cdot\overline{B}$;

8) $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$ и $\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$ (законы де Моргана).

Замечание: Следует отметить, что распределительный закон 2) справедлив не только относительно умножения (как для чисел), но и относительно сложения (для чисел оно не выполняется).

Пример 2.15. Экзаменационный билет содержит 2 теоретических и 2 практических вопроса. Событие A_k – студент знает k-тый теоретический вопрос, B_k – знает k-тый практический вопрос (k = 1, 2). С помощью A_k и B_k записать события: **а)** A – студент знает все вопросы; **б)** B – знает только практические вопросы; **в)** C – знает только один вопрос.

►**а)** A – означает совместное появление всех событий A_1, A_2, B_1, B_2, т.е.

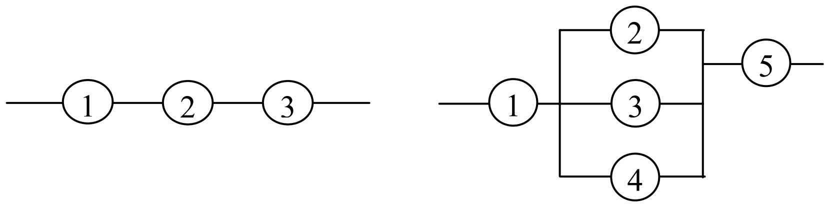
$$\boldsymbol{A = A_1 A_2 B_1 B_2}.$$

б) $\mathrm{B} = \overline{A_1}\,\overline{A_2} B_1 B_2$.

в) $\mathrm{C} = A_1 \overline{A_2}\,\overline{B_1}\,\overline{B_2} + \overline{A_1} A_2 \overline{B_1} B_2 + \overline{A_1}\,\overline{A_2} B_1 \overline{B_2} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{B_1} B_2$.

◄

Пример 2.16. На рис.9 изображены электрические схемы. Выключатели изображены кружками, в которых указан номер выключателя. Записать через событие A_k (включен выключатель с номером k) для каждой схемы событие A – "*ток идет*", $\overline{A}$ – "*ток не идет*":



а) б)

Рис. 9

► **а)** По электрической цепи пойдет ток, если будут включены все выключатели

$$A = A_1 A_2 A_3.$$

По цепи не пойдет ток, если будет выключен хотя бы один выключатель

$$\overline{A} = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \overline{A_3}\ .$$

б) По цепи пойдет ток, если хотя бы один из выключателей 2, 3, 4 включен и одновременно с этим включены 1 и 5 выключатели

$$B = A_1(A_2 + A_3 + A_4)A_5.$$

По цепи не пойдет ток, если одновременно будут выключены выключатели 2, 3, 4 или хотя бы один из выключателей 1 или 5 будет выключен

$$\overline{B} = \overline{A_1} + \overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4} + \overline{A_5}\ .$$ ◄

2.7. ВЕРОЯТНОСТЬ СУММЫ НЕСОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЙ

Аксиому 3 сложения вероятностей называют «теоремой сложения», а также ***правилом сложения вероятностей***.

Правило сложения вероятностей имеет ряд важных следствий.

Следствие 1. Сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице

$$P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1.$$

Следствие 2. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Отсюда $$P(\overline{A})=q=1-P(A)=1-p.$$

Пример 2.17. Стрелок попадает в десятку с вероятностью 0,05; в девятку – с вероятностью 0,2; а в восьмерку – с вероятностью 0,6. Сделан один выстрел. Какова вероятность выбить более восьми очков?

► Пусть событие A – попадание в десятку, B – попадание в девятку, C – выбито более восьми очков, причем по условию $P(A)$ = 0,05, $P(B)$ = 0,2. Очевидно, что $C = A + B$, где A и B – несовместные события.

$$P(C) = P(A) + P(B) = 0{,}05 + 0{,}2 = 0{,}25.$$ ◄

2.8. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ.

Пусть A и B – два случайных события, рассматриваемые в данном опыте. Наступление одного из них (например, A) может влиять на возможность наступления другого.

Условной вероятностью $P(B/A)$ события B при условии, что произошло событие A, называется отношение вероятности произведения этих событий к вероятности события A:

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)},\quad P(A)\neq 0.$$

Вероятность $P(A)$ называется ***безусловной вероятностью***.

Аналогично определяется условная вероятность события A при условии B, т.е.

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)},\quad P(B)\neq 0.$$

Под ***условной вероятностью*** $P(A/B)$ события A понимают вероятность события A, вычисленную при условии, что событие B уже произошло. Аналогично понимается вероятность события $P(B/A)$.

Пример 2 .18. В ящике 20 деталей, среди которых 15 стандартных и 5 бракованных. Из него последовательно вынимают 2 детали: а) без возврата; б) с возвратом. Какова вероятность того, что вторая деталь окажется стандартной при условии, что первая деталь была нестандартной?

►а) Пусть A –первая деталь бракованная, B – вторая деталь стандартная. Так как событие A уже произошло, то в ящике осталось 19 деталей, из которых 15 стандартных. Поэтому $P(B/A)=\frac{15}{19}$.

б) Во 2-ом случае детали возвращаются в ящик, вероятность извлечения стандартной детали во 2-й раз равна $P(B)=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$. ◄

2.9. ВЕРОЯТНОСТЬ ПРОИЗВЕДЕНИЯ СОБЫТИЙ. НЕЗАВИСИМОСТЬ СОБЫТИЙ

Теорема 2.1. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$\boxed{P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B)}. \quad (2.4)$$

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились:

$$P(A_1A_2A_3...A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1\cdot A_2)...P(A_n/A_1\cdot A_2\cdot...\cdot A_{n-1}). \quad (2.5)$$

Пример 2.19. Решить другим способом задачу *2.4*.

►Пусть событие A – получение слова "*Миссисипи*". Событие

A наступит, если первой окажется карточка с буквой "*м*" (1 шанс из 9), вторая – с буквой "*и*" (4 исхода из 8), третья – с буквой "*с*" (3 исхода из 7), четвертая – с буквой "*п*" (1 исход из 6) и так далее. По формуле (2.5) находим

$$P(A)=\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2520}. \qquad ◄$$

Событие A называется ***независимым от события*** B, если появление события B не изменяет вероятности события A, т.е. если условная вероятность события A равна его безусловной вероятности:

$$P(A/B)=P(A).$$

Если событие A не зависит от события B, то и событие B не зависит от события A.

Для независимых событий правило умножения вероятностей принимает вид

$$\boxed{P(AB)=P(A)\cdot P(B)}, \qquad (2.6)$$

т.е. вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Равенство (2.6) принимают в качестве определения независимых событий.

Два события называют независимыми, если вероятность их совмещения равна произведению вероятностей этих событий, в противном случае события называют ***зависимыми***.

События $A_1, A_2, ..., A_n$ называются ***независимыми***, если каждое из них не зависит от произведения любого числа остальных событий и от каждого в отдельности. В противном случае события $A_1, A_2, ..., A_n$ называются ***зависимыми***.

Для независимых событий их условные вероятности равны безусловным, и формула (2.5) упрощается, т.е.

$$\boxed{P(A_1, A_2, ..., A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n)}. \qquad (2.7)$$

Пример 2.20. Брошены монета и игральная кость. Найти вероятность совмещения событий: «появился “герб”», «появилось 5 очков».

► Событие A – появился “герб”, событие B – появилось 5 очков. Событие A и B независимы. $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{6}$.

По формуле (2.6) находим

$$P(AB) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}. \qquad ◄$$

2.10. ВЕРОЯТНОСТЬ СУММЫ СОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЙ

Теорема 2.2. Вероятность суммы двух совместных событий A и B равна сумме их вероятностей без вероятности их произведения

$$\boxed{P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)}. \qquad (2.8)$$

Следствие. Если события A и B несовместны, то

$$\boxed{P(A+B) = P(A) + P(B), \quad A \cap B = \varnothing}.$$

Доказательство. Так как события A и B совместны, то событие $A+B$ наступит, если наступит одно из двух несовместных событий A и $\overline{A}B$ (рис. 10). По теореме сложения вероятностей несовместных событий имеем

$$P(A+B)=P(A)+P\left(\overline{A}B\right). \qquad (2.9)$$

Событие B представим в виде суммы двух несовместных событий: $B=AB+\overline{A}B$. Тогда

$$P(B)=P(AB)+P\left(\overline{A}B\right).$$

Отсюда находим

$$P\left(\overline{A}B\right)=P(B)-P(AB). \qquad (2.10)$$

Теперь из формул (2.9), (2.10) следует утверждение теоремы.

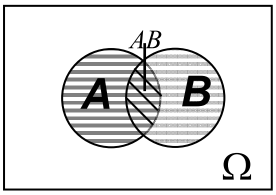


Рис. 10

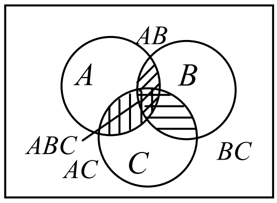


Рис. 11

Аналогично с использованием рис.11 доказывается

Теорема 2.3. Вероятность суммы совместных событий A,B,C равна

$$\boxed{P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)}$$

Пример 2.21. В колоде 36 карт. Объявлен козырь (одна из четырех мастей). Какова вероятность того, что вынутая наудачу карта будет козырем или тузом?

►Пусть событие A означает, что вынутая карта – козырь; событие B – туз. События A, B – совместны, так как туз может быть козырным. По условию:

$$P(A)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}; \quad P(B)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}; \quad P(AB)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{36}.$$

По формуле (2.8) получаем

$$P(A+B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{36}=\frac{1}{3}. \qquad ◄$$

2.11. ВЕРОЯТНОСТЬ ПОЯВЛЕНИЯ ХОТЯ БЫ ОДНОГО СОБЫТИЯ

Пусть события $A_1, A_2,\ldots,A_n$ независимы в совокупности, причем $P(A_1) = p_1$, $P(A_2) = p_2,\ldots$, $P(A_n) = p_n$. Пусть в результате испытания могут наступить все события, либо часть из них, либо ни одно из них.

Теорема 2.4. Вероятность наступления события A, состоящего в ***появлении хотя бы одного*** из событий $A_1, A_2,\ldots,A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_n}$:

$$\boxed{P(A)=1-q_1 q_2 \dots q_n}. \qquad (2.11)$$

Доказательство. Обозначим через A событие, состоящее в появлении хотя бы одного из событий A_1, $A_2,\dots,A_n$. События A и $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \dots, \overline{A_n}$ (ни одно из событий не наступило) противоположны, следовательно, сумма их вероятностей равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A_1}, \overline{A_2}, \dots, \overline{A_n}) = 1.$$

Отсюда, пользуясь теоремой умножения, получим

$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1}, \overline{A_2}, \dots, \overline{A_n}) = 1 - P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\right)\dots P\left(\overline{A_n}\right),$$

или
$$P(A)=1-q_1 q_2 \dots q_n.$$

Следствие. Если события A_1, $A_2,\dots,A_n$ имеют одинаковую вероятность, равную р, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий равна

$$P(A)=1-q^n.$$

Пример 2.22. В цехе 3 участка. Вероятность выполнения плана первым участком составляет 0,98; для второго и третьего участков эта вероятность соответственно равна 0,95 и 0,99. Найти вероятность того, что к моменту подведения итогов работы плановое задание будет выполнено: **а)** только одним участком; **б)** двумя участками; **в)** хотя бы одним участком.

► **а)** Введем обозначения: A_i – выполнение плана i-м участком; $\overline{A_i}$ – невыполнение плана i-м участком (i = 1, 2, 3). Событие A – "*выполнение планового задания только одним* *участком*" запишется в виде $A = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_2} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$. Тогда

$$P(A) = P(A_1)\cdot P\left(\overline{A_2}\right)\cdot P\left(\overline{A_3}\right) + P\left(\overline{A_1}\right)\cdot P\left(A_2\right)\cdot P\left(\overline{A_3}\right) + P\left(\overline{A_1}\right)\cdot P\left(\overline{A_2}\right)\cdot P\left(A_3\right) =$$
$$= 0{,}98\cdot 0{,}05\cdot 0{,}01 + 0{,}02\cdot 0{,}95\cdot 0{,}01 + 0{,}02\cdot 0{,}05\cdot 0{,}99 = 0{,}00167.$$

б) Событие B – "*выполнение плана двумя участками*":

$$P(B) = P(A_1)\cdot P\left(A_2\right)\cdot P\left(\overline{A_3}\right) + P\left(\overline{A_1}\right)\cdot P\left(A_2\right)\cdot P\left(A_3\right) + P\left(A_1\right)\cdot P\left(\overline{A_2}\right)\cdot P\left(A_3\right) =$$
$$= 0{,}98\cdot 0{,}95\cdot 0{,}01 + 0{,}02\cdot 0{,}95\cdot 0{,}99 + 0{,}98\cdot 0{,}05\cdot 0{,}99 = 0{,}07663.$$

в) Событие C – "*выполнение плана хотя бы одним участком*".

<u>I способ.</u> $\overline{C}$ – «невыполнение плана тремя участками»: $\overline{C} = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$. По формуле (2.11) получим

$$P(C) = 1 - 0{,}02\cdot 0{,}05\cdot 0{,}01 = 0{,}99999.$$

<u>II способ.</u> $C = A + B + D$, событие D – "*выполнение плана тремя участками*": $P(D) = 0{,}98\cdot 0{,}95\cdot 0{,}99 = 0{,}92169$. События A, B, D – несовместны. Поэтому

$$P(C) = 0{,}00167 + 0{,}07663 + 0{,}92169 = 0{,}99999. ◄$$

Пример 2.23. Различные элементы электрической цепи работают независимо друг от друга (рис. 12).

Вероятности безотказной работы элементов за время T следующие: $P(A_1)=0{,}6$; $P(A_2)=0{,}8$; $P(A_3)=0{,}7$. Определить вероятность безотказной работы системы за время T.

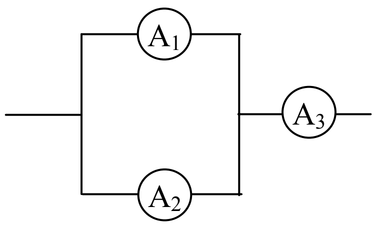


Рис. 12

► Обозначим через A безотказную работу системы за время T.

I способ. Событие A происходит, если происходит хотя бы одно из событий A_1 и A_2 и одновременно с ними событие A_3. Тогда

$$P(A) = \left(1 - P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\right)\right) \cdot P(A_3) = (1 - 0{,}4 \cdot 0{,}2) \cdot 0{,}7 = 0{,}644.$$

II способ. Введем обозначение событий:

B_1 –идет через элементы A_1 и A_3;

B_2 – ток идет через элементы A_2 и A_3.

Тогда $A = B_1 + B_2$. События B_1 и B_2 совместны. Поэтому

$$P(A) = P(B_1 + B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1B_2) = P(A_1A_3) + P(A_2A_3) - P(A_1A_2A_3) =$$
$$= 0{,}6 \cdot 0{,}7 + 0{,}8 \cdot 0{,}7 - 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}644.$$

◄

2.12. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БЕЙЕСА

Теорема 2.5. Если событие A может произойти только при условии появления одного из событий (гипотез) B_1, B_2,…, B_n, образующих полную группу, то вероятность события A равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий (гипотез) на соответствующие условные вероятности события A, т.е.

$$\boxed{\begin{gathered} P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \cdot P(A/B_k) = \\ = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) + \ldots + P(B_n) \cdot P(A/B_n), \end{gathered}} \qquad (2.12)$$

где $P(B_1) + P(B_2) + \ldots + P(B_n) = 1$.

Эту формулу называют ***формулой полной вероятности***.

Если до опыта вероятности гипотез были равны $P(B_1)$, $P(B_2)$,…,

$P(B_n)$, а в результате опыта появилось событие A, то с учетом этого события условные вероятности гипотез вычисляются по формулам Бейеса

$$\boxed{P(B_k / A)=\frac{P(B_k)\cdot P(A/B_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(B_k)\cdot P(A/B_k)}=\frac{P(B_k)\cdot P(A/B_k)}{P(A)}, \quad k=\overline{1,n}}. \quad (2.13)$$

Пример 2.24. Партия деталей поставлена тремя заводами. Из них первый завод поставил 20%, второй – 50%, третий – 30%. Брак на первом заводе составил 0,3%, на втором – 0,2%, на третьем – 0,4%. Найти вероятность того, что случайно взятая деталь бракованная. Какова вероятность того, что она изготовлена вторым заводом?

► Обозначим через A событие – взятая деталь бракованная. Можно сделать три предположения (гипотезы): B_1 – деталь изготовлена первым заводом, причем $P(B_1) = 0,2$.

B_2 – деталь изготовлена вторым заводом, причем $P(B_2) = 0,5$.

B_3 – деталь изготовлена третьим заводом, причем $P(B_3) = 0,3$.

Условная вероятность того, что деталь будет бракованной, если она изготовлена первым заводом, $P\left(A/B_1\right)=0,003$; условная вероятность того, что деталь будет бракованной, если она изготовлена вторым заводом, $P\left(A/B_2\right)=0,002$; условная вероятность того, что деталь будет бракованной, если она изготовлена третьим заводом, $P\left(A/B_3\right)=0,004$.

Вероятность того, что случайно взятая деталь окажется бракованной, по формуле полной вероятности (2.12)

$$P(A) = 0{,}2 \cdot 0{,}003 + 0{,}5 \cdot 0{,}002 + 0{,}3 \cdot 0{,}004 = 0{,}0028.$$

Искомая вероятность того, что взятая бракованная деталь изготовлена вторым заводом, по формуле Бейеса (2.13) равна

$$P(B_2 / A) = \frac{P(B_2) \cdot P(A/B_2)}{P(A)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}002}{0{,}0028} = 0{,}3571. \quad ◄$$

Пример 2.25. В ящике лежат 12 новых и 8 игранных теннисных мячей. Из ящика берут 1 мяч на игру, затем возвращают. Какова вероятность того, что во второй раз будет взят новый мяч?

►Рассмотрим событие A – во второй раз из урны взят новый мяч.
Гипотезы: B_1 – в первый раз взят новый мяч;

B_2 – в первый раз взят игранный мяч.

Вычислим вероятности гипотез: $P(B_1) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$, $P(B_2) = \frac{2}{5}$

и условные вероятности: $P(A/B_1) = \frac{11}{20}$, $P(A/B_2) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$.

По формуле полной вероятности находим

$$P(A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{11}{20} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = 0{,}57. \quad ◄$$

Пример 2.26. Студент Иванов знает 25 из 30 экзаменационных билетов. Каким ему выгоднее зайти на экзамен: первым или вторым?

►Событие A – студент Иванов заходит первым и сдает экзамен.

$$P(A) = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}.$$

Событие C – студент Иванов заходит на экзамен вторым и сдает экзамен. В этом случае рассмотрим следующие гипотезы: B_1 – первый студент возьмет билет, который знает Иванов, B_2 – первый студент возьмет билет, который Иванов не знает.

$$P(B_1)=\frac{25}{30}=\frac{5}{6},\ P(B_2)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}.$$

Вероятность события B определим по формуле полной вероятности. С этой целью вычислим условные вероятности:

$$P(C/B_1)=\frac{24}{29},\ P(C/B_2)=\frac{25}{29}.$$

По формуле (2.12) находим

$$P(C)=\frac{5}{6}\cdot\frac{24}{29}+\frac{1}{6}\cdot\frac{25}{29}=\frac{145}{174}=\frac{5}{6},$$

т.е. все равно: зайдет студент Иванов первым или вторым.

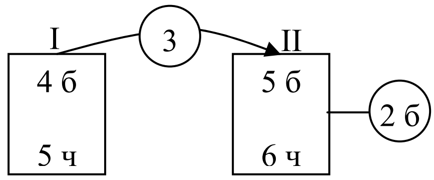
◄

Пример 2.27. В первой урне 4 белых и 5 черных шаров, а во второй – 5 белых и 6 черных шаров. Из первой урны случайным образом вынимают 3 шара и опускают во вторую урну. После этого из второй урны также случайно вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что все шары, вынутые из второй урны, белые.

► Рассмотрим событие:

A – 2 шара, взятые из второй урны, белые.

Изобразим условие задачи в виде схемы:



Гипотезы:

B_1 – из первой урны взяли 3 белых шара;

B_2 – из первой урны взяли 2 белых и 1 черный шар;

B_3 – из первой урны взяли 1 белый и 2 черных шара;

B_4 – из первой урны взяли 3 черных шара.

Применяя формулу (2.2), получаем

$$P(B_1)=\frac{C_4^3}{C_9^3}=\frac{4}{84}=\frac{1}{21},\ \text{где}\ C_9^3=\frac{9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3}=84;$$

$$P(B_2)=\frac{C_4^2\cdot C_5^1}{C_9^3}=\frac{4\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 84}=\frac{5}{14};$$

$$P(B_3)=\frac{C_4^1\cdot C_5^2}{C_9^3}=\frac{4\cdot 5\cdot 4}{84\cdot 1\cdot 2}=\frac{10}{21};\ P(B_4)=\frac{C_5^3}{C_9^3}=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 84}=\frac{5}{42};$$

$$P(A/B_1)=\frac{C_8^2}{C_{14}^2}=\frac{8\cdot 7\cdot 1\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 13\cdot 14}=\frac{4}{13};$$

$$P(A/B_2)=\frac{C_7^2}{C_{14}^2}=\frac{7\cdot 6\cdot 1\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 13\cdot 14}=\frac{3}{13};$$

$$P(A/B_3)=\frac{C_6^2}{C_{14}^2}=\frac{6\cdot 5\cdot 1\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 13\cdot 14}=\frac{15}{91};\ P(A/B_4)=\frac{C_5^2}{C_{14}^2}=\frac{5\cdot 4\cdot 1\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 13\cdot 14}=\frac{10}{91}.$$

По формуле полной вероятности (2.12) имеем

$$P(A)=\frac{1}{21}\cdot\frac{4}{13}+\frac{5}{14}\cdot\frac{3}{13}+\frac{10}{21}\cdot\frac{15}{91}+\frac{5}{42}\cdot\frac{10}{91}\approx 0{,}19.$$

◄

ГЛАВА III

ПОВТОРНЫЕ НЕЗАВИСИМЫЕ ИСПЫТАНИЯ

3.1. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

Испытания (опыты) называются ***независимыми***, если вероятность исхода каждого опыта не зависит от исходов других испытаний.

Схемой Бернулли называется последовательность независимых испытаний, в каждом из которых может произойти некоторое событие A (успех) или противоположное ему событие $\overline{A}$ (неудача).

Свое название она получила по имени швейцарского математика Якоба Бернулли (XVII век).

Схема Бернулли используется в вопросах связи, контроле качества продукции, стрельба и т.п.

Теорема 3.1. Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p, а вероятность его непоявления равна $q = 1 - p$, то вероятность того, что событие A наступит k раз (безразлично в какой последовательности) вычисляется по формуле Бернулли

$$\boxed{P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},\ k = 0,1,2,...,n}. \quad (3.1)$$

Следствие. Вероятности того, что событие наступит: а) менее k раз; б) более k раз; в) не менее k раз; г) не более k раз – находят соответственно по формулам:

а) $P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(k-1)$; б)

$P_n(k+1)+P_n(k+2)+...+P_n(n)$;

в) $P_n(k)+P_n(k+1)+...+P_n(n)$; г) $P_n(0)+P_n(1)+...+P_n(k)$.

Число C_n^k определяется по формуле (1.3).

3.2. НАИВЕРОЯТНЕЙШЕЕ ЧИСЛО ПОЯВЛЕНИЙ СОБЫТИЯ В НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЯХ

Число k_0 (наступления события в независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p) называют наивероятнейшим, если вероятность того, что событие наступит в этих испытаниях k_0 раз, превышает (или, по крайней мере, не меньше) вероятности остальных возможных исходов испытаний.

Наивероятнейшее число k_0 определяют из двойного неравенства

$$np-q \le k_0 < np+p, \; q=1-p,$$

причем

а) если число $np-q$ – ***дробное***, то существует одно наивероятнейшее число k_0;

б) если число $np-q$ – ***целое***, то существуют два наивероятнейших числа, а именно: k_0 и k_0+1;

в) если число np – ***целое***, то наивероятнейшее число $k_0=np$.

Пример 3.1. Монету бросают 6 раз. Найти вероятности следующих событий: A –"герб" выпадет ровно 2 раза; B – "герб" выпадет менее двух раз; C – "герб" выпадет хотя бы 2 раза. Найти наивероятнейшее число выпадений «герба» и соответствующую вероятность.

► По условию $n = 6$. Вероятность выпадения "герба" при одном броске монеты равна $p = \dfrac{1}{2}$, следовательно $q = \dfrac{1}{2}$. Вычислим вероятность события A по формуле Бернулли (3.1):

$$P(A) = P_6(2) = C_6^2 p^2 q^4 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{15}{64}.$$

Событие B – "герб" выпадет менее двух раз означает, что «герб» не выпадет ни разу или выпадет один раз.

Тогда искомая вероятность равна

$$P(B) = P_6(0) + P_6(1) = q^6 + C_6^1 p\, q^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 + 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{7}{64}$$

.

Событие C – "герб" выпадет хотя бы 2 раза противоположно событию B. Поэтому

$$P(C) = 1 - P(B) = 1 - \frac{7}{64} = \frac{57}{64}.$$

Известно, что если произведение числа испытаний на вероятность p появления события есть целое число, то наивероятнейшее число испытаний $k_0 = np$. Поскольку

$np = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$ – целое число, то искомое наивероятнейшее число k_0 выигранных партий $k_0 = 3$.

Найдем вероятность события, состоящего в выигрыше выиграть 3 партии из шести, по формуле Бернулли (3.1):

$$P_6(3) = C_6^3 p^3 q^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}. \qquad ◄$$

3.3. Полиномиальное распределение

Рассмотрим случай, когда в результате каждого из n независимых испытаний может произойти одно из k попарно несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_k$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_k$ соответственно ($p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$). Обозначим через m_i число тех испытаний, в которых произошло событие A_i, $i = 1, 2, \ldots, k$. Тогда вероятность m_1 наступлений события A_1, m_2 наступлений события A_2, …, m_k наступлений события A_k, причем $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$, определяется равенством

$$\boxed{p_n(m_1, m_2, \ldots, m_k) = \frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_k!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_k^{m_k}}. \qquad (3.3)$$

Это ***полиномиальное распределение вероятностей***; при $k = 2$, $p_2 = 1 - p_1 = q_1$ оно превращается в биномиальное.

Пример 3.2. На каждый лотерейный билет с вероятностью $p_1 = 0,05$ может выпасть крупный выигрыш, с вероятностью $p_2 = 0,35$ – мелкий выигрыш и с вероятностью $p_3 = 0,6$ билет может оказаться без выигрыша. Куплено 10 билетов. Определить вероятность получения 2 крупных и 4 мелких выигрышей.

► Искомая вероятность определяется по формуле (3.3). Здесь $m_1 = 2, m_2 = 4, m_3 = 4$. Тогда

$$P_{10}(2,4,4)=\frac{10!}{2!4!4!}\cdot 0{,}05^2\cdot 0{,}35^4\cdot 0{,}6^4=0{,}138.\ ◄$$

3.4. ЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА МУАВРА-ЛАПЛАСА

Если число испытаний достаточно велико, то использование формулы (3.1) нецелесообразно в силу необходимости выполнения громоздких вычислений. В этом случае применяют локальную теорему Муавра-Лапласа, дающую асимптотическую формулу, которая позволяет вычислить вероятность приближенно.

Теорема 3.2. Если вероятность наступления события A в каждом из n независимых испытаний равна p и отлична от нуля и единицы, а число испытаний достаточно велико, то вероятность $P_n(k)$ того, что в n испытаниях событие A наступит k раз (безразлично в какой последовательности), приближенно равна (чем больше n , тем точнее) значению функции

$$\boxed{P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x)},\tag{3.3}$$

где $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$.

Значение функции $\varphi(x)$ для $x\geq 0$ можно найти из таблицы приложения 1. Для $x<0$ пользуются той же таблицей, учитывая, что $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Пример 3.3. Вероятность того, что сошедшая с конвейера деталь стандартная, равна 0,9. Найти вероятность того, что из 400 сошедших с конвейера деталей 356 окажутся стандартными.

► Согласно условию, $n = 400, k = 356, \ p = 0{,}9, \ q = 0{,}1$.

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{356 - 400 \cdot 0{,}9}{6} \approx -0{,}66 .$$

По таблице приложения 1, учитывая, что $\varphi(-x) = \varphi(x)$, находим $\varphi(-0{,}66) = 0{,}3209$.

Искомая вероятность согласно формуле (3.3) равна

$$P_{400}(356) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} \varphi(-0{,}66) = \frac{0{,}3209}{6} \approx 0{,}0535 . \qquad ◄$$

3.5. ФОРМУЛА ПУАССОНА

Если вероятность события p (или q) в отдельном испытании близка к нулю (такие события называются редкими), то даже при большом числе испытаний n ($np \le 10$) вероятности $P_n(k)$, полученные по формуле (3.3), недостаточно близки к их истинным значениям. В таких случаях применяют другую асимптотическую формулу – формулу Пуассона.

Теорема 3.3. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна, но близка к нулю, число независимых испытаний n достаточно велико, а произведение $np = \lambda < 10$, то вероятность $P_n(k)$ того, что в n независимых испытаниях события A

наступит k раз, приближенно вычисляется по формуле

$$\boxed{P_n(k) \approx \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}}, \tag{3.4}$$

где $\lambda = np$ означает среднее число успехов.

Формулу Пуассона применяют в теории массового обслуживания.

Пример 3.4. Некоторое электронное устройство выходит из строя, если откажет определенная микросхема. Вероятность ее отказа в течение 1 часа работы устройства равна 0,004. Какова вероятность того, что за 1000 часов работы устройства придется пять раз менять микросхему?

► По условию, $n = 1000,\ p = 0{,}004$, а $\lambda = np = 1000 \cdot 0{,}004 = 4 < 10$. Для нахождения вероятности $P_{1000}(5)$ воспользуемся формулой Пуассона (3.4), так как условия ее применения выполнены. Имеем $P_{1000}(5) \approx \dfrac{4^5 \cdot e^{-4}}{5!} \approx 0{,}1563$.

◄

Потоком событий называют последовательность событий, наступающих в случайные моменты времени (например, поток вызовов на телефонной станции, прибытие самолетов в аэропорт, поток отказов элементов и т.п.).

Простейшим (пуассоновским) называют поток событий, обладающий свойствами стационарности, отсутствия последствия и ординарностью.

Свойство ***стационарности*** означает, что вероятность появления k событий на участке времени длины τ зависит только от его длины и не зависит от начала его отсчета.

Свойство ***отсутствия последствия*** означает, что вероятность появления k событий в любом промежутке времени не зависит от того, появлялись или не появлялись события в моменты времени, предшествующие началу рассматриваемого промежутка (например, поток).

Свойство ***ординарности*** означает, что событие появляется не группами, а поодиночке. Другими словами, вероятность появления более одного события за малый промежуток времени пренебрежительно мала по сравнению с вероятностью появления только одного события (например, поток самолетов, прилетающих на аэродром, ординарен).

Интенсивностью потока λ называют среднее число событий, которые появляются в единицу времени.

Если постоянная интенсивность потока известна, то вероятность появления k событий простейшего потока за время t определяется формулой Пуассона

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!}. \tag{3.5}$$

Пример 3.5. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно двум. Найти вероятность того, что за 4 минуты поступит: а) три вызова; б) менее трех вызовов; в) не менее трех вызовов. Поток вызовов предполагается простейшим.

► По условию, $\lambda = 2, t = 4, n = 3$. С помощью формулы (3.5) находим

а) $P_4(3) = \dfrac{(2\cdot 4)^3 \cdot e^{-2\cdot 4}}{3!} = \dfrac{8^3 \cdot e^{-8}}{6} \approx 0{,}03$;

б) $P_4(0) + P_4(1) + P_4(2) = 41e^{-8}$;

в) $1 - \left(P_4(0) + P_4(1) + P_4(2)\right) = 0{,}986$.

◄

3.6. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА МУАВРА-ЛАПЛАСА

Проводится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p ($0 < p < 1$). Вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие A наступит в n испытаниях не менее k_1 и не более k_2 раз определяется с помощью интегральной теоремы Лапласа.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие A появится в n испытаниях от k_1 до k_2 раз, приближенно равна

$$\boxed{P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)}, \qquad (3.6)$$

где

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-z^2/2}dz \qquad (3.7)$$

$$x'=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}} \text{ и } x''=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}.$$

Функция $\Phi(x)$ является нечетной, то есть $\Phi(-x)=-\Phi(x)$, значение $\Phi(x)$ для $0\le x\le 5$ приведены в приложении 2. При $x>5$ $\Phi(x)=0,5$.

Пример 3.6. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена не более 70 раз.

► Мишень будет поражена не более 70 раз, это значит, что событие произойдет от 0 до 70 раз. По условию $n=100, p=0,75, q=0,25$. Поэтому по формуле (3.6) получаем

$$P_{100}(0;70)=\Phi(x'')-\Phi(x'),$$

где $x''=\dfrac{70-100\cdot 0,75}{\sqrt{100\cdot 0,75\cdot 0,25}}=-1,15$, $x'=\dfrac{0-100\cdot 0,75}{\sqrt{100\cdot 0,75\cdot 0,25}}=-17,32$.

$$P_{100}(0,70)=\Phi(-1,15)-\Phi(-17,32)=-\Phi(1,15)+\Phi(17,32)=-\Phi(1,15)+0,5=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\textit{по таблице приложения } 2\\ \Phi(1,15)=0,3749\end{array}\right|=0,1251.$$

◄

3.7. ВЕРОЯТНОСТЬ ОТКЛОНЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ЧАСТОТЫ ОТ ПОСТОЯННОЙ ВЕРОЯТНОСТИ В НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЯХ

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события A равна $p\left(0<p<1\right)$, абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события A от вероятности появления события не превысит положительного числа ε, приближенно равна

$$\boxed{P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)}, \qquad (3.8)$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

Пример 3.8. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,5. Найти число испытаний, при котором с вероятностью 0,7698 можно ожидать, что относительная частота появления события отклонится по модулю от его вероятности не более чем на 0,02.

► По условию $p=0{,}5;\ q=0{,}5;\varepsilon=0{,}02$; $P\left(\left|k/n-p\right|\le\varepsilon\right)=0{,}7698$. Поэтому на основании формулы (3.8) получаем

$$2\Phi\left(0,02\sqrt{\frac{n}{0,5\cdot 0,5}}\right)=0,7698 \text{ или } \Phi\left(0,04\sqrt{n}\right)=0,3899 .$$

По таблице приложения 2 находим $\Phi\left(1,23\right)=0,3899$. Поэтому $0,04\sqrt{n}=1,23$, т.е. $n\approx 900$.

◄

ГЛАВА IV

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

4.1. ПОНЯТИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ. РЯД, МНОГОУГОЛЬНИК И ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, заранее неизвестное и зависящее от случайных причин.

Случайные величины (***СВ***) будем обозначать буквами X, Y, Z, а их возможные значения – x, y, z.

Случайные величины можно разделить на два основных вида: дискретные и непрерывные случайные величины. ***Случайная величина*** называется ***дискретной (прерывной)*** (***ДСВ***), если множество ее значений конечно или счетно, то есть может быть занумеровано натуральными числами.

Примеры ДСВ: число выпадений герба при четырехкратном подбрасывании монеты (множество значений СВ конечно); количество вызовов, поступающих на телефонную станцию в течение фиксированного промежутка времени (множество значений счетно).

Примеры НСВ: дальность полета артиллерийского снаряда; расход электроэнергии на предприятии за месяц, отклонение напряжения в электрической цепи от номинала.

Непрерывной случайной величиной (***НСВ***) называется такая величина, которая может принимать любые неизвестные заранее значения из рассматриваемого участка или интервала.

Полную информацию о случайной величине дает закон распределения.

Законом распределения СВ называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями СВ и соответствующими им вероятностями.

Закон распределения может иметь разные формы.

1. ***Рядом распределения ДСВ*** X называется таблица (матрица), в которой перечислены в порядке возрастания все возможные значения СВ и соответствующие им вероятности, то есть

X:

x_i	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

или $X = \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \\ p_1, & p_2, & \ldots, & p_n \end{pmatrix}$,

где $p_i = P\left(X = x_i\right)$, $\qquad \sum\limits_{i=1}^{n} P\left(X = x_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$.

2. Ряд распределения может быть изображен графически. Ломаная, вершины которой находятся в точках с координатами $(x_i; p_i)$, называется ***многоугольником распределения*** или ***полигоном*** (рис. 13).

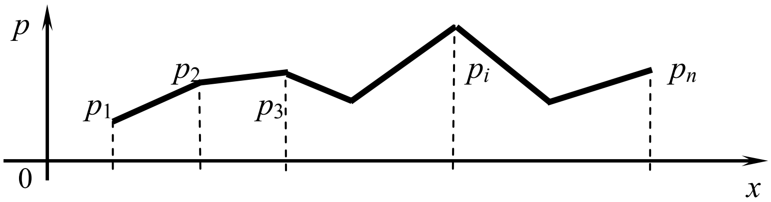


Рис. 13

3. ***Функцией распределения СВ*** X называется функция $F(x)$, выражающая для каждого x вероятность того, что СВ X примет значение, меньшее x, т.е.

$$\boxed{F(x) = P(X < x), -\infty < x < \infty}.$$

Функцию $F(x)$ иногда называют ***интегральной функцией*** распределения или ***интегральным законом*** распределения.

Геометрически функция распределения интерпретируется как вероятность того, что случайная точка X попадет левее заданной точки x (рис. 14).

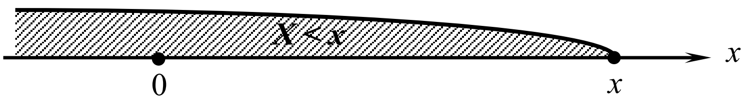


Рис. 14

Функция распределения обладает следующими свойствами:

1) $0 \le F(x) \le 1$;

2) $F(x)$ – неубывающая функция, то есть $F(x_2) \ge F(x_1)$ при $x_2 > x_1$;

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$;

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;

5) Вероятность попадания СВ в интервал $[x_1; x_2)$ равна

$$\boxed{P(x_1 \le x < x_2) = F(x_2) - F(x_1)}. \tag{4.1}$$

Для ДСВ функция распределения – разрывная ступенчатая функция, непрерывная слева, скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям СВ, и равны вероятностям этих значений. Сумма всех скачков $F(x)$ равна 1.

Для ДСВ функция распределения определяется по формуле:

$$\boxed{F(x) = \sum_{x_i < x} p_i},$$

где суммирование ведется по всем значениям i, для которых $x_i < x$.

Пример 4.1. Дан ряд распределения СВ X.

X:	x_i	-1	2	4	5
	p_i	0,3	0,4	0,1	0,2

Найти и изобразить графически ее функцию распределения. Вычислить $P(2 \le X < 5)$ и $P\{X \ge 4\}$.

►Найдем функцию $F(x)$ по определению. Если $x \le -1$, то, очевидно, $F(x) = F(X<x) = 0$, так как событие $\{X < x\}$ при $x \le 0$ невозможно.

Если $1 < x \le 2$ (например, $x = 1{,}2$), то $F(x) = P(X < x) =$ $= P(X = -1) = 0{,}3$.

Пусть $2 < x \le 4$ (например, $x = 3$), тогда $F(x) = P(X < x) =$ $= P(X = -1) + P(X = 2) = 0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}7$.

Если $4 < x \le 5$, то $F(x) = P(X < x) = P(X = -1) + P(X = 2) +$ $+ P(X = 4) = 0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}1 = 0{,}8$.

Если $x > 5$, то $F(x) = P(X < x) = P(X = -1) + P(X = 2) +$ $+ P(X = 4) + P(X = 5) = 0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}2 = 1$.

Аналитически функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при\ x \le -1; \\ 0{,}3, & при\ -1 < x \le 2; \\ 0{,}7, & при\ 2 < x \le 4; \\ 0{,}8, & при\ 4 < x \le 5; \\ 1, & при\ x > 5. \end{cases}$$

Изобразим функцию $F(x)$ графически (рис. 15).

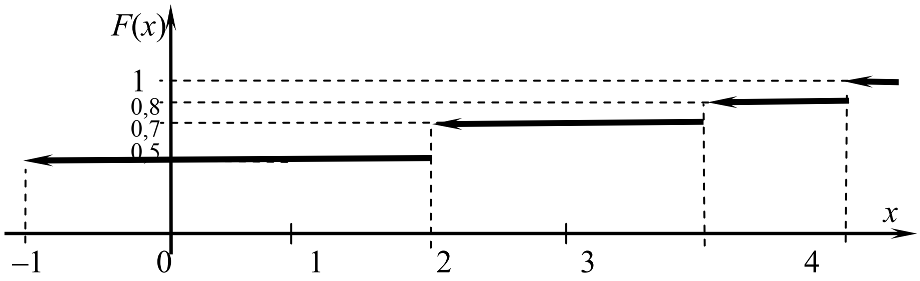


Рис. 15

Найдем $F(x)$ другим способом. Используя формулу

$F(x) = \sum\limits_{x_i < x} p_i$, получим

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1; \\ 0,3, & -1 < x \le 2; \\ 0,3 + 0,4 = 0,7, & 2 < x \le 4; \\ 0,3 + 0,4 + 0,1 = 0,8, & 4 < x \le 5; \\ 0,3 + 0,4 + 0,1 + 0,2 = 1, & x > 5. \end{cases}$$

Вероятность попадания в промежуток $[2;5)$ вычислим по формуле (4.1):

$$P(2 \le X < 5) = F(5) - F(2) = 0,8 - 0,3 = 0,5$$

Далее находим

$$P(X \ge 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - 0,7 = 0,3.$$ ◄

Пример 4.2. Задана функция распределения СВ *X*:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 3; \\ 0,1, & 3 < x \le 4; \\ 0,4, & 4 < x \le 6; \\ 0,8, & 6 < x \le 8; \\ 1, & x > 8. \end{cases}$$

Найти ряд распределения.

► Возможные значения СВ *X*: $x_1 = 3,\ x_2 = 4,\ x_3 = 6,\ x_4 = 8$. Соответствующие вероятности значений равны скачкам функции распределения в этих точках. Находим $p_1 = 0,1;\ p_2 = 0,4 - 0,1 = 0,3;$ $p_3 = 0,8 - 0,4 = 0,4;\ p_4 = 1 - 0,8 = 0,2$. Таким образом, имеем ряд распределения *X*.

X:

x_i	3	4	6	8
p_i	0,1	0,3	0,4	0,2

Контроль: $\sum p_i = 0,1 + 0,3 + 0,4 + 0,2 = 1$.

◄

4.2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД СЛУЧАЙНЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ

Две случайные величины называются ***независимыми***, если закон распределения одной из них не меняется от того, какие возможные значения приняла другая величина. Например, если ДСВ X может принимать значения $x_i \left(i = 1, 2, ..., n\right)$, а СВ Y – значения $y_j \left(j = 1, 2, ..., m\right)$, то независимость ДСВ X и Y означает независимость событий $X = x_i$ и $Y = y_j$ при любых $i = 1, 2, ..., n$ и $j = 1, 2, ..., m$. В противном случае СВ называются ***зависимыми***.

Пример 4.3. Пусть СВ X – число выпавших очков при подбрасывании одного игрального кубика, а СВ Y – число выпавших очков при подбрасывании второго игрального кубика. Выпадение, например, двух очков на первом кубике не зависит от того, какое количество очков выпало на втором кубике, и так далее. Следовательно, СВ X и Y независимы.

Пусть даны 2 случайные величины:

X:

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Y:

y_j	y_1	y_2	…	y_m
p_j	p_1	p_2	…	p_m

Произведением kX СВ X на постоянную величину k называется СВ, которая принимает значения kx_i с теми же вероятностями $p_i \left(i = 1, 2, ..., n\right)$, m–й степенью СВ X, то есть X^m, называется СВ, которая принимает значения x_i^m с теми же вероятностями.

Пример 4.4. Дана случайная величина

X:

x_i	–3	0	1	3
p_i	0,4	0,2	0,3	0,1

Найти закон распределения СВ: **а)** $Y = 2X$; **б)** $Z = X^2$.

►Искомые законы распределения имеют вид:

а) Y:

y_i	-6	0	2	6
p_i	0,4	0,2	0,3	0,1

б) Z:

z_i	9	0	1	9
p_i	0,4	0,2	0,3	0,1

Суммой, разностью или ***произведением*** СВ X и Y называется СВ, которая принимает все возможные значения вида $x_i + y_j$ или $x_i - y_j$, или $x_i\, y_j$, где $i = 1, 2, ..., n;\ j = 1, 2, ..., m$, с вероятностями p_{ij} того, что СВ X примет значения x_i, а Y – значения y_j:

$$p_{ij} = P\left[(X = x_i)(Y = y_j)\right].$$ ◄

Пример 4.5. Даны случайные величины:

X:

x_i	1	2	3
p_i	0,2	0,6	0,2

Y:

y_j	3	4	5
p_j	0,1	0,5	0,4

Найти закон распределения СВ: **а)** $X + Y$; **б)** XY.

►

а) $X + Y$:

$x_i + y_j$	4	5	6	7	8
p_{ij}	0,02	0,1+0,06= =0,16	0,02+0,3+ +0,08=0,4	0,24+0,1= =0,34	0,08

Так как $x_3 + y_1 = x_2 + y_2 = x_1 + y_3 = 6$, то $p = 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}6 \cdot 0{,}5$ +

$+0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}02 + 0{,}3 + 0{,}08 = 0{,}4$.

Контроль: 0,02 + 0,16 + 0,4 + 0,34 + 0,08 = 1.

б) $X\,Y$:

$x_i\ y_j$	3	4	5	6	8	9	10	12	15
p_{ij}	0,02	0,1	0,08	0,06	0,3	0,02	0,24	0,1	0,08

Контроль: 0,02 + 0,1 + 0,08 + 0,06 + 0,3 + 0,02 + 0,24 + 0,1 + 0,08 = 1.

◄

4.3. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Характеристикой среднего значения СВ служит математическое ожидание.

Математическим ожиданием дискретной СВ X называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности

$$\boxed{M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n}. \tag{4.2}$$

Если дискретная СВ X принимает счетное множество возможных значений, то

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i ,$$

причем математическое ожидание существует, если ряд в правой части равенства (4.2) сходится абсолютно. Кроме обозначения $M(x)$ применяют обозначение: MX, m, m_x.

Механическая интерпретация математического ожидания. Пусть единичная масса распределена между точками оси абсцисс $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем материальная точка x_i имеет массу $p_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$. Вычислим абсциссу центра массы системы материальных точек. Имеем

$$\frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \right)$$

или, учитывая, что $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, получаем формулу (4.2). Это есть ***среднее взвешенное*** значение СВ X, в которое абсцисса каждой точки x_i входит с "весом", равным соответствующей вероятности p_i.

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ СМЫСЛ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ

Пусть произведено n испытаний, в которых случайная величина X приняла m_1 раз значение x_1, m_2 раз – значение x_2, …, m_k раз – значение x_k, причем $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$. Тогда сумма всех значений, принятых X, равна $x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k$. Найдем среднее арифметическое $\overline{X}$ всех значений, принятых случайной величиной, для чего разделим найденную сумму на общее число испытаний

$$\overline{X} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k}{n},$$

или

$$\overline{X} = x_1 \frac{m_1}{n} + x_2 \frac{m_2}{n} + \ldots + x_k \frac{m_k}{n}. \qquad (4.3)$$

Заметив, что отношение $\frac{m_1}{n}$ – относительная частота ω_1 значения x_1, $\frac{m_2}{n}$ – относительная частота ω_2 значения x_2 и т.д., запишем равенство (4.3) так:

$$\overline{X} = x_1 \omega_1 + x_2 \omega_2 + \ldots + x_k \omega_k. \qquad (4.4)$$

Допустим, что число испытаний достаточно велико. Тогда относительная частота приближенно равна вероятности появления события:

$$\omega_1 \approx p_1;\ \omega_2 \approx p_2;\ ...;\ \omega_k \approx p_k. \tag{4.5}$$

Заменив в равенстве (4.4) относительные частоты соответствующими вероятностями, получим

$$\overline{X} \approx x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_k p_k. \tag{4.6}$$

Правая часть приближенного равенства (4.6) есть $M(X)$. Итак,

$$\overline{X} \approx M(X).$$

Вероятностный смысл полученного результата таков: ***математическое ожидание приближенно равно*** (тем точнее, чем больше число испытаний) ***среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.***

Математическое ожидание обладает следующими свойствами:

1) $M(C) = C,\ C = const$.

2) Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(CX) = C\,M(X).$$

3) Математическое ожидание произведения взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей:

$$M(X_1 X_2 ... X_n) = M(X_1)M(X_2)...M(X_n).$$

4) Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M(X_1 + X_2 + ... + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n).$$

5) Математическое ожидание отклонения СВ X от ее математического ожидания равно нулю: $M[X - M(X)] = 0$.

Характеристикой рассеяния возможных значений СВ вокруг математического ожидания служат, в частности, дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

Дисперсией СВ X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$\boxed{D(X) = M[X - M(X)]^2}. \qquad (4.7)$$

Для вычисления дисперсии часто бывает удобно пользоваться следующей теоремой.

Теорема. Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания:

$$\boxed{D(X) = M\left(X^2\right) - \left[M(X)\right]^2}. \tag{4.8}$$

Доказательство. Математическое ожидание $M(X)$ есть постоянная величина. Пользуясь свойствами математического ожидания, упростим формулу (4.7), выражающую определение дисперсии:

$$D(X) = M\left[X - M(X)\right]^2 = M\left(X^2 - 2XM(X) + M^2(X)\right) =$$
$$= M\left(X^2\right) - 2M(X)M(X) + M^2(X) = M\left(X^2\right) - 2M^2(X) +$$
$$+M^2(X) = M\left(X^2\right) - M^2(X).$$

Итак, получили формулу (4.8).

Механическая интерпретация распределения: дисперсия – это момент ***инерции*** распределения масс относительно центра масс (математическое ожидание).

Дисперсия обладает следующими свойствами:

1) Дисперсия постоянной равна нулю:

$$D(C) = 0 .$$

2) Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

3) Дисперсия суммы (разности) независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых:

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$$

Средним квадратическим отклонением СВ называется величина

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{D(X)}}.$$

Пример 4.6. СВ X задана законом распределения

X:	x_i	-1	2	4	5
	p_i	0,3	0,2	0,1	0,4

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

► $M(X) = (-1) \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}4 = 2{,}5$.

1-й способ. Вычислим дисперсию по формуле (4.8). Составим распределение X^2:

X^2	1^2	2^2	4^2	5^2

p	0,3	0,2	0,1	0,4

Найдем математическое ожидание X^2 по формуле (4.2):

$$M\left(X^2\right) = 1 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}2 + 16 \cdot 0{,}1 + 25 \cdot 0{,}4 = 12{,}7,$$

тогда $D(X) = 12{,}7 - 2{,}5^2 = 12{,}7 - 6{,}25 = 6{,}45$.

Вычислим среднее квадратическое отклонение: $\sigma(X) = \sqrt{6{,}45} \approx 2{,}54$.

2-й способ. Вычислим дисперсию, исходя из ее определения. Составим распределение:

$(X\text{-}M(X))^2$	$(-1 - 2{,}5)^2$	$(2 - 2{,}5)^2$	$(4 - 2{,}5)^2$	$(5 - 2{,}5)^2$
p	0,3	0,2	0,1	0,4

Отсюда по формуле (4.7) получаем

$$D(X) = 3{,}5^2 \cdot 0{,}3 + 0{,}5^2 \cdot 0{,}2 + 1{,}5^2 \cdot 0{,}1 + 2{,}5^2 \cdot 0{,}4 = 6{,}45.$$

◄

Пример 4.7. $M(X) = 3, D(X) = 2$. **Найти** $M(2X+5)$ **и** $D(2x-1)$.

► $$M(2X+5) = 2M(X) + M(5) = 2 \cdot 3 + 5 = 11,$$

$$D(2x-1) = 4D(X) + D(1) = 4 \cdot 2 = 8.$$ ◄

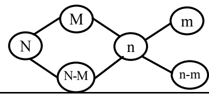
Модой $Mo(X)$ ***дискретной СВ*** X, принимающей значения $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$, называется наиболее вероятное ее значение по сравнению с соседними.

4.4. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Таблица 2

Название закона распределения	Обозначение случайной величины и параметров закона	Формула закона распределения	Числовые характеристи
Биноминальный	$X = m$ – число успехов в n испытаниях Бернулли (с вероятностью p)	$P(X=m)=$ $=C_n^m p^m q^{n-m}$, $q=1-p$, $m=0,1,2,\ldots,n$	$M(X)=np$, $D(X)=npq$
Геометрический	$X = m$ – число испытаний Бернулли, которые нужно произвести до первого успеха	$P(X=m)=$ $=p\,q^{m-1}$, $q=1-p$, $m=1,2,\ldots$	$M(X)=\dfrac{1}{p}$, $D(X)=\dfrac{q}{p^2}$
Пуассона	$X = m$ – число успехов в n испытаниях Бернулли с вероятностью p успеха в одном	$P(X=m)=$ $=\dfrac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$, $m=0,1,2,\ldots$ $\lambda=np<10$	$M(X)=$ $=D(X)=\lambda$

	испытании, когда n велико		
Гипергеометрический	Задача о выборке $X=m$ – число объектов, обладающих заданным свойством среди n объектов 	$P(X=m)=$ $=\frac{C_M^m\,C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$,	$M(X)=n\frac{M}{N}$, $D(X)=n\frac{M}{N-1}\times$ $\times\left(1-\frac{M}{N}\right)\cdot\left(1-\frac{n}{N}\right)$
Равномерное распределение ДСВ	$X=(x_1,x_2,...,x_n)$	$P(X=m)=$ $=\frac{1}{n},\quad i=\overline{1,n}$	$M(X)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$, $D(X)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-$ $-\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2$

4.4.1. БИНОМИАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение. ***Дискретная СВ*** *X* имеет ***биномиальный закон распределения***, если она принимает значения 0, 1, 2, …, m, …, n с вероятностями

$$\boxed{p_m=P(X=m)=C_n^{\,m}p^mq^{n-m}},\tag{4.5}$$

где $0<p<1$, $q=1-p$, $m=0,1,\ldots,n$, т.е. вероятности определяются по формуле Бернулли. Здесь X – число появлений события в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p.

Ряд распределения биномиального закона имеет вид:

x_i	0	1	2	…	m	…	n
p_i	q^n	$C_n^1 p q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$		$C_n^m p^m q^{n-m}$		p^n

Здесь $\sum_{i=1}^{n} p_i = (q+p)^n = q^n + C_n^1 p q^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \ldots +$ $+ C_n^m p^m q^{n-m} + \ldots + p^n = 1$ (сумма всех членов разложения бинома Ньютона).

Теорема 4.1. ***Математическое ожидание*** СВ X, распределенной по биномиальному закону, равно

$$\boxed{M(X) = np},$$

а ее ***дисперсия***

$$\boxed{D(X) = npq}.$$

Доказательство. Учитывая, что дискретная случайная величина X_1 – число появлений события в одном испытании – имеет только два возможных значения: $x_1 = 1$ и $x_2 = 0$, имеем

X_1	1	0
p	p	q

,

$$M(X_1) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p, \; M(X_1^2) = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q = p,$$

$$D(X_1) = M(X_1^2) - [M(X_1)]^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

Далее, учитывая свойство математического ожидания 4) для n независимых случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$, находим

$$M(X_1 + X_2 + ... + X_n) = \sum_{i=1}^{n} M(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np.$$

Используя свойство дисперсии 3), получим

$$D(X_1 + X_2 + ... + X_n) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \sum_{i=1}^{n} pq = npq.$$

Биномиальный закон распределения широко используется в теории и практике статистического контроля качества продукции, при описании функционирования систем массового обслуживания, в теории стрельбы и в других областях.

Пример 4.8. Игральный кубик подброшен 3 раза. Написать закон распределения числа появлений шестерки (СВ X). Найти математическое ожидание и дисперсию.

► 6 очков при одном подбрасывании кубика могут появиться с вероятностью $p = \frac{1}{6}$ и, соответственно, не появиться с вероятностью $q = 1 - p = \frac{5}{6}$. СВ X распределена по биномиальному закону и может принимать значения $x_1 = 0, x_2 = 1, \quad x_3 = 2, x_4 = 3$. По формуле Бернулли (4.5) имеем:

$$P(X=0) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}, P(X=1) = C_3^1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216},$$

$$P(X=2) = C_3^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = 3 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{216}, P(X=3) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}.$$

Таким образом, ряд распределения СВ X имеет вид

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

Контроль: $\frac{125}{216} + \frac{75}{216} + \frac{15}{216} + \frac{1}{216} = 1$.

$$M(X) = np = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}, \qquad D(X) = npq = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{12}. \blacktriangleleft$$

4.4.2. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПУАССОНА

Определение. ***Дискретная СВ*** X имеет ***закон распределения***

Пуассона с параметром $\lambda > 0$, если она принимает значения 0, 1, 2, … , m, … (бесконечное, но счетное множество значений) с вероятностями

$$\boxed{P(X=m)=\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},\ \lambda = np,\ m\ =\ 0,1,2,\ \ldots}. \tag{4.6}$$

Ряд распределения закона Пуассона имеет вид:

x_i	0	1	2	…	m	…
p_i	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\dfrac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$		$\dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$	

Теорема 4.2. Математическое ожидание и дисперсия СВ X, распределенной по закону Пуассона, совпадают и равны параметру λ этого закона, то есть

$$\boxed{M(X)=\lambda, \quad D(X)=\lambda}.$$

Доказательство. Вычислим математическое ожидание

$$M(X)=\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot\frac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}=e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}=\lambda\, e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}\,.$$

Здесь считаем $k-1=m$.

Далее, принимая во внимание, что $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}=e^{\lambda}$, имеем

$$M(X)=\lambda\cdot e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda\ ,$$

т.е. математическое ожидание распределения Пуассона равно параметру этого распределения λ .

Найдем математическое ожидание X^2 :

$$M\left(X^2\right)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\cdot\frac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}=\lambda\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^{k-1}\cdot e^{-\lambda}}{(k-1)!}=\lambda\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left[(k-1)+1\right]\frac{\lambda^{k-1}\cdot e^{-\lambda}}{(k-1)!}=$$
$$=\lambda\cdot\left[\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\frac{\lambda^{k-1}\cdot e^{-\lambda}}{(k-1)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}\cdot e^{-\lambda}}{(k-1)!}\right].$$

Положив $k-1=m$, получаем

$$M\left(X^2\right)=\lambda\cdot\left[\sum_{m=0}^{\infty}m\cdot\frac{\lambda^m\cdot e^{-\lambda}}{m!}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m\cdot e^{-\lambda}}{m!}\right].$$

Принимая во внимание, что

$$\sum_{m=0}^{\infty}m\cdot\frac{\lambda^m\cdot e^{-\lambda}}{m!}=\lambda,\ \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m\cdot e^{-\lambda}}{m!}=e^{-\lambda}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=1\ ,$$

имеем

$$M\left(X^2\right)=\lambda\cdot(\lambda+1)=\lambda^2+\lambda .$$

Отсюда находим

$$D(X)=M\left(X^2\right)-\left[M(X)\right]^2=\left(\lambda^2+\lambda\right)-\lambda^2=\lambda .$$

Распределение Пуассона (4.6) может быть получено из биноминального распределения (3.1) путем предельного перехода при $n\to\infty, p\to 0$ при условии $np=\lambda=const$ и в этом случае интерпретируется как ***закон "редких" явлений***. Если n достаточно велико, а p мало, то формулу Пуассона (4.6) часто используют в качестве приближения вместо точных биноминальных формул для вероятности k успехов в n испытаниях.

Пример 4.9. При работе аппарата время от времени возникают сбои. Количество сбоев за сутки X – СВ, распределенная по закону Пуассона. Среднее количество сбоев за сутки равно 1,5. Найти вероятности событий A и B, определяемых следующим образом: A = {в течение суток произойдет хотя бы один сбой}, B = {за двое суток не будет ни одного сбоя}. Написать закон распределения СВ X.

► Среднее количество сбоев за сутки равно 1,5. Это означает, что параметр пуассоновского распределения $\lambda=M(X)=1,5$. Вероятность события A вычислим по формуле (4.6)

$$P(A)=1-P(X=0)=1-e^{-1,5}\approx 0,78,$$

$$P(B)=(P(X=0))^2=e^{-3}\approx 0,05 .$$

Ряд распределения Пуассона имеет вид:

x_i	0	1	2	…	**m**	…
p_i	$e^{-1,5}$	$1,5\,e^{-1,5}$	$1,125\,e^{-1,5}$		$\dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$	

◄

4.4.3. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Пусть проводятся независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(1 - p = q)$, $0<p<1$. Испытания заканчиваются, как только появится событие A. Пусть в первых k–1 испытаниях событие A не наступило, а в k-м испытании появилось. Вероятность события $\{X = k\}$ равна

$$\boxed{p_k = P\{X = k\} = pq^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots} . \tag{4.7}$$

Здесь X – число испытаний до первого появления события A (до ***«первого успеха»***).

Распределение СВ X называется ***геометрическим с параметром*** $p(0 < p < 1)$, если значения СВ X – все натуральные числа, а вероятности события $\{X = k\}$ определяются по формуле (4.7).

Ряд геометрического распределения СВ X имеет вид:

x_i	1	2	3	…	k	…
p_i	p	pq	pq^2	…	pq^{k-1}	…

Вероятности p_i образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем q:

$$\sum_{i=1} p_i = p + pq + \ldots + pq^{m-1} + \ldots = p\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{m-1} + \ldots\right) =$$

$$= p \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$

Теорема 4.3. Математическое ожидание СВ *X*, имеющей геометрическое распределение с параметром p, равно

$$\boxed{M(X) = \frac{1}{p}},$$

а ее дисперсия

$$\boxed{D(X) = \frac{q}{p^2}, \text{ где } q = 1 - p}.$$

Доказательство. Найдем $M(X)$:

$$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p \cdot q^{k-1} = p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(q^k\right)' = p \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)' =$$

$$= p \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right)' = p \cdot \left(\frac{1}{1-q}\right)' = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

Будем искать $D(X)$ по формуле

$$D(X)=M\left(X^2\right)-\left[M\left(X\right)\right]^2.$$

$$M\left(X^2\right)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\cdot p\cdot q^{k-1}=p\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\left(k-1\right)\cdot q^{k-1}+p\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot q^{k-1}=$$

$$=pq\cdot\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\left(k-1\right)\cdot q^{k-2}+M\left(X\right)=pq\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(q^k\right)''+M\left(X\right)=$$

$$=pq\cdot\left(\frac{1}{1-q}\right)''+M\left(X\right)=2pq\frac{1}{\left(1-q\right)^3}+M\left(X\right)=\frac{2q}{p^2}+\frac{1}{p}.$$

Поэтому

$$D(X)=M\left(X^2\right)-\left[M\left(X\right)\right]^2=\frac{2q}{p^2}+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}=\frac{2q-1+p}{p^2}=\frac{q}{p^2}.$$

Пример 4.10. Производится, вообще говоря, неограниченный ряд попыток включить двигатель. Каждая попытка заканчивается успехом (включением двигателя) с вероятностью p = 0,6. Каждая попытка занимает время τ. Найти распределение общего времени T, которое потребуется для запуска двигателя, его математическое ожидание и дисперсию.

► СВ X, равная числу произведенных попыток, имеет геометрическое распределение; при этом $T = \tau X$. Ряд распределения времени T имеет вид:

T	τ	2τ	3τ	…	$k\tau$	…
p	0,6	$0{,}4 \cdot 0{,}6$	$0{,}4^2 \cdot 0{,}6$	…	$0{,}4^{k-1} \cdot 0{,}6$	…

Поэтому

$$M[T] = M[\tau X] = \tau M[X] = \frac{\tau}{p} = \frac{5}{3}\tau;\ D_T = \tau^2 D_x = \tau^2 \frac{1-p}{p^2} = \frac{10}{9}\tau^2 .$$

◄

4.4.4. ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Определение. Дискретная СВ *X*, имеет гипергеометрическое распределение, если она принимает значения 0, 1, 2, 3, …, min (*n*; *M*) с вероятностями

$$\boxed{P(X = m) = \frac{C_M^{\ m} C_{N-M}^{n-m}}{C_N^{\ n}}}, \tag{4.8}$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots, \min(n; M)$, $m \le N$, $n \le M$; n, M, N – натуральные числа. Гипергеометрическое распределение имеет СВ $X=m$ – число объектов, обладающих заданным свойством, среди n объектов, случайно извлеченных (без возврата) из совокупности N объектов, M из которых обладают этим свойством (задача о выборке) (рис. 3).

Теорема 4.4. Математическое ожидание СВ *X*, имеющей гипергеометрическое распределение с параметрами n, M, N, есть

$$M(X) = n\frac{M}{N},$$

а ее дисперсия

$$D(X) = n\frac{M}{N-1}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\left(1 - \frac{n}{N}\right).$$

Гипергеометрическое распределение широко используется на практике статистического приемочного контроля качества промышленной продукции, в задачах, связанных с организацией выборочных обследований, и в других областях.

Пример 4.11. В партии из 7 деталей имеется 3 стандартных. Наудачу отбирают 4 детали. Составить ряд распределения X – числа стандартных деталей среди отобранных. Найти $M(X)$ и $D(X)$.

► Число стандартных деталей среди отобранных есть случайная величина, имеющая гипергеометрическое распределение с параметрами $N=7,\ M=3,\ n=4$. Возможные значения X: $x_1=0, x_2=1, x_3=2, x_4=3$. Вероятности определяем по формуле (4.8):

$$P(X=0)=\frac{C_3^0\cdot C_4^4}{C_7^4}=\frac{1}{35},\ C_7^4=\frac{7!}{4!3!}=\frac{5\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 3}=35,$$

$$P(X=1)=\frac{C_3^1\cdot C_4^3}{C_7^4}=\frac{12}{35},\ P(X=2)=\frac{C_3^2\cdot C_4^2}{C_7^4}=\frac{18}{35},$$

$$P(X=3)=\frac{C_3^3\cdot C_4^1}{C_7^4}=\frac{4}{35}.$$

Ряд распределения СВ X имеет вид:

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

Контроль: $\frac{1}{35}+\frac{12}{35}+\frac{18}{35}+\frac{4}{35}=1$.

$$M(X)=4\cdot\frac{3}{7}=\frac{12}{7}, D(X)=4\cdot\frac{3}{7-1}\cdot\left(1-\frac{3}{7}\right)\cdot\left(1-\frac{4}{7}\right)=\frac{24}{49}. \blacktriangleleft$$

4.4.5. РАВНОМЕРНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ X **НАЗЫВАЕТСЯ РАВНОМЕРНЫМ, ЕСЛИ ОНО ЗАДАЕТСЯ РЯДОМ:**

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	$p_1=\frac{1}{n}$	$p_2=\frac{1}{n}$	…	$p_n=\frac{1}{n}$

ДЛЯ РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

$$M(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad D(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2.$$

4.4.6. НАЧАЛЬНЫЕ И ЦЕНТРАЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ

Кроме математического ожидания и дисперсии, для оценки СВ используются и другие числовые характеристики. Все эти числовые характеристики носят общее название ***моментов СВ***. Различают начальные и центральные моменты.

Начальным моментом порядка *k* СВ *X* называется математическое ожидание величин X^k:

$$\nu_k = M\left(X^k\right)=\sum_i x_i^k \cdot p_i\ .$$

Центральным моментом порядка k СВ X называется математическое ожидание величин $M\left(X-M\left(X\right)\right)^k$:

$$\mu_k = M\left(X-M\left(X\right)\right)^k = \sum_i \left(x_i - M\left(X\right)\right)^k \cdot p_i .$$

Начальный момент первого порядка $\nu_1 = M\left(X\right)$ представляет математическое ожидание самой СВ X.

Центральный момент первого порядка равен нулю:

$$\mu_1 = M\left(X-M\left(X\right)\right) = 0 .$$

Центральный момент второго порядка представляет собой дисперсию СВ X:

$$\mu_2 = M\left(X-M\left(X\right)\right)^2 = D\left(X\right).$$

Для дискретных СВ начальный и центральные моменты вычисляются соответственно по формулам:

$$\nu_k = \sum_{k=1}^{n} x_i^k p_i , \qquad \mu_k = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - M\left(X\right)\right)^k p_i .$$

54,51	58,55	62,59	66,63	70,67	74,71	78,75	82,79	86,83
52,53	56,57	60,61	64,65	68,69	72,73	76,77	80,81	84,85

90,87
88,89

$$\mu_k = M\left(X - M\left(X\right)\right)^k = \sum_i \left(x_i - M\left(X\right)\right)^k \cdot p_i .$$

Начальный момент первого порядка $\nu_1 = M\left(X\right)$ представляет математическое ожидание самой СВ *X*.

Центральный момент первого порядка равен нулю:

$$\mu_1 = M\left(X - M\left(X\right)\right) = 0 .$$

Центральный момент второго порядка представляет собой дисперсию СВ *X*:

$$\mu_2 = M\left(X - M\left(X\right)\right)^2 = D\left(X\right).$$

Для дискретных СВ начальный и центральные моменты вычисляются соответственно по формулам:

$$\nu_k = \sum_{k=1}^{n} x_i^k p_i , \qquad \mu_k = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - M\left(X\right)\right)^k p_i .$$

ГЛАВА V

НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

5.1. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Случайная величина X называется ***непрерывной***, если ее функция распределения непрерывна в любой точке и дифференцируема всюду, кроме, быть может, отдельных точек.

Непрерывная СВ X задается либо функцией распределения $F(x)$, либо плотностью вероятности $f(x)$.

Функция распределения $F(x) = P(X < x)$ существует как для дискретных, так и для непрерывных СВ.

Плотностью распределения (***плотностью вероятностей***) непрерывной СВ X называют производную от функции распределения:

$$\boxed{f(x) = F'(x)}. \qquad (5.1)$$

В свою очередь, функция распределения $F(x)$ выражается через плотность распределения формулой

$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx}. \qquad (5.2)$$

Плотность вероятности $f(x)$ иногда называют ***дифференциальной функцией***, а функцию распределения $F(x)$ – ***интегральной функцией*** распределения вероятности. График плотности вероятности $f(x)$ называют кривой распределения (рис. 17).

Плотность распределения обладает следующими свойствами:

1) $f(x) \geq 0$; 2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

В частности, если все возможные значения СВ X принадлежат интервалу (a, b), то

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = 1.$$

Вероятность попадания СВ X в промежуток от α до β определяется по формуле

$$\boxed{P(\alpha < X < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx}, \qquad (5.3)$$

или

$$\boxed{P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)}. \qquad (5.4)$$

Вероятность того, что непрерывная СВ примет одно определенное значение, например, x_1, равна нулю

$$P(X = x_1) = 0\,.$$

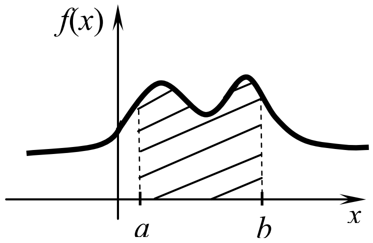


Рис. 16

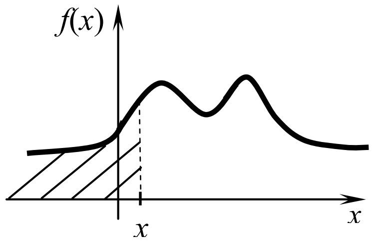


Рис. 17

Геометрический смысл $F(x)$: функция $F(x)$ равна площади фигуры, ограниченной сверху кривой распределения $f(x)$ и лежащей левее точки x (рис. 17).

Пример 5.1. Плотность распределения НСВ X в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ равна $f(x) = C \cdot \sin x$, вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти: **а)** постоянный параметр C; **б)** вероятность попадания СВ X в интервал $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$.

► **а)** Используя свойство 2) плотности распределения, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} C \cdot \sin x\,dx = C\int_{0}^{\pi/2} \sin x\,dx = C(-\cos x)\Big|_{0}^{\pi/2} =$$

$$= C\left(-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0\right) = C = 1.$$

б) Вероятность попадания СВ X найдем по формуле (5.3):

$$P\left(0 < X < \frac{\pi}{3}\right) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_0^{\pi/3} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\pi/3} =$$

$$= -\cos\frac{\pi}{3} + \cos 0 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}. \qquad \blacktriangleleft$$

5.2. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Для непрерывной СВ, имеющей плотность вероятности $f(x)$, математическое ожидание определяется по формуле

$$\boxed{M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\,dx}. \tag{5.5}$$

В частности, если все возможные значения x принадлежат интервалу (a, b), то

$$M(X) = \int_a^b x\, f(x)\,dx. \tag{5.6}$$

Все свойства математического ожидания, указанные выше для дискретных СВ, сохраняются и для непрерывных величин.

Если $Y = \varphi(x)$ – функция случайного аргумента x, возможные значения которого принадлежат всей оси Ox, то

$$M[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx . \tag{5.7}$$

В частности, если все возможные значения X принадлежат (a, b), то

$$M[\varphi(x)] = \int_{a}^{b} \varphi(x) f(x) dx . \tag{5.8}$$

Если кривая распределения симметрична относительно прямой $x = C$, то $M(X) = \text{C}$.

Дисперсия непрерывной СВ X, возможные значения которой принадлежат всей оси Ox, определяется равенством

$$\boxed{D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - M(X)\right)^2 f(x) dx}, \tag{5.9}$$

или

$$\boxed{D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - [M(X)]^2}. \tag{5.10}$$

В частности, если все возможные значения X принадлежат интервалу (a, b), то

$$D(X)=\int_a^b (x-M(X))^2 f(x)\,dx,$$

или

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)\,dx-[M(X)]^2.$$

Все свойства дисперсии, указанные выше для дискретных СВ (см. п.4.3), сохраняются и для непрерывных величин.

Средним квадратическим отклонением непрерывной СВ X называется величина

$$\sigma(X)=\sigma_x=\sqrt{D(X)}=\sqrt{D_x}.$$

Если $Y=\varphi(x)$ – функция случайного аргумента x, причем все возможные значения x принадлежат всей оси Ox, то

$$D(\varphi(x))=\int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x)-M(\varphi(x)))^2 f(x)\,dx.$$

Пример 5.2. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение СВ X заданной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{x}{4}, & 0<x\le 4;\\ 1, & x>4.\end{cases}$$

► Найдем плотность распределения СВ X по формуле (5.1):

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{1}{4}, & 0<x\le 4;\\ 0, & x>4.\end{cases}$$

Вычислим математическое ожидание по формуле (5.6):

$$M(X)=\int_0^4 x\,f(x)\,dx=\int_0^4 \frac{1}{4}x\,dx=\frac{1}{4}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^4=2,$$

дисперсию

$$D(X)=\int_0^4 x^2 f(x)\,dx-M^2(X)=\int_0^4 \frac{x^2}{4}dx-2^2=\frac{x^3}{12}\Bigg|_0^4=\frac{16}{3}-4=\frac{4}{3}$$

и среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$ ◄

Пример 5.3. Непрерывная СВ X имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x)=\begin{cases}3/x^4, & x\ge 1;\\ 0, & x<1.\end{cases}$$

Найти функцию распределения вероятностей $F(x)$. Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

► Используем формулу (5.2). При $x \in (-\infty; 1)$ имеем

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dt = 0 .$$

При $x \in [1, +\infty)$ промежуток интегрирования разбивается на два. Тогда

$$F(x) = \int_{-\infty}^{1} 0 \cdot dt + \int_{1}^{x} \frac{3}{t^4} dt = 3\int_{1}^{x} t^{-4}\, dt = -\frac{1}{t^3}\bigg|_{1}^{x} = -\frac{1}{x^3} + 1 .$$

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1; \\ 1 - \dfrac{1}{x^3}, & x \geq 1. \end{cases}$$

Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ представлены соответственно на рис. 18 и рис. 19:

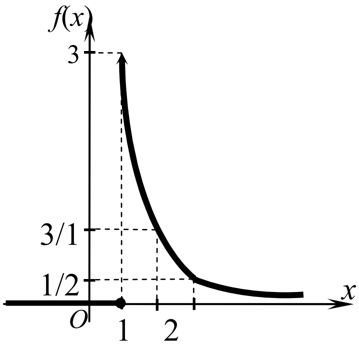


Рис. 18

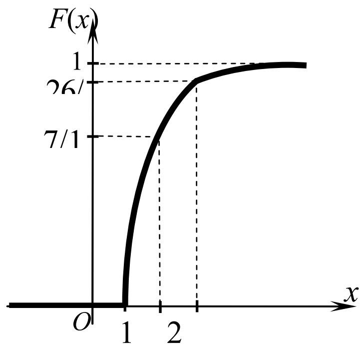


Рис. 19

◄

Пример 5.4. Непрерывная СВ X распределена с плотностью

$f(x)=\dfrac{\cos x}{2}$, при $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$. Вне этого отрезка $f(x)=0$.

Найти математическое ожидание, дисперсию СВ $Y=2-3\sin X$.

► По формуле (5.8) находим

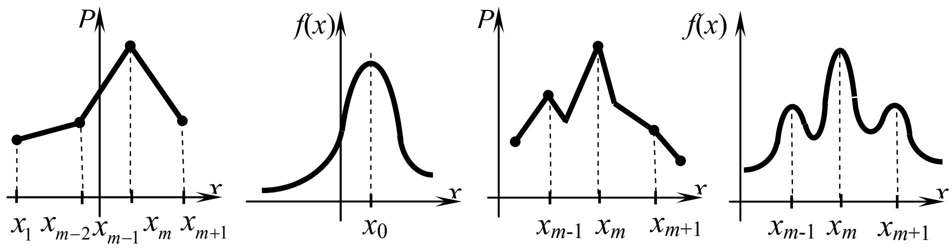
$$M(Y)=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(2-3\sin x)\frac{\cos x}{2}dx=\left|d(2-3\sin x)=-3\cos x\,dx\right|=$$

$$=-\frac{1}{6}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(2-3\sin x)d(2-3\sin x)=-\frac{1}{6}\frac{(2-3\sin x)^2}{2}\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=2\,;$$

$$D(Y)=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(2-3\sin x)^2\frac{\cos x}{2}dx-2^2=3\,.$$ ◄

Модой непрерывной **СВ X НАЗЫВАЕТСЯ ТОЧКА ЛОКАЛЬНОГО МАКСИМУМА ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ.**

Распределение, имеющее одну моду (как на рис. 20 а, б), называют ***унимодальным***. Если же плотность или кривая, ограничивающая сверху многоугольник распределения, имеет несколько локальных максимумов, то распределение называется



а б в г

полимодальным (рис. 20 в, г).

Рис. 20

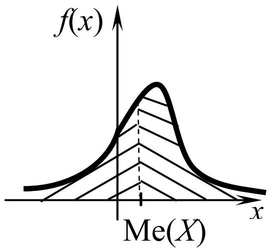


Рис. 21

Медианой непрерывной СВ X называется число $\mathrm{Me}(X)$, удовлетворяющее условию

$$P\{X \le \mathrm{Me}(X)\} = P\{X \ge \mathrm{Me}(X)\} = \frac{1}{2}.$$

Геометрически вертикальная прямая $x = \mathrm{Me}(X)$ делит площадь фигуры под кривой распределения на две равные части (рис. 21).

5.3. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Таблица 3

Название закона распределения	Плотность распределения $f(x)$	Функция распределения $F(x)$	Числовые характеристики
Равномерный $X \in R[a,b]$	$f(x)= \\ =\begin{cases} \frac{1}{b-a}, x \in [a,b] \\ 0, \quad x \notin [a,b] \end{cases}$	$F(x)= \\ =\begin{cases} 0 \quad \text{при } x \le a \\ \frac{x-a}{b-a}, \ a < x \le b \\ 1, \quad x > b \end{cases}$	$M(X)=\frac{a+b}{2}$, $D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$
Показательный (экспоненциальный)	$f(x)= \\ =\begin{cases} 0, \quad x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, \ x \ge 0 \end{cases}$	$F(x)= \\ =\begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x \le 0 \\ 1-e^{-\lambda x}, \quad x>0 \end{cases}$	$M(X)=\frac{1}{\lambda}$, $D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$
Нормальный (гуассовский) $X \in N(m,\sigma)$	$f(x)= \\ =\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	$F(x)= \\ =\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dt = \\ =\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$	$M(X)=m$ $D(X)=\sigma^2$

5.3.1. РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Непрерывная СВ X имеет ***равномерный закон распределения*** на отрезке $[a, b]$, если ее плотность вероятности $f(x)$ постоянна на этом отрезке и равна нулю вне его, то есть

$$\boxed{f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & \text{если } x\in[a,b];\\ 0, & \text{если } x\notin[a,b]\end{cases}}. \qquad (5.10)$$

Равномерное распределение СВ X на промежутке $[a,b]$ обозначается: $X\in R[a,b]$.

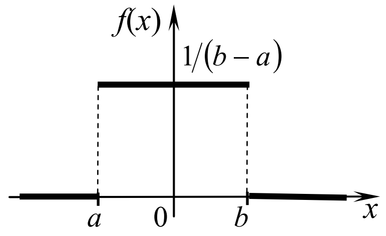
Найдем функцию $F(x)$ по формуле (5.2):

$$F(x)=\begin{cases}\int\limits_{-\infty}^{x}f(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{x}0\,dx=0, \text{если } x\le a;\\ \int\limits_{-\infty}^{x}f(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{a}0\,dx+\int\limits_{a}^{x}\dfrac{1}{b-a}\,dx=\dfrac{x-a}{b-a}, \text{если } a<x\le b;\\ \int\limits_{-\infty}^{x}f(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{a}0\,dx+\int\limits_{a}^{b}\dfrac{1}{b-a}\,dx+\int\limits_{b}^{x}0\,dx=1, \text{если } x>b.\end{cases}$$

Функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le a;\\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при } a<x\le b;\\ 1 & \text{при } x>b.\end{cases} \qquad (5.11)$$

Графики плотности вероятности $f(x)$ и функции распределения $F(x)$ приведены на рис. 22 (а, б).



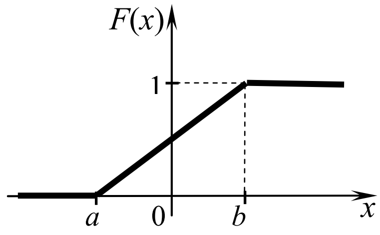


Рис. 22

Далее найдем математическое ожидание и дисперсию СВ X:

$$M(X)=\int_a^b x\,f(x)dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx=\frac{a+b}{2},$$

$$D(X)=\int_a^b x^2\,f(x)dx-(M(X))^2=\int_a^b x^2\cdot\frac{1}{b-a}dx-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Вычислим вероятность попадания равномерно распределенной СВ X в промежуток $[\alpha,\beta]$, лежащий внутри $[a, b]$

$$P\{\alpha<X<\beta\}=\frac{1}{b-a}\int_\alpha^\beta dx=\frac{\beta-\alpha}{b-a}=\frac{\text{длина}[\alpha,\beta]}{\text{длина}[a,b]}.$$

Этот результат совпадает с геометрическим определением вероятности того, что в результате случайного бросания точки на отрезок $[a, b]$ она попадает в отрезок $[\alpha,\beta]$ ($[\alpha,\beta] < [a, b]$).

Равномерное распределение реализуется в экспериментах, в которых наудачу ставится точка на отрезке $[a, b]$ (X – координата поставленной точки), а также в экспериментах по измерению тех или иных физических величин с округлением (X – ошибка округления).

Таким образом, для равномерного распределения имеем:

$$\boxed{M(X)=\frac{a+b}{2},\ D(X)=\frac{(b-a)^2}{12},\ \sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}}. \qquad (5.12)$$

Пример 5.5. На перекрестке стоит автоматический светофор, в котором 60 секунд горит зеленый свет, 30 секунд красный свет и 10 секунд желтый свет. Некто подъезжает к перекрестку на машине в случайный момент времени. Найти вероятность того, что он проедет перекресток, не останавливаясь.

► Пусть СВ X – момент проезда автомашин через перекресток. По условию, СВ X распределена равномерно в интервале, равном периоду смены цветов в светофоре: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=1\frac{2}{3}$ мин. Для того чтобы машина проехала через перекресток не останавливаясь, нужно, чтобы момент проезда через перекресток пришелся на интервал (0, 1). Таким образом, с вероятностью, равной

$$P(0<X<1)=1:1\frac{2}{3}=0{,}6,$$

машина проедет через перекресток без остановки.

◄

5.3.2. ПОКАЗАТЕЛЬНОЕ (ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ) РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Показательным (***экспоненциальным***) с параметром $\lambda>0$, называют распределение СВ X, если плотность ее распределения задается формулой

$$\boxed{f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x\ge 0\end{cases}}. \qquad (5.13)$$

Найдем функцию распределения $F(x)$ показательного распределения.

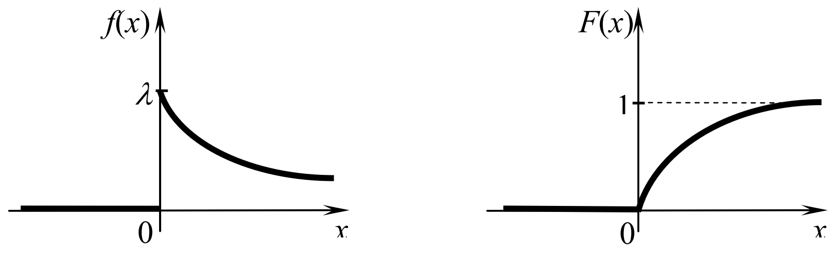
$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dt+\int\limits_{0}^{x}\lambda\cdot e^{-\lambda t}\,dt=1-e^{-\lambda x}.$$

Итак, функция распределения имеет вид

$$\boxed{F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \int\limits_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt = 1-e^{-\lambda x} & \text{при } x>0\end{cases}}. \qquad (5.14)$$

Показательное распределение часто встречается в теории массового обслуживания (например, X – время ожидания при техническом обслуживании или X – длительность телефонных разговоров, ежедневно регистрируемых на телефонной станции) и в теории надежности (например, X – срок службы радиоэлектронной аппаратуры).

Графики плотности $f(x)$ и функции распределения $F(x)$ приведены на рис. 23 (а, б):



а)

б)

Задача. Найти числовые характеристики показательного распределения с параметром λ.

► Вычислим математическое ожидание и дисперсию функции (5.13) по формулам (5.5) и (5.10), применив формулу интегрирования по частям:

$$M(X)=\lambda\int\limits_0^{\infty} xe^{-\lambda x}\,dx = \left|\begin{matrix} u=x,\ du=dx \\ dv=e^{-\lambda x}\,dx,\ v=-\dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\end{matrix}\right| =$$

$$= \lambda \left(-\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x} \Bigg|_0^{\infty} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \, dx \right) = \frac{1}{\lambda},$$

$$D(X) = \lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} \, dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Вероятность попадания в интервал (a, b) вычисляется по формуле (5.3). Получаем

$$\boxed{P(a < x < b) = \lambda \int_a^b e^{-\lambda x} \, dx = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}}. \qquad (5.15)$$

Таким образом, имеем

$$\boxed{M(X) = \frac{1}{\lambda}, D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}}. \qquad (5.16)$$ ◄

Пример 5.6. Написать функцию распределения $F(x)$ и плотность вероятности $f(x)$ НСВ *X*, распределенной по показательному закону с параметром $\lambda = 5$. Найти числовые характеристики НСВ *X*.

► Подставив в формулы (5.13)–(5.16) $\lambda = 5$, получим:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } \ x < 0; \\ 5e^{-5x} & \text{при } \ x \geq 0; \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } \ x \leq 0; \\ 1 - e^{-5x} & \text{при } \ x > 0; \end{cases}$$

$$M(X) = \sigma(X) = \frac{1}{5}, D(X) = \frac{1}{25}.$$ ◄

Пример 5.7. Непрерывная случайная величина *X* распределена по показательному закону $f(x) = 4e^{-4x}$ при $x \geq 0$; $f(x) = 0$ при $x < 0$. Найти математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение и дисперсию *X*.

► По условию $\lambda = 4$, следовательно,

$$M(X)=\sigma(X)=\frac{1}{4}=0,25,\ D(X)=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{4^2}\approx 0,063\,.$$

◄

5.3.3. ЗАКОН НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Нормальным (законом Гаусса) называют распределение вероятности непрерывной СВ X, если ее плотность распределения имеет вид

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}\ \text{при всех}\ x\in(-\infty,\infty)} \qquad (5.17)$$

с параметрами $m\left(m\in(-\infty,\infty)\right)$ и $\sigma(\sigma>0)$.

Замечание. Известно, что

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/2}\,dt=\sqrt{2\pi}} \qquad (5.18)$$

(интеграл Эйлера–Пуассона). Функция $f(x)$, задаваемая равенством (5.17), действительно является плотностью распределения, поскольку при всех m и $\sigma>0$ выполнено условие

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/2}\,dt=1\,.$$

Кривую нормального закона распределения (см. рис. 24) называют ***нормальной*** или ***гауссовой кривой***. Нормальное (или гауссовское) распределение с параметрами m и σ обозначается: $X\in N(m,\sigma)$.

Нормальный закон распределения наиболее часто встречается на практике. Ему подчиняются, например, ошибки инструментальных измерений, величина отклонения снаряда от цели, фактические параметры деталей при массовом производстве; приближенно по нормальному закону распределен рост человека, случайно выбранного из большой группы.

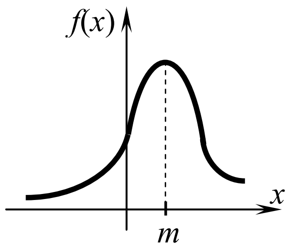


Рис. 24

Теорема 5.1. **Математическое ожидание СВ *X*, распределенной по нормальному закону, равно параметру *m* этого закона, то есть**

$$\boxed{M(X)=m}, \tag{5.19}$$

а ее дисперсия – параметру σ^2, то есть

$$\boxed{D(X)=\sigma^2}. \tag{5.20}$$

Доказательство. Вычислим математическое ожидание:

$$M(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-(x-m)^2/2\sigma^2}\,dx=\begin{vmatrix}(x-m)/\sigma=t\\ x=m+\sigma t\\ dx=\sigma\,dt\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{m}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} te^{-t^2/2}\,dt\,.$$

Поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty} te^{-t^2/2}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,d\left(t^2/2\right)=0\,,$$

то с учетом формулы (5.18) находим

$$M(X)=m\,.$$

Вычислим дисперсию:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2 f(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2\,e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}\,dx=$$

$$\begin{vmatrix}x=m+\sigma t\\ dx=\sigma\,dt\end{vmatrix}=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t\cdot te^{-t^2/2}\,dt\,.$$

Интегрируя последний интеграл по частям: $\left| \begin{array}{l} u = t, du = dt \\ dv = te^{-t^2/2}\, dt \\ v = -e^{-t^2/2} \end{array} \right|$

и используя формулу (5.18), получаем

$$D(X) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\, dt = \sigma^2 .$$

Замечание. Из симметричности графика плотности нормального распределения относительно прямой $x = m$ вытекает, что мода $\mathrm{Mo} = \mathrm{Me} = m$.

Определим функцию распределения СВ *X*, распределенной по нормальному закону. Имеем

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-(t-m)^2/2\sigma^2}\, dt = \left| \begin{array}{l} \dfrac{t-m}{\sigma} = z \\ t = m + \sigma z, dt = \sigma\, dz \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-z^2/2}\, dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-z^2/2}\, dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-z^2/2}\, dz .$$

Отсюда с учетом формулы (5.18) находим

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{2} + \varPhi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)},$$

где $\varPhi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2/2}\, dt$ – функция Лапласа.

Геометрически функция распределения представляет собой площадь под нормальной кривой на интервале $(-\infty, x)$ (рис. 25). Она состоит из двух частей: первой – на интервале $(-\infty, m)$, равной $\dfrac{1}{2}$, и

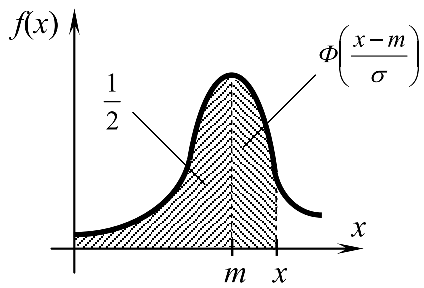


Рис. 25

второй – на интервале (m, x), равной $\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$.

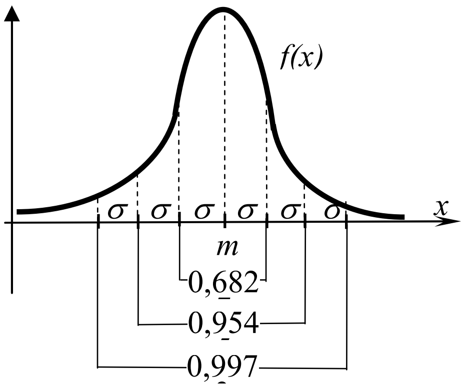
Перечислим свойства СВ $X \in N(m,\sigma)$:

1. Вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α,β),

$$\boxed{P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right)}. \qquad (5.21)$$

2. Вероятность того, что абсолютная величина отклонения меньше положительного числа δ,

$$\boxed{P(|X - m| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)}. \qquad (5.22)$$



3.*" Правило трех сигм "*

Если СВ *X* распределена по нормальному закону, то

$$P\{|X - m| < 3\sigma\} = 2\Phi(3) = 0{,}9973$$

.

Это равенство означает, что практически все (в 99,73 % испытаний) значения нормальной СВ *X* заключены в интервале $(m - 3\sigma, m + 3\sigma)$ (рис. 26).

Рис. 26

Пример 5.8. Завод изготавливает шарики для подшипников, номинальный размер которых равен 10 (мм), а фактический диаметр случаен и распределен по нормальному закону, $M(X) = 10\,(\text{мм})$ и $\sigma(X) = 0{,}4\,(\text{мм})$. При контроле бракуются все шарики, не проходящие через круглое отверстие с диаметром $d_1 = 10{,}7\,(\text{мм})$ и все, проходящие через круглое отверстие с диаметром $d_2 = 9{,}3(\text{мм})$. Найти процент шариков, которые будут браковаться.

► Вероятность того, что шарик будет забракован равна

$$P\{|X-m| > 0{,}7\} = 1 - P\{|X-m| < 0{,}7\}.$$

По формуле (5.22) находим

$$P\{|X-m| < 0{,}7\} = 2\varPhi\left(\frac{0{,}7}{0{,}4}\right) \approx 2\cdot 0{,}4599 = 0{,}9198\ ,$$

$$P\{|X-m| > 0{,}7\} = 0{,}0802.$$

Таким образом, будет браковаться около 8,02 % шариков. ◄

Пример 5.9. СВ X распределена нормально, математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 50 и 10. Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения будет меньше 3.

► Воспользуемся формулой (5.22). По условию m = 50, σ = 10, δ = 3. Следовательно,

$$P\left(|X-50| < 3\right) = 2\varPhi\left(\frac{3}{10}\right) = 2\varPhi(0{,}3).$$

По таблице приложения 2 находим $\varPhi$(0, 3) = 0,1179. Искомая вероятность равна

$$P(|X-50| < 3) = 2\cdot 0{,}1179 = 0{,}2358.$$ ◄

Пример 5.10. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических (одного знака) погрешностей. Случайные погрешности взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением σ=20 г. Найти вероятность того, что взвешивание будет производиться с погрешностью, не превосходящей по абсолютной величине 10 г. Что дает применение правила "3σ" для данного случая?

► Пусть СВ X – погрешность взвешивания. По условию $M(X)$=0, σ= 20 г. Вероятность события, заключающегося в том, что погрешность взвешивания по абсолютной величине не превосходит 10, вычисляется по формуле (5.21):

$$P\{|X|<10\}=P\{-10<X<10\}=\Phi\left(\frac{10\text{-}0}{20}\right)-\Phi\left(\frac{-10\text{-}0}{20}\right)=2\Phi(0,5)\approx 0,383$$

.

Далее, согласно правилу "трех сигм" в 99,7% случаев погрешность взвешивания не будет превосходить $3\sigma = 3\cdot 20 = 60$ г (по абсолютной величине).

◄

Пример 5.11. Случайная величина распределена нормально с параметрами m=8, σ =3. Найти вероятность того, что СВ X в результате опыта примет значение в интервале (12,5; 14).

► Воспользуемся формулой (5.21). Имеем

$$P(12,5<X<14)=\varPhi\left(\frac{14-8}{3}\right)-\varPhi\left(\frac{12,5-8}{3}\right)=\varPhi(2)-\varPhi(1,5).$$

По таблице приложения 2 находим $\varPhi(1,5)=0,4332$, $\varPhi(2)=0,4773$. Искомая вероятность равна

$$P(12,5<X<14)=0,0441.$$ ◄

Пример 5.12. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-(x-2)^2/18}.$$

Найти $D(2X+1), M(3X-2)$.

► По условию $\sigma^2 = D(X)=9$. С учетом свойств математического ожидания и дисперсии, имеем

$$D(2X+1)=4D(X)=36.$$

Так как $M(X)=2$, то $M(3X-2)=3M(X)-2=4$.

◄

Кроме рассмотренных выше характеристик используют понятия асимметрии, эксцесса, квантилей.

5.4. АСИММЕТРИЯ И ЭКСЦЕСС

Коэффициентом асимметрии («скошенности») СВ *X* называется величина

$$A = \frac{\mu^3}{\sigma_X^3} = \frac{M\left(X - M\left(X\right)\right)^3}{D\left(X\right)^{3/2}}. \qquad \textbf{(5.23)}$$

Если $A = 0$, то кривая распределения имеет симметричную форму; если $A > 0$, то справа от Mo кривая распределения является более пологой (рис. 27); если $A < 0$, то слева от Mo кривая является более пологой (рис. 28).

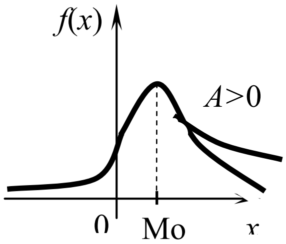


Рис. 27

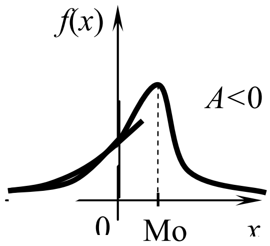


Рис. 28

***Эксцессом* СВ *X* называется величина**

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma_X^4} - 3 = \frac{M\left(X - M\left(X\right)\right)^4}{\left(D\left(X\right)\right)^2} - 3. \qquad \textbf{(5.24)}$$

ЭКСЦЕСС ЯВЛЯЕТСЯ ПОКАЗАТЕЛЕМ «КРУТОСТИ» ГРАФИКА ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО СРАВНЕНИЮ С НОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ. ЭКСЦЕСС НОРМАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ РАВЕН НУЛЮ. ЕСЛИ $E > 0 \left(E < 0\right)$, ТО КРИВАЯ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЯВЛЯЕТСЯ БОЛЕЕ ОСТРОВЕРШИННОЙ (ПЛОСКОВЕРШИННОЙ) ПО СРАВНЕНИЮ С НОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ (РИС. 29).

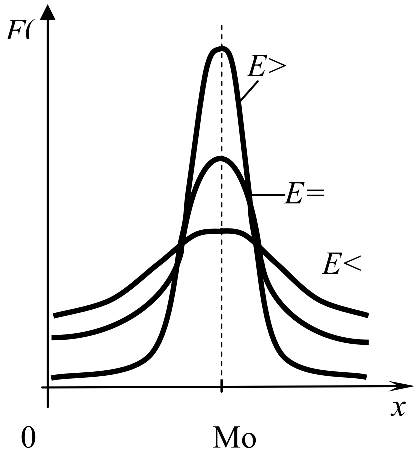


Рис. 29

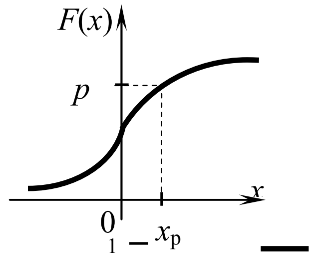


Рис. 30

5.5. КВАНТИЛИ

Квантилью СВ X порядка p или p-квантилью называется число x_p, являющееся решением уравнения

$$F\left(x_p\right) = p\,, \tag{5.25}$$

где p – некоторое число, $0 < p < 1$ (рис. 30).

Квантиль $x_{1/2}$ порядка 0,5 (50%-ная квантиль) ***называется медианой распределения*** $Me(X)$.

Для определения квантилей имеются специальные таблицы.

Пример 5.13. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X задана на отрезке $[1;2]$ равенством $f(x) = x - 0,5$; вне этого отрезка $f(x) = 0$. Найти моду, медиану, квантиль порядка 0,7.

► Функция $f(x) = x - 0,5$ не имеет точек максимума в промежутке $x \in [1;2]$, значит, СВ X не имеет моды. Чтобы найти медиану и квантиль, сначала найдем функцию распределения по формуле (5.2):

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{1}^{x} (x - 0,5)\,dx = \frac{x^2}{2} - 0,5x, \quad x \in [1;2].$$

Тогда согласно (5.25) при $p = \frac{1}{2}$ уравнение для определения медианы примет вид: $\frac{x^2}{2} - 0,5x = 0,5$; откуда $x = 1,62$, т.е. медиана $Me\,X = 1,62$.

Уравнение (5.25) для определения квантиля порядка 0,7 имеет вид: $\frac{x^2}{2} - 0,5x = 0,7$; откуда $x = 1,8$ и квантиль $x_p = 1,8$.

◄

ГЛАВА VI

ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ. ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Предельные теоремы и закон больших чисел и центральная предельная теорема – основные результаты в теории вероятностей, которые принадлежат русским ученым П.Л. Чебышеву, А.М. Колмогорову, А.М. Ляпунову, А.Я. Хингину, А.А. Маркову.

Физический смысл закона больших чисел состоит в следующем: при очень большом числе случайных явлений средний их результат практически перестает быть случайным и может быть предсказан с большой степенью определенности.

В узком смысле слова под «законом больших чисел» в теории вероятностей понимается совокупность теорем, в которых устанавливается связь между средним арифметическим достаточно большого числа случайных величин и средним арифметическим их математических ожиданий.

В самом общем виде закон больших чисел сформулировал П.Л.Чебышев.

НЕРАВЕНСТВО И ТЕОРЕМА ЧЕБЫШЕВА

Лемма Чебышева (Маркова). Если случайная величина X принимает только неотрицательные значения и имеет математическое ожидание $M\left(X\right)$, то для любого $a \geq 0$ имеет место неравенство

$$\boxed{P(X \ge a) \le \frac{M(X)}{a}}.$$

(6.1)

Неравенство Чебышева. Если СВ X имеет математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$, то для любого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$P\{|x - M(X)| < \varepsilon\} \ge 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2} . \qquad (6.2)$$

Неравенство Чебышева может быть записано в другой форме

$$P\{|x - M(X)| \ge \varepsilon\} \le \frac{D(X)}{\varepsilon^2} .$$

(6.3)

Одним из основных следствий неравенств Чебышева является «правило трех сигм».

Возьмем в неравенстве (6.3) $\varepsilon = 3\sigma$, где $\sigma = \sqrt{D}$. Тогда вероятность

$$P\{|x - M(X)| \ge 3\sigma\} \le \frac{\sigma^2}{9\sigma^2} = \frac{1}{9} .$$

Следствие 1. «Правило трех сигм».

Вероятность отклонения случайной величины X от математического ожидания

$$P\{|x - M(X)| < 3\sigma\} \le \frac{8}{9} .$$

Для конкретных законов распределения эта вероятность гораздо меньше (см., напр., нормальное распределение (п. 5.3.3)).

Следствие 2. Для случайной величины $X = m$, имеющей биномиальный закон распределения с математическим ожиданием $M\left(X\right) = np$ и дисперсией $D\left(X\right) = npq$:

$$P\left\{\left|m - np\right| \le \varepsilon\right\} \ge 1 - \frac{npq}{\varepsilon^2}.$$

(6.4)

Следствие 3. Для относительной частоты m/n появления события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых оно может произойти с одной и той же вероятностью p и имеющей дисперсию $D\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{pq}{n}$:

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right\} > 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

(6.5)

Теорема Чебышева (закон больших чисел).

Пусть $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ – последовательность попарно независимых случайных величин, имеющих конечные математические ожидания и дисперсии, ограниченные сверху постоянной $\tilde{N} = const$ $\left(D\left(X_i\right) \le C\right)$ $\left(i = 1, 2, ..., n\right)$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M\left(X_i\right)\right| < \varepsilon\right\} \ge 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

(6.6)

Из неравенства (6.6) следует предельное неравенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M\left(X_i\right)\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

(6.7)

Теорема показывает, что среднее арифметическое большого числа случайных величин с вероятностью, сколь угодно близкой к 1, будет мало отклоняться от среднего арифметического математических ожиданий.

Следствие 1. Если вероятность наступления события A в каждом из независимых испытаний равна p, m – число наступлений события A в серии из n независимых испытаний, то каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, имеет место предел:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Следствие 2. (Теорема Пуассона). Если в последовательности независимых испытаний вероятность появления события в k-м испытании равна p_k, то

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{k}{n} - \frac{p_1 + p_2 + ... + p_k}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

где k – число появлений события A в серии из n испытаний.

Следствие 3. (Теорема Бернулли). Если $X_1, X_2, ..., X_n$ – последовательность независимых случайных величин таких, что

$$M\left(X_1\right) = M\left(X_2\right) = ... = M\left(X_n\right) = a,$$

$$D\left(X_1\right) < C,\ D\left(X_2\right), ..., D\left(X_n\right) < C, \text{ где } \tilde{N} = const,$$

то, каково бы ни было постоянное число $\varepsilon > 0$, имеет место предел:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < \varepsilon\right) = 1 .$$

Этот частный случай закона больших чисел позволяет обосновать правило средней арифметической.

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

Если $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ – независимые и одинаково распределенные случайные величины, такие, что

$M\left(X_i\right) = a$ и $D\left(X_i\right) = \sigma^2 < \infty,\ \ i = 1, 2, \dots,$

то для любого вещественного x

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2} + \Phi\left(x\right).$$

Смысл центральной предельной теоремы заключается в том, что, если все случайные величины X_i одинаково распределены, то закон распределения их суммы неограниченно приближается к нормальному закону при $n \to \infty$.

Нормальный закон распределения широко распространен в технических системах, поскольку в большинстве случаев погрешность измерений параметров в технических системах могут быть представлены в виде сумм отдельных отклонений, вызванных различными причинами. Поэтому согласно центральной предельной теореме ошибки измерений подчиняются нормальному закону распределения.

Частным случаем центральной предельной теоремы являются рассмотренные выше локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа.

Пример 6.1. Среднее число дождливых дней в году в данной местности равно 100. Оценить вероятность того, что в следующем году в данной местности будет меньше 140 дождливых дней.

► По условию $M(X)=100$. Из неравенства (6.1) находим $P(X \le 140) \ge 1-100/140$, т.е. вероятность того, что число дождливых дней не более 140 будет $p \ge 2/7$. ◄

Пример 6.2. Устройство состоит из 400 независимо работающих элементов. Вероятность отказа любого из них за время T равна 0,01. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что модуль разности между числом отказавших элементов и средним числом отказов за время T окажется не менее 5.

► Воспользуемся неравенством (6.4). По условию: $n=400$, $p=0,01, q=0,99$, $\varepsilon=0,01$. Имеем

$$P\{|m-4| \ge 5\} < \frac{400 \cdot 0,01 \cdot 0,99}{5^2}.$$

Отсюда получаем $P\{|m-4| \ge 5\} < 0,1584$. ◄

Пример 6.3. Сколько раз нужно подбросить монету, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,975, утверждать, что частота выпадения герба попадет в интервал (0,4; 0,6)?

► По условию: $p=0,5, q=0,5, \varepsilon=0,1$. Необходимо найти n, при котором выполняется неравенство

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-0,5\right|\le 0,1\right\}\ge 0,975 .$$

Данное неравенство будет выполнено в соответствии с (6.5), если $1-\frac{0,5\cdot 0,5}{n\cdot 0,1^2}\ge 0,975$, откуда $n\ge 1000$, т.е. монету нужно подбросить не менее 1000 раз. ◄

Пример 6.4. Среднее значение длины детали 50 см, а дисперсия – 0,1. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что случайно взятая деталь окажется по длине не менее 49,5 и не более 50,5 см. Уточнить вероятность того же события, если известно, что длина случайно взятой детали имеет нормальный закон распределения.

► Пусть X – значение длины детали. По условию $D(X)=\sigma^2=0,1, M(X)=50, \varepsilon=0,5$. С помощью неравенства Чебышева (6.2) находим

$$P\{|X-50|<0,5\}\ge 1-0,1/0,5^2=0,6 ,$$

т.е. вероятность не менее 0,6. Уточним вероятность того же события, если известно, что длина случайно взятой детали имеет нормальный закон распределения по формуле (5.17):

$$P(49,5<X<50,5)=\Phi\left(\frac{50,5-50}{\sqrt{0,1}}\right)-\Phi\left(\frac{49,5-50}{\sqrt{0,1}}\right)=$$

$$=\Phi(1,58)-\Phi(-1,58)=2\Phi(1,58)=2\cdot 0,4428=0,8856 .$$

◄

ГЛАВА VII

СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Совокупность двух случайных величин (X,Y), **рассматриваемых совместно, называется системой двух случайных** *величин* **или** *двумерной случайной величиной*. **Систему двух случайных величин** (X,Y) **можно рассматривать как случайную точку** $N(x,y)$ **на плоскости** xOy **или случайный вектор** $\overrightarrow{ON}$.

Система трех случайных величин (x,y,z) **изображается случайной точкой или случайным вектором в трехмерном пространстве; система** n **случайных величин** $(x_1,x_2,...,x_n)$ **– случайной точкой или случайным вектором в пространстве** n **измерений.**

Пример 7.1. **Игральная кость бросается дважды. Пусть** X **– число выпавших очков в первый раз,** Y **– во второй. Пространство элементарных событий состоит из 36 элементов:** $\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),...,(1,6),(2,1),$ $(2,2),...,(6,1),(6,2),...,(6,6)\}$.

Дискретной называют систему случайных величин, составляющие которой дискретны. В примере 7.1 обе СВ X **и** Y **дискретны.**

Непрерывной называют ту систему, составляющие которой непрерывны.

Функцией распределения $F(x,y)$ *системы двух случайных величин* (X,Y) **называется вероятность совместного выполнения двух неравенств**

$$F(x,y)=P\{X<x,Y<y\}.$$

Событие $\{X < x, Y < y\}$ означает произведение событий $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$.

Закон распределения вероятностей дискретной двумерной СВ (X,Y) задается вероятностями p_{ij} одновременного осуществления событий $\{X = x_i\}$ и $\{Y = y_j\}$: $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, и представляется в виде таблицы:

(X,Y):

$X \backslash Y$	y_1	…	y_j	…	y_m	$\sum_{j=1}^{m}$
x_1	p_{11}	…	p_{1j}	…	p_{1m}	p_1
…	…	…	…	…	…	…
x_i	p_{i1}	…	p_{ij}	…	p_{im}	p_i
…	…	…	…	…	…	…
x_n	p_{n1}	…	p_{nj}	…	p_{nm}	p_n
$\sum_{i=1}^{n}$	p_1	…	p_j	…	p_m	**1**

Сумма всех вероятностей p_{ij}, стоящих в матрице, равна единице как сумма вероятностей полной группы несовместных событий:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1.$$

Зная матрицу распределения системы двух дискретных случайных величин (X,Y) можно найти законы распределения каждой из компонент X и Y.

Чтобы найти вероятность того, что отдельная случайная величина, входящая в систему, примет определенное значение, надо просуммировать вероятности p_{ij}, стоящие в соответствующей этому значению строке (столбце) матрицы распределения:

$$p_{x_i} = P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \, ,$$

$$p_{y_j} = P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} \, .$$

Итоговые столбец или строка таблицы распределения (X,Y) представляют соответственно распределения одномерных СВ X и Y: (x_i, p_i) и (y_j, p_j).

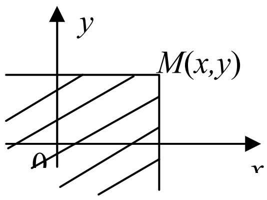


Рис. 29

Геометрически функция распределения $F(x,y)$ означает вероятность попадания случайной точки (X,Y) в бесконечный квадрант с вершиной в точке (x,y), лежащей левее и ниже точки $M(x,y)$ (рис. 29).

В случае дискретной двумерной случайной величины ее функция распределения определяется по формуле

$$F(x,y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} p_{ij} \, ,$$

где суммирование вероятностей p_{ij} распространяется на все i, для которых $x_i < x$, и все j, для которых $y_j < y$.

7.1. СВОЙСТВА ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

1. Функция распределения $F(x, y)$ ограничена, т.е.

$$0 \le F(x, y) \le 1.$$

2. Функция распределения $F(x, y)$ не убывает по каждому из аргументов, т.е.

$$\text{при } x_2 > x_1 \quad F(x_2, y) \ge F(x_1, y),$$

$$\text{при } y_2 > y_1 \quad F(x, y_2) \ge F(x, y_1).$$

3. Имеют место предельные соотношения:

$$F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0, \quad F(+\infty, +\infty) = 1.$$

где, например, $F(x, -\infty)$ означает $\lim\limits_{y \to -\infty} F(x, y)$.

4. Если один из аргументов обращается в $+\infty$, функция распределения $F(x, y)$ становится равной функции распределения случайной величины, соответствующей другому аргументу, т.е.

$$F(x; +\infty) = F_1(x) = F_X(x), \quad F(+\infty; y) = F_2(y) = F_Y(y).$$

Пример 7.2. Бросаются две игральные кости. Требуется составить закон распределения двумерной случайной величины (X, Y), где случайные величины X и Y определяются следующим образом: если сумма очков на игральных костях четная, то $X = 1$, в противном случае $X = 0$ и $Y = 1$, если произведение очков на игральных костях – четное число, в противном случае $Y = 0$. (X –

индикатор четной суммы выпавших очков, Y – индикатор четного произведения очков). Составить закон распределения для системы (X,Y). Найти закон распределения X и Y.

► Возможные значения случайных величин X и Y: $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ y_1 = 0,\ y_2 = 1$. Возможные пары значений случайных величин X и Y $\{(0, 0), (0, 1), \quad (1, 0), (1, 1)\}$.

Вычислим соответствующие вероятности:

$p_{11} = P\{X = 0,\ Y = 0\} = 0$ (сумма и произведение очков на игральных костях нечетные).

$p_{12} = P\{X = 0,\ Y = 1\} = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$ (сумма очков нечетная, а произведение четное). (Событию благоприятствуют 18 исходов: (1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3) и т.д.)

$p_{21} = P\{X = 1,\ Y = 0\} = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$ (сумма очков четная, произведение нечетное). (Событию благоприятствуют 9 исходов: (1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)).

$p_{22} = P\{X = 1,\ Y = 1\} = \dfrac{1}{4}$ (сумма и произведение очков четные). (Событию благоприятствуют 9 исходов: (2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)).

Матрица распределения системы случайных величин (X,Y) имеет вид

$x_i \backslash y_i$	0	1
0	0	1/2
1	1/4	1/4

(X,Y): see table above.

Законы распределения отдельных случайных величин X и Y получим, суммируя вероятности, стоящие в строках (столбцах) матрицы:

$$P_{x_1} = P\{X=0\} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2},\; P_{x_2} = P\{X=1\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$P_{y_1} = P\{Y=0\} = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4},\; P_{y_2} = P\{Y=1\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Законы распределения составляющих X и Y имеют вид:

X:	0	1
	1/2	1/2

и

Y:	0	1
	1/4	3/4

Контроль: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Контроль: $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$.

◄

7.2. ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Двумерная случайная величина (X, Y) называется ***непрерывной***, если её функция распределения $F(x,y)$ – непрерывная функция, дифференцируемая по каждому из аргументов, у которой существует вторая смешанная производная $F_{xy}''(x,y)$.

Плотностью вероятности **(*плотностью распределения или совместной плотностью*)** непрерывной двумерной случайной величины (X, Y) называется вторая смешанная производная функции распределения

$$\boxed{f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=F_{xy}{}''(x,y)}. \tag{7.1}$$

Плотность вероятности $f(x,y)$ обладает свойствами, аналогичными свойствам вероятности одномерной случайной величины:

1. Плотность распределения двумерной случайной величины неотрицательна, т.е.

$$f(x,y)\geq 0.$$

2. Вероятность попадания случайной точки (X, Y) в область G равна двойному интегралу от плотности $f(x,y)$ по области G, т.е.

$$\boxed{P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy}. \tag{7.2}$$

3. Функция распределения двумерной случайной величины может быть выражена через её плотность распределения $f(x,y)$ по формуле

$$\boxed{F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy}. \tag{7.3}$$

4. Двойной несобственный интеграл в бесконечных пределах от плотности вероятности двумерной случайной величины равен единице, т.е.

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy=1}. \tag{7.4}$$

В частности, если все возможные значения (X, Y) принадлежат конечной области D, то

$$\boxed{\iint\limits_D f\left(x,y\right)dx\,dy=1} \tag{7.5}$$

5. Плотности распределения одномерных составляющих X и Y могут быть найдены по формулам:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy = f_1(x) = f_X(x)\ ,\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx = f_2(y) = f_Y(y). \quad (7.6)$$

Пример 7.3. Задана функция совместного распределения системы случайных величин: $F(x, y) = \left(1 - e^{-4x}\right) \cdot \left(1 - e^{-2y}\right)$ при $x \geq 0, y \geq 0,\quad F(x, y) = 0$ в остальных случаях. Найти плотность совместного распределения системы.

► Используем формулу (7.1). Найдем частные производные: $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 4e^{-4x}\left(1 - e^{-2y}\right),\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 8e^{-4x}e^{-2y}$. Итак, искомая плотность распределения имеет вид $f(x, y) = 8e^{-4x}e^{-2y}$ при $x \geq 0, y \geq 0;$ $f(x, y) = 0$ в остальных случаях.

◄

7.3. ЗАВИСИМЫЕ И НЕЗАВИСИМЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ.

УСЛОВНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Случайные величины называются ***независимыми***, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какое значение приняла другая. В противном случае случайные величины называются зависимыми.

Случайные величины X и Y называются независимыми, если независимыми являются события $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$.

Теорема 7.1. Для того, чтобы случайные величины X и Y были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы функция распределения системы (*X*, *Y*) была равна произведению функций распределения составляющих:

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y).$$

Следствие 1. Для того, чтобы непрерывные случайные величины X и Y были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы плотность совместного распределения системы (*X*, *Y*) была равна произведению плотностей распределения составляющих:

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

Следствие 2. Для того, чтобы дискретные случайные величины X и Y были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$P\{X = x_i; Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\} \qquad (7.7)$$

для любых $i = 1, 2, ..., n,\ j = 1, 2, ..., m$. Или, то же самое:

$$P_{ij} = P_{x_i} \cdot P_{y_j}, \quad \text{где } P_{x_i} = P\{X = x_i\},\ P_{y_j} = P\{Y = y_j\}.$$

Если случайные величины, образующие систему, зависимы, то вводится понятие условных законов распределения случайных величин.

Условным законом распределения одной из случайных величин (*X*, *Y*), входящих в систему, называется ее закон распределения, вычисленный при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение (или попала в какой-то интервал).

Пусть (*X*, *Y*) система двух дискретных случайных величин и $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}.$ ***Условным законом распределения*** СВ *Y* при условии $X = x_i$ называется совокупность вероятностей, определяемых равенством

$$P\{Y=y_j / X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}, \quad i=1,2,\ldots,n; \; j=1,2,\ldots,m$$

или $\quad P(y_j / x_i)=P_{ij} / P_{x_i}$.

Аналогично определяется условный закон распределения дискретной СВ *X* при условии $Y=y_j$.

$$P\{X=x_i / Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}, \; i=1,2,\ldots,n; \; j=1,2,\ldots,m.$$

Для контроля вычислений целесообразно убедиться, что сумма вероятностей условного распределения равна единице.

Пусть (*X*, *Y*) – непрерывная двумерная случайная величина с плотностью $f(x, y); f_1(x)$ и $f_2(y)$ – плотности распределения соответственно случайной величины *X* и случайной величины *Y*.

Условная плотность непрерывной СВ *Y* при условии *X* = *x* определяется равенством

$$f(y / x)=\frac{f(x, y)}{f_1(x)}, \quad \text{где } f_1(x) \neq 0.$$

Аналогично,

$$f(x / y)=\frac{f(x, y)}{f_2(y)}, \quad \text{где } f_2(y) \neq 0.$$

Имеет место равенство

$$f(x, y)=f_1(x) \cdot f(y / x)=f_2(y) \cdot f(x / y).$$

7.4. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ И ДИСПЕРСИЯ

Математическим ожиданием двумерной СВ (X, Y) называется совокупность двух математических ожиданий $M(X)$ и $M(Y)$, определяемых равенствами:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i \cdot p_{ij} \ ,$$

$$M(Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} y_j \cdot p_{ij} \ ,$$

если X и Y – дискретные СВ;

$$\boxed{M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_1(x) dx \ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x, y) dx\, dy}, \qquad (7.8)$$

$$\boxed{M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_2\left(y\right) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y\, f(x, y) dx\, dy}, \quad (7.9)$$

если X и Y – непрерывные СВ.

Дисперсией системы СВ (X, Y) называется совокупность дисперсий:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i - m_x)^2\, p_{ij},$$

$$D(Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (y_j - m_y)^2\, p_{ij} \ ,$$

если (X, Y) – система дискретных случайных величин $(m_x = M(X)$, $m_y = M(Y))$;

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x, y) dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x, y) dxdy - {m_x}^2$$

и

$$D(Y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(y-m_y)^2 f(x,y)dxdy=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}y^2 f(x,y)dxdy-m_y{}^2$$

,

если (X, Y) – система непрерывных случайных величин, $f(x,y)$ – плотность распределения СВ (X, Y).

Пусть (X, Y) – система дискретных случайных величин. ***Условное математическое ожидание*** дискретной СВ Y при условии $X=x_i$ определяется равенством:

$$M(Y/X=x_i)=M(Y/x_i)=\sum_{j=1}^{m}y_j\cdot p(y_j/x_i),$$

где $p(y_j/x_i)=p\{Y=y_j/X=x_i\}$.

Аналогично

$$M(X/Y=y_j)=M(X/y_j)=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot p(x_i/y_j).$$

Пусть (X, Y) – система непрерывных случайных величин. ***Условное математическое ожидание*** СВ Y при условии $X=x$ определяется по формуле

$$M(Y/x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}y\cdot f(y/x)dy.$$

Аналогично

$$M(X/y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x/y)dx.$$

Пример 7.4. Двумерная случайная величина (X, Y) задана плотностью распределения $f(x,y)$.

$$f(x,y)=\begin{cases} A\,x\,y & \text{в области } D=\{x\ge 0,\, y\ge 0,\, x+y\le 1\}, \\ 0 & \text{вне области } D, \end{cases}$$

$$G=\{\,0\le x\le 0{,}5,\ \ 0\le y\le 0{,}5\}.$$

Найти: а) коэффициент *A*; б) одномерные плотности распределения $f_1(x)$, $f_2(y)$; в) функцию распределения $F(x,y)$; г) математические ожидания $M(X)$, $M(Y)$; д) вероятность того, что (*X*, *Y*) примет значение из области *G*.

► а) Коэффициент *A* согласно формуле (7.5) находим из уравнения $A\iint\limits_D x\,y\,dx\,dy=1$. Области *D* и *G* изображены на рис. 29.

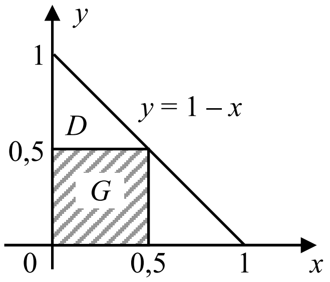


Рис. 29

Вычислим интеграл

$$A\int_0^1 x\,dx\int_0^{1-x} y\,dy = A\int_0^1\left(x\cdot\frac{y^2}{2}\bigg|_0^{1-x}\right)dx=$$

$$=\frac{A}{2}\int_0^1 x(1-x)^2\,dx=\frac{A}{2}\int_0^1\left(x-2x^2+x^3\right)dx=$$

$$=\frac{A}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right)\bigg|_0^1=\frac{A}{24}.$$

Итак, $A/24=1$, т.е. *A* = 24 и $f(x,y)=24\,x\,y$ в области *D*.

б) Одномерные плотности *X* и *Y* определим по формулам (7.6):

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy=24\int_0^{1-x} x\,y\,dy=24\,x\frac{y^2}{2}\bigg|_0^{1-x}=12\,x(1-x)^2;$$

$$f_2(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = 24\int\limits_0^{1-y} x\,y\,dx = 24\frac{x^2}{2}y\Bigg|_0^{1-y} = 12\,y(1-y)^2 .$$

в) Функцию распределения $F(x,y)$ находим по формуле (7.3). Имеем

$$F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dx\,dy = 24\int\limits_{-\infty}^{x} x\,dx\int\limits_{-\infty}^{y} y\,dy =$$

$$=24\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{x}\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{y} = 6x^2y^2 \text{ в области } D .$$

г) Вычислим математическое ожидание по формулам (7.8), (7.9):

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} x\,24\,x\,y\,dy = 24\int\limits_0^1\left(x^2\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{1-x}\right)dx =$$

$$=12\int\limits_0^1 x^2(1-x)^2\,dx = 12\int\limits_0^1\left(x^2-2x^3+x^4\right)dx = 12\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{5};$$

$$M(Y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} y\,f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{1-y} y\,24\,x\,y\,dx = \frac{2}{5}.$$

д) Вероятность того, что (*X*, *Y*) примет значение из области *G* определим по формуле (7.2):

$$P\{(X,Y)\in G\} = \iint\limits_G 24xy\,dx\,dy = 24\int\limits_0^{0,5} x\,dx\int\limits_0^{0,5} y\,dy = 24\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{0,5}\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{0,5} = \frac{3}{8}.$$

◄

КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ МОМЕНТ И КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ

Для характеристики связи между величинами X и Y служит корреляционный момент K_{xy} (или ковариация cov(X, Y)).

Корреляционным моментом двух случайных величин X и Y называется математическое ожидание произведения отклонений этих СВ от математического ожидания

$$K_{xy} = M\{(X - M(X)) \cdot (Y - M(Y))\} \ .$$

Для дискретных случайных величин ковариация определяется по формуле

$$K_{xy} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i - m_x)(y_j - m_y) p_{ij} \ .$$

Если (X, Y) – непрерывная СВ, то

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))(y - M(Y)) f(x, y) dxdy \, .$$

Корреляционный момент удобно вычислять по формуле

$$\boxed{K_{xy} = M(XY) - M(X) \cdot M(Y)}. \qquad (7.10)$$

Если СВ X и Y независимы, то $K_{xy} = 0$. Если $K_{xy} \neq 0$, то СВ X и Y зависимы; в этом случае случайные величины называют ***коррелированными***. В случае $K_{xy} = 0$, СВ X и Y называют некоррелированными.

Коэффициентом корреляции r_{xy} двух СВ (X, Y) называется безразмерная величина, определяемая равенством

$$\boxed{r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma(X)\sigma(Y)}}, \tag{7.11}$$

где $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ и $\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)}$ – среднеквадратические отклонения соответственно величин *X* и *Y*.

Свойства коэффициента корреляции:

1. $-1 \le r_{xy} \le 1$;

2. Если *X* и *Y* – независимые СВ, то $r_{xy} = 0$;

3. Если $|r_{xy}| = 1$, то СВ *X* и *Y* связаны линейной функциональной зависимостью.

Пример 7.5. Двумерная случайная величина (*X*, *Y*) задана таблицей распределения

x \ y	4	5	6	7
1	0,08	0,10	0,10	0,03
2	0,08	0,14	0,16	0,05
3	0,04	0,06	0,14	*a*

Найти: а) величину *a*; б) одномерные распределения составляющих *X* и *Y*; в) условный закон распределения СВ *X* при *Y* = 5; г) проверить независимость случайных величин *X* и *Y*; д) вычислить математические ожидания *M* (*X*), *M* (*Y*); е) дисперсии *D* (*X*), *D* (*Y*); ж) коэффициент корреляции r_{xy}.

► а) Неизвестную величину *a* ищем из условия:

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$, т.е. 0,08 + 0,10 + 0,10 + +0,03 + 0,08 + 0,14 + 0,16 + + 0,05 + 0,04 + 0,06 + 0,14 + *a* = 1. Отсюда, *a* = 0,02.

б) Случайная величина X принимает значения $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, вероятности которых находим суммированием вероятностей соответственно в первой, второй и третьей строках таблицы:

$$p_1 = 0{,}08 + 0{,}10 + 0{,}10 + 0{,}03 = 0{,}31,$$

$$p_2 = 0{,}08 + 0{,}14 + 0{,}16 + 0{,}05 = 0{,}43,$$

$$p_3 = 0{,}04 + 0{,}06 + 0{,}14 + 0{,}02 = 0{,}26.$$

Вероятности СВ Y находим, суммируя вероятности в первом, втором, третьем и четвертом столбцах таблицы. В результате получаем законы распределения составляющих X и Y.

X:

x_i	1	2	3
p_i	0,31	0,43	0,26

Контроль: 0,31 + 0,43 + 0,26 = 1.

Y:

y_j	4	5	6	7
p_j	0,20	0,30	0,40	0,10

Контроль: 0,20 + 0,30 + 0,40 + 0,10 = 1.

в) Найдем условный закон распределения СВ X при y = 5 с помощью формулы

$$P\left\{X = x_i / Y = y_j\right\} = \frac{P\left\{X = x_i, Y = y_j\right\}}{P\left\{x_i = y_j\right\}}.$$

Так как $P\left\{Y = 5\right\} = 0{,}10 + 0{,}14 + 0{,}06 = 0{,}3$, то

$$P\left\{X = 1 / Y = 5\right\} = 0{,}1 : 0{,}3 = \frac{1}{3},$$

$$P\left\{X = 2 / Y = 5\right\} = 0{,}14 : 0{,}3 = \frac{7}{15},$$

$$P\left\{X = 3 / Y = 5\right\} = 0{,}06 : 0{,}3 = \frac{1}{5}.$$

Таким образом, условный закон распределения СВ X при Y = 5 имеет вид

x_i	1	2	3

$P(X \setminus Y=5)$	1/3	7/15	1/5

Контроль: 1/3 + 7/15 + 1/5 = 1.

г) Так как безусловный и условный законы распределения СВ *X* не совпадают, то случайные величины *X* и *Y* зависимы.

Проверим зависимость СВ *X* и *Y* с помощью условия (7.7). Имеем:

$P\{X=1, Y=5\}=0,10 \neq 0,31 \cdot 0,3 = P\{X=1\} \cdot P\{Y=5\}$, т.е. условие (7.7) не выполняется. Следовательно, СВ *X* и *Y* зависимы.

д) Найдем математические ожидания *M* (*X*) и *M* (*Y*), используя законы распределения составляющих *X* и *Y*:

$$M(X)=1 \cdot 0,31+2 \cdot 0,43+3 \cdot 0,26=1,95 \ ,$$
$$M(Y)=4 \cdot 0,2+5 \cdot 0,3+6 \cdot 0,4+7 \cdot 0,1=5,4 \ .$$

е) Вычислим дисперсии *D* (*X*) и *D* (*Y*):

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=1^2 \cdot 0,31+2^2 \cdot 0,43+3^2 \cdot 0,26-1,95^2=0,57$$
,
$$D(Y)=M(Y^2)-(M(Y))^2=4^2 \cdot 0,2+5^2 \cdot 0,3+6^2 \cdot 0,4+7^2 \cdot 0,1-5,4^2=0,84$$
.

ж) Для определения коэффициента корреляции r_{xy} вычислим среднеквадратические отклонения:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0,57}=0,75;$$

$$\sigma(Y)=\sqrt{D(Y)}=\sqrt{0,84}=0,92.$$

Найдем корреляционный момент K_{xy} :

$$K_{xy}=M(XY)-M(X)\cdot M(Y)=\mathrm{cov}(X,Y)=$$

$$=1\cdot 4\cdot 0,08+1\cdot 5\cdot 0,1+1\cdot 6\cdot 0,1+1\cdot 7\cdot 0,03+2\cdot 4\cdot 0,08+2\cdot 5\cdot 0,14+$$

$$+2\cdot 6\cdot 0,16+2\cdot 7\cdot 0,05+3\cdot 4\cdot 0,04+3\cdot 5\cdot 0,06+3\cdot 6\cdot 0,14+$$

$$+9\cdot 7\cdot 0,02-1,95\cdot 5,4=0,08.$$

Теперь вычислим коэффициент корреляции r_{xy} по формуле (7.11):

$$r_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}=\frac{0,08}{0,75\cdot 0,92}\approx 0,12. \qquad ◄$$

94,91 98,95 102,99 106,103 110,107 114,111
92,93 96,97 100,101 104,105 108,109 112,113

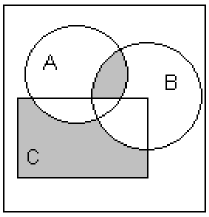
118,115 122,119126,123130,127134,131
116,117 120,121124,125128,129132,133

138,135
136,137

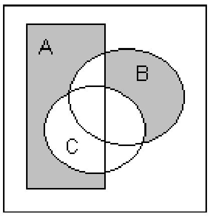
ЗАДАНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ

<u>***Задача 1.***</u> Запишите множество, изображенное с помощью кругов Эйлера на рисунке:

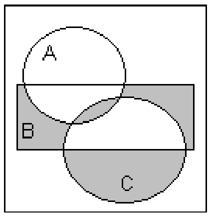
1.1.



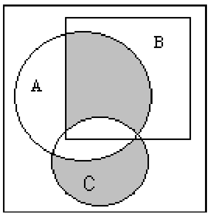
1.2.



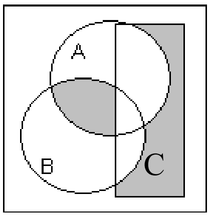
1.3.



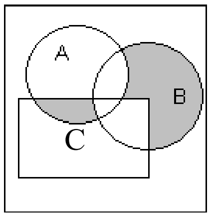
1.4.



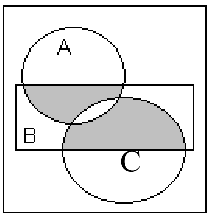
1.5.



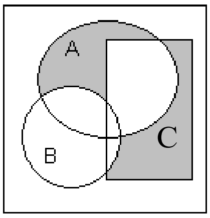
1.6.



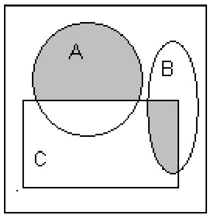
1.7.



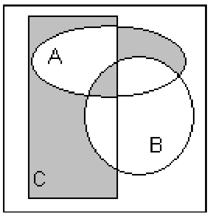
1.8.



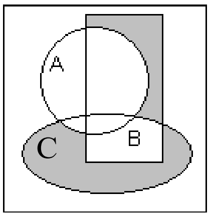
1.9.



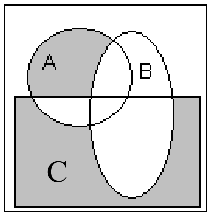
1.10.



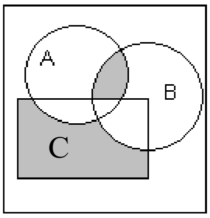
1.11.



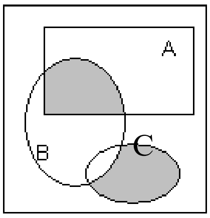
1.12.



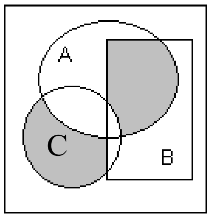
1.13.



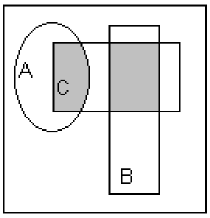
1.14.



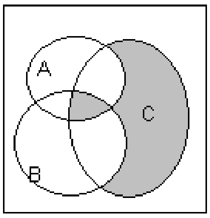
1.15.



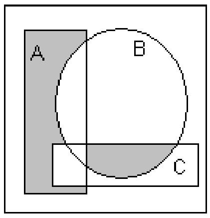
1.16.



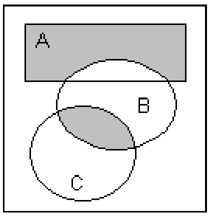
1.17.



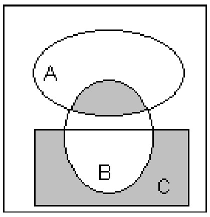
1.18.



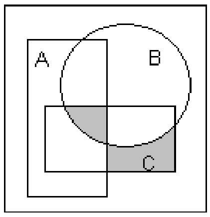
1.19.



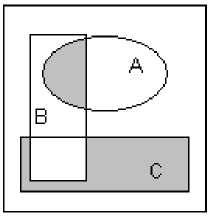
1.20.



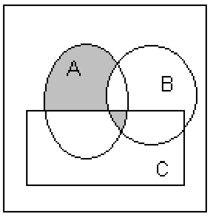
1.21.



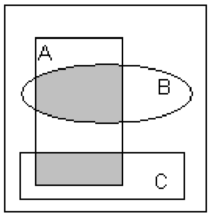
1.22.



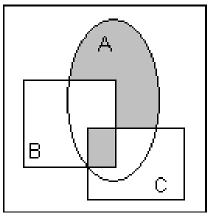
1.23.



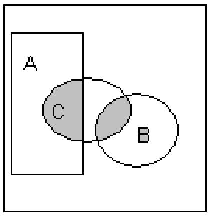
1.24.



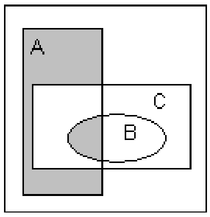
1.25.



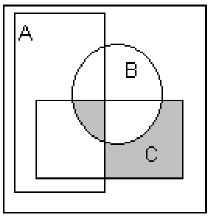
1.26.



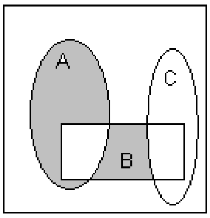
1.27.



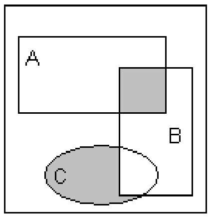
1.28.



1.29.



1.30.



ЗАДАЧА 2. Заштрихуйте ту часть диаграммы (рис.30), которая соответствует следующему множеству:

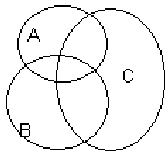


Рис.30.

2.1. $(A \setminus B) \cap (C \cup B)$; **2.2.** $(A \setminus B) \cap (C \setminus B)$;

2.3. $(C \cup A) \setminus (B \cap A)$; **2.4.** $(A \setminus B) \cup (C \cap B)$;

2.5. $(A \cup B) \setminus (C \cap B)$; **2.6.** $(A \setminus B) \cup (C \cup B)$;

2.7. $(A \setminus B) \cap (C \setminus B)$; **2.8.** $(A \setminus C) \cup (B \cup A) \cap C$;

2.9. $(C \setminus A) \cup (B \setminus C)$; **2.10.** $(A \cup B) \setminus (C \cap B)$;

2.11 $(C \setminus A) \cap (C \setminus B)$; **2.12.** $(A \cap C) \cup (B \cup A) \setminus C$;

2.13 $(C \setminus B) \cup (A \setminus C)$; **2.14.** $(A \setminus C) \cup (B \cup A) \cap C$;

2.15 $(A \cup B) \setminus (C \cap$ **2.16.** $(C \cup A) \setminus (B \cap A)$;

2.17 $(A \cup C) \setminus (C \cap B)$; **2.18.** $(A \cup B) \cup (A \cap C)$;

2.19 $(A \setminus B) \cap (C \setminus B)$; **2.20.** $(C \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

2.21 $(C \setminus B) \cup (A \setminus C)$; **2.22.** $(A \setminus B) \cup (C \cap B)$;

2.23 $(A \cap B) \cup (C \setminus B)$; **2.24.** $(A \cup B) \cup (C \setminus B)$;

2.25 $(A \cap B) \cup (A \setminus C)$; **2.26.** $(A \cap B) \cup (A \cap C)$;

2.27 $(C \cap A) \cup (C \setminus B)$; **2.28.** $(A \setminus C) \cup (B \cap C)$;

2.29 $(A \setminus C) \cap (B \cup C)$; **2.30.** $(B \cup C) \cap (A \setminus B)$;

ЗАДАЧА 3. На одной из кафедр университета работают *К* человек, среди которых *Т* человек не знают ни одного иностранного языка, *А* человек знают английский, *Н* – немецкий, *Ф* – французский, *АН* знают английский и немецкий, *АФ* – английский и французский, *НФ* – немецкий и французский, *АНФ* знают все три языка. По заданным в таблице условиям восстановить недостающую информацию.

№	*К*	*А*	*Н*	*Ф*	*АН*	*АФ*	*НФ*	*АНФ*	*Т*
3.1.	?	22	20	13	11	7	6	2	3
3.2.	38	23	21	?	11	8	9	4	2
3.3.	20	?	9	6	4	3	2	1	2
3.4.	?	14	7	8	4	5	4	3	1
3.5.	35	20	16	15	10	8	9	5	?
3.6.	17	11	6	5	4	3	2	1	?
3.7.	21	11	?	6	6	5	3	2	5
3.8.	26	14	11	5	?	4	3	2	6
3.9.	19	13	9	5	5	3	3	1	?
3.10.	17	?	9	6	6	4	4	2	2
3.11.	16	12	9	?	6	4	3	3	1
3.12.	17	13	6	4	6	3	2	?	3

3.13.	?	20	17	13	8	5	4	4	5
3.14.	18	15	8	6	7	?	4	3	2
3.15.	20	12	?	8	5	5	3	1	4
3.16.	38	22	19	14	10	6	5	2	?
3.17.	33	20	?	15	11	8	7	3	2
3.18.	37	23	18	16	?	9	8	3	3
3.19.	28	17	?	10	11	5	7	3	4
3.20.	36	21	17	14	9	7	6	?	2
3.21.	25	11	14	10	6	4	?	2	3
3.22.	17	12	9	7	8	?	5	4	3
3.23.	26	15	13	11	8	?	5	4	2
3.24.	?	14	9	7	7	5	3	2	1
3.25.	39	?	15	17	8	6	7	1	4
3.26.	?	10	7	4	5	4	3	3	5
3.27.	17	12	9	7	8	?	5	4	3
3.28.	39	?	17	13	8	5	6	2	4
3.29.	37	22	16	?	8	5	4	3	2
3.30.	38	22	23	16	12	?	9	2	1

Задача 4.

4.1. Деканат решил проконтролировать посещение лекции по математике четырьмя нерадивыми студентами. Каждый из них может быть или не быть на этой лекции. Рассматриваются события: A − на лекции был ровно один из четырех студентов; B − на лекции был хотя бы один из студентов; D − на лекции было ровно два студента. Описать события: а) $A + D$; б) AB ; в) $\overline{B}A$; г) BC.

4.2. Производится наблюдение за группой, состоящей из четырех однородных объектов. Каждый из них за время наблюдения может быть обнаружен или не обнаружен. Рассматриваются события: A – обнаружен ровно один из четырех объектов; B – обнаружен хотя бы один объект; D – обнаружено ровно три объекта; E – обнаружены все четыре объекта. Указать, в чем состоят события:

а) $A+\overline{B}$; б) AB; в) BE.

4.3. Рассматриваем события: A – выпадение двух гербов при бросании двух монет; C – три попадания при трех выстрелах; D – хотя бы одно попадание при пяти выстрелах. Описать словами множества:

а) $\overline{A}$; б) CD ; в) $D-C$.

4.4. По мишени проводится три выстрела. Рассматриваются события A_i - попадание при i-м выстреле (i=1,2,3). Представить в виде сумм, произведений или сумм произведений событий A_i и $\overline{A_i}$ следующие события: A – все три попадания; B – все три промаха; C – хотя бы одно попадание; D – только два попадания. В чем состоят события:

а) $\overline{B}D$; б) $C-A$; в) CD .

4.5. Опыт состоит в бросании двух монет. Рассматриваются следующие события: A – появление герба на первой монете; C – появление герба на второй монете; E – появление хотя бы одного герба; F – появление хотя бы одной цифры. В чем состоят события:

а) $A+C$; б) AC; в) $E-A$; г) $\overline{A}F$.

4.6. Бросается игральная кость. Рассматриваются события: A – выпало четное число очков; B – выпало нечетное число очков; C – выпало число очков, большее трех. Описать события:

а) $(A+B)C$; б) $A\overline{C}$; в) $B-C$.

4.7. Обозначим через A – множество студентов, сдавших математический анализ, B – алгебру, C – геометрию. Описать словами следующие множества студентов:

а) ABC; б) $\overline{A}\overline{B}$; в) $\left(A+B\right)-C$.

4.8. Пусть A, B, C – три произвольные события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что из A, B, C: а) произошло только A; б) произошли A и C, но B не произошло; в) все три события произошли; г) ни одно событие не произошло; д) произошло, по крайней мере, два события; е) произошло не более двух событий.

4.9. Обозначим через A – множество жителей, подписавшихся на газету №1, B – на газету №2, C – на газету №3.

Найти выражения для событий: 1) множество жителей, не подписавшихся ни на одну из газет; 2) множество жителей, подписавшихся на газету №3 или не подписавшихся ни на одну из газет; 3) множество жителей, подписавшихся хотя бы на одну газету.

4.10. Бросается одна игральная кость. Рассматриваются события: A – выпало четное число очков; B – выпало не менее 5 очков; C – выпало менее 6 очков; D – появление кости с номером меньшим 4. Выявить состав подмножеств, соответствующих событиям:

а) $A+B$; б) AD; в) $A-C$.

4.11. Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Рассматриваются события: A – первый стрелок попал в мишень; B – второй стрелок попал в мишень. Выявить состав подмножеств, соответствующих событиям:

а) $A+B$; б) AB; в) $\overline{A}B$?

Выразить через A, B и их отрицания следующие события: а) мишень поражена один раз; б) ни один стрелок не попал.

4.12. В урне находятся шесть пронумерованных карточек. Рассматриваются события: A – появление карточки с четным номером; B – появление карточки с нечетным номером; C – появление карточки с номером большим, чем 3; D – появление карточки с номером меньшим, чем 4. Пояснить, что означают события:

а) $A+B$; б) BD; в) $\overline{A}-D$.

Указать, какие из пар событий A, B, C, D совместны, а какие нет; привести примеры невозможного и достоверного событий.

4.13. Из колоды в 36 карт извлекается наудачу одна карта. Рассматриваются события: A – извлечен туз; B – извлечена карта черной масти; C – извлечена карта крести. Зависимы ли события A и B? Какие события совместны? Указать, в чем состоят события:

а) AC; б) $A+B$; в) $\overline{A}B$; г) $C-A$.

Найти выражение для события: D – извлечен туз красной масти.

4.14. Эксперимент состоит в бросании игральной кости. Пусть событие A – появление четного числа очков; B – появление трех очков; C – появление не менее четырех очков. Выявить состав подмножеств, соответствующих событиям:

а) $A-C$; б) AC; в) $A+B$?

Указать, какие из пар событий A, B, C совместны, а какие нет.

4.15. В одной группе рассматриваются события – студенты родились: A – в разные дни года; B – в разные дни декабря; C – в разные месяцы; D – 20 декабря. Какие события совместные. Выяснить, что означают следующие события:

а) AB; б) $B-D$; в) $\overline{C}B$.

Найти выражение для события: студенты родились все в один день, но не 20 декабря.

4.16. Два раза подбрасывается одна игральная кость. Описать множества событий: A – при первом подбрасывании выпало два очка; B – при двух подбрасываниях выпало одинаковое число очков; C – сумма очков меньше шести. Выяснить, что означают следующие события:

а) $AB+C$; б) $AB\overline{C}$; в) $A-B$.

4.17. В урне находится 10 пронумерованных шаров. Опыт состоит в извлечении одного шара из урны. Требуется указать элементарные события, благоприятствующие событиям: A – появление шара с номером меньше 8; B – появление шара с номером большим 3; C – появление шара с четным номером. Пояснить, что означают события:

а) $AB - C$; б) $\overline{B}C$; в) $\overline{C} + \overline{B}$.

4.18. Опыт заключается в вытаскивании карточек с цифрами от 1 до 10, беспорядочно разложенных на столе. Рассматриваются события: A – появление карточки с цифрой 5; B – карточки с цифрой 10; C – карточки с четной цифрой; D – карточки с цифрой, кратной 5. Что означают события: а) $BC + A$; б) $\overline{B} - D$; в) $\overline{D}C$.

Выразить через A, B, C, D следующие события: 1) произошли события A, B, но C не произошло; 2) произошло по крайне мере одно из этих событий.

4.19. В первом ящике находятся шары от 1 до 6, а во втором – с номерами от 7 до 12. Из каждого ящика вынимают по одному шару. Рассматриваются события: A – оба шара имеют четный номер; B – сумма номеров кратна числу 3; C – сумма очков нечетна. Что означают события: а) AB; б) $\overline{C} - A$; в) $\overline{A}B$?

Выразить через A, B, C следующее событие: из трех событий A, B, C произойдет ровно два.

4.20. Брошены две игральные кости. Описать следующие события: A – на обеих костях появится одинаковое число очков; B – сумма выпавших очков равна 5, а произведение – 6; C – сумма выпавших очков не превосходит 6. Указать, в чем состоят события:

а) $A + B - C$; б) $\overline{A}B$; в) $C - B$.

4.21. Производится три выстрела по мишени. Рассматриваются события: A – попадание в цель первым выстрелом; B – попадание в цель вторым выстрелом; C – попадание в цель третьим выстрелом. Определить, каким событиям равносильны следующие события:

$$\text{а) } A+B+C\text{; б) } ABC\text{; в) } \bar{A}\bar{B}\bar{C}\text{;}$$

$$\text{г) } A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C\text{.}$$

4.22. Три изделия проверяются на стандартность. Вводятся события: A – все изделия стандартны; B – хотя бы одно изделие нестандартное. Выяснить смысл событий:

$$\text{а) } A+B\text{; б) } AB\text{; в) } A\bar{B}\text{; г) } A-B\text{.}$$

4.23. Одновременно подбрасываются три монеты. Вводятся события: A – выпали все гербы; B – выпали все цифры; C – гербов выпало больше, чем цифр. Выяснить смысл событий:

$$\text{а) } \bar{A},\ \bar{B},\ \text{ б) } A+\bar{B},\ \text{ в) } AB\text{; г) } C\bar{B}\text{.}$$

4.24. Покупаются три лотерейных билета. Рассматриваются события: A_i-выиграет *i-й* билет, *i*=1,2,3. Найти выражения для событий, состоящих в том, что: а) выиграют два билета; б) выиграет хотя бы один билет; в) выиграют хотя бы два билета. Описать события:

$$A_1A_2A_3,\ A_1+A_2-A_3\text{.}$$

4.25. Экзаменационные работы абитуриентов зашифрованы целыми числами от 1 до 90 включительно. Описать события: A – номер наудачу взятой работы кратен 10; B – номер наудачу взятой работы двузначен и четен; C – номер наудачу взятой работы кратен 5. Выяснить смысл событий: $AC,\ \bar{A}C,\ AB,\ B-C.$

Описать через A, B и C и их отрицания события: а) номер наудачу взятой работы нечетен и кратен 5; б) номер наудачу взятой работы не кратен 10 и двузначен.

4.26. Из цифр 1,3,5,7,9 составляется трехзначное число (≤ 400), где любая из этих цифр может использоваться один раз. Описать события: A – число кратно 9; B – число кратно 3; C – число оканчивается цифрой 5. Выяснить смысл событий:

$$BC, \ A+C, \ AB-C.$$

Описать через A, B и C и их отрицания события: а) число кратно 9 и оканчивается цифрой 5; б) число нечетное и не кратно 3.

4.27. Среди студентов, собравшихся на лекцию по теории вероятностей, выбирают наудачу одного. Пусть событие A заключается в том, что он – юноша. Событие B в том, что он не курит, а событие C в том, что он живет в общежитии. Описать события:

а) $AB\overline{C}$; б) $\overline{A}C$; в) $A+B-C$.

4.28. Из пенала, содержащего красные, синие и зеленые карандаши, выбирается один. Пусть события A – выбран красный карандаш; B – выбран синий карандаш. Что означают события:

а) $\overline{A+B}$; б) $\overline{A}+\overline{B}$; в) $AB+C$?

4.29. Пусть событие А – экзамен сдан, а событие В – экзамен сдан на отлично. Описать события:

а) $A-B$; б) $A\cdot\overline{B}$; в) $A-\overline{B}$.

4.30. Бросается игральная кость. Рассматриваются события: A – выпало четное число очков; B – выпало нечетное число очков; C – выпало число очков, большее трех. Описать события:

а) $(A + B)\ C$, б) $AC + B$; в) $\overline{A} - C$.

Задача 5.

5.1. Несколько стран решили использовать для своего государственного флага символику в виде четырех вертикальных полос одинаковой ширины разных цветов – белого, синего, красного, зеленого. У каждой страны свой флаг. Сколько стран могут использовать такую символику? Сколько стран могут использовать такую символику с первой белой полосой?

5.2. В семье – шесть человек, а за столом в кухне – шесть стульев. В семье решили каждый вечер, ужиная, рассаживаться на эти шесть стульев по новому. Сколько дней члены семьи смогут делать это без повторений? Сколько вариантов, если глава семьи сидит всегда на одном и том же стуле?

5.3. Петр решил пойти на карнавал в костюме мушкетера. В ателье проката ему предложили на выбор: 5 пар брюк, 6 камзолов, 3 шляпы, 2 пары сапог. Сколько различных карнавальных костюмов можно составить из этих предметов? Сколько вариантов можно составить, если подходит только одна пара брюк?

5.4. Современные пятиборцы участвуют в соревновании по 5 видам спорта: конкур (кросс на лошадях), фехтование, плавание, стрельба, бег. Сколько существует вариантов порядка прохождения видов соревнования? Сколько существует вариантов, если последним должен быть бег?

5.5. В расписании на понедельник 6 уроков: алгебра, геометрия, биология, история, физкультура, химия. Сколькими способами можно составить расписание? Сколькими способами можно составить расписание, чтобы два урока математики стояли рядом?

5.6. Имеется семь бусин различных цветов. Сколько различных ожерелий из них можно составить? Сколько различных ожерелий из них можно составить так, чтобы бусины синего и красного цвета не находились рядом?

5.7. Сколькими способами можно раскрасить квадрат, разделенный на четыре равные части, пятью цветами, если: а) различные части окрашены в разный цвет; б) допускается окрашивание разных частей в один цвет?

5.8. Сколькими способами можно расставить на книжной полке пять книг по теории вероятностей, четыре книги по физике и две книги по математической логике, если: а) книги по каждому предмету одинаковые; б) книги по математической логике должны стоять рядом?

5.9. Сколькими способами можно составить колонну из шести автобусов и трех легковых автомобилей, считая, что все автобусы и все автомобили одинаковых марок? Сколько будет способов, если возглавлять и замыкать колонну должен легковой автомобиль?

5.10. Имеются почтовые марки разных стран: шесть немецких, пять польских и три румынских. Сколько вариантов порядка их в кляссере, если учесть, что: а) марки каждой страны одинаковы между собой; б) румынские марки должны стоять первыми?

5.11. Сколькими способами можно сформировать пассажирский поезд из четырех купейных, шести плацкартных и двух багажных вагонов? Сколько будет способов, если замыкающими вагонами принято ставить багажные?

5.12. У мамы три яблока, две груши, три апельсина. Каждый день, в течение восьми дней подряд, она выдает сыну по одному плоду. Сколькими способами это может быть сделано? Сколько будет вариантов, если в первую очередь выдавать цитрусовые?

5.13. Сколькими способами можно набрать на спицы десять петель: из них три лицевых, пять изнаночных и два накида? Сколько будет вариантов, если начинать и заканчивать ряд следует лицевыми петлями?

5.14. Сколькими способами можно разложить в ряд 5 рублевых, 6 пятирублевых и 2 десятирублевых монеты? Сколько будет вариантов, если ряд начинается и заканчивается десятирублевыми монетами?

5.15. Сколькими способами можно расставить белые шахматные фигуры (два слона, две ладьи, два коня, ферзь, король) на первой линии шахматной доски? Сколько будет вариантов, если ферзь возглавляет и король замыкает ряд?

5.16. В олимпиаде участвуют представители шести городов по два представителя от каждого города. Сколькими способами они могут встать в ряд? Сколько будет вариантов, если они могут встать так, чтобы рядом с каждым был представитель того же города?

5.17. Сколькими способами можно расположить в ряд пять красных, три зеленых и шесть синих лампочек? Сколько будет вариантов, если зеленые лампочки не должны находиться рядом?

5.18. Сколькими способами четыре женщины, трое мужчин и два подростка могут встать в очередь? Сколько будет вариантов, если мужчины не должны стоять рядом?

5.19. На книжной полке помещается десять томов энциклопедии. Сколькими способами можно расставить эти тома? Сколькими способами можно расставить тома так, чтобы первый и второй тома не стояли рядом?

5.20. На пять сотрудников выделено пять различных призов. Сколькими способами их можно распределить между сотрудниками?

Сколько будет вариантов, если двум сотрудникам вручаются определенные призы?

5.21. У филателиста есть три одинаковые, пять разных канадских марок и семь марок США. Сколькими способами он может разложить в альбом эти марки? Сколько будет вариантов, если учесть, что одинаковые марки не должны стоять рядом?

5.22. Компания из семи юношей и десяти девушек танцует. Если в каком - то танце участвуют все юноши, то сколько имеется вариантов участия девушек в этом танце? Сколько возможно вариантов участия девушек в этом танце, если про двух девушек можно с уверенностью сказать, что они будут приглашены на танец?

5.23. Сколькими способами можно расположить в один ряд пять синих мячей, три белых и два черных? Сколькими способами можно расположить мячи так, чтобы черные шары всегда: а) лежали рядом; б) не лежали рядом?

5.24. Десять кресел поставлены в ряд. Сколькими способами на них могут сесть два человека? Сколькими способами эти два человека могут сесть рядом? Сколькими способами они могут сесть так, чтобы между ними было, по крайней мере, одно пустое кресло?

5.25. На собрании должно выступить пять человек А, Б, В, Г и Д. Сколькими способами можно расположить их в списке ораторов при условии , что: а) Б не должен выступать раньше А; б) А должен выступать непосредственно перед Б.

5.26. Позывные радиостанции должны начинаться с буквы «W». Скольким радиостанциям можно присвоить различные позывные, если позывные состоят из трех букв, причем эти буквы могут повторяться? Если позывные состоят из четырех букв, которые не повторяются?

5.27. В железнодорожном вагоне десять мест расположены лицом по ходу поезда и десять мест – против хода поезда. Сколькими способами можно посадить в вагон восемь пассажиров, если двое отказываются сидеть лицом по ходу поезда, а трое – лицом против хода поезда?

5.28. Рота состоит из 3 офицеров, 6 сержантов и 60 рядовых. Сколькими способами можно выбрать из них отряд, состоящий из одного офицера, двух сержантов и 20 рядовых? Та же задача, если в отряд должны войти командир роты и старший из сержантов?

5.29. В пассажирском поезде девять вагонов. Сколькими способами можно рассадить в поезде пять человек, при условии что: а) они поедут в разных вагонах; б) они поедут в одном вагоне; в) хотя бы один поедет в первом вагоне.

5.30. Для премий на математической олимпиаде выделено 3 экземпляра одной книги, 2 – второй и 1 – третьей. Сколькими способами могут быть вручены премии, если в олимпиаде участвовало двадцать человек, и никому а) не дают двух книг сразу; б) не дают двух экземпляров одной и той же книги, но могут быть вручены две или три различные книги?

ЗАДАЧА 6. Сколькими способами можно переставить буквы слова:

6.1. «профессор», чтобы: а) две буквы «с» не шли подряд; б) слово начиналось с буквы «р»?

6.2. «алгебра», чтобы: а) слово начиналось с буквы «г»; б) две буквы «а» не стояли рядом?

6.3. «автобус», чтобы: а) две буквы «т» и «с» стояли рядом; б) слово начиналось с буквы «а» и оканчивалось буквой «т»?

6.4. «факультет», чтобы: а) две буквы «т» шли подряд; б) слово начиналось с буквы «к» и оканчивалось буквой «ф»?

6.5. «логарифм», чтобы: а) чтобы буквы «р» и «ф» шли рядом; б) слово начиналось с буквы «л» и оканчивалось буквой «г»?

6.6. «симфония», чтобы: а) чтобы буква «с» шла непосредственно после «ф»; б) слово начиналось с буквы «м»?

6.7. «симметрия», чтобы: а) две буквы «м» не стояли рядом; б) чтобы буква «т» шла непосредственно после «р»?

6.8. «перемена», чтобы: а) три буквы «е» не шли подряд; б) слово начиналось с буквы «р» и оканчивалось буквой «м»?

6.9. «килограмм», чтобы: а) слово начиналось с буквы «г»; б) две буквы «м» стояли рядом?

6.10. «периметр», чтобы: а) «е» шла непосредственно после «р»; б) две буквы «р» стояли рядом?

6.11. «переэкзаменовка», чтобы: а) три буквы «е» не стояли вместе; б) буква «о» шла непосредственно после «р»?

6.12. **«кофеварка», чтобы: а) две буквы «а» не стояли рядом; б) слово начиналось с буквы «ф»?**

6.13. «поговорка», чтобы: а) три буквы «о» стояли рядом; б) слово заканчивалось буквой «р»?

6.14. «карандаш», чтобы: а) три буквы «а» стояли рядом; б) буква «д» шла непосредственно после «ш»?

6.15. «решение», чтобы: а) три буквы «е» стоят рядом; б) слово начиналось с буквы «ш»?

6.16. «множество», чтобы: а) две буквы «о» не стояли рядом; б) слово начиналось и заканчивалось буквой «о»?

6.17. «апелляция», чтобы: а) две буквы «я» не стояли рядом; б) слово начиналось с буквы «ц» и заканчивалось буквой «и»?

6.18. «баллада», чтобы: а) три буквы «а» стояли рядом; б) буква «а» шла непосредственно после «д»?

6.19. «интеллект», чтобы: а) две буквы «е» не шли подряд; б) слово начиналось и заканчивалось буквой «л»?

6.20. «пассажир», чтобы: а) слово начиналось с буквы «ж»; б) две буквы «а» шли подряд?

6.21. «корректор», чтобы: а) три буквы «р» не шли подряд; б) слово начиналось с буквы «р»?

6.22. «здание», чтобы: а) слово начиналось с буквы «д»; б) буква «н» шла непосредственно после «е»?

6.23. «тарантас», чтобы: а) три буквы «а» шли подряд; б) начиналось с буквы «с» и заканчивалось буквой «н»?

6.24. «каракули», чтобы: а) буква «л» шла непосредственно после «р»; б) две буквы «к» не шли подряд?

6.25. «комиссия» так, чтобы: а) две буквы «и» не шли подряд; б) начиналось с буквы «о» и заканчивалось буквой «и»?

6.26. «столовая», чтобы: а) две буквы «о» стояли рядом; б) буква «л» шла непосредственно после «в»?

6.27. «диаграмма», чтобы: а) две буквы «м» не стояли рядом; б) начиналось слово с буквы «г» и заканчивалось буквой «р»?

6.28. «гипербола», чтобы: а) буква «б» шла непосредственно после «г»; б) буквы «р» и «б» стояли рядом?

6.29. «программа», чтобы: а) две буквы «м» не шли подряд; б) слово начиналось с буквы «г» и заканчивалось «п»?

6.30. «колокола», чтобы: а) три буквы «о» стояли рядом; б) буква «л» шла непосредственно после «к»?

ЗАДАЧА 7. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из данного набора цифр, если

а) никакая цифра не повторяется более одного раза;

б) повторения цифр допустимы;

в) числа должны быть четными и повторений цифр быть не должно;

г) числа должны быть кратными 5 и повторения цифр допустимы.

7.1.	2 3 5 6 0 1	**7.2.**	5 3 2 0 1 8	**7.3.**	9 7 3 0 2 5
7.4.	1 3 0 2 7 5	**7.5.**	8 0 1 3 5 7	**7.6.**	1 4 2 3 7 0
7.7.	0 2 1 4 5 7	**7.8.**	9 1 2 4 3 0	**7.9.**	8 2 0 3 1 5
7.10.	5 3 0 2 1 4	**7.11.**	9 1 0 5 2 7	**7.12.**	4 5 1 6 3 2
7.13.	7 3 0 1 2 4	**7.14.**	8 5 4 7 0 1	**7.15.**	8 0 4 3 2 5
7.16.	0 1 2 7 8 3	**7.17.**	5 2 3 1 4 8	**7.18.**	3 7 8 2 1 0
7.19.	5 1 2 7 3 4	**7.20.**	9 1 2 0 4 5	**7.21.**	8 9 5 0 2 3
7.22.	6 2 4 5 1 3	**7.23.**	7 6 3 2 1 0	**7.24.**	1 6 2 4 5 0

7.25. 4 2 0 3 5 1	**7.26.** 6 9 5 0 3 2	**7.27.** 6 0 7 2 3 5
7.28. 6 7 1 3 4 2	**7.29.** 1 3 7 2 0 8	**7.30.** 1 6 7 0 8 5

<u>ЗАДАЧА 8.</u>

8.1. Среди 10 хоккеистов 6 человек имеют звание "Мастер спорта". Найти вероятности того, что в наудачу выбранной "пятерке" игроков будет:

а) не менее четырех мастеров спорта; б) хотя бы один мастер спорта; в) не менее двух и не более трех мастеров спорта.

8.2. Из 60 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент знает 50. Найти вероятность того, что среди трех наугад выбранных вопросов студент знает:

а) все вопросы; б) не более двух вопросов; в) хотя бы один вопрос.

8.3. У мальчика имеется семь фишек синего цвета и девять – красного. Двенадцать фишек он отдал младшему брату. Какова вероятность того, что:

а) половина из них будет красного цвета; б) хотя бы две из них будут синего цвета; в) не более трех из них будут красного цвета?

8.4. На складе находится двадцать литых дисков и десять – кованых. Со склада приносят в торговый зал четыре диска. Какова вероятность того, что:

а) все они окажутся литыми; б) не менее двух кованых; в) хотя бы один литой?

8.5. В кошельке лежат тринадцать двухрублевых монет и семь десятирублевых. Найти вероятности того, что при извлечении наудачу трех монет из кошелька:

а) они все окажутся десятирублевыми; б) хотя бы одна окажется двухрублевой; в) не менее двух десятирублевых.

8.6. В фирме работают восемь мужчин и четыре женщины, причем пятеро имеют юридическое образование, среди которых три женщины. Из числа работников фирмы наугад отобраны четыре человека. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц:

а) окажутся две женщины; б) присутствует хотя бы один работник с юридическим образованием; в) окажутся трое мужчин, один из которых имеет юридическое образование; г) будет одинаковое число мужчин и женщин с юридическим образованием.

8.7. В коробке пятнадцать книг, среди которых девять справочников. Наудачу отобраны четыре книги. Найти вероятность того, что среди них окажется:

а) три справочника; б) не более двух справочников; в) хотя бы один справочник.

8.8. В пачке 18 фотографий, среди которых 13 матовых, остальные – глянцевые. Наудачу выбирают 6 фотографий. Найти вероятности следующих событий:

а) все фотографии матовые; б) хотя бы одна глянцевая;

в) не более трех матовых.

8.9. На тепловой электростанции 15 сменных инженеров, из них 3 женщины. В смену занято 3 человека. Найти вероятности того, что в случайно выбранную смену среди них будет:

а) не более двух женщин; б) хотя бы один мужчина; в) все мужчины.

8.10. На складе 15 мешков муки высшего сорта, 18 – первого и 7 – второго сорта. Кладовщик наудачу выбирает и выдает восемь мешков. Найти вероятности того, что:

а) попадется не менее двух мешков муки высшего сорта; б) хотя бы один мешок второго сорта; в) не более трех мешков первого сорта.

8.11. Грибники нашли в лесу 18 грибов, среди них 4 белых гриба, 6 – подосиновиков, остальные сыроежки. Какова вероятность того, что среди случайно вынутых из корзины 9 грибов будет:

а) два белых и три сыроежки; б) от трех до пяти сыроежек;

в) хотя бы один белый гриб?

8.12. В классе 20 мальчиков и 10 девочек. На каждый из трех вопросов, заданных учителем, ответили по одному ученику. Какова вероятность того, что среди ответивших:

а) два мальчика и одна девочка; б) хотя бы один мальчик;

в) не менее одной девочки?

8.13. На складе фирмы тридцать упаковок бумаги для ксерокса, причем двадцать из них изготовлены в Москве. Какова вероятность того, что среди взятых наугад четырех пачек:

а) три будут с Московской фабрики; б) не более двух с Московской фабрики; в) хотя бы одна с Московской фабрики?

8.14. В продаже имеется двадцать белых роз и двенадцать красных. Продавец наугад вынул восемь цветов. Какова вероятность того, что в полученном букете будет:

а) пять красных роз; б) хотя бы одна красная роза; в) не более четырех красных роз?

8.15. В школьную библиотеку поступило пятьдесят учебников, из них пять с дефектами переплета. Какова вероятность того, что среди четырех взятых наудачу учебников окажется:

а) один с дефектным переплетом; б) не менее трех с дефектным переплетом; в) хотя бы один с дефектным переплетом?

8.16. В группе из семнадцати студентов, среди которых восемь девушек, разыгрывается семь билетов на вечер отдыха. Найти вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся:

а) четыре девушки и три юноши; б) хотя бы один юноша;

в) не более двух девушек.

8.17. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,8. Найти вероятность того, что из трех проверенных изделий:

а) только два изделия высшего сорта;

б) хотя бы одно изделие высшего сорта; в) все изделия высшего сорта.

8.18. На полке семь учебников по теории вероятностей, семь – по математическому анализу и одиннадцать – по микроэкономике.

Наудачу выбирают шесть книг. Найти вероятность того, что среди них будет:

а) три книги по математическому анализу и три по микроэкономике; б) не менее четырех книг по теории вероятностей; в) хотя бы одна книга по теории вероятностей.

8.19. В партии товара состоящей из тридцати мужских пальто, находится двадцать изделий местного производства. Товаровед наудачу выбирает три изделия. Какова вероятность того, что все изделия окажутся:

а) местного производства; б) не более двух изделий местного производства; в) хотя бы одно изделие местного производства?

8.20. В партии готовой продукции, состоящей из 25 деталей, 5 бракованных. Найти вероятность того, что при выборе четырех деталей:

а) все они окажутся не бракованными; б) бракованных и не бракованных деталей будет поровну; в) хотя бы одна деталь окажется бракованной.

8.21. В бригаде двадцать три рабочих, среди них шесть женщин. Выбирают по списку десять рабочих. Найти вероятность того, что среди них окажется:

а) четыре женщины; б) более четырех женщин; в) хотя бы одна женщина.

8.22. Устройство состоит из семи элементов, два из которых изношены. При включении устройства включаются случайным образом четыре элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся:

а) три неизношенных элемента; б) хотя бы один изношенный элемент; в) не менее двух неизношенных элементов.

8.23. Из 40 винтовок 17 имеют оптический прицел. Для учений было выдано 30 винтовок. Найти вероятность того, что будут выданы:

а) все винтовки с оптическим прицелом; б) хотя бы одна винтовка с оптическим прицелом; в) не менее 15 винтовок с оптическим прицелом.

8.24. Студент знает 35 из 50 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает:

а) два вопроса, содержащиеся в его экзаменационном билете, который состоит из трех вопросов; б) хотя бы один вопрос; в) не более двух вопросов.

8.25. Для участия в легкоатлетической эстафете выбраны шесть девушек и семь юношей. Трое из них были оставлены в качестве запасных. Какова вероятность того, что среди оставшихся:

а) две девушки; б) хотя бы один юноша; в) не менее двух юношей?

8.26. Из ящика, содержащего 15 изделий первого сорта и 8 – второго, вынимают сразу 5 деталей. Найти вероятность того, что среди них будет:

а) две детали первого сорта; б) не более трех деталей второго сорта; в) хотя бы одна деталь первого сорта.

8.27. В оружейной из 53 пистолетов 35 пистолеты марки «Макарова». Для учений было выдано 42 пистолета. Найти вероятность того, что среди выданных окажется:

а) 30 пистолетов марки «Макарова»; б) не менее 30 пистолетов марки «Макарова»; в) хотя бы один пистолет не марки «Макарова».

8.28. Группа студентов состоит из 5 отличников, 12 хорошо успевающих и 8 занимающихся слабо. По списку выбирают 7 студентов. Какова вероятность того, что среди выбранных студентов окажутся:

а) только хорошо успевающие студенты; б) шестеро отличников.

8.29. Библиотека состоит из десяти различных книг, причем 5 книг стоят по 400 рублей каждая, 3 книги – по 100 рублей и 2 книги – по 200 рублей. Найти вероятность того, что взятые наугад 3 книги стоят:

а) 500 рублей; б) не более 500 рублей; в) не менее 1000 рублей.

8.30. В ящике 100 болтов диаметром d=4 см и 10 болтов диаметром d=6 см. Наудачу извлекают три болта. Какова вероятность того, что среди них:

а) два болта диаметром d=6 см; б) хотя бы один болт диаметром d=4 см; в) не более двух болтов диаметром d=6 см?

ЗАДАЧА 9. Слово составлено из карточек, на каждой из которых написана одна буква. Карточки смешивают и вынимают без возврата по одной. Найти вероятность того, что карточки с буквами вынимаются в порядке следования букв заданного слова:

9.1.	а) «теория»;	б) «математика».
9.2.	а) «событие»;	б) «алгебра».
9.3.	а) «весна»;	б) «статистика».

9.4.	а) «круг»;	б) «геометрия».
9.5.	а) «книга»;	б) «семестр».
9.6.	а) «план»;	б) «сессия».
9.7.	а) «формула»;	б) «староста».
9.8.	а) «гипотеза»;	б) «тригонометрия».
9.9.	а) «диплом»;	б) «цилиндр».
9.10.	а) «апельсин»;	б) «кандидат».
9.11.	а) «призма»;	б) «уравнение».
9.12.	а) «конус»;	б) «перестановка».
9.13.	а) «декан»;	б) «комиссия».
9.14.	а) «число»;	б) «студент».
9.15.	а) «цифра»;	б) «перемена».
9.16.	а) «билет»;	б) «вопрос».
9.17.	а) «точка»;	б) «телефон».
9.18.	а) «сфера»;	б) «эллипсоид».
9.19.	а) «гипербола»;	б) «парабола».
9.20.	а) «деталь»;	б) «пирамида».
9.21.	б) «синусоида»;	б) «периметр».
9.22.	а) «ромб»;	б) «параллелограмм».
9.23.	а) «корень»;	б) «профессор».
9.24.	а) «площадь»;	б) «теорема».
9.25.	а) «качество»;	б) «параболоид».
9.26.	а) «экзамен»;	б) «инженер».
9.27.	а) «интеграл»;	б) «предприятие».
9.28.	а) «учебник»;	б) «задача».
9.29.	а) «книга»;	б) «решение».
9.30.	а) «угол»;	б) «карандаш».

Задача 10. Из колоды в 36 карт берут наудачу 5 карт. Найти вероятность того, что среди взятых карт будут:

10.1. Все карты одной масти или не менее трех десяток;

10.2. Три дамы и два валета или все карты бубновой масти;

10.3. Хотя бы один король или ровно три трефы;

10.4. Одна пики, две трефы, две бубны или все карты масти

10.5. Четыре карты одной масти или ровно две пики;

10.6. По одной карте от десятки до туза;

10.7. Три карты одного достоинства;

10.8. Четыре трефы, включая короля и туза;

10.9. Две трефы и три пики или четыре туза;

10.10. Три шестерки и две семерки или хотя бы одна дама;

10.11. Два туза и два короля или ровно три шестерки;

10.12. Четыре туза или хотя бы два короля;

10.13. Не менее трех тузов или ровно две дамы;

10.14. Туз и король одной масти или четыре карты масти пики;

10.15. Три карты одной масти или не менее двух дам;

10.16. Не более двух королей или все карты масти трефы;

10.17. Не менее трех дам или три туза;

10.18. Две трефы и две пики или хотя бы два туза;

10.19. Не более трех карт масти пики;

10.20. Более трех тузов или все карты бубновой масти;

10.21. Не менее одной и не более трех дам;

10.22. Хотя бы один туз или все шестерки;

10.23. Менее трех десяток или все карты масти черви;

10.24. Один валет черной масти или две дамы красной масти;

10.25. Две дамы или хотя бы три короля;

10.26. Не более двух тузов или три семерки;

10.27. Не менее двух дам или все семерки;

10.28. Три карты масти пики или четыре туза;

10.29. Не будет ни одной шестерки или хотя бы один валет;

10.30. Не менее четырех карт масти пики.

<u>Задача 11.</u> *Варианты 1-15.*

Брошены одновременно три игральные кости. Найти вероятность событий:

11.1. а) ни на одной кости не выпадет 6 очков;

б) сумма выпавших очков не превышает 7.

11.2. а) хотя бы на одной кости выпадет число пять;

б) сумма выпавших очков не более 5.

11.3. а) выпадет одинаковое число очков;

б) сумма выпавших очков менее 7.

11.4. а) выпадет 2 единицы и одна тройка;

б) выпадут только нечетные цифры или хотя бы одна 6.

11.5. а) выпадут только две одинаковые цифры;

б) сумма выпавших очков не менее 12.

11.6. а) выпадут три одинаковые цифры;

б) произведение выпавших очков не превосходит 8.

11.7. а) хотя бы на одной кости выпадет четная цифра;

б) выпадут только четные цифры или хотя бы одна двойка.

11.8. а) сумма выпавших очков равна 7;

б) хотя бы на двух костях выпадет 2 очка.

11.9. а) сумма выпавших очков больше, чем их произведение;

б) хотя бы на одной кости выпадет четное число очков.

11.10. а) хотя бы на одной кости выпадет нечетное число очков;

б) сумма выпавших очков кратна 5.

11.11. а) выпадут две четные и одна нечетная цифры;

б) сумма выпавших очков не менее 15.

11.12. а) выпадут одна четная и две нечетные цифры;

б) сумма выпавших очков кратна 6.

11.13. а) выпадут только числа, кратные 3;

б) произведение числа очков не превосходит 5.

11.14. а) хотя бы на одной кости выпадет 5 очков;

б) сумма выпавших очков не превосходит 8.

11.15. а) хотя бы на двух костях выпадет 6 очков;

б) произведение числа очков делится на 5.

Варианты 16-30.

В урне 10 белых и 8 черных шаров. Наудачу извлекают 5 шаров. Найти вероятность того, что среди выбранных шаров будут:

11.16.	а) все шары одного цвета;	б) хотя бы один черный шар.
11.17.	а) два белых и три черных;	б) не более трех черных.
11.18.	а) белых больше, чем черных;	б) хотя бы два белых.
11.19.	а) все шары черного цвета;	б) три белых или четыре черных.
11.20.	а) ровно три черных;	б) два белых или хотя бы один черный.
11.21.	а) менее трех черных шаров;	б) все белые или два черных.
11.22.	а) не менее трех белых шаров;	б) два белых или хотя бы один черный.
11.23.	а) не более двух черных шаров;	б) хотя бы три из вынутых шаров белые.

11.24.	а) ровно два белых шара;	б) три черных или хотя бы два белых.
11.25.	а) более трех черных шаров;	б) хотя бы один белый или все черные.
11.26.	а) ровно три черных шара;	б) один белый или все белые.
11.27.	а) не более одного черного;	б) хотя бы два из вынутых шаров черные.
11.28.	а) один белый и четыре черных;	б) хотя бы четыре черных или все белые.
11.29.	а) хотя бы один черный;	б) один черный или все черные.
11.30.	а) ровно два белых;	б) хотя бы три черных или все белые.

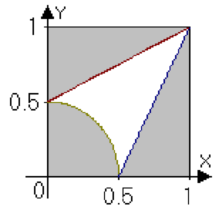
ЗАДАЧА 12. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает k. Найти вероятность того, что произведение этих чисел xy не больше l, а частное y/x не больше s.

12.1.	κ=6; l=2; s=8.	**12.2.**	κ=6; l=2; s=5.	**12.3.**	κ=10; l=5; s=6.
12.4.	κ=10; l=6; s=6.	**12.5.**	κ=4; l=3; s=3.	**12.6.**	κ=6; l=2; s=8.
12.7.	κ=8; l=4; s=4.	**12.8.**	κ=10; l=4; s=4.	**12.9.**	κ=9; l=3; s=5.
12.10.	κ=10; l=4; s=9.	**12.11.**	κ=5; l=2; s=4.	**12.12.**	κ=10; l=4; s=3.
12.13.	κ=10; l=6; s=6.	**12.14.**	κ=6; l=3; s=6.	**12.15.**	κ=5; l=1; s=5.
12.16.	κ=8; l=4; s=6.	**12.17.**	κ=5; l=1; s=2.	**12.18.**	κ=4; l=1; s=6.
12.19.	κ=12; l=5; s=4.	**12.20.**	κ=7; l=3; s=5.	**12.21.**	κ=5; l=2; s=4.

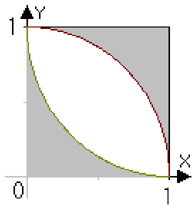
12.22.	$\kappa=5$; $l=2$; $s=5$.	**12.23.**	$\kappa=5$; $l=2$; $s=5$.	**12.24.**	$\kappa=4$; $l=4$; $s=4$.
12.25.	$\kappa=9$; $l=4$; $s=6$.	**12.26.**	$\kappa=10$; $l=4$; $s=2$.	**12.27.**	$\kappa=5$; $l=1$; $s=9$.
12.28.	$\kappa=4$; $l=4$; $s=8$.	**12.29.**	$\kappa=6$; $l=3$; $s=3$.	**12.30.**	$\kappa=3$; $l=6$; $s=6$.

<u>ЗАДАЧА 13.</u> Найти вероятность того, что точка $M(x,y)$, брошенная наудачу в единичный квадрат, попадет в закрашенную область.

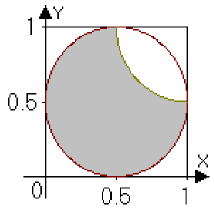
13.1.



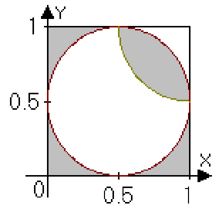
13.2.



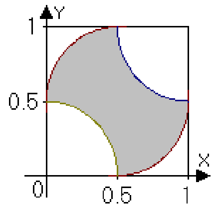
13.3.



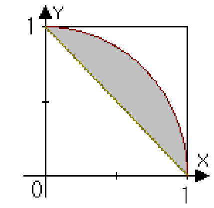
13.4.



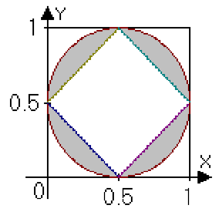
13.5.



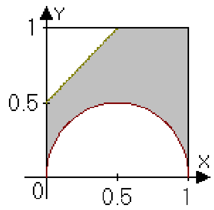
13.6.



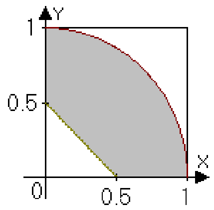
13.7.



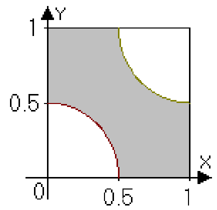
13.8.



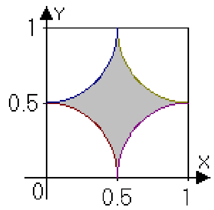
13.9.



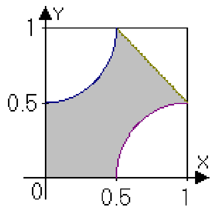
13.10



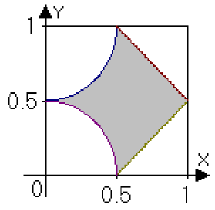
13.11.



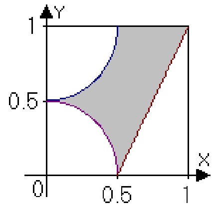
13.12.



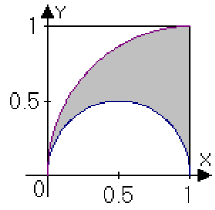
13.13



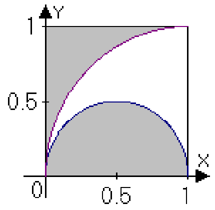
13.14.



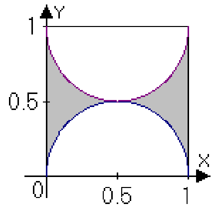
13.15.



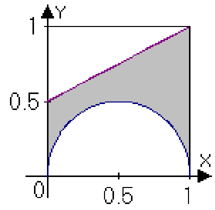
13.16



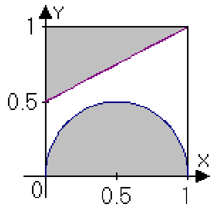
13.17.



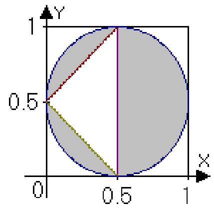
13.18.



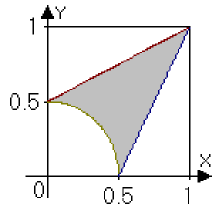
13.19



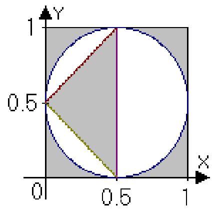
13.20.



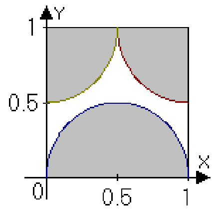
13.21.



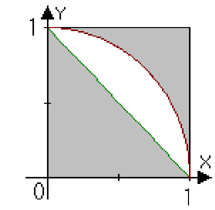
13.22



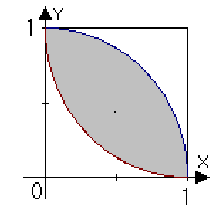
13.23.



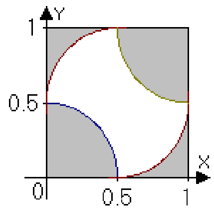
13.24.



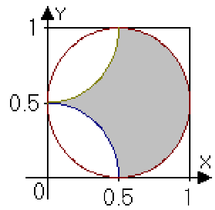
13.25



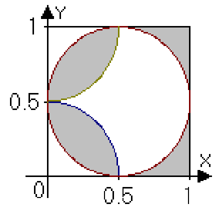
13.26.



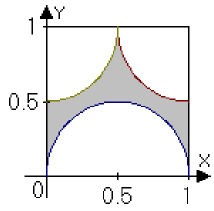
13.27.



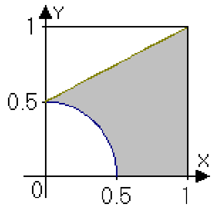
13.28



13.29.

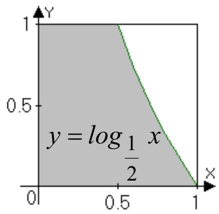


13.30.

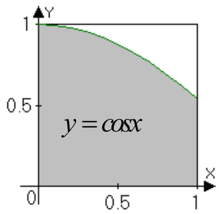


ЗАДАЧА 14. Внутри квадрата с вершинами (0,0), (1,0), (1,1) и (0,1) наудачу выбирается точка *M* (*x*, *y*). Найти вероятность события, что *M* принадлежит закрашенной области.

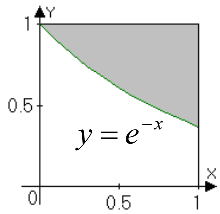
14.1.



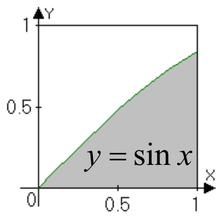
14.2.



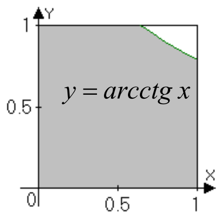
14.3.



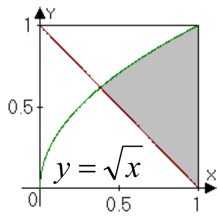
14.4.



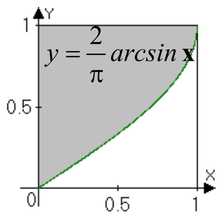
14.5.



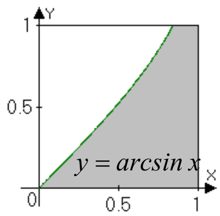
14.6.



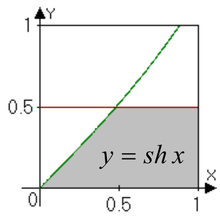
14.7.



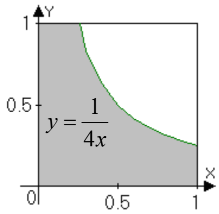
14.8.



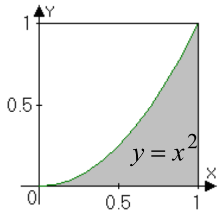
14.9.



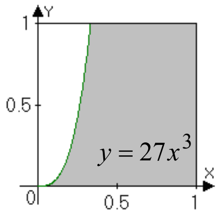
14.10



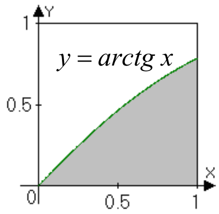
14.11.



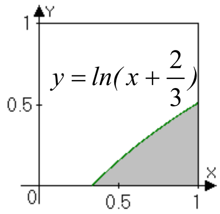
14.12.



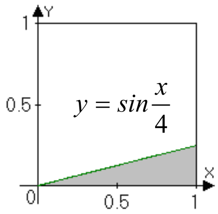
14.13



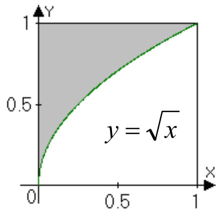
14.14.



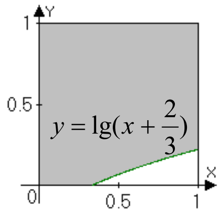
14.15.



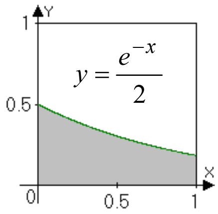
14.16



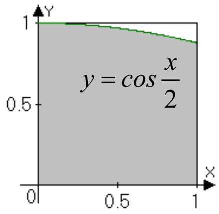
14.17.



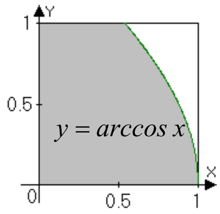
14.18.



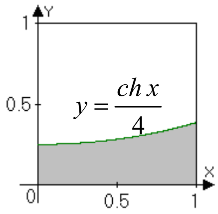
14.19



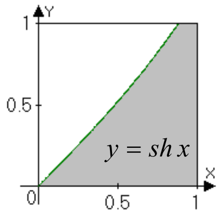
14.20.



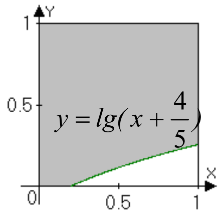
14.21.



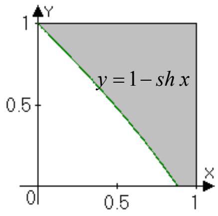
14.22



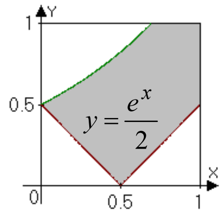
14.23.



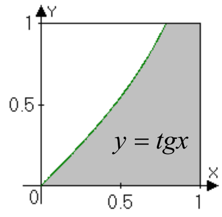
14.24.



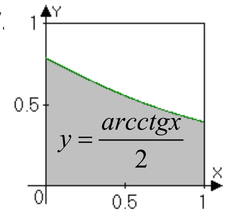
14.25



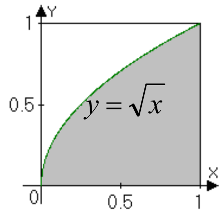
14.26.



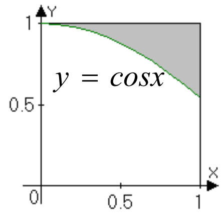
14.27.



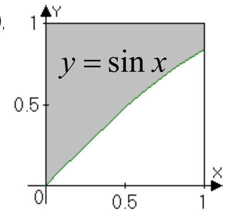
14.28



14.29.



14.30.



<u>ЗАДАЧА 15.</u> В тело V_1 брошена наудачу точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри тела V_2 $(V_2 \subseteq V_1)$. Предполагается, что вероятность попадание точки внутрь тела V_2 пропорциональна объему этого тела.

15.1. $V_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 9;$ $\quad V_2 : 9z/2 = x^2 + y^2.$

15.2. $V_1 : z = 10 - x^2 - y^2, \;\; 0 \le z \le 10;$ $\quad V_2 : z = 3\sqrt{x^2 + y^2}.$

15.3. $V_1 : x^2 + y^2 = 2y, \;\; z = 0, z = 2;$ $\quad V_2 : z \le \sqrt{x^2 + y^2}.$

15.4. $V_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 16;$ $\quad V_2 : z = \sqrt{\left(x^2 + y^2\right)/15}.$

15.5. $V_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 25;$ $\quad V_2 : x^2 + y^2 = 21, \; 1 \le z \le 5.$

15.6. $V_1 : x^2 + y^2 + 2x = 0, \;\; z = 0, z = 2;$ $\quad V_2 : z \ge \sqrt{x^2 + y^2}.$

15.7. $V_1: z=\frac{5}{2}-x^2-y^2,\ \ 0\le z\le\frac{5}{2};$ $V_2: z=3\sqrt{x^2+y^2}\,/\,2.$

15.8. $V_1: x^2+y^2+z^2=64;$ $V_2: z\ge\sqrt{\left(x^2+y^2\right)/15}.$

15.9. $V_1: x^2+y^2+2x=0,\ \ z=0, z=\frac{25}{4};$ $V_2: z\le\frac{25}{4}-y^2.$

15.10. $V_1: x^2+y^2+z^2=64;$ $V_2: z\le\sqrt{\left(x^2+y^2\right)/3}.$

15.11. $V_1: x^2+y^2=y, x^2+y^2=4y,\ z=0, z=4;$ $V_2: z\le\sqrt{x^2+y^2}.$

15.12. $V_1: x^2+y^2+z^2=36;$ $V_2: z\ge\sqrt{\left(x^2+y^2\right)/99}.$

15.13. $V_1: x^2+y^2=4y, x^2+y^2=7y,\ z=0, z=7;$ $V_2: z\ge\sqrt{x^2+y^2}.$

15.14. $V_1: x^2+y^2+z^2=49;$ $V_2: z\le\sqrt{\left(x^2+y^2\right)/24}.$

15.15. $V_1: x^2+y^2+z^2=36;$ $V_2: z=\sqrt{\left(x^2+y^2\right)/3}.$

15.16. $V_1: x^2+y^2+z^2=49;$ $V_2: x^2+y^2=60,\ 1\le z\le 8.$

15.17. $V_1: x^2+y^2+z^2=64;$ $V_2: 12z=x^2+y^2.$

15.18. $V_1: z=16-x^2-y^2,\ \ 0\le z\le 16;$ $V_2: z=6\sqrt{x^2+y^2}.$

15.19. $V_1: x^2+y^2+z^2=49;$ $V_2: z\le\sqrt{\left(x^2+y^2\right)/3}.$

15.20. $V_1: x^2+y^2+z^2=1;$ $V_2: \frac{3z}{2}=x^2+y^2.$

15.21. $V_1: x^2 + y^2 + z^2 = 36;$ $V_2: x^2 + y^2 = 27,\ 2 \le z \le 6.$

15.22. $V_1: x^2 + y^2 + z^2 = 100;$ $V_2: z \le -\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)/99}.$

15.23. $V_1: z = 22 - x^2 - y^2,\ \ 0 \le z \le 22;$ $V_2: z = 9\sqrt{x^2 + y^2}.$

15.24. $V_1: x^2 + y^2 + z^2 = 100;$ $V_2: z \ge -\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)/3}.$

15.25. $V_1: x^2 + y^2 + z^2 = 49;$ $V_2: x^2 + y^2 = 33,\ 3 \le z \le 7.$

15.26. $V_1: x^2 + y^2 + z^2 = 169;$ $V_2: z \ge -\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)/24}.$

15.27. $V_1: x^2 + y^2 + z^2 = 64;$ $V_2: x^2 + y^2 = 39,\ 4 \le z \le 8.$

15.28. $V_1: x^2 + y^2 + z^2 = 121;$ $V_2: z \ge -\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)/24}.$

15.29. $V_1: x^2 + y^2 + z^2 = 64;$ $V_2: z \ge -\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)/35}.$

15.30. $V_1: x^2 + y^2 + z^2 = 25;$ $V_2: x^2 + y^2 = 21,\ 1 \le z \le 5.$

ЗАДАЧА 16. Действительная и мнимая части комплексного числа $z = x + iy$ произвольным образом выбираются из отрезка $[0,4]$. Найти вероятность того, что выполняется условие

16.1. $\operatorname{Re}[1/z] > 1/2$. **16.2.** $\operatorname{Re}[(1-2i)z] \le 2$. **16.3.** $\operatorname{Im}[(2+i)z] > 1$.

16.4. $4 \le z \cdot \bar{z} \le 9$. **16.5.** $\arg[z - 1 + i] \ge \pi/4$. **16.6.** $\operatorname{Re}[(1-i)z] \le 2$.

16.7. $\mathrm{Re}\left[(1-2i)z\right]\ge 1/2$. **16.8.** $\mathrm{Re}\left[(1-2i)z\right]<1$. **16.9.** $|z-1-2i|\le 1$.

16.10. $|z-1-i|>1$. **16.11.** $\mathrm{Re}(1/z)<1/2$. **16.12.** $\mathrm{Im}\left[4z(1+i)\right]\le 2$.

16.13. $|\arg z|<\pi/6$. **16.14.** $|z-i|>1$. **16.15.** $|\arg z|>\pi/4$.

16.16. $|z|\ge 2\,\mathrm{Im}\,z$. **16.17.** $0\le \arg z\le \pi/6$. **16.18.** $|z-2|>2$.

16.19. $\mathrm{Re}\left[(2-i)z\right]<1$. **16.20.** $\mathrm{Im}\left[(1+i)z\right]>1$. **16.21.** $\mathrm{Im}\left[(1-i)z\right]>1/2$.

16.22. $\mathrm{Im}\left[(2+i)z\right]>2$. **16.23.** $|z-1|>1$. **16.24.** $\mathrm{Re}\left[(1+2i)z\right]\ge 0$.

16.25. $\mathrm{Re}\left[3z(1-i)\right]\ge 2$. **16.26.** $\mathrm{Im}\left[2z(1-i)\right]\le 1$. **16.27.** $\mathrm{Re}\left[(1-2i)z\right]\le 1$.

16.28. $1\le z\cdot\bar{z}\le 4$. **16.29.** $|z|>3/2$. **16.30.** $|z|\le 2\,\mathrm{Re}\,z$.

<u>Задача 17.</u>

17.1. Вероятность выполнить месячный план по заготовке молока у одного фермера равна 0,95, а у другого фермера – 0,97. Какова вероятность того, что месячный план будет выполнен:

а) одним фермером; б) двумя фермерами; в) хотя бы одним фермером?

17.2. Из аэропорта отправились два автобуса-экспресса. Вероятность своевременного прибытия каждого автобуса в аэропорт равна 0,95. Найти вероятность того, что:

а) оба автобуса прибудут вовремя; б) только один автобус прибудет вовремя;

г) хотя бы один автобус прибудет вовремя.

17.3. Три стрелка произвели по одному выстрелу. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,9, вторым – 0,8, третьим

– 0,7. Найти вероятность того, что: а) только один из стрелков попадет в цель; б) только два стрелка попадут в цель; в) все три стрелка попадут в цель.

17.4. Экспедиция издательства отправила газеты в 3 почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,9, во второе – 0,9. в третье – 0,8. Найти вероятность событий : а) только одно отделение получит газеты вовремя; б) хотя бы одно отделение получит газеты вовремя.

17.5. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. При аварии первый сигнализатор сработает с вероятностью 0,8; второй – 0,9. Найти вероятность того, что при аварии сработает:

а) один сигнализатор; б) два сигнализатора; в) хотя бы один сигнализатор.

17.6. ОТК проверяет партии деталей, изготовленные тремя рабочими. Вероятность того, что будет признана годной партия, изготовленная первым рабочим, составляет 0,97. Аналогичные вероятности для партий, изготовленных вторым и третьим рабочими, равны соответственно 0,95 и 0,92. Какова вероятность того, что среди трёх партий деталей (по одной, изготовленной каждым рабочим) окажутся забракованными:

а) одна партия деталей; **б)** две партии деталей;

в) хотя бы одна партия деталей?

17.7. На автозаправку бензин может поступать с четырех нефтеперерабатывающих заводов. Вероятность поступления бензина с первого завода равна 0,2, со второго – 0,4, с третьего – 0,5, с четвертого – 0,1. Найти вероятность того, что на автозаправку бензин поступит:

а) со всех четырех заводов; б) только с одного завода;

в) не поступит ни с одного завода; г) поступит хотя бы с одного завода.

17.8. Для продуктового магазина куплены два холодильника. Вероятность того, что каждый из них выдержит гарантийный срок службы составляет 90%. Какова вероятность того, что в течении гарантийного срока:

а) оба холодильника не потребуют ремонта;

б) только один потребует ремонта; в) хотя бы один не потребует ремонта?

17.9. Для трех розничных торговых предприятий определен плановый уровень прибыли. Вероятность того, что первое предприятие выполнит план прибыли, равна 90%, для второго она составляет 95%, для третьего 100%. Какова вероятность того, что плановый уровень прибыли достигнут:

а) всеми предприятиями; б) только двумя предприятиями;

в) хотя бы одним предприятием.

17.10. Банк имеет три отделения. Вероятность того, что первое отделение закажет на завтра крупную сумму денег, равна 0,2; для второго отделения эта вероятность равна 0,3; для третьего отделения – 0,25. В конце рабочего дня один из вице-президентов банка знакомится с поступившими заявками. Какова вероятность, что будет:

а) одна заявка; б) две заявки; б) хотя бы две заявки.

17.11. Эксперт оценивает качественный уровень трех видов изделий по потребительским признакам. Вероятность того, что изделию первого вида будет присвоен знак качества, равна 0,9; для изделия второго вида эта вероятность равна 0,8; а для изделия третьего вида 0,7. Найти вероятность того, что знак качества будет присвоен: а) всем изделиям; б) только одному изделию; в) хотя бы одному изделию.

17.12. В городе три коммерческих банка, оценка надежности, которых – 0,95, 0,90 и 0,85 соответственно. Найти вероятность того, что в течение года:

а) обанкротятся все три банка; б) обанкротится один банк;

в) обанкротится хотя бы один банк?

17.13. Покупатель приобрел пылесос и полотер. Вероятность того, что пылесос не выйдет из строя в течение гарантийного срока, равна 0,95, а для полотера она составляет 0,8. Найти вероятность того, что:

а) оба прибора выдержат гарантийный срок;

б) только один прибор выдержит гарантийный срок;

в) хотя бы один прибор выдержит гарантийный срок.

17.14. Станция метрополитена оборудована тремя независимо работающими эскалаторами. Вероятность безотказной работы в течение дня для первого эскалатора равна 0,9, для второго – 0,95, для третьего – 0,85.Найти вероятность того, что в течение дня произойдет поломка:

а) одного эскалатора; б) двух эскалаторов; в) не более одного эскалатора.

17.15. Маша пришла на экзамен, зная ответы на 20 вопросов программы из 25. Профессор задаёт три вопроса. Найти вероятности следующих событий:

а) Маша ответит на все три вопроса; б) Маша ответит на два вопроса;

в) Маша ответит на один вопрос; г) Маша ответит хотя бы на один вопрос;

д) Маша не ответит ни на один вопрос.

17.16. Нужная студенту формула содержится в трех справочниках. Вероятность того, что формула содержится в первом, втором и третьем справочниках, равна соответственно 0,6; 0,7; 0,8.Найти вероятность того, что нужная формула содержится:

а) не менее чем в двух справочниках, б) хотя бы в одном справочнике.

17.17. Вероятность своевременного выполнения студентом контрольной работы по каждой из трех дисциплин равна соответственно 0,6; 0,5; 0,8. Найти вероятность своевременного выполнения контрольной работы студентов:

а) по двум дисциплинам; б) хотя бы по двум дисциплинам;

в) хотя бы по одной дисциплине.

17.18. Вероятность для компании, занимающейся строительством терминалов для аэропортов, получить контракт в стране A равна 0,4; вероятность выиграть его в стране B равна 0,3. Вероятность того, что контракты будут заключены и в стране A и в стране B, равна 0,12. Чему равна вероятность того, что:

а) компания получит контракт хотя бы в одной стране;

б) не получит ни одного контракта; в) получит контракт только в одной стране.

17.19. Охотник выстрелил три раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в нее в начале стрельбы равна 0,8, а после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Найти вероятность того, что он:

а) промахнется все три раза; б) попадет хотя бы один раз; в) попадет два раза.

17.20. В мастерской работают два мотора, независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа первый мотор не потребует ремонта 0,85, а для второго мотора – 0,8. Найти вероятность того, что в течение часа:

а) ни один из моторов не потребует ремонта; б) оба мотора потребуют ремонта;

в) только один мотор потребует ремонта.

17.21. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу определенного продукта по каждому из трех центральных телевизионных каналов, равна 0,05. Предполагается, что эти события – независимы в совокупности. Чему равна вероятность того, что потребитель увидит рекламу:

а) по трем каналам; б) по двум каналам; в) хотя бы по одному из этих каналов?

17.22. В автопробеге участвуют три автомобиля. Первый может сойти с маршрута с вероятностью 0,15; второй и третий с вероятностью 0,05 и 0,1. Найти вероятность того, что к финишу прибудут: а) только один автомобиль; б) два автомобиля; в) по крайней мере, два автомобиля.

17.23. Для трех розничных торговых предприятий определен плановый уровень прибыли. Вероятность того, что первое предприятие выполнит план прибыли, равна 90%, для второго она составляет 95%, для третьего 100%. Какова вероятность того, что плановый уровень прибыли будет достигнут:

а) всеми предприятиями; б) только двумя предприятиями;

в) хотя бы одним предприятием?

17.24. Модельер, разрабатывающий новую коллекцию одежды к весеннему сезону, создает модели в зеленой, черной и красной цветовой гамме. Вероятность того, что зеленый цвет будет в моде весной, модельер оценивает в 0,3, что черный – в 0,2, а вероятность того, что будет моден красный цвет – в 0,15. Предполагая, что цвета выбираются независимо друг от друга, оцените вероятность того, что цветовое решение коллекции будет удачным:

а) по одному из выбранных цветов; б) по двум выбранным цветам;

в) по хотя бы по одному из выбранных цветов.

17.25. Экспедиция издательства отправила газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,95, во второе отделение – 0,9 и в третье – 0,8. Найти вероятность того, что газеты получат вовремя: а) только одно отделение; б) два отделения; в) хотя бы одно отделение.

17.26. В цехе работают три станка. Вероятность отказа в течение смены для первого станка равна 0,1; для второго станка – 0,2 и для третьего – 0,15. Найти вероятность того, что в течение смены безотказно проработают:

а) только один станок; б) два станка; в) хотя бы один станок.

17.27. В цехе три участка. Вероятность невыполнения плана первым участком составляет 0,02; для второго и третьего участков эта вероятность соответственно равна 0,05 и 0,01. Найти вероятность того, что к моменту подведения итогов работы плановое задание будет выполнено:

а) только одним участком; б) двумя участками; в) хотя бы одним участком.

17.28. Заводом послана автомашина за различными материалами на четыре базы. Вероятность наличия нужного материала на первой базе равна 0,9; на второй – 0,92; на третьей – 0,8; на четвертой – 0,7. Найти вероятность того, что:

а) только на одной базе не окажется нужного материала;

б) хотя бы на одной базе окажется нужный материал.

17.29. В коробке смешаны электролампы одинакового размера и формы: по 100 Вт – 7 штук, по 75 Вт – 14 штук. Вынуты наудачу 3 лампы. Какова вероятность того, что:

а) они одинаковой мощности; б) хотя бы две из них по 100 Вт?

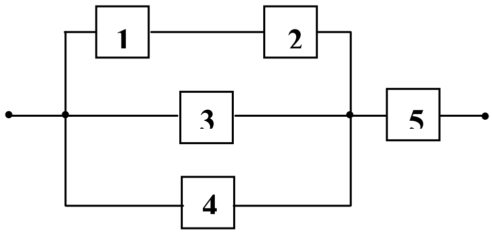
17.30. В двух париях изделий доброкачественных соответственно 39% и 87%. Наудачу выбирают по одному изделию из каждой партии. Какова вероятность обнаружить среди двух выбранных изделий:

а) хотя бы одно бракованное; б) два бракованных;

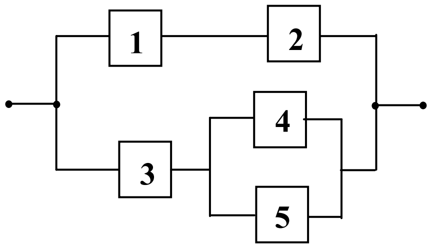
в) одно доброкачественное и одно бракованное?

ЗАДАЧА 18. Приведена схема соединения элементов, образующих цепь с одним входом и одним выходом. Отказы элементов являются независимыми в совокупности событиями. Считается известной надежность p_k k-го элемента (соответственно $q_k = 1 - p_k$ – вероятность его отказа). Отказ любого из элементов приводит к прерыванию сигнала в той ветви цепи, где находится данный элемент. Вычислить надежность p схемы, если: $p_1 = 0{,}6$; $p_2 = 0{,}5$; $p_3 = 0{,}7$; $p_4 = 0{,}6$; $p_5 = 0{,}7$; $p_6 = 0{,}8$.

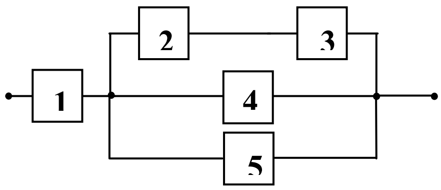
18.1.



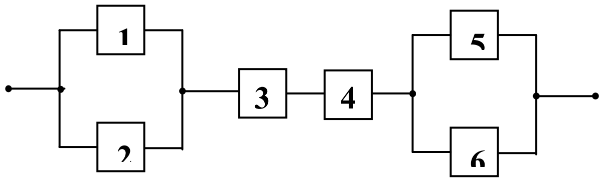
18.2.



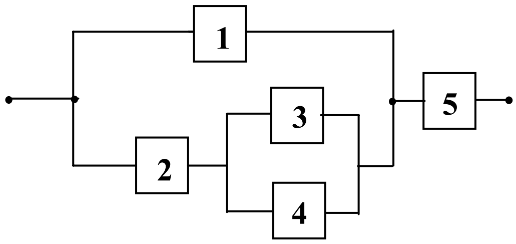
18.3.



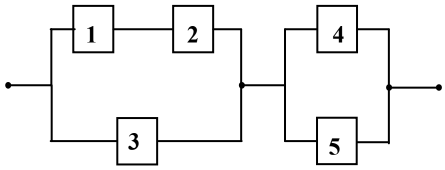
18.4.



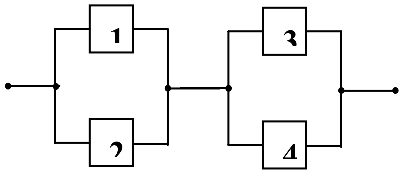
18.5.



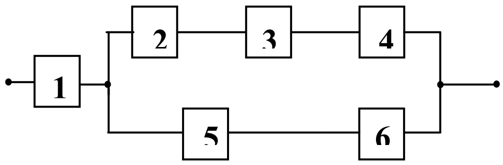
18.6.



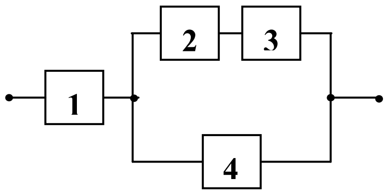
18.7.



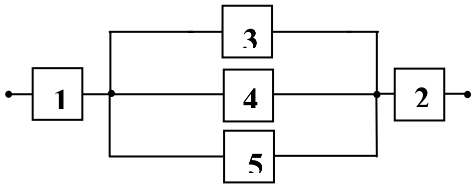
18.8.



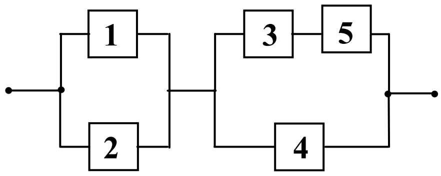
18.9.



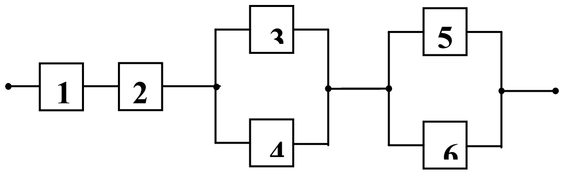
18.10.



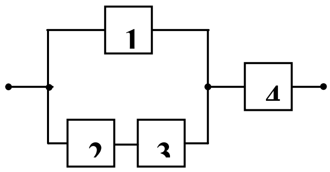
18.11.



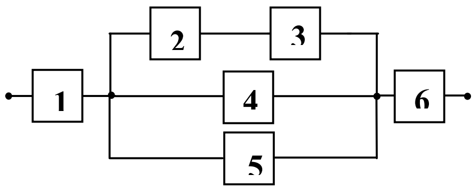
18.12.



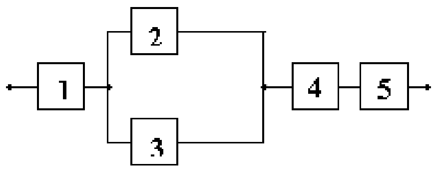
18.13.



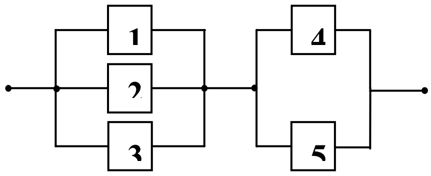
18.14.



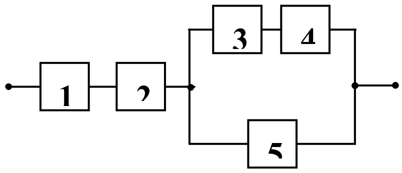
18.15.



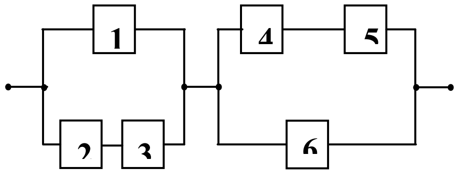
18.16.



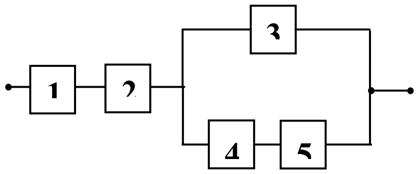
18.17.



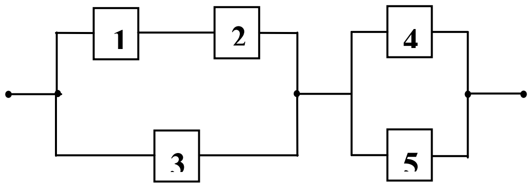
18.18.



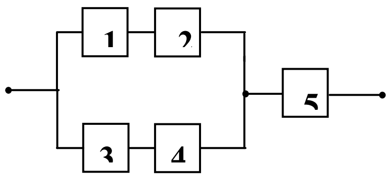
18.19.



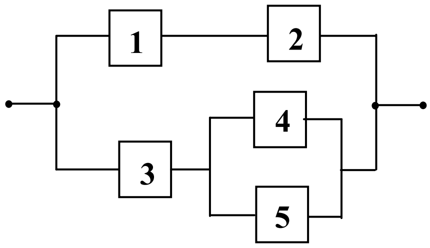
18.20.



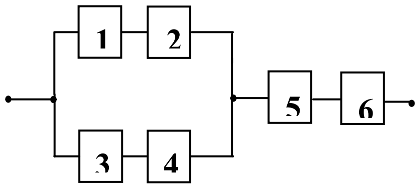
18.21.



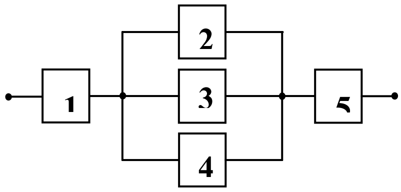
18.22.



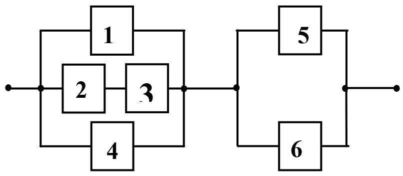
18.23.



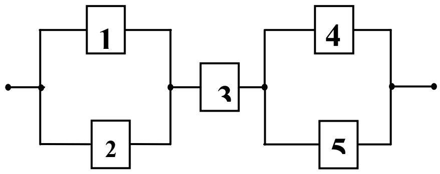
18.24.



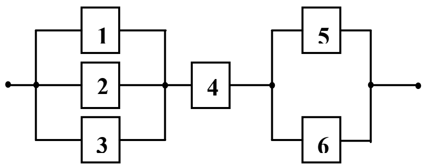
18.25.



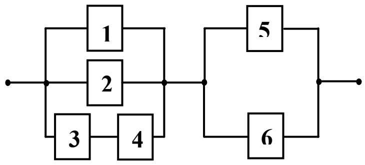
18.26.



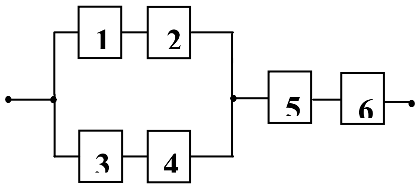
18.27.



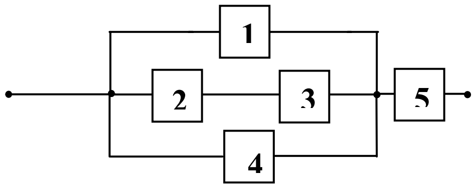
18.28.



18.29.



18.30.



<u>ЗАДАЧА 19.</u>

19.1. Для участия в студенческих отборочных спортивных соревнованиях выделено из первой группы четыре студента, из второй – шесть, из третьей – пять студентов. Вероятность того, что отобранный студент из первой, второй, третьей группы попадет в сборную института, равна соответственно 0,5, 0,4 и 0,3. Какова вероятность того, что наудачу взятый студент попадет в сборную? Если студент попал в сборную, то к какой из трех групп он вероятнее всего принадлежит?

19.2. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трех касс. Вероятности попадания в каждую кассу зависят от их местонахождения и равны соответственно 0,2; 0,5; 0,3. Вероятности того, что в кассах все билеты проданы, равны соответственно 0,6; 0,9; 0,7. Какова вероятность того, что пассажир приобретет билет? Если пассажир приобрел билет, то в какой из трех касс он вероятнее всего купил билет?

19.3. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, вынуты наудачу 2 шара и переложены в урну, содержащую 4 белых и 4 черных шара. Из второй урны наудачу извлекают шар. Чему равна вероятность того, что он белый? Если из второй урны извлечен белый шар, то наиболее вероятно какого цвета шары извлечены из первой урны и переложены во вторую?

19.4. Из числа авиалиний некоторого аэропорта 60% – местные, 30% – по СНГ и 10% – международные. Среди пассажиров местных авиалиний 50% путешествуют по делам, связанным с бизнесом, на линиях СНГ таких пассажиров 60%, на международных - 90%. Из прибывших в аэропорт пассажиров случайно выбирается один. Чему равна вероятность того, что он: а) бизнесмен; б) прибыл из стран СНГ по делам бизнеса; в) прилетел местным рейсом по делам бизнеса; г) если выбранный пассажир оказался бизнесменом, то какова вероятность того, что он прибыл из стран СНГ?

19.5. На трех станках в одинаковых и независимых условиях изготовляют детали одного наименования. На первом станке изготовляют 10%, на втором – 30%, на третьем – 60% всех деталей. Вероятность каждой детали быть качественной равна 0,7, если она изготовлена на первом станке, 0,8 – если она изготовлена на втором станке, 0,9 – если она изготовлена на 3 станке. Найти вероятность того, что наугад взятая деталь окажется качественной. Если случайно взятая деталь качественная, то какова вероятность того, что она изготовлена на третьем станке?

19.6. Часы изготавливаются на трех заводах и поступают в магазин. Первый завод производит 40% продукции, второй – 45%, третий – 15%. В продукции первого завода спешат 80% часов, второго – 70%, третьего – 90%. Какова вероятность того, что купленные часы спешат? Если купленные часы спешат, то вероятнее всего на каком заводе они изготовлены?

19.7. В обувную мастерскую для ремонта приносят сапоги и туфли в соотношении 2:3. Вероятность качественного ремонта для сапог равна 0,9, а для туфель – 0,85. Проведена проверка качества одной пары обуви. Оказалось, что эта пара обуви отремонтирована качественно. Какова вероятность того, что это: а) сапоги; б) туфли?

19.8. В группе из 10 студентов, пришедших на экзамен, 3 подготовлены отлично, 4 – хорошо, 2 – посредственно, 1 – плохо. В билетах 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все вопросы, хорошо подготовленный – на 16, посредственно – на 10, плохо – на 5 вопросов. Какова вероятность того, что наудачу выбранный студент ответит на 3 произвольно заданных вопроса? Найти вероятность того, что ответивший на вопросы студент подготовлен: а) отлично; б) плохо.

19.9. На предприятии работают две бригады рабочих: первая производит в среднем ¾ продукции с процентом брака 4%, вторая – ¼ продукции с процентом брака 6%. Найти вероятность того, что взятое наугад изделие: а) окажется бракованным; б) изготовлено второй бригадой при условии, что изделие оказалось бракованным.

19.10. Деталь, необходимая для сборки прибора, поступает с двух автоматов, производительность которых одинакова. Вычислить вероятность поступления на сборку стандартной детали, если первый из автоматов дает в среднем 8% нарушения стандарта, а второй – 2%. Если случайно взятая деталь качественная, то какова вероятность того, что она изготовлена на первом станке?

19.11. Одинаковые детали поступают на сборку с четырех автоматов, производительности которых относятся как 4:3:2:1 соответственно. Причем первый автомат дает брака – 0,4%, второй – 0,2%, третий – 0,25%, четвертый – 0,5%. Найти вероятность того, что деталь, поступившая на сборку, будет стандартной. Если деталь оказалась стандартной, то какой из двух автоматов ее вероятнее всего изготовил?

19.12. В первой урне находится один белый и девять черных шаров, а во второй – один черный и пять белых шаров. Из каждой урны случайным образом удалили по одному шару, а оставшиеся шары ссыпали в третью урну. Найти вероятность того, что шар, вынутый из третьей урны, окажется белым.

19.13. В магазин поступили обогреватели от трех поставщиков в соотношении 2:3:1. Практика показала, что обогреватели, поступающие от первого, второго и третьего поставщиков, не требуют ремонта в течение гарантийного срока в 90%, 80% и 95% случаев. Какова вероятность того, что проданный обогреватель потребует ремонта в течение гарантийного срока? Какова вероятность того, что он поступил от первого поставщика?

19.14. В продажу поступают телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 20% телевизоров со скрытым дефектом, второго – 10%, третьего – 5%. Какова вероятность приобрести исправный телевизор, если в магазин поступило 30% телевизоров с первого завода, 20% – со второго и 50% – с третьего? Если телевизор исправен, то какой завод вероятнее всего его изготовил?

19.15. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых, проезжающих по тому же шоссе, как 3:5. Известно, что в среднем одна из 30 грузовых и две из 50 легковых машин подъезжают к бензоколонке для заправки. Чему равна вероятность того, что: а) подъехавшая к бензоколонке машина будет заправляться; б) на заправке стоит легковая автомашина; в) на заправке стоит грузовая автомашина?

19.16. На сборку попадают детали, изготовленные тремя автоматами. Известно, что первый автомат дает 0,4%, второй – 0,2%

и третий – 0,6% брака. Найдите вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 500, со второго – 1000 и с третьего – 1250 деталей. Если деталь оказалась бракованной, то какой из трех автоматов ее вероятнее всего изготовил?

19.17. Имеются три одинаковых на вид урны: в первой урне – три белых и четыре черных, во второй – два белых и два черных, в третьей – три белых и один черный. Некто выбирает наугад одну из урн и вынимает из нее шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар оказался белым. Какова вероятность, что извлеченный белый шар принадлежит второй урне?

19.18. Сборщик получил три коробки деталей, изготовленных первым заводом, и две коробки деталей, изготовленных вторым заводом. Вероятность того, что деталь завода №1 стандартна, равна 0,8, завода №2 – 0,9. Сборщик наудачу извлек деталь из случайно взятой коробки. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь. Какова вероятность, что извлеченная деталь изготовлена вторым заводом?

19.19. Имеется 10 одинаковых урн, из которых в 9 находится два черных и два белых шара, а в одной – пять белых и один черный шар. Из наугад взятой урны извлечен шар. Чему равна вероятность того, что этот шар оказался белым? Если шар оказался белым, то какова вероятность того, что он извлечен из урны, содержащей пять белых шаров?

19.20. На первом заводе на каждые 100 лампочек в среднем 10 нестандартных, на втором из 100 – 15 нестандартных; на третьем из 100 – 20 нестандартных. Продукция этих заводов составляет соответственно 50%; 30% и 20% всех электролампочек, приобретенных жителями района. Найти вероятность того, что наудачу приобретенная электролампочка будет стандартной. Если приобретенная лампочка оказалась стандартной, то какой из трех заводов ее вероятнее всего изготовил?

19.21. На химическом заводе установлена система аварийной сигнализации. Когда возникает аварийная ситуация, звуковой сигнал срабатывает с вероятностью 0,95. Звуковой сигнал может сработать случайно и без аварийной ситуации с вероятностью 0,02. Реальная вероятность аварийной ситуации равна 0,004. Какова вероятность того, что звуковой сигнал сработает. Предположим, что звуковой сигнал сработал. Чему равна вероятность реальной аварийной ситуации.

19.22. В магазин привезли яблоки трех сортов. Яблок первого сорта 15 ящиков, второго – 20 ящиков, третьего – 25 ящиков. Среди яблок первого сорта 90%, среди яблок второго сорта – 70%, среди яблок третьего сорта – 60% годных для продажи. Найти вероятность того, что взятое наудачу яблоко из случайно выбранного ящика является годным для продажи. Какова вероятность, что наудачу взятое яблоко годное для продажи, принадлежит первому сорту?

19.23. Вероятность того, что при решении задачи на ЭВМ могут возникнуть ошибки при обработке текста программы транслятором, при работе редактора внешних связей и в процессе исполнения программы относятся как 4:5:1. Вероятности выявления ошибок получаемых в результате трансляции, редактирования и в процессе исполнения соответственно равны 0,8; 0,6; 0,4. Найти вероятность того, что ошибки, возникшие при решении задачи на ЭВМ, будут обнаружены. Если ошибка обнаружена, то какова вероятность, что она допущена в процессе исполнения программы?

19.24. Из десяти студентов, пришедших сдавать экзамен по теории вероятностей и взявших билеты, Иванов и Петров знают 20 билетов из 30, Сидоров плохо занимался весь семестр, и успел повторить только 15 билетов, остальные студенты знают все 30 билетов. По прошествии отведенного времени на подготовку экзаменатор наудачу вызывает отвечать одного из студентов. Он не сдал экзамен. Какова вероятность того, что вызванный студент был Сидоровым, если известно, что знание билета гарантирует сдачу экзамена с вероятностью 0,85, а при незнании билета можно сдать экзамен лишь с вероятностью 0,1?

19.25. Директор компании имеет два списка с фамилиями претендентов на работу. В первом списке – фамилии 6 женщин и 3 мужчин. Во втором списке оказалось 4 женщины и 7 мужчин. Фамилия одного из претендентов случайно переносится из первого списка во второй. Затем фамилия одного из претендентов случайно выбирается из второго списка. Найти вероятность того, что выбрана фамилия мужчины. Если предположить, что эта фамилия принадлежит мужчине, чему равна вероятность того, что из первого списка была перенесена фамилия женщины?

19.26. Экспертно-импортная фирма собирается заключить контракт на поставку сельскохозяйственного оборудования в одну из развивающихся стран. Если основной конкурент фирмы не станет одновременно претендовать на заключение контракта, то вероятность получения контракта оценивается в 0,45; в противном случае – в 0,25. По оценкам экспертов компании вероятность того, что конкурент выдвинет свои предложения по заключению контракта, равна 0,40. Чему равна вероятность заключения контракта? Контракт все же заключен, какова вероятность того, что конкурент выдвигал свои предложения?

19.27. Станок обрабатывает три вида деталей, причем все его время распределяется между ними в отношении 1: 5: 4. При обработке детали первого вида он работает с максимальной для него нагрузкой в течение 70% времени, при обработке детали второго вида – в течение 50% и третьего – 20% времени. В случайно выбранный момент станок работал с максимальной нагрузкой. Определить вероятность того, что он в это время обрабатывал деталь второго вида.

19.28. В семье три дочери – Маша, Люба и Наташа – договорились, что каждый вечер одна из них будет мыть посуду. Старшая дочь, Маша, моет посуду 3 раза в неделю, а остальные девочки – по два раза. Вероятность, что Маша разобьет тарелку равна 0,02. Для Любы и Наташи эти вероятности соответственно равны 0,03 и 0,04. Родители не знают, кто мыл посуду вечером, но услышали звон разбитой тарелки. Помогите родителям выяснить, какова вероятность, что посуду мыла та или иная из дочерей.

19.29. В воскресенье утром Петя решил пригласить одну из своих подруг покататься на лыжах. Маша и Вера согласятся на раннюю прогулку с вероятностью 0,1, а Лена – с вероятностью 0,05. Петя случайным образом набрал номер одной из трех своих подруг, и получил отказ. Какова вероятность, что он позвонил Лене.

19.30. Магазин получает товар от трёх поставщиков: 55% товара поступает от первого поставщика, 20% от второго и 25% от третьего. Продукция, поступающая от первого поставщика, содержит 5% брака, поступающая от второго поставщика – 6% брака, а поступающая от третьего поставщика – 8% брака. Покупатель оставил в книге пожеланий покупателя жалобу о низком качестве приобретённого товара. Найти вероятность того, что плохой товар, вызвавший нарекания покупателя, поступил от второго поставщика.

Задача 20.

20.1. Контрольное задание состоит из пяти вопросов, на каждый из которых дается четыре варианта ответа, причем один из них правильный, а остальные неправильные. Найти вероятность того, что студент не знающий ни одного вопроса, дает: а) три правильных ответа; б) не менее трех правильных ответов; в) хотя бы один правильный ответ. (Предполагается, что студент выбирает ответы наудачу).

20.2. Оптовая база обслуживает девять предприятий. От каждого из них может поступить заявка на товары на текущий день с вероятностью 0.3, независимо от заявок других предприятий. Какова вероятность того, что число заявок на текущий день составит: а) шесть;

б) по крайней мере, шесть? Найти наивероятнейшее число заявок в день и вероятность получения этого числа заявок.

20.3. Батарея произвела семь выстрелов по объекту. Вероятность попадания в объект при одном выстреле равна 0,4. Найти: а) наивероятнейшее число попаданий; б) вероятность наивероятнейшего числа попаданий; в) вероятность того, что объект будет разрушен, если для этого достаточно хотя бы двух попаданий.

20.4. Вероятность поломки одного из пяти работающих независимо друг от друга станков равна 0,2. Если происходит поломка, станок до конца дня не работает. Какова вероятность того, что: а) два станка сломаются в течение дня; б) не менее одного будут работать исправно?

20.5. В цехе пять моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент включено: а) три мотора; б) не менее двух моторов. Найти наивероятнейшее число включенных моторов.

20.6. Вероятность выигрыша по одному билету равна 1/3. Какова вероятность того, что лицо, имеющее шесть билетов, выиграет: а) по трем билетам; б) по крайней мере, по трем билетам?

20.7. Вероятность изготовления стандартной детали на автоматическом станке равна 0,9. Найти вероятность того, что из восьми взятых наудачу деталей окажутся стандартными: а) пять деталей; б) не менее семи деталей; в) хотя бы одна деталь.

20.8. Игральная кость подбрасываются шесть раз. Найти вероятность того, что: а) выпадет четное число не менее двух раз; б) пятерка выпадет три раза; в) шестерка выпадет хотя бы одни раз.

20.9. В урне 10 черных и 5 белых шаров. Испытание заключается в следующем: извлекается шар, фиксируется его цвет, возвращается в урну и тщательно перемешивается. Найти вероятность того, что в трех испытаниях белый шар появится: а) один раз; б) не менее двух раз; в) хотя бы один раз.

20.10. Батарея произвела шесть выстрелов по объекту. Вероятность попадания в объект при одном выстреле равна 0,2. Найти: а) наивероятнейшее число попаданий; б) вероятность наивероятнейшего числа попаданий; в) вероятность того, что объект будет разрушен, если для этого достаточно хотя бы двух попаданий.

20.11. Вратарь парирует в среднем 30% всех одиннадцатиметровых штрафных ударов. Какова вероятность того, что он возьмет из четырех мячей: а) ровно два ; б) хотя бы два; в) не менее трех?

20.12. В хлопке имеется 10% коротких волокон. Какова вероятность того, что в наудачу взятом пучке из четырех волокон окажется: а) два коротких; б) не более двух коротких; в) хотя бы один короткий?

20.13. Заболеваемость гриппом во время эпидемии составила 30%. Какова вероятность, что в студенческой группе из 25 человек заболеют гриппом и не придут на занятие более 15 студентов?

20.14. В результате многолетних наблюдений установлено, что вероятность выпадения дождя 1 октября в данном городе равна 1/7. Определить наивероятнейшее число дождливых дней 1 октября в данном городе за последние десять лет и вычислить соответствующую вероятность.

20.15. Банк имеет пять отделений. Ежедневно с вероятностью 0,3 каждое отделение, независимо от других, может заказать на следующий день крупную сумму денег. В конце рабочего дня один из вице-президентов банка знакомится с поступившими заявками. Найти вероятности следующих событий: а) поступили более двух заявок; б) поступила хотя бы одна заявка. Найти наивероятнейшее число поступивших заявок и вычислить соответствующую вероятность.

20.16. Отрезок АВ разделен точкой С в отношении 3:1. На этот отрезок наудачу брошены четыре точки. Найти вероятность того, что левее точки С окажутся: а) две точки; б) хотя бы одна точка; в) не менее трех точек. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

20.17. В среднем 20% акций на аукционе продается по первоначально заявленной стоимости. Найти вероятность того, что из 10 пакетов акций в результате торгов будут проданы: а) не менее двух пакетов акций; б) три пакета акций; в) хотя бы один пакет акций.

20.18. Каждое из восьми предприятий отрасли выполняет месячный план с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что в конце месяца план выполнят: а) два предприятия; б) по крайней мере, шесть предприятий; в) не менее трех предприятий. Вычислить наивероятнейшее число предприятий, выполнивших план.

20.19. В среднем пятая часть поступающих в продажу автомобилей некомплектны. Найти вероятность того, что среди десяти автомобилей имеют некомплектность: а) три автомобиля: б) менее трех; в) хотя бы один.

20.20. В среднем по 15% договоров страховая компания выплачивает страховую сумму. Найти вероятность того, что из десяти договоров с наступлением страхового случая будет связано с выплатой страховой суммы: а) три договора; б) менее двух договоров; в) не менее трех договоров.

20.21. Вероятность того, что потребитель увидит рекламу определенного продукта по каждому из трех центральных телевизионных каналов, равна 0,05. Предполагается, что эти события – независимы в совокупности. Чему равна вероятность того, что потребитель увидит рекламу: а) по всем трем каналам; б) хотя бы по одному из этих каналов?

20.22. Всхожесть семян данного растения имеет вероятность 0,8. Какова вероятность того, что из пяти посеянных семян взойдет: а) два; б) не менее четырех. Найти наиболее вероятное число прорастающих семян.

20.23. Вероятность того, что баскетболист попадет в корзину, равна 0,8. Найти вероятность того, что из шести бросков он попадет: а) ровно три раза; б) не более трех раз; в) более трех раз.

20.24. Вероятность того, что родившийся ребенок – мальчик, равна 0,51. Какова вероятность того, что в семье из шести детей: а) 4 мальчика и 2 девочки; б) одна или две девочки; в) поровну мальчиков и девочек; г) больше девочек, чем мальчиков?

20.25. Двенадцать раз подбрасывается пара игральных костей. Какова вероятность того, что сумма очков, равная 10, выпадет а) три раза; б) не более трех раз; в) хотя бы один раз?

20.26. В помещении шесть электролампочек. Вероятность того, что каждая лампочка останется неисправной в течение года, равна 0,7. Найти вероятность того, что в течение года придется заменить: а) две лампочки; б) не более трех лампочек. Найти наивероятнейшее число лампочек, которые будут работать в течение года.

20.27. Отмечено, что в городе N в среднем 10% заключенных браков в течение года заканчиваются разводом. Какова вероятность того, что из восьми случайно отобранных пар, заключивших брак в течение года: а) ни одна пара не разведется; б) разведутся не менее трех пар. Найти наивероятнейшее число разведенных пар.

20.28. Из набора домино 5 раз случайным образом выбирается кость, и каждый раз возвращается обратно. Найти вероятность того, что три раза будет вынута кость: а) являющаяся дублем; б) содержащая шестерку; в) не содержащая пятерку.

20.29. Четыре покупателя приехали на оптовый склад.

Вероятность того, что каждому из этих покупателей потребуется холодильник марки «A», равна 0,4. Найти вероятность того, что холодильник потребуется: а) двум покупателям; б) не менее чем двум покупателям.

20.30. Работают четыре магазина по продаже бытовой техники. Вероятность отказа покупателю в магазинах равна 0,1. Считая, что ассортимент товара в каждом магазине формируется не зависимо от других, определить вероятность того, что покупатель получит отказ: а) в двух магазинах; б) хотя бы в одном магазине.

Задача 21.

21.1. По результатам проверок налоговыми инспекциями установлено, что в среднем каждое второе малое предприятие региона имеет нарушение финансовой дисциплины. Найти вероятность того, что из 1000 зарегистрированных в регионе малых предприятий имеют нарушения финансовой дисциплины: а) 450 предприятий; б) не менее 450; в) от 450 до 530.

21.2. Аудиторную работу по теории вероятностей с первого раза успешно выполняют 40% студентов. Найти вероятность того, что из 400 студентов работу успешно выполнят: а) 150 студентов; б) не менее 120 студентов.

21.3. В цехе имеется 80 станков, работающих независимо друг от друга. Для каждого станка вероятность быть включенным равна 0,9. Найти вероятность того, что в некоторый момент времени включенными окажутся: а) не менее 60 станков; б) от 60 до 75 станков. Вычислить наивероятнейшее число включенных станков и соответствующую вероятность.

21.4. При социологических опросах граждан каждый человек, независимо от других, может дать неискренний ответ с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что из 1000 опросов число неискренних ответов будет: а) ровно 220; б) не более 250.

21.5. Вероятность выхода конденсатора из строя в течение времени t равна 0,25. Найти вероятность того, что за этот промежуток времени из имеющихся 150 конденсаторов выйдет из строя: а) 80 конденсаторов; б) от 40 до 80 конденсаторов.

21.6. Из большой партии продукции, содержащей 70% изделий первого сорта, наугад отбирают 100 изделий. Найти вероятность того, что среди отобранных будет не менее 50 и не более 90 изделий первого сорта. Найти наивероятнейшее число изделий первого сорта среди отобранных и вычислить соответствующую вероятность.

21.7. При изготовлении радиоламп в среднем бывает 2% брака. Найти вероятность того, что в партии из 200 ламп имеется: а) две бракованные; б) не более двух бракованных. Вычислить наивероятнейшее число бракованных ламп.

21.8. Вероятность изготовления детали высшего сорта на данном станке равна 0,45. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу 280 деталей окажется высшего сорта: а) 145 деталей; б) не менее 145 деталей.

21.9. Средний процент нарушений работы кинескопа телевизора в течение гарантийного срока равен 22. Найти вероятность того, что из 46 наблюдаемых телевизоров выдержат гарантийный срок: а) 10 телевизоров; б) не менее 36 телевизоров.

21.10. Фабрика выпускает 75% продукции первого сорта. Какова вероятность того, что из 300 изделий число первосортных изделий: а) равно 220; б) не более 220?

21.11. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,4. Найти вероятность того, что цель будет поражена 100 раз из 320 выстрелов. Вычислить наивероятнейшее число попаданий в цель и соответствующую вероятность.

21.12. В вузе обучаются 2560 студентов. Вероятность того, что день рождения студента приходится на определенный день года, равна 1/365. Найти: а) наиболее вероятное число студентов, родившихся 1 сентября и вероятность такого события; б) вероятность того, что, по крайней мере, три студента имеют один и тот же день рождения.

21.13. По данным длительной проверки качества выпускаемых запчастей определенного вида брак составляет 14%. Найти вероятность того, что в непроверенной партии из 150 запчастей пригодных будет: а) 28 штук; б) не менее 22 штук.

21.14. В порту каждые сутки может появиться одно большегрузное судно с вероятностью 0, 15. Вероятность появления более одного судна в течение суток пренебрежимо мала. Какова вероятность того, что за месяц (30 дней) порт посетят: а) четыре судна; б) не более четырех судов?

21.15. Кинотеатр вмещает 730 зрителей. Найти вероятность того, что в день проведения рекламной акции день рождения будет: а) у трех зрителей; б) не менее, чем у трех зрителей.

21.16. Всхожесть семян данного растения равна 0,9. Найти вероятность того, что из 900 посаженных семян: а) прорастет ровно 800; б) число проросших заключено между 790 и 830.

21.17. Вероятность найти белый гриб среди прочих равна 1/4. Какова вероятность того, что: а) среди 300 грибов белых будет 75; б) белых грибов будет не менее 50 и не более 100?

21.18. Вероятность приема каждого из 100 передаваемых сигналов равна 0,75. Найдите вероятность того, что будет принято: а) ровно 70 сигналов; б) от 70 до 80 сигналов.

21.19. В каждой из 1000 урн находится 500 черных и 500 белых шаров. Из каждой урны извлекаются без возвращения три шара. Чему равна вероятность того, что число урн, из которых извлекли одноцветные шары, заключено между 220 и 300?

21.20. Торговый агент предлагает клиентам иллюстрированную книгу. Из предыдущего опыта ему известно, что в среднем 1 из 65 клиентов, которым он предлагает книгу, покупает ее. В течение некоторого промежутка времени он предложил книгу 20 клиентам. Чему равна вероятность того, что он продаст им: а) одну книгу; б) не менее трех книг; в) хотя бы одну книгу?

21.21. На факультете 200 студентов. Вероятность того, что студент не придет на занятия, равна 0,1. Найти вероятность того, что на занятия не явится менее 120 студентов. Найти наивероятнейшее число студентов, не явившихся на занятия, и вероятность этого события.

21.22. Для поступления в университет необходимо успешно сдать вступительные экзамены. В среднем их выдерживают 25% абитуриентов. Предположим, что в приемную комиссию поступило 1800 заявлений. Найти вероятность того, что успешно сдадут экзамены: а) 500 абитуриентов; б) не менее 500 абитуриентов.

21.23. Сборник содержит 350 задач с ответами. В каждом ответе может быть ошибка с вероятностью 0,01. Какова вероятность того, что ответы в четырех задачах даны с ошибками? Найти наивероятнейшее число ошибок и вероятность этого события.

21.24. Какова вероятность того, что в столбике из ста наугад отобранных монет число монет, расположенных "гербом" вверх, будет: а) от 45 до 55; б) ровно 45?

21.25. Прибор состоит из 25 независимо работающих элементов. Вероятность отказа элемента в момент включения прибора равна 0,1. Найти: а) наивероятнейшее число отказавших элементов и соответствующую вероятность; б) вероятность отказа прибора, если для этого достаточно, чтобы отказали хотя бы 8 элементов.

21.26. Авиакомпания знает, что в среднем 5% людей, делающих предварительный заказ на определенный рейс, не будет его использовать. Если авиакомпания продала 160 билетов на самолет, в котором лишь 155 мест, чему равна вероятность того, что место будет доступно для любого пассажира, имеющего заказ и планирующего улететь?

21.27. В партии из 800 арбузов каждый арбуз оказывается неспелым с вероятностью 0,25. Найти вероятность того, что количество спелых арбузов будет: а) равно 400; б) находиться в пределах от 560 до 600.

21.28. На симпозиум приглашены 75 человек, причем каждый из них прибывает с вероятностью 0,8. В гостинице для гостей заказано 65 мест. Какова вероятность того, что все приезжающие будут поселены в гостинице?

21.29. Среди пассажиров маршрутного автобуса №9 в среднем 10 из 100 – льготники. Определить вероятность того, что из 2000 пассажиров, проехавших за день, льготникам окажутся: а) 180 человек; б) от 120 до 220 пассажиров включительно.

21.30. Вероятность выигрыша по облигации займа равна 0,2. Какова вероятность того, что из 80 облигаций выиграют: а) не менее семи облигаций; б) хотя бы две облигации?

Задача 22.

22.1. При наборе слова оператор делает ошибку с вероятностью 0,002. Найти вероятность того, что в набранной статье, состоящей из 3000 слов, будет не более 4 ошибок.

22.2. Вероятность того, что пассажир опоздает к отправлению поезда, равна 0,01. Найти наиболее вероятное число опоздавших из 950 пассажиров и вероятность такого числа опоздавших. Какова вероятность того, что опоздает менее пяти пассажиров?

22.3. На факультете насчитывается 1800 студентов. Какова вероятность того, что 1 сентября является днем рождения одновременно четырех студентов факультета?

22.4. Завод отправил на базу 10000 стандартных изделий. Среднее число изделий, повреждаемых при транспортировке, составляет 0,02%. Найти вероятность того, что из 10000 изделий будет повреждено три изделия.

22.5. Телефонная станция обслуживает 800 абонентов. Вероятность любого из них позвонить в течение часа, равна 0,005. Найти наиболее вероятное число звонков в течение часа и его вероятность.

22.6. В зрительном зале находится 400 человек. Какова вероятность того, что среди них имеется 3 левши, если левши в среднем составляют 0,5%?

22.7. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одной минуты равна 0,003. Найти вероятность того, что в течение одной минуты произойдет не более двух обрывов.

22.8. Устройство состоит из 1000 элементов, работавших независимо один от другого. Вероятность отказа каждого из них в течение времени t равна 0,0025. Найти вероятность того, что за время t откажут от двух до четырех элементов.

22.9. Среди семян ржи 0,4% семян сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 500 семян обнаружить менее 5 семян сорняков?

22.10. Аппаратура содержит 2000 одинаковых надежных элементов, вероятность отказа для каждого из которых равна 0,0005. Какова вероятность отказа аппаратуры, если он наступает при отказе хотя бы одного из элементов?

22.11. На базе получено 10000 электроламп. Вероятность того, что в пути лампа разобьется, равна 0,0003. Найти вероятность того, что среди полученных ламп пять ламп будет разбито.

22.12. Вероятность появления брака при автоматической обработке деталей равна 0,003. Найти вероятность того, что среди 1000 деталей только четыре детали будут бракованными.

22.13. Вероятность нарушения герметичности банки в некоторой партии консервных банок равна 0,0004. Найти вероятность того, что среди 2000 банок окажутся с нарушением герметичности не более трех.

22.14. Вероятность того, что изделие не выдержит испытания, равна 0,001. Найти вероятность того, что из 5000 изделий более чем одно не выдержит испытания.

22.15. Фарфоровый завод отправил на базу 10000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,0001. Найти вероятность того, что на базу придут ровно три негодных изделия.

22.16. Известно, что в среднем из 1 000 выданных кредитов примерно 12 не возвращаются в срок. В текущем году банк выдал 3 000 кредитов. Найти количество кредитов, которые не будут возвращены в срок.

22.17. Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,01. АТС обслуживает 800 абонентов. Какова вероятность, что в течение часа позвонят пять абонентов?

22.18. Вероятность госпитализации пациента при эпидемии гриппа равна 0,002. Найти вероятность того, что из 2000 заболевших поликлиника направит на госпитализацию не более 3 пациентов.

22.19. Владельцы кредитных карт ценят их и теряют весьма редко. Вероятность потерять кредитную карту в течение недели для случайно выбранного вкладчика составляет 0,001. Банк выдал кредитные карты 2 000 клиентам. Найти: а) вероятность того, что за предстоящую неделю будет утеряна ровно одна кредитная карта; б) вероятность того, что за предстоящую неделю будет утеряна хотя бы одна кредитная карта; в) наиболее вероятное число кредитных карт, теряемых за месяц.

22.20. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,001. Найти вероятность того, что среди 200 деталей окажется ровно четыре бракованных и наивероятнейшее число бракованных деталей.

22.21. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найти вероятности того, что магазин получит разбитых бутылок: а) ровно две; б) менее двух; в) хотя бы одну. Вычислить наивероятнейшее число разбитых бутылок.

22.22. На станциях отправления поездов находится 1000 автоматов для продажи билетов. Вероятность выхода из строя одного автомата в течение часа равна 0,002. Какова вероятность того, что в течение часа выйдут из строя три автомата?

22.23. Учебник издан тиражом 10000 экземпляров. Вероятность того, что экземпляр учебника сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит пять бракованных книг.

22.24. Для продвижения своей продукции на рынок фирма раскладывает по почтовым ящикам рекламные листки. Прежний опыт работы фирмы показывает, что примерно в одном случае из 2 000 следует заказ. Найти вероятность того, что при размещении 10 000 рекламных листков поступит хотя бы один заказ.

22.25. В банк поступило 4 000 пакетов денежных знаков. Вероятность того, что пакет содержит недостаточное или избыточное количество денежных знаков, равна 0,0001. Найти: а) вероятность того, что при проверке будет обнаружен хотя бы один ошибочно укомплектованный пакет; б) вероятность того, что при проверке будет обнаружено не более трёх ошибочно укомплектованных пакетов.

22.26. Некоторое электронное устройство выходит из строя, если откажет определенная микросхема. Вероятность ее отказа в течение одного часа работы равна 0,004. Какова вероятность того, что за сто часов работы устройства придется пять раз менять микросхему?

22.27. Пивной завод отправил в магазин 400 ящиков пива. Вероятность того, что ящик будет разбит при транспортировке в данных условиях, равна 0,005. По приезде в магазин экспедитор, перевозивший груз, заявил, что семь ящиков с пивом были разбиты при транспортировке. Размышляя, можно ли доверять экспедитору, директор магазина хочет найти вероятность разбить семь ящиков, вероятность разбить не менее семи ящиков, чтобы оценить возможность потерь, заявленных экспедитором.

22.28. В новом микрорайоне поставлено 10000 домофонов на входных дверях домов. Вероятность выхода из строя одного домофона в течение месяца равна 0,001. Найти вероятность того, что за месяц откажут два, три и не более трех домофонов.

22.29. При массовом производстве элементов электроники вероятность появления брака равна 0,005. Определить вероятность того, что в партии из 600 элементов, бракованными будут: а) три элемента; б) не более двух элементов.

22.30. К пульту охранной системы предприятия подключено 2000 датчиков, причем вероятность появления тревожного сигнала на каждом из них равна 0,0005. Определить вероятность тревоги (для чего достаточно хотя бы одного сигнала).

ЗАДАЧА 23.

23.1. Контрольная работа состоит из трех вопросов. На каждый вопрос приведено четыре ответа, один из которых правильный. Найти закон распределения, функцию распределения и математическое ожидание числа правильных ответов при простом угадывании.

23.2. В среднем по 10% договоров страховая компания выплачивает страховые суммы в связи с наступлением страхового случая. Найти закон распределения, функцию распределения и математическое ожидание числа таких договоров среди наудачу выбранных четырех.

23.3. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8 и уменьшается с каждым выстрелом на 0,1. Составить закон распределения числа попаданий в цель, если сделано три выстрела. Найти функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

23.4. Произведено два выстрела в мишень. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,8; вторым – 0,7. Составить закон распределения числа попаданий в мишень. Найти функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины. (Каждый стрелок делает по одному выстрелу).

23.5. Из пяти гвоздик две белые. Составить закон распределения и найти функцию распределения случайной величины, выражающей число белых гвоздик среди двух одновременно взятых. Вычислить $M(3X+1)$.

23.6. Среди 15 собранных агрегатов 6 нуждаются в дополнительной смазке. Найти закон распределения, функцию распределения и математическое ожидание числа агрегатов, нуждающихся в дополнительной смазке, среди пяти наудачу отобранных из общего числа.

23.7. Для студенческих общежитий приобретено три телевизора. Для каждого из них вероятность выхода из строя в течение гарантийного срока равна 0,2. Найти закон распределения, функцию распределения и математическое ожидание случайного числа телевизоров, вышедших из строя в течение гарантийного срока.

23.8. Экзаменатор задает студенту вопросы, пока тот правильно отвечает. Как только число правильных ответов достигнет четырех либо студент ответит неправильно, экзаменатор прекращает задавать вопросы. Вероятность правильного ответа на один вопрос равна 2/3. Найти закон распределения, функцию распределения и математическое ожидание числа заданных студенту вопросов.

23.9. Каждый поступающий в институт должен сдать три экзамена. Вероятность успешной сдачи первого экзамена 0,9; второго – 0,8; третьего – 0,7. Следующий экзамен абитуриент сдает только в случае успешной сдачи предыдущего. Найти закон распределения, функцию распределения и математическое ожидание числа экзаменов, сдававшихся абитуриентом.

23.10. Охотник, имеющий четыре патрона, стреляет по дичи до первого попадания или до израсходования всех патронов. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,6; при каждом последующем – уменьшается на 0,1. Найти закон распределения, функцию распределения и математическое ожидание числа патронов, израсходованных охотником.

23.11. При установившемся технологическом процессе происходит в среднем 10 обрывов нити на 100 веретен в час. Найти закон распределения, функцию распределения и математическое ожидание случайного числа обрывов нити в течение часа среди трех веретен, работающих независимо друг от друга.

23.12. Вечером Пете понадобилось обменять валюту. Он знает, что из трёх пунктов обмена валюты, расположенных поблизости, в это время работает лишь один, но не помнит, какой именно. Составить ряд распределения числа обменных пунктов, которые придётся посетить Пете, если считать, что каждый из пунктов может работать с вероятностью 1/3. Найти функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

23.13. Два бомбардировщика поочередно сбрасывают бомбы на цель до первого попадания. Вероятность попадания в цель первым бомбардировщиком равна 0,7, вторым – 0,8. Вначале сбрасывает бомбы первый бомбардировщик. Составить первые четыре члена закона распределения числа сброшенных бомб обоими бомбардировщиками.

23.14. Автомашины доставляют сырье на завод от трех независимо работающих поставщиков. Вероятность прибытия в срок машины от любого из поставщиков постоянна и равна 0,7. Найти закон распределения, функцию распределения и математическое ожидание случайного числа прибывших в срок автомашин.

23.15. Два консервных завода поставляют продукцию в магазин в пропорции 2:3. Доля продукции высшего качества на первом заводе составляет 90%, а на втором – 80%. В магазине куплено три банки консервов. Найти математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение числа банок с продукцией высшего качества.

23.16. В магазин поступили электролампы с трех заводов в пропорции 2:3:5. Доля брака в продукции первого завода – 5%, второго – 2%, третьего – 3%. Покупатель приобрел три лампочки. Найти математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение числа качественных лампочек среди купленных.

23.17. В билете три задачи. Вероятность правильного решения первой задачи равна 0,9; второй – 0,8; третьей – 0,7. Составить закон распределения и функцию распределения числа правильно решенных задач в билете. Вычислить математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

23.18. В рекламных целях торговая фирма вкладывает в каждую десятую единицу товара денежный приз размером 1 тыс. руб. Составить закон распределения случайной величины – размера выигрыша при пяти сделанных покупках. Найти функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

23.19. Стрелок производит три выстрела по мишени. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,4. За каждое попадание стрелку засчитывается 10 очков. Построить закон распределения числа выбитых очков. Найти функцию распределения и математическое ожидание этой случайной величины.

23.20. При автоматическом изготовлении некоторых деталей в среднем на каждые 10 деталей 4 оказываются с отклонением от стандарта. Найти закон распределения, функцию распределения и математическое ожидание случайного числа стандартных деталей из взятых наудачу трех деталей.

23.21. Производится набрасывание колец на колышек. Вероятность попадания при одном броске равна 0,3. Найти ряд распределения, функцию распределения и математическое ожидание случайного числа наброшенных колец при трех бросках.

23.22. На некотором участке для мотоциклиста-гонщика имеется три препятствия, вероятность остановки на каждом из которых равна 0,3. Найти закон распределения, функцию распределения и математическое ожидание случайного числа остановок мотоциклиста.

23.23. По мишени одновременно стреляют три стрелка, вероятности попаданий которых равны соответственно 0,55; 0,6 и 0,65. Найти ряд распределения, функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию числа попаданий в мишень.

23.24. Автомашины доставляют сырье на завод от трех независимо работающих поставщиков. Вероятность прибытия в срок машины от любого из поставщиков постоянна и равна 0,7. Найти закон распределения, функцию распределения и математическое ожидание случайного числа прибывших в срок автомашин.

23.25. Два покупателя независимо друг от друга делают по одной покупке. Вероятность того, что покупку сделает первый покупатель, равна 0,8, а вероятность того, что второй – 0,6. Найти закон распределения, функцию распределения и математическое ожидание числа покупок, сделанных покупателями.

23.26. В урне два белых и три черных шара. Шары наудачу достают из урны без возвращения до тех пор, пока не появится белый шар. Как только это произойдет, процесс прекращается. Найти закон распределения, функцию распределения и математическое ожидание числа произведенных опытов.

23.27. Рабочий обслуживает четыре станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, равна для первого – 0,9, для второго – 0,8, для третьего – 0,75, для четвертого – 0,7. Найти математическое ожидание, функцию распределения и дисперсию числа станков, которые не потребуют внимания рабочего в течение часа.

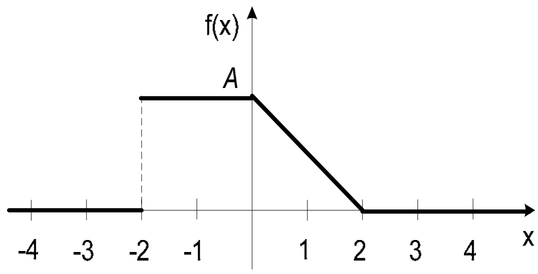
23.28. В городе десять нефтехимических предприятий, из которых шесть рентабельных и четыре убыточных. Программой приватизации намечено приватизировать пять предприятий, случайно отобранных. Найти закон распределения, функцию распределения и математическое ожидание числа рентабельных предприятий, попавших в число приватизируемых.

23.29. В коробке 20 одинаковых катушек ниток, из них – 4 катушки с белыми нитками. Наудачу вынимают две катушки. Найти закон распределения, функцию распределения и математическое ожидание числа катушек с белыми нитками среди вынутых.

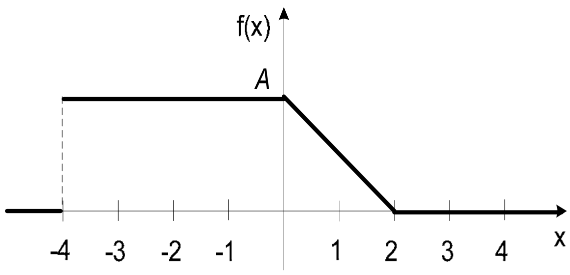
23.30. В магазин привезли арбузы из Ташкента и Волгограда в равных количествах. Вероятность покупки неспелого арбуза, равна соответственно 0,1 и 0,3. Куплено 4 арбуза. Найти закон распределения, функцию распределения и дисперсию спелых арбузов среди купленных.

ЗАДАЧА 24. Плотность распределения вероятностей $f(x)$ случайной величины X имеет вид, изображенный на рисунке. Найти значение параметра A, функцию распределения $F(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$.

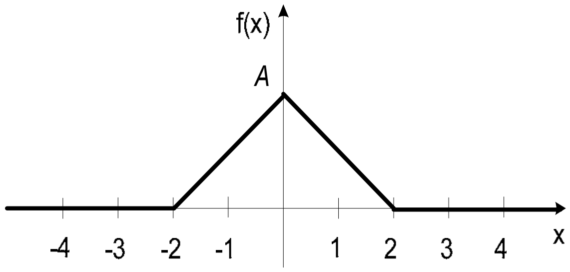
24.1.



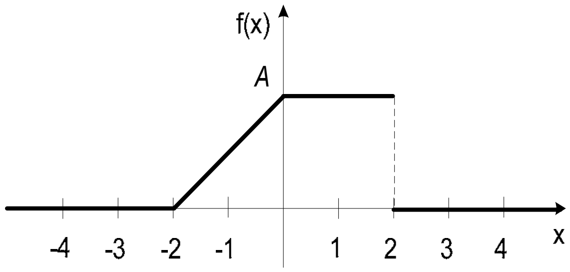
24.2.



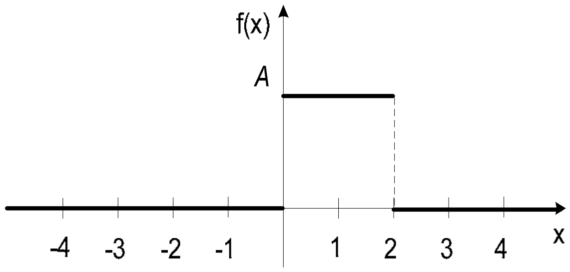
24.3.



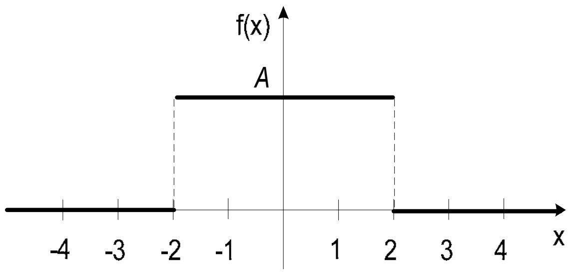
24.4.



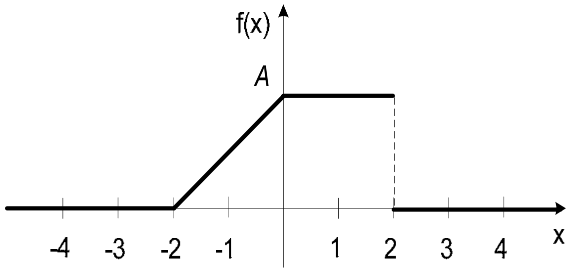
24.5.



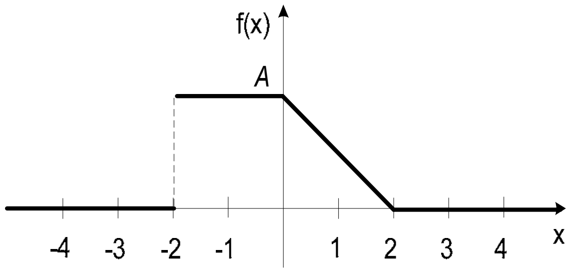
24.6.



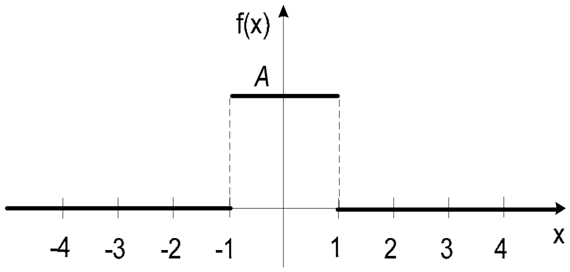
24.7.



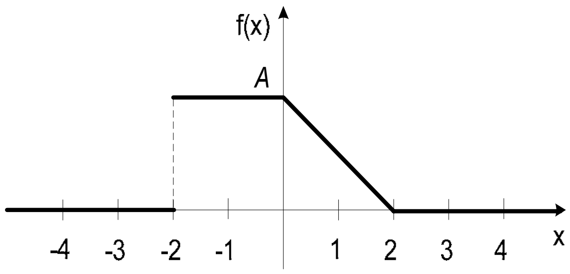
24.8.



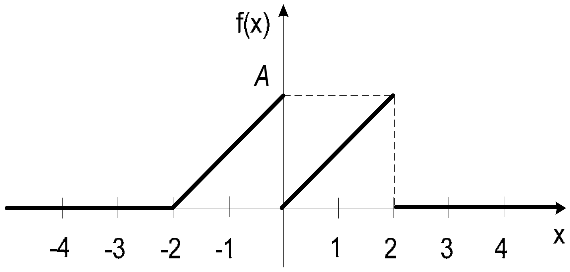
24.9.



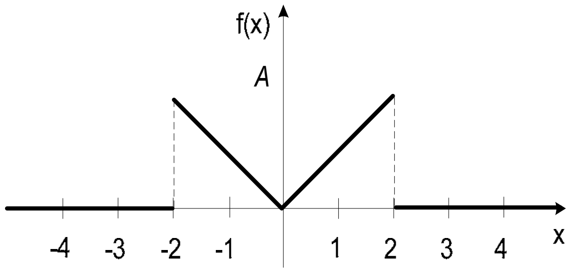
24.10.



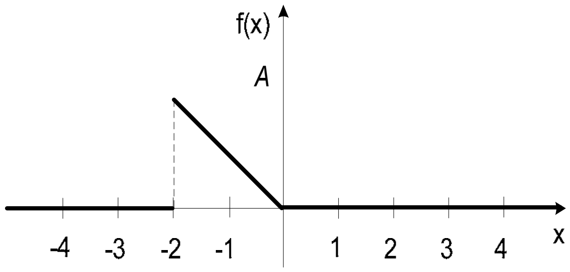
24.11.



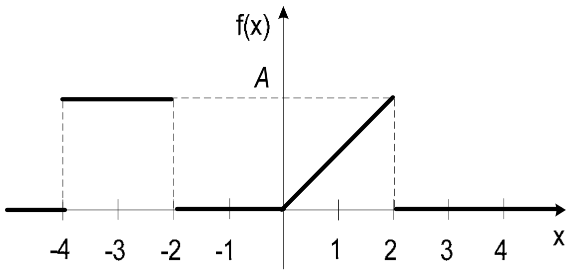
24.12.



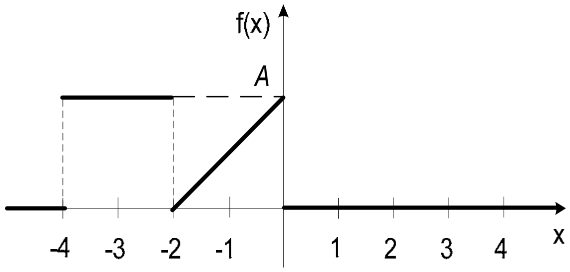
24.13.



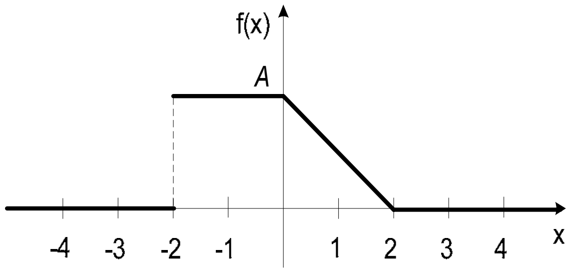
24.14.



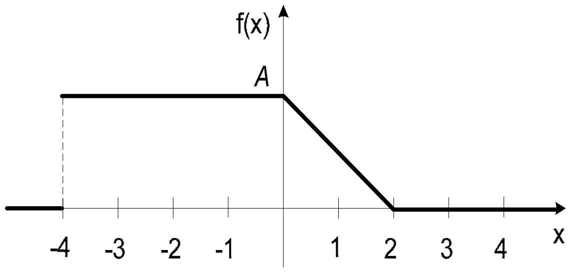
24.15.



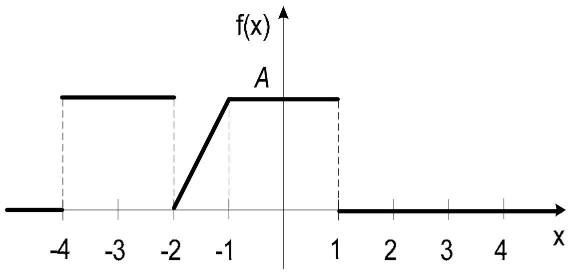
24.16.



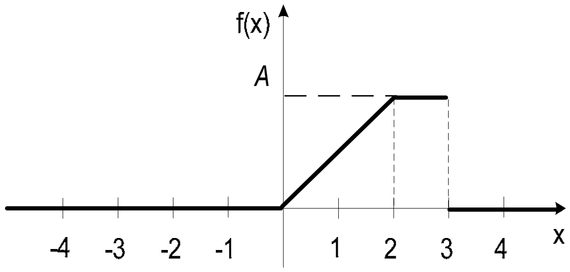
24.17.



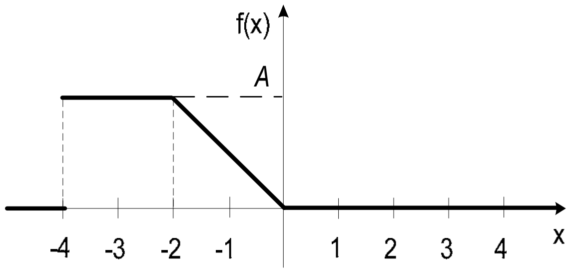
24.18.



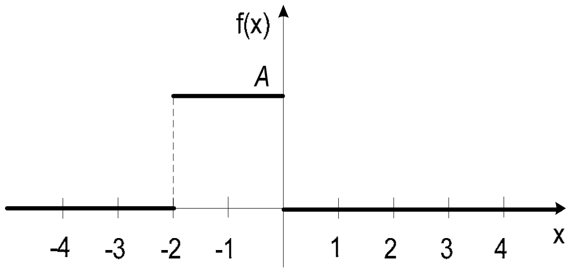
24.19.



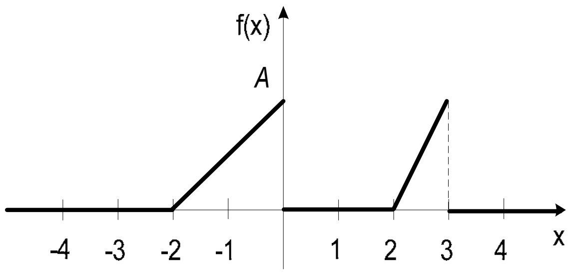
24.20.



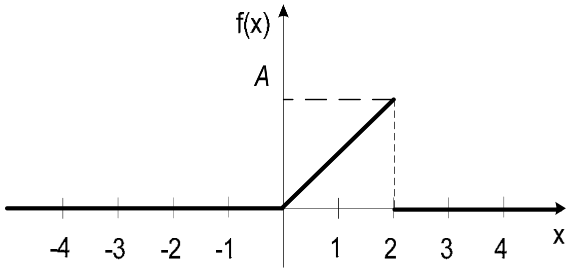
24.21.



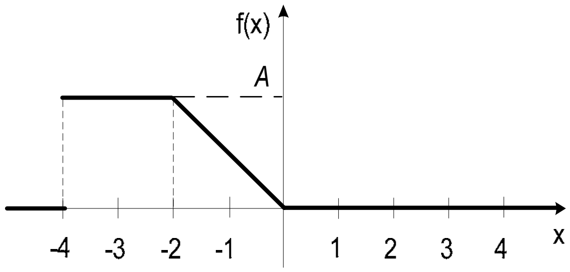
24.22.



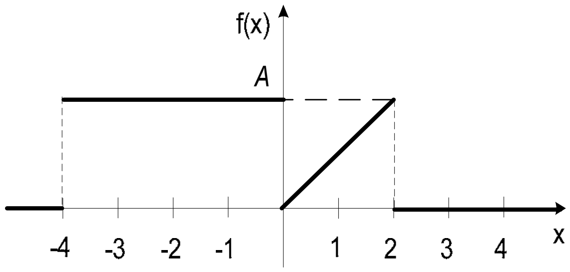
24.23.



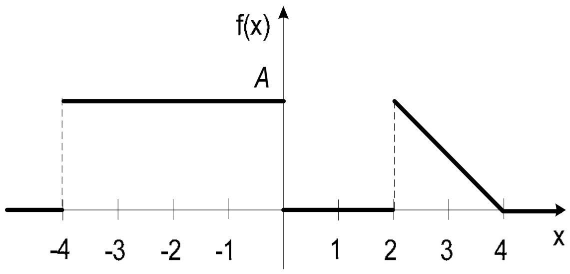
24.24.



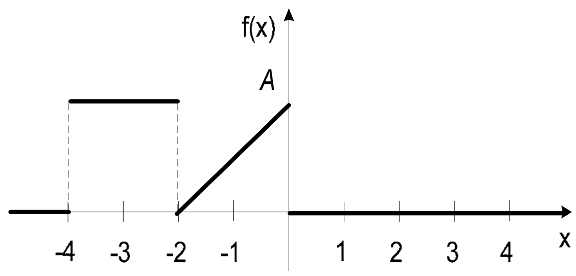
24.25.



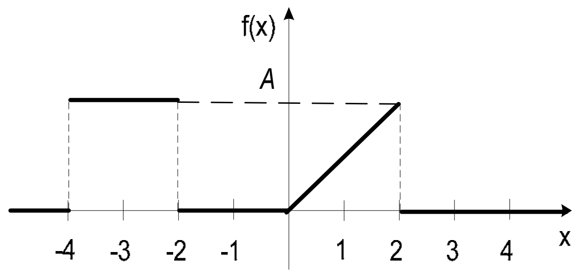
24.26.



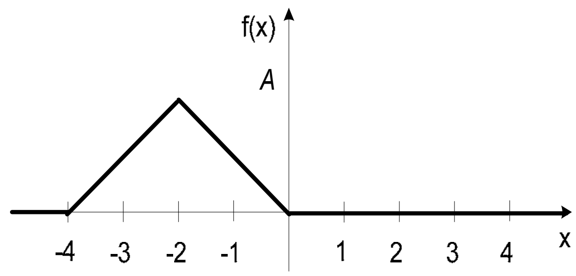
24.27.



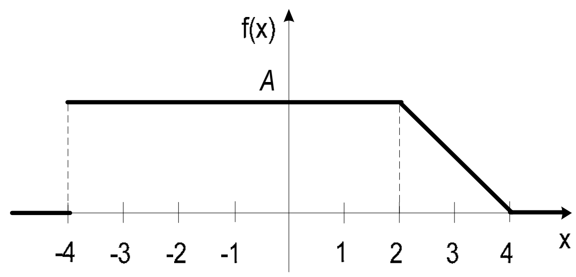
24.28.



24.29.



24.30.



<u>Задача 25.</u> Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$. Найти: а) неизвестный параметр a; б) плотность вероятности $f(x)$; в) математическое ожидание $M(X)$; г) дисперсию D(X); д) вероятность того, что X примет значение из интервала $(\alpha;\beta)$; е) медиану Me; ж) моду Mo.

25.1. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ ax, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$ $\alpha=1/2$; $\beta=2$.

25.2. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a\sin(x/2), & 0<x\le \pi/3,\\ 1, & x>\pi/3.\end{cases}$ $\alpha=\pi/6$; $\beta=\pi/2$.

25.3. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ (a+1)x, & 0<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$ $\alpha=2$; $\beta=4$.

25.4. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le \pi/4,\\ a\cos 2x, & \pi/4<x\le \pi/2,\\ 1, & x>\pi/2.\end{cases}$ $\alpha=\pi/3$; $\beta=\pi$.

25.5. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ ax-1, & 2<x\le 4,\\ 1, & x>4.\end{cases}$ $\alpha=3$; $\beta=5$.

25.6. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ ax^2-x+1, & 2<x\le 4,\\ 1, & x>4.\end{cases}$ $\alpha=3$; $\beta=5$.

25.7. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a(x-1), & 0<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$ $\alpha=2$; $\beta=5$.

25.8. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a\sin 2x, & 0<x\le \pi/4,\\ 1, & x>\pi/4.\end{cases}$ $\alpha=-\infty$; $\beta=\pi/8$.

25.9. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ ax, & 0<x\le 4,\\ 1, & x>4.\end{cases}$ $\alpha=3$; $\beta=5$.

25.10. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ ax^2, & 0<x\le 4,\\ 1, & x>4.\end{cases}$ $\alpha=2$; $\beta=4$.

25.11. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ a(x^2-x), & 1<x\le 2\\ 1, & x>2.\end{cases}$ $\alpha=3/2$; $\beta=3$.

25.12. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a\sin x, & 0<x\le \pi/4,\\ 1, & x>\pi/4.\end{cases}$ $\alpha=\pi/4$; $\beta=\infty$.

25.13. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ ax^2, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$

$\alpha=1/2$; $\beta=2$.

25.14. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ a(x-2)^2, & 2<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$

$\alpha=1$; $\beta=3$.

25.15. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x^2(x+a) & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$

$\alpha=1/2$; $\beta=3$.

25.16. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ x-a, & 1<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$

$\alpha=3/2$; $\beta=\infty$.

25.17. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x^2(a-x), & 0<x\le 4\\ 1, & x>4.\end{cases}$

$\alpha=5/2$; $\beta=5$.

25.18. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 1-a\cos x, & 0<x\le \pi/2,\\ 1, & x>\pi/2.\end{cases}$

$\alpha=\pi/3$; $\beta=\pi/2$.

25.19. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -6,\\ a(x+6), & -6<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$

$\alpha=1$; $\beta=4$.

25.20. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a\sqrt{x^3}, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$

$\alpha=1/4$; $\beta=1$.

25.21. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a\cdot x, & 0<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$

$\alpha=2$; $\beta=4$.

25.22. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 3\pi/2,\\ a\cos x, & 3\pi/2<x\le 5\pi/3\\ 1, & x>5\pi/3.\end{cases}$

$\alpha=-\infty$; $\beta=5\pi/3$.

25.23. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ a(x-1)^2, & 1<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$

$\alpha=2$; $\beta=\infty$.

25.24. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ a(x^2-1), & 1<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$

$\alpha=3/2$; $\beta=4$.

25.25. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x(x^2-a), & 0<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$

$\alpha=1$; $\beta=4$.

25.26. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le \pi/2,\\ a\cos 3x, & \pi/2<x\le 2\pi/3,\\ 1, & x>2\pi/3.\end{cases}$

$\alpha=\pi/2$; $\beta=\infty$.

25.27.
$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ ax^2+x, & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$
$\alpha=1$; $\beta=\infty$.

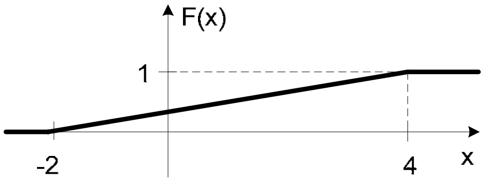
25.28.
$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ a(x+1), & -1<x\le 1/3,\\ 1, & x>1/3.\end{cases}$$
$\alpha=0$; $\beta=1$.

25.29.
$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ a+1/3\,x, & 2<x\le 5,\\ 1, & x>5.\end{cases}$$
$\alpha=3$; $\beta=6$.

25.30.
$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ a(x-2)^2, & 2<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$
$\alpha=5/3$; $\beta=\infty$.

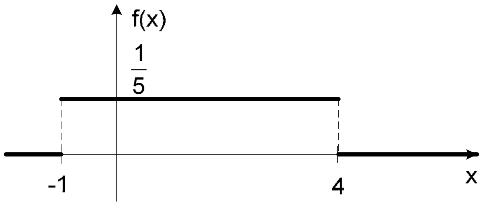
<u>ЗАДАЧА 26</u>. Функция распределения непрерывной случайной величины X либо плотность $f(x)$ имеют вид, указанный на рисунке. Найти аналитические выражения для $F(x)$, $f(x)$, $M(X)$, $D(X)$. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение не меньше α. Вычислить $M(\alpha\cdot X+\beta)$ (λ – параметр показательного распределения).

26.1.



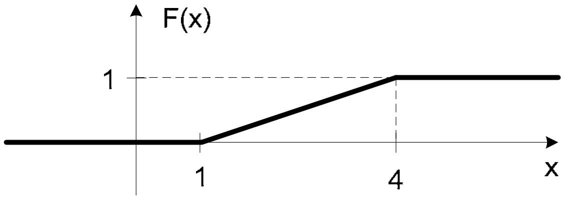
$\alpha=1$; $\beta=3$

26.2.



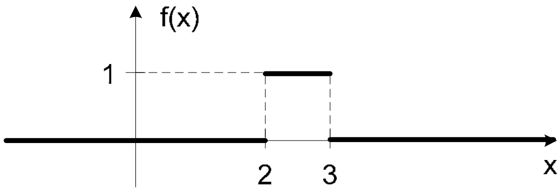
$\alpha = 0; \quad \beta = 3$

26.3.



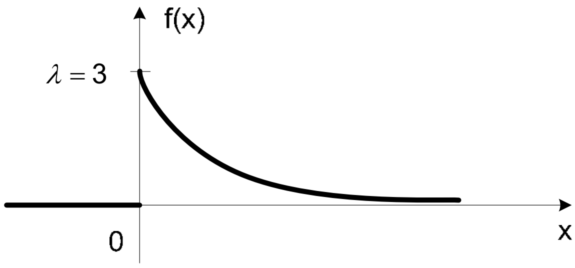
$\alpha = 2; \quad \beta = 4$

26.4.



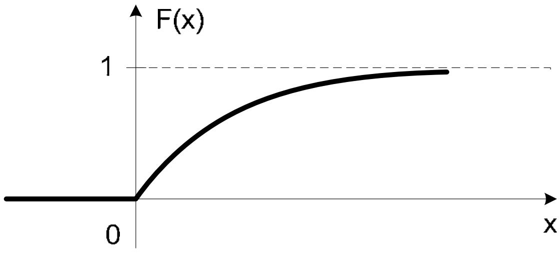
$\alpha = 1; \quad \beta = 2.5$

26.5.



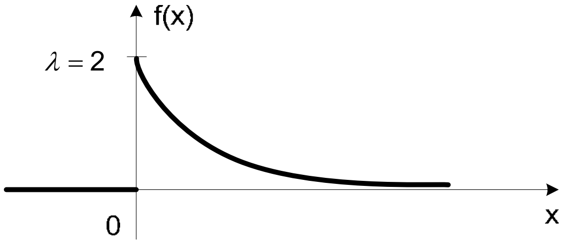
$\alpha = 4; \quad \beta = 5$

26.6.



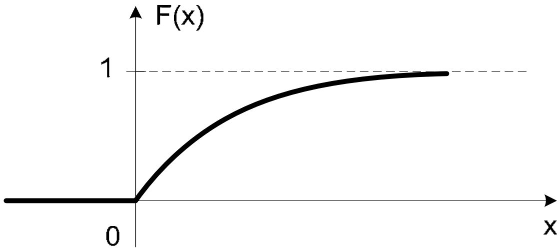
$\lambda = 4; \quad \alpha = 4; \quad \beta = 5$

26.7.



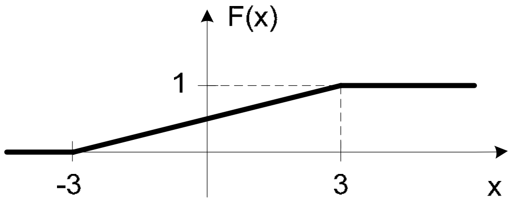
$\alpha = 3; \quad \beta = 10$

26.8.



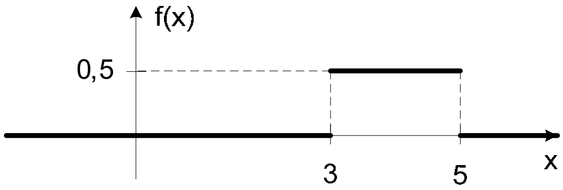
$\lambda = 5; \quad \alpha = 1; \quad \beta = 5$

26.9.



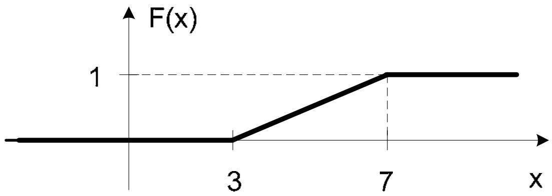
$\alpha = 2; \quad \beta = 4$

26.10.



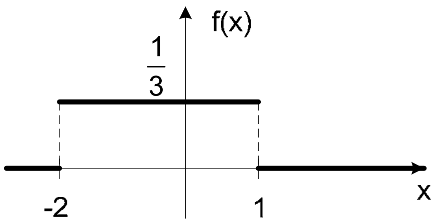
$\alpha = 4; \quad \beta = 6$

26.11.



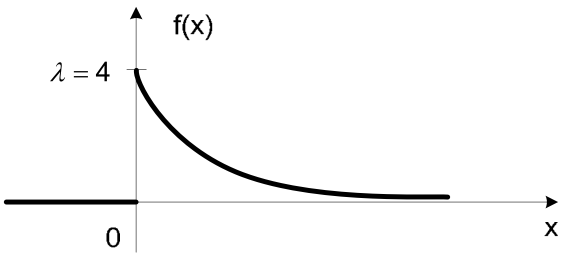
$\alpha = 4; \quad \beta = 4$

26.12.



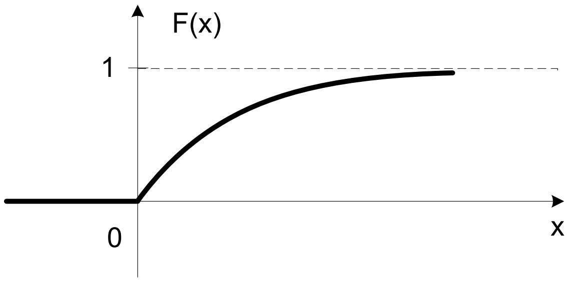
$\alpha = 1; \quad \beta = 5$

26.13.



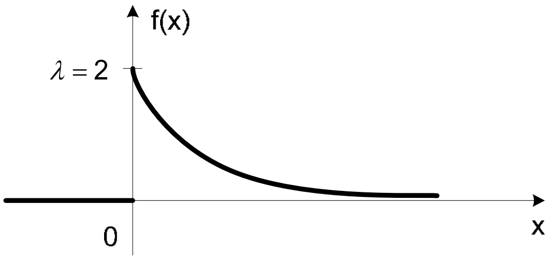
$\alpha = 2; \quad \beta = 4$

26.14.



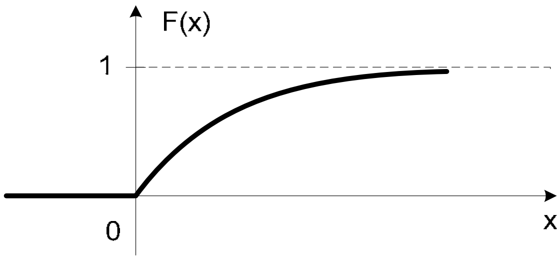
$\lambda = 3; \quad \alpha = 5; \quad \beta = 2$

26.15.



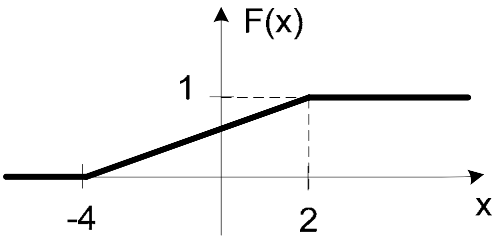
$\alpha = 1; \quad \beta = 3$

26.16.



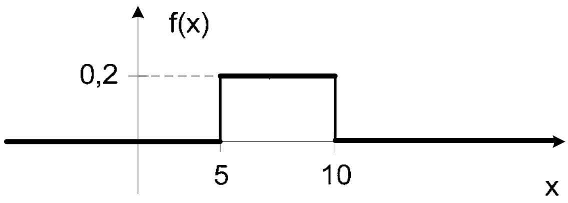
$\lambda = 4; \quad \alpha = 1; \quad \beta = 4$

26.17.



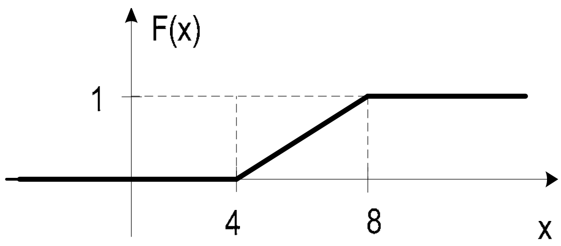
$\alpha = 1; \quad \beta = 5$

26.18.



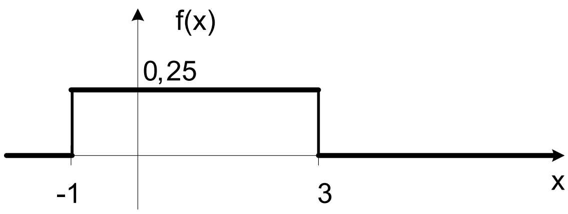
$\alpha = 6; \quad \beta = 3$

26.19.



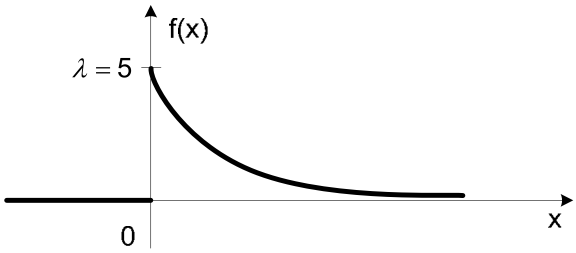
$\alpha = 5; \quad \beta = 5$

26.20.



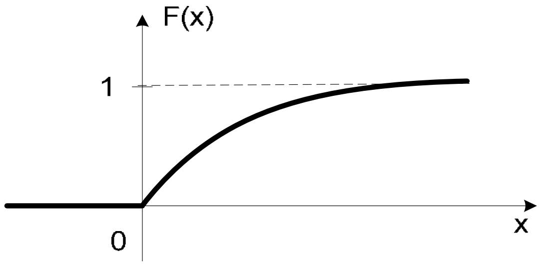
$\alpha = 2; \quad \beta = 2$

26.21.



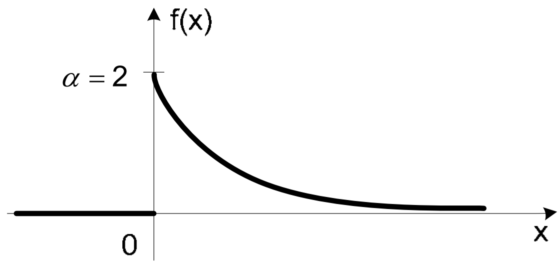
$\alpha = 2; \quad \beta = 6$

26.22.



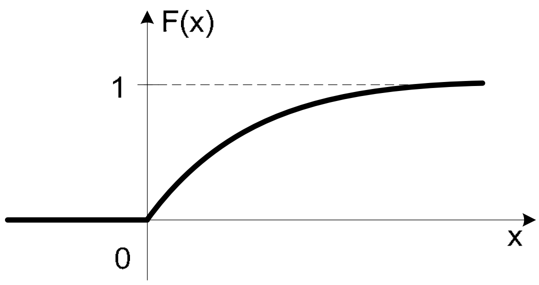
$\lambda = 2; \quad \alpha = 5; \quad \beta = 5$

26.23.



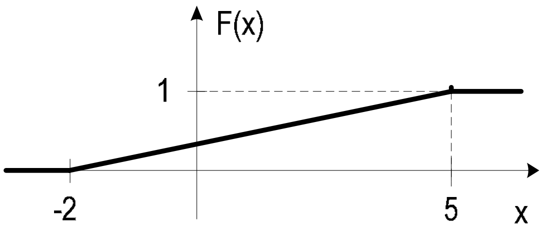
$\alpha = 1; \quad \beta = 2$

26.24.



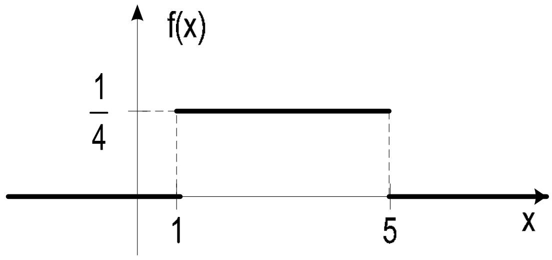
$\lambda = 4; \quad \alpha = 1; \quad \beta = 3$

26.25.



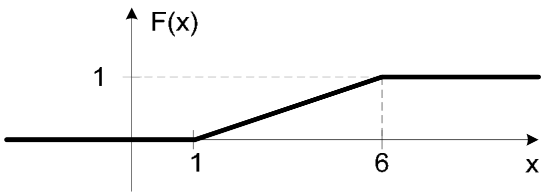
$\alpha = 2; \quad \beta = 3$

26.26.



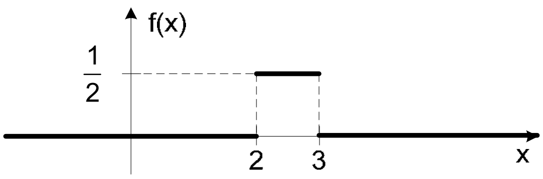
$\alpha = 2; \quad \beta = 3$

26.27.



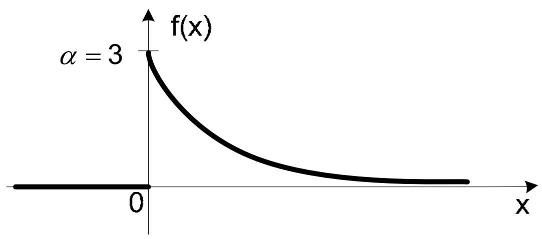
$\alpha = 2; \quad \beta = 3$

26.28.



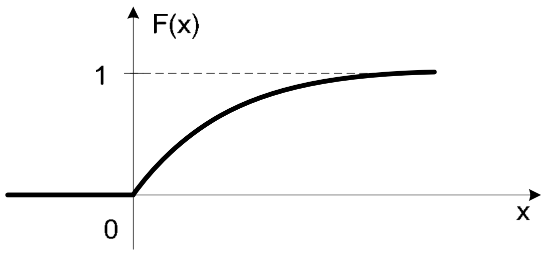
$\alpha = 5; \quad \beta = 5$

26.29.



$\alpha = 3; \quad \beta = 4$

26.30.



$\lambda = 3; \quad \alpha = 3; \quad \beta = 6$

<u>ЗАДАЧА 27</u>. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & X \le x_1 \\ ax^2 + bx + c, & x_1 < X \le x_2 \\ 1, & X > x_2 \end{cases}$$

Функция $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$ при $X = x_2$ имеет максимум. Найти:

а) параметры a, b, c

б) вероятности событий $A = \{X > x_3\}$, $B = \{x_1 \le X < x_3\}$.

27.1. $x_1 = 1, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 4$. **27.2.** $x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 5$.

27.3. $x_1 = 1, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 5$. **27.4.** $x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 6$.

27.5. $x_1 = 2, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 6$. **27.6.** $x_1 = 3, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 5$.

27.7. $x_1 = 2, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 6$. **27.8.** $x_1 = 4, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 7$.

27.9. $x_1 = 4, \quad x_2 = 6, \quad x_3 = 8$. **27.10.** $x_1 = 1, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 7$.

27.11. $x_1 = 2, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 8$. **27.12.** $x_1 = 0, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 5$.

27.13. $x_1 = 2, \quad x_2 = 6, \quad x_3 = 7$. **27.14.** $x_1 = 0, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 7$.

27.15. $x_1 = 1, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 6$. **27.16.** $x_1 = 2, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 9$.

27.17. $x_1 = 3, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 6$. **27.18.** $x_1 = 4, \quad x_2 = 6, \quad x_3 = 7$.

27.19. $x_1 = 0, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 6$. **27.20.** $x_1 = 2, \quad x_2 = 6, \quad x_3 = 8$.

27.21. $x_1 = 1, \quad x_2 = 6, \quad x_3 = 7$. **27.22.** $x_1 = 3, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 10$.

27.23. $x_1 = 4, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 9$. **27.24.** $x_1 = 0, \quad x_2 = 6, \quad x_3 = 8$.

27.25. $x_1 = 2, \quad x_2 = 6, \quad x_3 = 9$. **27.26.** $x_1 = 3, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 10$.

27.27. $x_1 = 2, \quad x_2 = 7, \quad x_3 = 8$. **27.28.** $x_1 = 1, \quad x_2 = 7, \quad x_3 = 9$.

27.29. $x_1 = 3, \quad x_2 = 8, \quad x_3 = 9$. **27.30.** $x_1 = 2, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 10$.

ЗАДАЧА 28.

28.1. Скорость лодки - случайная величина, распределенная нормально с математическим ожиданием 10 км/ч и среднеквадратическим отклонением 5 км/ч. Найти вероятность того, что скорость будет не менее 8 км/ч и не более 15 км/ч.

28.2. Срок службы прибора представляет собой случайную величину, подчиненную закону нормального распределения со средним сроком службы в 10 лет и средним квадратическим отклонением 1,5 года. Определить вероятность того, что прибор прослужит: 1) до 15 лет; 2) от 8 до 18 лет; 3) свыше 16 лет.

28.3. При расследовании причин аварии было установлено, что она могла произойти из-за установки на автомобиль детали, размеры которой выходят за пределы допустимого интервала (15 мм; 25 мм). Известно, что размер деталей, поступающих на конвейер автозавода, представляет собой случайную величину, распределённую по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 20 мм, и средним квадратичным отклонением, равным 5 мм. Оценить вероятность того, что причиной аварии послужила установка на автомобиль детали нестандартного размера.

28.4. Пусть вероятность того, что выпущенный экземпляр часов имеет точность хода в пределах стандарта, равна 0,97. Найти вероятность того, что среди имеющихся 1000 часов доля часов с точности хода и пределах нормы отклониться (по абсолютной величине) от вероятности 0,97 не более, чем на 0,02.

28.5. Максимальная скорость самолетов определенного типа распределена по нормальному закону с математическим ожиданием 420 м/с и среднеквадратическим отклонением 25 м/с. Найти вероятность того, что при испытаниях самолета этого типа его максимальная скорость будет изменяться от 390 м/с до 440 м/с.

28.6. Деталь принимается ОТК, если ее диаметр отклоняется по абсолютной величине от стандартного не более чем на 2 мм. Отклонение – случайная величина, распределенная по нормальному закону с систематической ошибкой 0,5 мм и среднеквадратическим отклонением 1 мм. Найти вероятность того, что деталь принимается.

28.7. Вес изготовленного серебряного изделия должен составлять *a* граммов. При изготовлении возможны случайные погрешности, в результате которых вес изделия случаен, но подчинен нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением σ граммов. Требуется найти вероятность того, что: а) вес изделия составляет от α до β граммов; б) величина погрешности в весе не превзойдет δ граммов по абсолютной величине. $a = 60$, $\sigma = 2$, $\alpha =56$, $\beta =62$, $\delta = 6$.

28.8. При измерении нормально распределенной случайной величины оказалось, что ее среднее квадратичное отклонение равно 10, а вероятность попадания этой величины в интервал от 100 до 140, симметричный относительно математического ожидания, равна 0,94. Найти математическое ожидание и вероятность попадания ее в интервал от 90 до 150.

28.9. Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если отклонение ее контролируемого размера от проектного не превышает $\delta = 0{,}05$ мм . Случайное отклонение контролируемого размера от проектного подчинено нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 0{,}03$ мм и математическим ожиданием равным нулю. Сколько процентов годных деталей изготовляет автомат?

28.10. Дневная добыча угля в некоторой шахте распределена по нормальному закону с математическим ожиданием 785 т и среднеквадратическим отклонением 60 т. Найдите вероятность того, что в определенный день будут добыты, по крайней мере, 800 т угля. Определите долю рабочих дней, в которые будет добыто от 750 до 850 т угля.

28.11. Коробки с мармеладом упаковываются автоматически. Их средняя масса равна 900 г. Известно, что 1% коробок имеют массу, большую 1 кг. Каков % коробок, масса которых не превышает 850 г., если вес коробок - случайная величина, распределенная по нормальному закону?

28.12. Предположим, что в течение года цена на акции некоторой компании есть нормально распределенная случайная величина с параметрами a = 49 у. е. и σ = 4 у. е. Определите вероятность того, что в случайно выбранный день обсуждаемого периода цена за акцию составила: 1) более b = 57 у. е., 2) менее b = 57 у. е., 3) между α = 45 и β =59 у. е.

28.13. Известно, что средний расход удобрений на один гектар пашни составляет 80 кг, а среднее квадратическое отклонение расхода равно 5 кг. Считая расход удобрений нормально распределенной случайной величиной, определить диапазон, в который вносимая доза удобрений попадает с вероятностью 0,98.

28.14. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины – количества сыра, используемого для изготовления 100 бутербродов, – равно 1 кг. Известно, что с вероятностью 0,96 расход сыра на изготовление 100 бутербродов составляет от 900 до 1100 г. Определить среднее квадратическое отклонение расхода сыра на 100 бутербродов.

28.15. Диаметр детали – нормально распределенная случайная величина с параметрами: a = 75 мм, σ = 2 мм. Найти вероятность того, что диаметр наудачу взятой из партии детали составит от 73,6 мм до 76,4 мм, отличается от a не более, чем на 1,4 мм. Какое отклонение диаметра от a можно гарантировать с вероятностью 0,92? В каком интервале будут заключены диаметры деталей с вероятностью 0,9973?

28.16. Результаты измерения расстояния между двумя населенными пунктами подчинены нормальному закону с параметрами: математическое ожидание равно 20 км, среднеквадратическое отклонение – 100 м. Найти вероятность того, что расстояние между этими пунктами: а) не менее 19,8 км; б) не более 20,1 км; в) не менее 20,3 км, но не более 20,75 км.

28.17. Средний диаметр стволов деревьев, на некоторой делянке равен 35 см, среднее квадратичное отклонение 5 см. Считая что диаметр ствола – случайная величина, распределенная нормально, определить: а) процент стволов, имеющих диаметр свыше 30 сантиметров; б) размер, который не превзойдет диаметр ствола дерева с вероятностью 0,95.

28.18. Продолжительность горения электроламп в некоторой партии оказалось нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием 1200 часов и средним квадратическим отклонением 50 часов. Найти с вероятностью 0,95 границы продолжительности горения наугад взятой электролампы.

28.19. Жирность молока коров в области (в %) есть нормально распределённая случайная величина с математическим ожиданием, равным 4%, и среднеквадратическим отклонением 0,05. Вычислить вероятность того, что наугад взятой пробе жирность молока будет: а) более 4%; б) менее 4%; в) от 3,95 до 4,05%.

28.20. Суточное потребление электроэнергии исправной печью является случайной величиной, распределенной по нормальному закону со средним 1000 кВт/ч и среднеквадратическим отклонением 50 кВт/ч. Если суточное потребление превысит 1100 кВт, то по инструкции печь отключают и ремонтируют. Найти вероятность ремонта печи. Каким должно быть превышение по инструкции, чтобы вероятность ремонта печи была равна 0,02?

28.21. Математическое ожидание количества болельщиков, посещающих спортивные мероприятия равно 950 со средним квадратическим отклонением 150. Считая, что данная случайная величина подчиняется нормальному закону распределения, найти вероятность того, что: а) болельщиков окажется больше 1250 человек; б) меньше, чем 850 человек.

28.22. Размер гайки задан полем допуска 60 – 65 мм. В некоторой партии гаек средний размер оказался равным 62,8 мм, а среднеквадратическое отклонение – 1,1 мм. Считая, что размер гайки подчиняется закону нормального распределения, вычислить вероятность брака по размеру гайки.

28.23. Случайные значения веса зерна распределены по нормальному закону с математическим ожиданием 0,17 г и средним квадратическим отклонением 0,04 г. Доброкачественные всходы дают зерна, вес которых более 0,12 г. Найти процент семян, которые дадут доброкачественные всходы.

28.24. Средняя масса шоколадных конфет, выпускаемых в коробках кондитерской фабрикой, равна 200 г, а среднеквадратическое отклонение равно 5 г. Считая массу конфет нормально распределенной случайной величиной, найти вероятность того, что масса коробки конфет заключена в пределах от 196 г до 207 г.

28.25. Средняя температура в квартире в период отопительного сезона равна 22°C, а ее среднеквадратическое отклонение – 0,5°C. С вероятностью, не меньшей 0,96, найти границы, в которых заключена температура в квартире, считая ее нормально распределенной случайной величиной.

28.26. Средняя масса плодов в одном ящике равна 10 кг. Фактическая масса плодов в ящике – случайная величина со средним квадратическим отклонением 0,6 кг. Найти а) вероятность, что фактическая масса отклонится от средней не более, чем на 1 кг; б) массу, ниже которой не опустится фактическая масса с вероятностью 0,97.

28.27. Из данных, полученных от руководства цеха при его проверке, следует, что брак составляет 5% всей выпускаемой продукции. По данным, полученным из технической документации, установлено, что размер продукции представляет собой случайную величину, распределённую по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 10 мм, и средним квадратичным отклонением, равным 0,2 мм. Величина максимально допустимого отклонения размера детали от номинального, при котором деталь ещё считается годной, составляет 0,3 мм. Оценить с помощью вероятности достоверность информации, полученной от руководства цеха о качестве выпускаемой продукции.

28.28. Считая рост студента случайной величиной, распределенной по нормальному закону с параметрами a = 170 см и σ = 25 см, найти: а) вероятность того, что рост студента будет более 190 см; б) интервал, в котором с вероятностью 0,95 будет заключен рост студента; в) вероятность того, что рост студента отклонится от математического ожидания менее чем на 10 см.

28.29. Длина заготовки распределена по нормальному закону с математическим ожиданием 1 м и средним квадратическим отклонением 9 мм. Найти вероятность того, что в партии из 10 деталей: а) не будет ни одной детали длиной более 105 см; б) найдется хотя бы одна деталь длиной от 99 до 101 см; в) будет более 2 деталей длиной свыше 1 м.

28.30. Пусть доля раскрываемых преступлений является нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием 0,65 и дисперсией 0,1. Найти вероятность того, что доля раскрываемых преступлений окажется: а) больше 0,7; б) меньше 0,5; в) заключена в интервале (0,67; 0,69).

<u>Задача 29.</u>

Случайная величина X распределена по нормальному закону, ее плотность вероятности имеет вид $f(x) = Ce^{ax^2+bx+c}$.

Найти: а) C; б) $M(X)$; в) $\sigma(X)$; г) $M(X^2)$; д) $P\{\alpha < X < \beta\}$.

29.1. a=-2; b=4; c=1; α = 1; β =3.

29.2. a=-1; b=2; c=3; α =-1/3; β =4/3.

29.3. a=-6; b=12; c=3; α =3; β =4.

29.4. a=-3; b=-3; c=1; α =-1/2; β =3/2.

29.5. a=-3; b=6; c=2; α =5; β =8.

29.6. a=-5; b=10; c=4; α =-2; β =3.

29.7. a=-7; b=14; c=5; α =-1; β =0.

29.8. a=-2; b=-6; c=3; α =2; β =7.

29.9. a=-4; b=8; c=-4; α =-4; β =2.

29.10. a=-6; b=18; c=-5; α =-3; β =-2.

29.11. a=-8; b=24; c=6; α =4; β =5.

29.12. a=-3; b=-12; c=1; α =3; β =6.

29.13. a=-2; b=8; c=-2; α =1; β =3.

29.14. a=-4; b=8; c=-3; α =5; β =6.

29.15. a=-4; b=6; c=2; α =0; β =3/4.

29.16. a=-6; b=-18; c=-5; α =-3; β =0.

29.17. a=-1; b=4; c=2; α =-2; β =1.

29.18. a=-2; b=8; c=3; α =-1; β =3.

29.19. a=-2; b=8; c=0; α =1; β =3.

29.20. a=-4; b=12; c=8; α =7; β =9.

29.21. a=-2; b=8; c=-1; α =1; β =3.

29.22. a=-3; b=9; c=1; α =-3; β =2.

29.23. a=-5; b=-10; c=10; α =0; β =6.

29.24. a=-3; b=4; c=2; α =1/3; β =4/3.

29.25. a=-4; b=-6; c=0; α =0; β =3/4.

29.26. a=-3; b=-15; c=1; α =1; β =6.

29.27. a=-4; b=24; c=2; α =3; β =9.

29.28. a=-2; b=20; c=1; α =4; β =10.

29.29. a=-4; b=6; c=0; α =0; β =3/4.

29.30. a=-5; b=-25; c=-3; α =-1; β =4.

ЗАДАЧА 30. Двумерная случайная величина (X,Y) задана плотностью распределения $f(x,y)$. Найти: а) коэффициент A; б) одномерные плотности распределения $f_1(x)$, $f_2(y)$; в) математические ожидания $M(X)$, $M(Y)$; г) вероятность того, что (X,Y) примет значение из области G.

30.1

$$f(x,y)=\begin{cases} A(x+y) \text{ в области } U=\{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\} \\ 0, \text{ вне области } U \end{cases},$$

$G=\{x+y\ge 1\}$.

30.2

$$f(x,y)=\begin{cases} A(2x+y) \text{ в области } U=\{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\} \\ 0, \text{ вне области } U \end{cases},$$

$G=\{x^2+y^2\le 1\}$.

30.3

$$f(x,y)=\begin{cases} p(x,y)=A(x+2y) \text{ в области } U=\{0\le x\le 1, 0\le y\le 1, x+y<1\}. \\ 0, \text{ вне области } U \end{cases},$$

$G=\{x+y<0,5\}$.

30.4

$$f(x,y)=\begin{cases} A(x+y) \text{ в области } U=\{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\} \\ 0, \text{ вне области } U \end{cases},$$

$G=\{0<x<1, 0<y<0,5\}$.

30.5

$$f(x,y)=\begin{cases} A\,x\,y^2 \text{ в области } U=\{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\} \\ 0, \text{ вне области } U \end{cases},$$

$G=\{x+y\le 1, x>0, y>0\}$.

30.6

$$f(x,y)=\begin{cases} A(x+y) \text{ в области } U=\{0\le x\le 1, 0\le y\le 1, x+y<1\} \\ 0, \text{ вне области } U \end{cases},$$

$G=\{0<x<0,5;0<y<0,5\}$.

30.7
$$f(x,y)=\begin{cases} A\,x^2\,y \textit{ в области } U=\{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\} \\ 0, \quad \textit{вне области } U \end{cases},$$

$G=\{x+y\le 1, x>0, y>0\}$.

30.8
$$f(x,y)=\begin{cases} p(x,y)=A(2x+y) \textit{ в области } U=\{0\le x, 0\le y, x+y<1\} \\ 0, \quad \textit{вне области } U \end{cases},$$

$G=\{0<x<0,5;0<y<0,5\}$.

30.9
$$f(x,y)=\begin{cases} A(x^2+y) \textit{ в области } U=\{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\} \\ 0, \quad \textit{вне области } U \end{cases},$$

$G=\{x+y\le 1\}$.

30.1
$$f(x,y)=\begin{cases} A(x+y^2) \textit{ в области } U=\{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\} \\ 0, \quad \textit{вне области } U \end{cases},$$

$G=\{x+y\le 1\}$.

30.1
$$f(x,y)=\begin{cases} A\,x\,y^2 \textit{ в области } U=\{0\le x,\ 0\le y, x+y\le 1\} \\ 0, \quad \textit{вне области } U \end{cases},$$

$G=\{x+y\ge 0,5\}$.

30.1
$$f(x,y)=\begin{cases} A\,x^2\,y \textit{ в области } U=\{0\le x,\ 0\le y, x+y\le 1\} \\ 0, \quad \textit{вне области } U \end{cases},$$

$G=\{0<x<0,5,0<y<1\}$.

30.1
$$f(x,y)=\begin{cases} A\,x\,y \textit{ в области } U=\{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\} \\ 0, \quad \textit{вне области } U \end{cases},$$

$G=\{x+y\le 1\}$.

30.1
$$f(x,y)=\begin{cases} A(y-xy) \text{ в области } U=\{0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1\} \\ 0, \quad \text{вне области } U \end{cases},$$

$G=\{x+y\le 0,5;\ x>0,\ \ y>0\}$.

30.1
$$f(x,y)=\begin{cases} A(x-yx) \text{ в области } U=\{0\le x\le 2,\ \ 0\le y\le 2\} \\ 0, \quad \text{вне области } U \end{cases},$$

$G=\{x+y\le 1\}$.

30.1
$$f(x,y)=\frac{A}{\left(1/3+x^2\right)\left(3+y^2\right)} \text{ в области } U=\{-\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty\},$$

$G=\{x<1,\ \ y<\sqrt{3}\}$.

30.1
$$f(x,y)=\begin{cases} A\cdot e^{-x-y}, \text{ в области } U=\{0\le x<+\infty,\ 0\le y<+\infty\} \\ 0, \quad \text{вне области } U \end{cases},$$

$G=\{x>0, y<1\}$.

30.1
$$f(x,y)=\frac{A}{\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)} \text{ в области } U=\{-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty\},$$

$G=\{x<1, y<1\}$.

30.1
$$f(x,y)=\begin{cases} A\cdot e^{x+y} \text{ в области } U=\{-\infty<x\le 0,-\infty<y<0\} \\ 0, \quad \text{вне области } U \end{cases},$$

$G=\{x>-1, y<0\}$.

30.2
$$f(x,y)=\frac{A}{\left(1/4+x^2\right)\left(4+y^2\right)} \text{ в области } U=\{-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty\},$$

$G = \{x < 1/2, y < 1\}$.

30.2

$$f(x,y) = \begin{cases} A\cos x \cdot \cos y, \text{ \textit{в области} } U = \left\{0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}\right\} \\ 0, \text{ \textit{вне области} } U \end{cases},$$

$G = \{x + y \le \pi/2\}$.

30.2

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{A}{(1/16 + x^2)(16 + y^2)} \text{ \textit{в области} } U = \{-\infty < x < +\infty, 0 < y < +\infty\} \\ 0, \text{ \textit{вне области} } U \end{cases},$$

$G = \{x < 1/4, y > 4\}$.

30.2

$$f(x,y) = \begin{cases} A \cdot \cos(x + y) \text{ \textit{в области} } U = \left\{\dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi, \dfrac{\pi}{2} \le y \le \pi\right\} \\ 0, \text{ \textit{вне области} } U \end{cases},$$

$G = \{\pi/2 \le x \le 2\pi/3, \pi/2 \le y \le 3\pi/4\}$.

30.2

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{A}{(1/9 + x^2)(9 + y^2)} \text{ \textit{в области} } U = \{0 < x < +\infty, 0 < y < +\infty\} \\ 0, \text{ \textit{вне области} } U \end{cases},$$

$G = \{x > 1/3, y > 3\}$.

30.2

$$f(x,y) = \begin{cases} A \cdot \sin(x + y) \text{ \textit{в области} } U = \{0 \le x \le \pi/2, 0 \le y \le \pi/2\} \\ 0, \text{ \textit{вне области} } U \end{cases},$$

$G = \{0 \le x \le \pi/6, 0 \le y \le \pi/2\}$.

30.2

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{A}{\left(1/25+x^2\right)\left(25+y^2\right)} \text{ в области } U=\{-\infty<x<0,-\infty<y<0\} \\ 0, \text{ вне области } U\end{cases},$$

$G=\{x>1/3, y>3\}$.

30.2

$$f(x,y)=\begin{cases}A \text{ в области } U=\{y\ge 0, x+y\le 1, 2y-x\le 2\} \\ 0, \text{ вне области } U\end{cases},$$

$G=\{x\ge 0\}$.

30.2

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{A}{\left(1/100+x^2\right)\left(100+y^2\right)} \text{ в области } U=\{0<x<+\infty,-\infty<y<+\infty\} \\ 0, \text{ вне области } U\end{cases},$$

$G=\{x>1/10, y>10\}$.

30.2

$$f(x,y)=\begin{cases}Axy^4 \text{ в области } U=\left\{y>-1, x>0, y<-x^3\right\} \\ 0, \text{ вне области } U\end{cases},$$

$G=\{y>-1/2\}$.

30.3

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{A}{\left(1/36+x^2\right)\left(36+y^2\right)} \text{ в области } U=\{-\infty<x<+\infty,0<y<+\infty\} \\ 0, \text{ вне области } U\end{cases},$$

$G=\{x>1/6, y>6\}$.

Задача 31. Закон распределения двумерной дискретной случайной величины (X, Y) задан таблицей. Найти: а) одномерные распределения случайных величин X и Y; б) математические ожидания $M(X)$, $M(Y)$; в) дисперсии $D(X)$, $D(Y)$; г) коэффициент корреляции r_{xy}.

31.1.

X	Y		
	1	2	4
-2	0	0,2	0
-1	0,2	0,1	0
0	0,2	0,2	0,1

31.2.

X	Y		
	-2	0	1
1	0,1	0,1	0,2
2	0,1	0,2	0,1
4	0	0,1	0,1

31.3.

X	Y		
	-1	0	2
2	0,1	0,1	0,1
4	0,1	0,2	0
6	0,1	0,3	0

31.4.

X	Y		
	-3	-2	-1
-3	0	0,1	0,2
-2	0,1	0	0,1
-1	0,2	0,1	0,2

31.5.

X	Y		
	-2	-1	0
0	0,1	0,2	0,1
1	0,1	0	0,1
2	0,2	0,1	0,1

31.6.

X	Y		
	2	3	4
-2	0,1	0	0
-1	0,2	0,3	0,1
0	0,1	0,1	0,1

31.7.

X	Y		
	-2	2	3
0	0,1	0,1	0,2
1	0,2	0	0,1
2	0,2	0,1	0

31.8.

X	Y		
	1	2	3
-1	0,1	0,1	0
0	0,2	0,2	0,1
1	0,2	0,1	0

31.9.

X	Y		
	-3	0	1
-1	0	0,1	0,2
1	0,1	0,2	0,1
2	0,1	0,1	0,1

31.10.

X	Y		
	0	2	3
-2	0,1	0,1	0
1	0,2	0,2	0,1
0	0,1	0,1	0,1

31.11.

X	Y		
	-3	-2	0
1	0,1	0,2	0,2
2	0,1	0,1	0,1
3	0	0	0,2

31.12.

X	Y		
	2	3	4
-1	0,1	0,1	0,1
0	0,2	0,2	0,2
1	0,1	0	0

31.13.

X	Y		
	-3	0	2
1	0,1	0,2	0,1
2	0,1	0,2	0,1
3	0	0,1	0,1

31.14.

X	Y		
	0	2	4
1	0,2	0,1	0,1
2	0,1	0,2	0,1
3	0,1	0,1	0

31.15.

X	Y		
	-1	0	2
-1	0,1	0,1	0,1
0	0,1	0,2	0,1
2	0,1	0,1	0,1

31.16.

X	Y		
	1	2	3
-2	0,1	0,1	0
-1	0,1	0,1	0,1
0	0,2	0,2	0,1

31.17.

X	Y		
	1	2	4
-2	0,1	0,1	0
-1	0,2	0,1	0
0	0,1	0,2	0,2

31.18.

X	Y		
	-2	0	1
1	0,2	0,2	0,1
2	0,1	0	0,1
4	0	0,1	0,2

31.19.

X	Y: -1	Y: 0	Y: 2
2	0,2	0,2	0,1
4	0,1	0,2	0
6	0,1	0,1	0

31.20.

X	Y: -3	Y: -2	Y: -1
-3	0	0,1	0,1
-2	0,2	0	0,2
-1	0,2	0,1	0,1

31.21.

X	Y: -2	Y: -1	Y: 0
0	0,2	0,3	0
1	0,1	0	0,1
2	0,1	0,1	0,1

31.22.

X	Y: 2	Y: 3	Y: 4
-2	0,1	0	0
-1	0,2	0,3	0,1
0	0,1	0,1	0,1

31.23.

X	Y: -2	Y: 2	Y: 3
0	0,2	0,1	0,2
1	0,2	0	0,1
2	0,1	0,1	0

31.24.

X	Y: 1	Y: 2	Y: 3
-1	0,1	0,1	0
0	0,1	0,2	0,1
1	0,2	0,2	0

31.25.

X	Y: -3	Y: -2	Y: 0
1	0,2	0,2	0,1
2	0,1	0,1	0,1
3	0	0	0,2

31.26.

X	Y: 2	Y: 3	Y: 4
-1	0,2	0,2	0,1
0	0,1	0,1	0,2
1	0,1	0	0

31.27.

X	Y: -3	Y: 0	Y: 2
1	0,2	0,1	0,1
2	0,1	0,1	0,2
3	0	0,1	0,1

31.28.

X	Y: 0	Y: 2	Y: 4
1	0,2	0,2	0,1
2	0,1	0,1	0,1
3	0,1	0	0,1

31.29.

X	Y		
	-3	0	1
-1	0	0,3	0,1
1	0,1	0,2	0,1
2	0,1	0	0,1

31.30.

X	Y		
	0	2	3
-2	0,2	0,1	0
1	0,1	0,1	0,1
0	0,1	0,2	0,1

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Задания по теме «События. Операции над событиями».

№	Задания	Правильный ответ
1.	Какое из перечисленных выражений означает появление хотя бы одного из трех событий A, B, C: а) $A+B+C$; б) $AB\tilde{N}$; в) $A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$; г) $\overline{A+B+C}$; д) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.	а)
2.	Какое из перечисленных выражений означает появление ровно двух из трех событий A, B, C: а) $\left(A+B\right)\overline{C}$; б) $AB+AC+BC$; в) $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$; г) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.	в)
3.	Какое из перечисленных выражений означает появление всех трех событий A, B, C одновременно: а) $A+B+C$; б) ABC; в) $A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$; г) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$; д) $\overline{A+B+C}$.	б)
4.	Записать событие с помощью перечисления I. $A=\left\{x\in N \middle\vert 3<x\le 7\right\}$ а) 1,2; б) 3,4,5,6; в) 3,4,5,6,7; г) 4,5,6,7.	г)
	II. $B=\left\{x \middle\vert x\in R \text{ и } x^2<0\right\}$ а) ∞; б) $\varnothing$; в) 0; г) 1.	б)

2. Задания по теме «Комбинаторика».

№	Задания	Правильный ответ
1.	Сколькими способами можно составить список из четырех студентов: а) 16; б) 20; в) 24; г) 28.	в)
2.	Сколькими способами можно расставить 8 спортсменов на 3 дорожках бассейна: а) 81; б) C_8^3; в) A_8^3; г) другое.	в)
3.	Пять студентов следует распределить по трем параллельным группам. Сколькими способами это можно сделать? а) 5^3; б) 3^5; в) C_5^3; г) A_5^3.	а)
4.	Сколькими способами можно раздать 9 игральных карт из 36? а) A_{36}^9; б) C_{36}^9; в) 9!.	б)

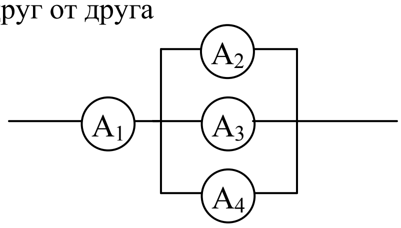
3. Задания по теме «Классическое определение вероятности».

№	Задания	Правильный ответ
1.	Из слова «КОСМОС» выбирается наугад одна буква. Какова вероятность того, что это буква «О»? а) $2/3$; б) $1/6$; в) $3/6$; г) $1/3$.	г)
2.	На шести одинаковых карточках записаны буквы Д, А, Л, О, К, Д. Если перемешать их и разложить наудачу в ряд четыре карточки, то вероятность получить слово КЛАД равна… а) $\frac{1}{6\cdot5\cdot4\cdot3}$; б) $\frac{1}{A_6^4}$; в) $\frac{2}{6\cdot5\cdot4\cdot3}$; г) $\frac{4!}{6!}$.	в)
3.	Все буквы русского алфавита написаны на 33 одинаковых карточках. Какова вероятность того, что написанная на карточке буква окажется гласной, если карточка	б)

	извлекается наудачу? а) $1/2$; б) $1-21/33$; в) $1-10/33$.	
4.	В лифт девятиэтажного дома на первом этаже вошли четыре человека. Какова вероятность, что все они выйдут на 6-м этаже? а) $\frac{6}{8^4}$; б) $\frac{1}{8^4}$; в) $\frac{1}{9^4}$; г) $\frac{1}{4^9}$.	б)
5.	Подбрасываются две игральные кости. Найти вероятность того, что сумме выпавших очков равна четырем. а) $\frac{1}{36}$; б) $\frac{1}{12}$; в) $\frac{5}{36}$; г) $\frac{1}{6}$	б)
6.	Студент знает 20 вопросов программы из 30. В билете содержится 3 вопроса. Чему равна вероятность того, что студент ответит не менее чем на два вопроса из трех? а) $\frac{C_{20}^2 \cdot C_{10}^1}{C_{30}^3}$; б) $\frac{C_{20}^2 \cdot C_{10}^1 + C_{20}^3}{C_{30}^3}$; в) $\frac{C_{20}^2 + C_{20}^1}{C_{30}^3}$	б)

4. Задания по теме «Условная вероятность. Теоремы умножения и сложения вероятностей».

№	Задания	Правильный ответ
1.	На сборку попадают детали с двух автоматов: 60% из первого и 40% из второго. Первый автомат дает 15% брака, второй – 10% брака. Найти вероятность попадания на сборку доброкачественной детали. а) 0,34; б) 0,87; в) 0,9; г) 0,15.	б)
2.	Условная вероятность $P(A\mid B)$ вычисляется по формуле: а) $P(A)\cdot P(B)$; б) $\frac{P(AB)}{P(B)}$; в) $\frac{P(AB)}{P(A)}$.	б)
3.	Чему равна условная вероятность $P(A\mid B)$, если A и B независимые события?	в)

	а) $\dfrac{P(AB)}{P(A)}$; б) $P(A)\cdot P(B)$; в) $P(A)$; г) $P(B)$.	
4.	Вероятность наступления хотя бы одного из двух совместных событий A и B вычисляется по формуле: а) $P(A+B)=P(A)+P(B)$; б) $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$; в) $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$; г) $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.	г)
5.	Различные элементы электрической цепи работают независимо друг от друга  Вероятности безотказной работы за время Т следующие: $P(A_1)=0,8$; $P(A_2)=0,6$; $P(A_3)=0,7$; $P(A_4)=0,9$. Найти вероятность безотказной работы системы за время Т. а) 0,7856; б) 0,3024; в) 0,1964; г) 0,0096	а)

5. Задания по теме «Точные и приближенные формулы в схеме Бернулли».

№	Задания	Правильный ответ
1.	Формулой Бернулли называется формула: а) $P_n(k)=\dfrac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$; б) $P_n(k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$;	в)

	в) $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$; г) $P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)$.	
2.	Монета брошена 3 раза. Тогда вероятность того, что «герб» выпадет ровно два раза равна: а) $\frac{1}{8}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{3}{8}$; г) $\frac{3}{4}$.	в)
3.	Из какого неравенства определяется наивероятнейшее число k_0 (наступления события в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p): а) $k_0 \geq p$; б) $np-q \leq k_0 \leq np+p$; в) $0 \leq k_0 \leq 1$; г) другое.	б)
4.	Пусть X – число «успехов» в трех испытаниях Бернулли. Верно ли, что: а) $P(X=3)=1$; б) $P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$; в) $P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$.	в)

6. Задания по теме «Дискретные случайные величины».

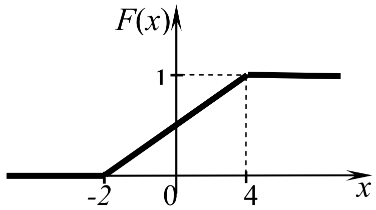
№	Задания	Правильный ответ
1.	Случайная величина X задана законом распределения: x_i: 0, x_2, 3 p_i: 0,2, 0,3, 0,5 Найти значение x_2, если $M(X)=2{,}1$. а)1; б) 2; в) -3.	б)
2.	Пусть X – число, биноминально распределенная случайная величина с параметрами n и p. Можно ли найти $D(X)$, если известны	а), б), в)

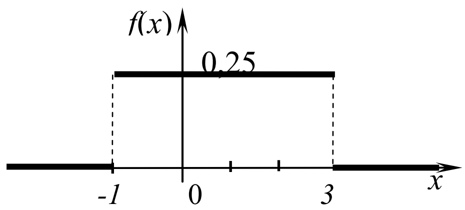
	а) $M(X)$, p; б) $M(X)$, n; в) n, p.	
3.	Закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей $\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline X & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline p & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \hline\end{array}$ Найти $P(X>2)$. а) $1/5$; б) $2/5$; в) $3/5$; г) $4/5$.	б)
4.	Случайная величина принимает значения: -3; -2; -1; 0. Что можно сказать о знаке ее дисперсии? а) $D<0$; б) $D\le 0$; в) $D>0$; г) $D\ge 0$.	в)
5.	Функция распределения имеет вид: $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ 0{,}3, & -1<x\le 2\\ 0{,}7, & 2<x\le 4\\ 0{,}8, & 4<x\le 5\\ 1, & x>5\end{cases}$. Вероятность попадания в промежуток $[2;5)$ равна а) 0,3; б) 0,7; в) 0,5; г) 0,4.	в)
6.	Закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей $\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline x_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline p_i & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & p_4 \\ \hline\end{array}$ Найти $M(X)$. а) $\frac{30}{16}$; б) $\frac{28}{16}$; в) $\frac{29}{16}$; г) $\frac{15}{16}$.	в)

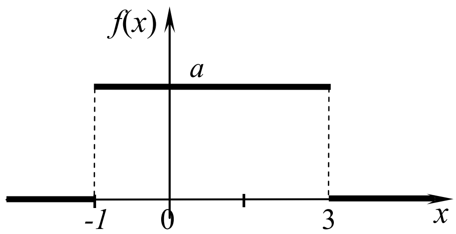
7. Задания по теме «Непрерывная случайная величина».

№	Задания	Правильный ответ
1.	Какая из функций $f(x)$ задает показательный закон распределения? а) $f(x)=\begin{cases}1+e^{-2x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$; б) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2e^{x/2}}, & x\geq 0\\ 1, & x<0\end{cases}$; в) $f(x)=\begin{cases}3e^{-3x}, & x\geq 0\\ 1, & x<0\end{cases}$; г) $f(x)=\begin{cases}4e^{-4x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$; д) ни одна.	г)
2.	Случайная величина задана плотностью распределения $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\leq 0\\ \dfrac{x}{C} & \text{при } 0<x\leq 2\\ 0 & \text{при } x>0\end{cases}$. Коэффициент C равен а) $C=2$; б) $C=4$; в) $C=1$.	б)
3.	Непрерывная случайная величина X имеет равномерный закон распределения на отрезке $[a,b]$, тогда математическое ожидание находится по формуле: а) $\dfrac{a-b}{2}$; б) $\dfrac{a+b}{2}$; в) $\dfrac{(b-a)^2}{12}$; г) $\dfrac{b-a}{12}$.	б)

4.	Непрерывная случайная величина *X* задана плотностью распределения вероятностей $f\left(x\right)=\dfrac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(x-1\right)^2}{50}}$. Тогда дисперсия этой случайной величины равна а) 1; б) 10; в) 25; г) 5.	в)
5.	Непрерывная случайная величина *X* распределена по показательному закону $f\left(x\right)=4e^{-4x}$ при $x\geq 0$; $f\left(x\right)=0$ при $x<0$. Найти $D\left(X\right)$. а) $\dfrac{1}{4}$; б) $\dfrac{1}{2}$; в) $\dfrac{1}{4^2}$; г) $\dfrac{1}{2^3}$.	в)
6.	Функция распределения случайной величины *X* задана выражением $F\left(x\right)=\begin{cases}0, & x<2\\ \dfrac{1}{3}\left(x^2-2x\right), & 2\leq x\leq 3\\ 1, & x>3\end{cases}$ Тогда плотностью вероятности этой случайной величины является функция: а) $f\left(x\right)=\begin{cases}0, & x\leq 2\\ \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x^3}{3}-x\right), & 2<x\leq 3\\ 1, & x>3\end{cases}$; б) в) $f\left(x\right)=\begin{cases}0, & x\leq 2,\ x>3\\ 2x-2, & 2<x\leq 3\end{cases}$; в) $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}\left(x-1\right), & 2\leq x\leq 3\\ 0, & x<2,\ x>3\end{cases}$.	в)

<table>
<tr>
<td>7.</td>
<td>График функции распределения вероятностей случайной величины имеет вид:


Найти $M\left(3X+2\right)$.
а) 5; б) 3; в) 8; г) 11.</td>
<td>а)</td>
</tr>
<tr>
<td>8.</td>
<td>График плотности распределения вероятностей случайной величины X имеет вид:


Найти $D\left(3X-1\right)$.
а) 0,25; б) 12; в) 11; г) 4.</td>
<td>б)</td>
</tr>
<tr>
<td>9.</td>
<td>График плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины X, распределенной равномерно в интервале (-3; 1), имеет вид:


Найти a:
а) 1; б) 0,5; в) $\frac{1}{3}$; г) 0,25</td>
<td>г)</td>
</tr>
</table>

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для вузов / В.Е. Гмурман. М: Высш. шк., 2003 – 479с.

2. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие для студентов вузов / В.Е. Гмурман. М: Высш. шк., 2003 – 405с.

3. *Лунгу К.Н., Норин В.П., Письменный Д.Т., Шевченко Ю.А.* Сборник задач по высшей математике. – М.: Айрис-пресс, 2004 – 592с.

4. *Кремер Н.Ш.* Теория вероятностей и математическая статистика / Н.Ш. Кремер. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004 – 543с.

5. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей и её инженерные приложения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. М.: Высш. шк., 2007.

6. Вероятностные разделы математики / Под ред. *Максимова* Ю.Д. – СПб.: «Иван Фёдоров», 2001 –592с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица 4 – Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352

0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2675
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1

	714	691	669	647	626	604	582	561	539	518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0862	0,0551
2,0	0,054	0,052	0,051	0,050	0,049	0,048	0,047	0,046	0,045	0,044

	0	9	9	8	8	8	8	8	9	9
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081

2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046

Продолжение таблицы 4

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,000	0,000

	2	2	2	1	1	0	0	0	9	9
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица 5 – Таблица значений функции $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-z^2/2}\, dz$

z	Φ (z)	z	Φ (z)	z	Φ (z)	z	Φ (z)
0,00	0,0000	0,30	0,1179	0,60	0,2257	0,90	0,3159
0,01	0,0040	0,31	0,1217	0,61	0,2291	0,91	0,3186
0,02	0,0080	0,32	0,1255	0,62	0,2324	0,92	0,3212
0,03	0,0120	0,33	0,1293	0,63	0,2357	0,93	0,3238
0,04	0,0160	0,34	0,1331	0,64	0,2389	0,94	0,3264
0,05	0,0199	0,35	0,1368	0,65	0,2422	0,95	0,3289
0,06	0,0239	0,36	0,1406	0,66	0,2454	0,96	0,3315
0,07	0,0279	0,37	0,1443	0,67	0,2486	0,97	0,3340
0,08	0,0319	0,38	0,1480	0,68	0,2517	0,98	0,3365
0,09	0,0359	0,39	0,1517	0,69	0,2549	0,99	0,3389
0,10	0,0398	0,40	0,1554	0,70	0,2580	1,00	0,3413
0,11	0,0438	0,41	0,1591	0,71	0,2611	1,01	0,3438
0,12	0,0478	0,42	0,1628	0,72	0,2642	1,02	0,3461
0,13	0,0517	0,43	0,1664	0,73	0,2673	1,03	0,3485
0,14	0,0557	0,44	0,1700	0,74	0,2703	1,04	0,3508
0,15	0,0596	0,45	0,1736	0,75	0,2734	1,05	0,3531
0,16	0,0636	0,46	0,1772	0,76	0,2764	1,06	0,3554
0,17	0,0675	0,47	0,1808	0,77	0,2794	1,07	0,3577
0,18	0,0714	0,48	0,1844	0,78	0,2823	1,08	0,3599
0,19	0,0753	0,49	0,1879	0,79	0,2852	1,09	0,3621
0,20	0,0793	0,50	0,1915	0,80	0,2881	1,10	0,3643
0,21	0,0832	0,51	0,1950	0,81	0,2901	1,11	0,3665
0,22	0,0871	0,52	0,1985	0,82	0,2939	1,12	0,3686
0,23	0,0910	0,53	0,2019	0,83	0,2967	1,13	0,3708
0,24	0,0948	0,54	0,2054	0,84	0,2995	1,14	0,3729
0,25	0,0987	0,55	0,2088	0,85	0,3023	1,15	0,3749
0,26	0,1026	0,56	0,2123	0,86	0,3051	1,16	0,3770
0,27	0,1064	0,57	0,2157	0,87	0,3078	1,17	0,3790
0,28	0,1103	0,58	0,2190	0,88	0,3106	1,18	0,3810
0,29	0,1141	0,59	0,2224	0,89	0,3133		

Продолжение таблицы 5

z	Φ (z)	z	Φ (z)	z	Φ (z)	z	Φ (z)
1,19	0,3830	1,54	0,4382	1,89	0,4706	2,48	0,4934
1,20	0,3849	1,55	0,4394	1,90	0,4713	2,50	0,4938
1,21	0,3869	1,56	0,4406	1,91	0,4719	2,52	0,4941
1,22	0,3883	1,57	0,4418	1,92	0,4726	2,54	0,4945
1,23	0,3907	1,58	0,4429	1,93	0,4732	2,56	0,4948
1,24	0,3925	1,59	0,4441	1,94	0,4738	2,58	0,4951
1,25	0,3944	1,60	0,4452	1,95	0,4744	2,60	0,4953
1,26	0,3962	1,61	0,4463	1,96	0,4750	2,62	0,4956
1,27	0,3980	1,62	0,4474	1,97	0,4756	2,64	0,4959
1,28	0,3997	1,63	0,4484	1,98	0,4761	2,66	0,4961
1,29	0,4015	1,64	0,4495	1,99	0,4767	2,68	0,4963
1,30	0,4032	1,65	0,4505	2,00	0,4772	2,70	0,4965
1,31	0,4049	1,66	0,4515	2,02	0,4783	2,72	0,4967
1,32	0,4066	1,67	0,4525	2,04	0,4793	2,74	0,4969
1,33	0,4082	1,68	0,4535	2,06	0,4803	2,76	0,4971
1,34	0,4099	1,69	0,4545	2,08	0,4812	2,78	0,4973
1,35	0,4115	1,70	0,4554	2,10	0,4821	2,80	0,4974
1,36	0,4131	1,71	0,4564	2,12	0,4830	2,82	0,4976
1,37	0,4147	1,72	0,4573	2,14	0,4838	2,84	0,4977
1,38	0,4162	1,73	0,4582	2,16	0,4846	2,86	0,4979
1,39	0,4177	1,74	0,4591	2,18	0,4854	2,88	0,4980
1,40	0,4192	1,75	0,4599	2,20	0,4861	2,90	0,4981
1,41	0,4209	1,76	0,4608	2,22	0,4868	2,92	0,4982
1,42	0,4222	1,77	0,4616	2,24	0,4875	2,94	0,4984
1,43	0,4236	1,78	0,4625	2,26	0,4881	2,96	0,4985
1,44	0,4251	1,79	0,4633	2,28	0,4887	2,98	0,4986
1,45	0,4265	1,80	0,4641	2,30	0,4893	3,00	0,49865
1,46	0,4279	1,81	0,4649	2,32	0,4898	3,20	0,49931
1,47	0,4292	1,82	0,4656	2,34	0,4904	3,40	0,49966
1,48	0,4306	1,83	0,4664	2,36	0,4909	3,60	0,499841
1,49	0,4319	1,84	0,4671	2,38	0,4913	3,80	0,499928
1,50	0,4332	1,85	0,4678	2,40	0,4918	4,00	0,499968
1,51	0,4345	1,86	0,4686	2,42	0,4922	4,50	0,499997
1,52	0,4357	1,87	0,4693	2,44	0,4927	5,00	0,499997
1,53	0,4370	1,88	0,4699	2,46	0,4931		

Учебное издание

Апайчева Л.А.,
кандидат физико-математических наук, доцент;

Багоутдинова А.Г.,
кандидат технических наук

Шувалова Л.Е.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Корректор Габдурахимова Т.М.
Худ. редактор Федорова Л.Г.

Сдано в набор 20.05.2011.
Подписано в печать 19.10.2011.
Бумага писчая. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 16,25. Тираж 300.
Заказ №39.

НХТИ (филиал) ФГБОУ ВПО «КНИТУ», г. Нижнекамск,
423570,
ул. 30 лет Победы, д. 5а.