Министерство образования и науки Российской Федерации
Нижнекамский химико-технологический институт (филиал)
Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Казанский национальный исследовательский технологический университет»

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ИНТЕРНЕТ-ТЕСТИРОВАНИЮ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Нижнекамск
2013

УДК 51
Ш 95

Печатаются по решению редакционно-издательского совета Нижнекамского химик-технологического института (филиала) ФГБОУ ВПО «КНИТУ».

Рецензенты:
Макусева Т.Г. ,кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики НХТИ;
Гайфутдинов А.Н., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры МАХП.

Шувалова, Л.Е.
Ш 95 Тестовые задания по математике для подготовки к интернет-тестированию : методические указания / Л.Е. Шувалова. – Нижнекамск : Нижнекамский химико-технологический институт (филиал) ФГБОУ ВПО «КНИТУ», 2013. – 62 с.

В методических указаниях представлены 14 параграфов по всем темам, отраженным в спецификации государственной итоговой аттестации. Каждый параграф состоит из основных теоретических сведений и тестовых примеров, которые сгруппированы в соответствии с дидактическими единицами ГОС ВПО.

Примеры соответствуют базовому уровню сложности. Задания представлены порталом интернет-тестирования в сфере образования www.i-exam.ru .

Пособие предназначено для самостоятельной подготовки студентов всех специальностей, а также в помощь преподавателям, использующим в своей работе тестовый способ контроля знаний.

УДК 51

Содержание

1. Линейная алгебра

1. Определитель второго порядка $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

№ 1.1. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2) - 1\cdot 3 = -4 - 3 = -7$

2. Определитель третьего порядка

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \grave{a}_{11} & \grave{a}_{12} & \grave{a}_{13} \\ \grave{a}_{21} & \grave{a}_{22} & \grave{a}_{23} \\ \grave{a}_{31} & \grave{a}_{32} & \grave{a}_{33} \end{vmatrix} = \grave{a}_{11}\cdot(-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} \grave{a}_{22} & \grave{a}_{23} \\ \grave{a}_{32} & \grave{a}_{33} \end{vmatrix} + \grave{a}_{12}\cdot(-1)^{1+2}\cdot \begin{vmatrix} \grave{a}_{21} & \grave{a}_{23} \\ \grave{a}_{31} & \grave{a}_{33} \end{vmatrix} + \grave{a}_{13}\cdot(-1)^{1+3}\cdot \begin{vmatrix} \grave{a}_{21} & \grave{a}_{22} \\ \grave{a}_{31} & \grave{a}_{32} \end{vmatrix}.$$

M_{ij}-минор элемента a_{ij}.Это определитель, полученный из исходного путем вычерчивания i-строки и j-столбца, на пересечении которых находиться данный элемент.

$\grave{I}_{23} = \begin{vmatrix} \grave{a}_{11} & \grave{a}_{12} \\ \grave{a}_{31} & \grave{a}_{32} \end{vmatrix}, \grave{I}_{31} = \begin{vmatrix} \grave{a}_{12} & \grave{a}_{13} \\ \grave{a}_{22} & \grave{a}_{23} \end{vmatrix}$......

A_{ij}-алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

$\grave{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$

№ 1.2. Определитель $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ k & 4 & 2 \end{vmatrix}$ равен нулю, при k равном…

▹ Вычислим определитель разложением по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ k & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + (-3)\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ k & 2 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ k & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot(4+2k) = 12+6k = 0,\ k = -2.$$

№ 1.3. Если определитель $\begin{vmatrix} \grave{a} & 3 \\ -6 & b \end{vmatrix}$ равен $\frac{2}{7}$, то определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 35 \\ b & 3 & 34 \\ -6 & a & 33 \end{vmatrix}$ равен…

▹ $\Delta = 35\cdot\begin{vmatrix} b & 3 \\ -6 & a \end{vmatrix} = 35\cdot\frac{2}{7} = 10$.

№ 1.4. Разложение определителя $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ по третьей строке имеет вид…

▹ $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3\cdot(2-0) - 2\cdot(4+21) + (0-3) = 6-50-3 = -47$.

3. Матрица

1) $\grave{A}_{m\times n} + B_{m\times n} = C_{m\times n}$, причем $\tilde{n}_{ij} = a_{ij} + \hat{a}_{ij}$.

2) $\grave{A}_{m\times k}\cdot B_{k\times n} = C_{m\times n}$, причем $\tilde{n}_{ij} = a_{i1}\cdot\hat{a}_{1j} + a_{i2}\hat{a}_{2j} + ... + a_{ik}\cdot\hat{a}_{kj}$.

3) Минором к-го порядка произвольной матрицы А называется определитель, составленный из элементов матрицы, расположенных на пересечении каких-либо к строк и к столбцов.

4) Рангом матрицы А называется наибольший из порядков ее миноров не равных нулю.

5) Ранг ступенчатой матрицы равен количеству ненулевых строк.

6) Квадратная матрица А называется невырожденной, если определитель $|\grave{A}| \neq 0$.

7) Единичная матрица 3–го порядка: $\mathring{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

8) A^T- транспонированная матрица (все строки меняются на столбцы).

$(A^T)^T=A$; $(A+B)^T=A^T+B^T$; $(AB)^T=B^T\cdot A^T$.

9) A^Γ- присоединенная матрица(элементами являются алгебраические дополнения A^T).

10) $A^{-1}=\frac{1}{|\grave{A}|}\cdot \grave{A}^{\tilde{A}}$

№ 1.5. $\grave{A} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

Сумма элементов, расположенных на главной диагонали.

$\triangleright$ $7-4+2=5$.

№ 1.6. Дана матрица $\grave{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда алгебраическое дополнение элемента $\grave{A}_{21}$ равно…

$\triangleright$ $\grave{A}_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(4-9) = 5$.

№ 1.7. Если существует матрица $A-(5A)^T$, то матрица A является квадратной.

№ 1.8. Дана матрица А размерности 4х6 и В размерности 6х3. Произведение АВ существует и имеет размерность…

$\triangleright$ 4х3.

№ 1.9. $\grave{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, тогда $\tilde{N} = \grave{A} \cdot \hat{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\cdot 1+1\cdot 2 \\ 0\cdot 1+4\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

№ 1.10. $\grave{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Произведение матриц $\hat{A} \cdot \grave{A}$ равно…

$$\triangleright\ \hat{A} \cdot \grave{A} = \hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2+3\cdot 1 & 2\cdot 1+3\cdot 0 & 2\cdot(-1)+3\cdot 3 \\ -2\cdot 2+1\cdot 1 & -2\cdot 1+1\cdot 0 & -2\cdot(-1)+1\cdot 3 \\ 1\cdot 2-1\cdot 1 & 1\cdot 1-1\cdot 0 & 1\cdot(-1)-1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 7 \\ -3 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

№ 1.11. Обратная матрица к матрице

$\grave{A}=\begin{pmatrix} 2 & -\alpha & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ не существует при α равном…

▹ $\grave{A}^{-1}$ не существует, если $|\grave{A}|=0$.

$$\begin{vmatrix} 2 & -\alpha & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 4 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot5\cdot4+4\cdot(-2)\cdot(-\alpha)+6\cdot(-1)\cdot2-4\cdot5\cdot2-6\cdot(-2)\cdot2-4\cdot(-1)\cdot(-\alpha)=$$

$=40+8\alpha-12-40+24-4\alpha=12+4\alpha=0$;

$4\alpha=12;\quad \alpha=3$.

№ 1.12. Построить обратную матрицу $\grave{A}^{-1}$, если $\grave{A}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

▹ Определитель матрицы А равен…

$|\grave{A}|=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=2+3=5\neq0$.

$\grave{A}^{\grave{O}}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Найдем алгебраические дополнения элементов транспортированной матрицы: $\grave{A}^{\grave{O}}_{11}=|1|=1;\quad \grave{A}^{\grave{O}}_{12}=-|3|=-3;$ $\grave{A}^{\grave{O}}_{21}=-|-1|=1;\quad \grave{A}^{\grave{O}}_{22}=|2|=2.$

$$\grave{A}^{-1}=\frac{1}{5}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

№ 1.13. Даны матрицы $\grave{A}=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\hat{A}=\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда решением матричного уравнения $\tilde{O}-2\hat{A}=\grave{A}$ является матрица:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 13 & -4 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

▹ $\tilde{O}=\grave{A}+2\hat{A}=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответ: случай 4).

№ 1.14. Собственные значения собственных векторов линейного преобразования, заданного в некотором базисе матрицей $\grave{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, могут быть найдены по формуле

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix}=0$.

№ 1.15. Произведение матриц с размерностями $[2\times m]$ и $[2k\times3]$ возможно при…

▹Произведение матрицы А на матрицу В возможно, если только количество столбцов матрицы А равно количеству строк матрицы В, то есть $m=2k$. Например, $m=2$ и $k=1$.

№ 1.16. Ранг матрицы $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ равен…

▹ Ранг матрицы равен трем, так как число не нулевых строк треугольной матрицы равно 3.

№ 1.17. Матрица $\grave{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 12 & \hat{e} \end{pmatrix}$ является вырожденной, если…

▹ $3\cdot\hat{e}-12\cdot 1=0;\quad 3\hat{e}=12;\quad \hat{e}=4$.

4. Основные и неосновные переменные

Пусть $r(A)=r(A/B)=r$, $r<n$, n - число переменных $\tilde{o}_1,\tilde{o}_2,...,\tilde{o}_n$. Тогда r переменных называются основными (базисными), если определитель матрицы коэффициентов отличен от нуля.

Остальные $(n-r)$ переменных называются неосновными (или свободными). Система линейных уравнений имеет единственное решение, если $r=n$, и бесконечное множество решений, если $r<n$.

№ 1.18. В системе уравнений $\begin{cases} 2\tilde{o}_1+\tilde{o}_2-3\tilde{o}_3+\tilde{o}_4+3\tilde{o}_5=0 \\ -\tilde{o}_2-\tilde{o}_3-\tilde{o}_4+4\tilde{o}_5=0 \\ \tilde{o}_3-\tilde{o}_4+3\tilde{o}_5=0 \end{cases}$

базисными (несвободными) переменными можно считать…

1) $\tilde{o}_1,\tilde{o}_2,\tilde{o}_3$; 2) $\tilde{o}_3,\tilde{o}_5$; 3) $\tilde{o}_5$; 4) $\tilde{o}_4,\tilde{o}_5$

▹ Ранг расширенной матрицы $r=3$, число переменных $n=5$. Тогда 3 переменные базисные, а $n-r$ переменные не основные.

Ответ. 1).

№ 1.19. Линейное отображение задано в стандартном базисе матрицей $\grave{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Тогда координатами образа вектора $\vec{O}=\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ являются…

▹ $\grave{A}\vec{O}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot 4+2\cdot(-3) \\ -1\cdot 4+5\cdot(-3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ -19 \end{pmatrix}$.

№ 1.20. Выяснить являются ли векторы $\vec{a}_1=\{1,3,1,3\}$, $\vec{a}_2=\{2,1,1,2\}$, $\vec{a}_3=\{3,-1,1,2\}$ линейно зависимыми.

▹ Составим векторное равенство $\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\lambda_3\vec{a}_3=0$ или $\lambda_1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\begin{cases} \lambda_1+2\lambda_2-3\lambda_3=0 \\ 3\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=0 \\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0 \\ 3\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3=0 \end{cases}$ Решая систему методом Гаусса, приведем ее к виду

$\begin{cases} \lambda_1+2\lambda_2-3\lambda_3=0 \\ \lambda_2+2\lambda_3=0 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases}$ Отсюда найдем множество решений $(\lambda_1=\tilde{N},\lambda_2=-2\tilde{N},\lambda_3=\tilde{N})$, где $\tilde{N}\in R$.

Поэтому условие $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 = 0$ выполняется не только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, следовательно, векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ - линейно зависимые.

№ 1.21. Расширенная матрица системы уравнений $\begin{cases} 7\tilde{o} - 2y - z + 4t + 3n - 5v = 3 \\ 2x - 3y + 2z - 3t + 4n - v = 1 \\ 3x + 4y + 5x - t + 2n - 3v = 4 \\ 4x - y + 2z + 3t + 4n + v = 5 \end{cases}$ имеет размерность…

▹ 4x7.

№ 1.22. Для системы линейных уравнений составить расширенную матрицу

$$\begin{cases} 3\tilde{o}_1 - \tilde{o}_2 + \tilde{o}_3 = 4 \\ \tilde{o}_1 + \tilde{o}_3 = 0 \\ -2\tilde{o}_1 + \tilde{o}_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

▹ $\left(\grave{A}/\hat{A}\right) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

№ 1.23.Собственные значения матрицы $\grave{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$…

▹ Множество собственных значений матрицы А найдем решая характеристическое уравнение $\left|\grave{A} - \lambda\mathring{A}\right| = 0$.

$$\left|\grave{A} - \lambda\mathring{A}\right| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0, \; \lambda_1 = -2; \quad \lambda_2 = -1.$$

<u>**5. Квадратичные формы**</u>

$F = \grave{a}\tilde{o}_1^2 + \hat{a}\tilde{o}_1\tilde{o}_2 + \tilde{n}\tilde{o}_2^2$, то матрица квадратичной формы имеет вид $\grave{A} = \begin{pmatrix} \grave{a} & \dfrac{\hat{a}}{2} \\ \dfrac{\hat{a}}{2} & \tilde{n} \end{pmatrix}$.

№ 1.24. Матрице $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ соответствует квадратичная форма.

▹ $F = 1 \cdot x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_1 + 3x_2^2 = x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2$.

№ 25. Написать матрицу квадратичной формы.

$F = 2x_1^2 - 5x_2^2 + 8x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$

▹ Учитывая

$2x_1^2 \Rightarrow a_{11} = 2$; $-5x_2^2 \Rightarrow a_{22} = -5$; $8x_3^2 \Rightarrow a_{33} = 8$; $4x_1x_2 \Rightarrow a_{12} = 2, \quad a_{21} = 2$; $-2x_1x_3 \Rightarrow a_{13} = -1, \quad a_{31} = -1$; $6x_2x_3 \Rightarrow a_{23} = 3, \quad a_{32} = 3$.

Тогда матрица А квадратичной формы F имеет вид $\grave{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$.

№ 1.26. Дана квадратичная форма $L = 4x_1^2 - 12x_1x_2 - 10x_1x_3 + x_2^2 - 3x_3^2$. Запишем ее в матричном виде.

$\triangleright$ Диагональные элементы равны коэффициентам при квадратах переменных $l_{11}=4$, $l_{22}=1$, $l_{33}=-3$, а другие элементы – половинам соответствующих коэффициентов квадратичной формы.

$$L=\begin{pmatrix}4 & -6 & -5\\ -6 & 1 & 0\\ -5 & 0 & -3\end{pmatrix}.$$

6. Классификация квадратичных форм

Тип формы	Поведение главных миноров
Положительно определенная	Все главные миноры положительны
Положительно полуопределенная	Все главные миноры неотрицательны
Отрицательно определенная	$M_1<0$, $M_2>0$, $M_3<0,\ldots$
Отрицательно полуопределенная	$M_1\le 0$, $M_2\ge 0$, $M_3\le 0\ldots$
Неопределенная	В случаях, отличных от вышеприведенных

№ 1.27. Исследовать на знаковую определенность квадратичную форму $L=2x_1^2+4x_1x_2-4x_1x_3+3x_2^2+2x_2x_3+6x_3^2$.

$\triangleright$ Выпишем матрицу квадратичной формы

$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 3 & -1\\ -2 & -1 & 6\end{pmatrix}$. Найдем главные миноры $M_1=|2|=2>0$, $M_2=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=6-4=2>0$,

$M_3=\begin{vmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 3 & -1\\ -2 & -1 & 6\end{vmatrix}=36+4+4-12-2-24=6>0$. Все главные миноры положительны $\Rightarrow$ L - положительно определенная.

2. Векторная алгебра

1. Заданы точки $A(x_1;y_1;z_1), B(x_2;y_2;z_2)$, тогда $\overline{AB}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$; $\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.
2. Если $\overline{a}=(a_x;a_y;a_z)=a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k};\quad \overline{b}=(b_x;b_y;b_z)=b_x\overline{i}+b_y\overline{j}+b_z\overline{k},$ то $\overline{a}+\overline{b}=(a_x+b_x;a_y+b_y;a_z+b_z)$; $k\overline{a}=(ka_x;ka_y;ka_z)$; $|\overline{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

№ 2.1. Даны вектора $\overline{a}=\overline{i}-4\overline{j}$, $\overline{b}=4\overline{i}+3\overline{j}+\overline{k}$. Тогда проекция вектора $(\overline{b}-\overline{a})$ на ось OX равна…

$\triangleright$ $(\overline{b}-\overline{a})=(x_b-x_a,y_b-y_a,z_b-z_a)$=(4-1, 3+4, 1-0)=(3,7,1), то $np_{\text{OX}}(\overline{b}-\overline{a})=3$.

3. Если $\overline{a}_0$ - орт вектора $\overline{a}=(a_x;a_y;a_z)$, то $\overline{a}_0=\left(\frac{a_x}{|\overline{a}|};\frac{a_y}{|\overline{a}|};\frac{a_z}{|\overline{a}|}\right), |\overline{a}_0|=1.$

№ 2.2. Укажите соответствие между заданным вектором и соответствующим ему нормированным вектором

1. (1,0) 2. (1,1) 3. (3,4) 4. (1,2)

A) $\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ B) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ C) $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ D) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ E) $(1,0)$

▹ 1. $\sqrt{1^2+0^2}=1\Rightarrow(1,0)$; 2. $\sqrt{1^2+1^2}=2\Rightarrow\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$; 3. $\sqrt{3^2+4^2}=5\Rightarrow\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$; 4.

$\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}\Rightarrow\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}},\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Ответ. $1\to Å$; $2\to Ñ$; $3\to À$; $4\to Â$.

4. Если α,β,γ - углы вектора $\bar{a}$ с осями координат Ox,Oy,Oz, то направляющие косинусы вектора

$$\cos\alpha=\frac{ax}{|\bar{a}|},\quad \cos\beta=\frac{ay}{|\bar{a}|},\quad \cos\gamma=\frac{az}{|\bar{a}|}.$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,\quad \overline{a_0}=(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$$ - единичный вектор.

5. $\bar{a}=\bar{b}\Leftrightarrow a_x=b_x,a_y=b_y,a_z=b_z$;

6. $\bar{a}\,||\,\bar{b}\Leftrightarrow\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$.

7. Если отрезок M_1M_2 делится точкой $M(x;y;z)$ в отношении $\lambda=\dfrac{|M_1M|}{|MM_2|}$, где $M_1(x_1;y_1;z_1),M_2(x_2;y_2;z_2)$, то

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda};z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Если отрезок M_1M_2 делится точкой $M(x;y;z)$ пополам, то $x=\dfrac{x_1+x_2}{2};y=\dfrac{y_1+y_2}{2};z=\dfrac{z_1+z_2}{2}$.

8. <u>Скалярное произведение векторов</u> $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $\quad\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=|\bar{a}|\,np_{\bar{a}}\bar{b}=|\bar{b}|\cdot np_{\bar{b}}\bar{a}.$

Если $\bar{a}=(a_x;a_y;a_z),\bar{b}=(b_x;b_y;b_z)$, то $\bar{a}\cdot\bar{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

$\bar{a}\perp\bar{b}\Leftrightarrow\bar{a}\cdot\bar{b}=0;$

$\cos\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right)=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}.$

№ 2.3. Выражение $(\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k})(2\bar{i}+\bar{j}-\bar{k})-(\bar{i}+4\bar{j})^2=2\bar{i}\,\bar{i}+\bar{i}\,\bar{j}-\bar{i}\cdot k+4\bar{j}\,\bar{i}+2\bar{j}\,\bar{j}-$

$$-2\bar{j}\,\bar{k}+2\bar{k}\,\bar{i}+\bar{k}\,\bar{j}-\bar{k}\cdot\bar{k}-\bar{i}^{\,2}-8\bar{i}\cdot\bar{j}+16\bar{j}^{\,2}=\left|\begin{matrix}\text{ó÷èò û âàÿ }\ \bar{i}\cdot\bar{i}=\bar{j}\cdot\bar{j}=\bar{k}\cdot\bar{k}=1\\ \bar{i}\,\bar{j}=\bar{j}\cdot\bar{k}=\bar{i}\cdot\bar{k}=0\end{matrix}\right|=$$

$=2+2-1-1+16=18.$

9. <u>Векторное произведение векторов</u> $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$\bar{a}\times\bar{b}=\bar{c}\Leftrightarrow\begin{cases}|\bar{c}|=|\bar{a}\times\bar{b}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\sin\left(\widehat{\bar{a},\bar{b}}\right);\\ \bar{c}\perp\bar{a};\bar{c}\perp\bar{b};\\ \{\bar{a};\bar{b};\bar{c}\}\ \text{правая тройка векторов.}\end{cases}$$

Если $\bar{a}=(a_x;a_y;a_z),\bar{b}=(b_x;b_y;b_z)$, то

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}a_x&a_z\\b_x&b_z\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\bar{k}.$$

№ 2.4. Векторное произведение векторов $\vec{a}=\{4;\alpha;6\}$ и $\vec{a}=\{2;1;\beta\}$ равно нулю, если…

▹ $\vec{a}\times\vec{a}=0\Rightarrow\vec{a}\,\|\,\vec{a}\Rightarrow\dfrac{4}{2}=\dfrac{\alpha}{1}=\dfrac{6}{\beta}\Rightarrow\alpha=2,\beta=3$.

10. <u>Смешанное произведение векторов</u> $\bar{a},\bar{b}$ и $\bar{c}$: $\quad(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\overline{abc}$

Свойства смешанного произведения:

а) $\left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right| = V$ - объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$;

б) $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = 0 \Leftrightarrow \overline{a},\overline{b},\overline{c}$ - компланарны.

Если $\overline{a} = \left(a_x; a_y; a_z\right), \overline{b} = \left(b_x; b_y; b_z\right), c = \left(c_x; c_y; c_z\right)$, то $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_x \\ b_x & b_y & b_y \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.

3. Аналитическая геометрия на плоскости

1. Прямая на плоскости

а) Общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0,$ где $\overline{n} = \left(A; B\right)$ - нормальный вектор прямой.

б) Уравнение прямой с угловым коэффициентом k: $y = kx + b,$ где b - отрезок, отсекаемый прямой на оси Oy. Для l: $Ax + By + Cz = 0$ угловой коэффициент $k = -\dfrac{A}{B}$.

в) Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0\left(x_0; y_0\right),$ параллельно направляющему вектору $\overline{q} = \left(l; m\right)$: $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m}.$

г) Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0\left(x_0; y_0\right),$, перпендикулярно нормальному вектору $\overline{n} = \left(A; B\right)$:

$$A\left(x - x_0\right) + B\left(y - y_0\right) = 0.$$

д) Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1\left(x_1; y_1\right)$ и $M_2\left(x_2; y_2\right)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

е) Уравнение прямой в отрезках: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1,$ где a, b - величины отрезков, отсекаемых прямой на осях Ox и Oy.

ж) Расстояние от точки $M_0\left(x_0; y_0\right)$ до прямой $L: Ax + By + C = 0$:

$$\rho\left(M_0; L\right) = d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

з) Угол между прямыми $L_1: y = k_1 x + b_1, L_2: y = k_2 x + b_2$: $\operatorname{tg}\left(\angle L_1\ L_2\right) = \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$.

и) Если $l_1 \| l_2 \Rightarrow k_1 = k_2$; если $l_1 \perp l_2 \Rightarrow k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$.

№ 3.1. Произведение угловых коэффициентов прямых $7\tilde{o} + 3\acute{o} + 9 = 0$, $3\tilde{o} - \acute{o} + 5 = 0$ равно…

▹ $l_1: y = -\dfrac{7}{3}x - 3$; $l_2: y = 3x + 5$; $\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = -\dfrac{7}{3} \cdot 3 = -7$.

№ 3.2. Среди прямых $l_1: x + 5y + 10 = 0,$ $l_2: 2x + 10y - 5 = 0,$ $l_3: 2x - 10y - 10 = 0,$ $l_4: 10x + 2y - 10 = 0$ параллельными и перпендикулярными являются…

▹ Найдем угловые коэффициенты.

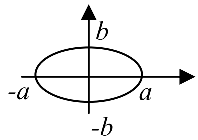
$l_1: y=-\frac{1}{5}x-2 \Rightarrow k_1=-\frac{1}{5}$; $l_2: y=-\frac{1}{5}x+\frac{1}{2} \Rightarrow k_2=-\frac{1}{5}$; $l_3: y=\frac{1}{5}x-1 \Rightarrow k_3=\frac{1}{5}$; $l_4: y=-5x+5 \Rightarrow k_4=-5$.

Так как $\hat{e}_1=\hat{e}_2 \Rightarrow l_1 \parallel l_2$; $\hat{e}_3=-\frac{1}{\hat{e}_4} \Rightarrow l_3 \perp l_4$.

2. <u>Кривые на плоскости</u>

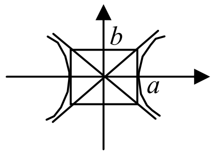
а) Каноническое уравнение эллипса с центром в начале координат и полуосями a и b: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Эксцентриситет эллипса: $\varepsilon=\frac{c}{a}$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}$.



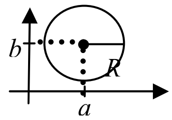
б) Каноническое уравнение гиперболы с центром в начале координат и полуосями a и b: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ с действительной осью Ox и мнимой осью Oy.

Эксцентриситет гиперболы: $e=\frac{c}{a}$, где $c=\sqrt{a^2+b^2}$.



в) Каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат и осью симметрии Ox: $y^2=2px$.

г) Каноническое уравнение окружности $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.



№ 3.4. Уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Ох и проходящей через точку A(4;-2) имеет вид…

▹ $y^2=2px$, где p находится из условия, что точка A(4;-2) принадлежит параболе, то есть $4=8p$, $p=\frac{1}{2}$, $y^2=x$.

№ 3.5. Установить виды кривых

1) $x^2-y^2=25$ - гипербола; 2) $(x+1)^2+(y-2)^2=64$ - окружность; 3) $x^2+y^2=4$ - окружность;

4) $\frac{-\tilde{o}^2}{16}+\acute{o}=4$ - парабола;

5) $\frac{\tilde{o}^2}{25}+\frac{\acute{o}^2}{16}=1$ - эллипс; 6) $\tilde{o}^2+14\tilde{o}+\acute{o}^2=0 \Rightarrow \tilde{o}^2+14\tilde{o}+7^2-7^2+\acute{o}^2=0 \Rightarrow (\tilde{o}+7)^2+\acute{o}^2=49$ - окружность;

7) $\frac{\tilde{o}^2}{12}-\frac{\acute{o}^2}{13}=1$ - гипербола; 8) $\acute{o}^2=4\tilde{o}$ - парабола; 9) $\tilde{o}^2+4\acute{o}^2=1$ - эллипс.

№ 3.6. Радиус окружности, заданной уравнением $\tilde{o}^2+\acute{o}^2+6\acute{o}+8=0$, равен…

▹ $\tilde{o}^2+\acute{o}^2+6\acute{o}+9-9+8=0 \Rightarrow \tilde{o}^2+(\acute{o}+3)^2=1$, $R=\sqrt{1}=1$.

№ 3.7. Если R – радиус окружности $\tilde{o}^2-2\tilde{o}+\acute{o}^2=0$, то ее кривизна $\frac{1}{R}$ всюду равна…

▹ $\tilde{o}^2-2\tilde{o}+\acute{o}^2=\tilde{o}^2-2\tilde{o}+1-1+\acute{o}^2=0$

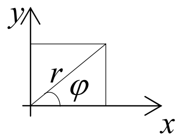
$(\tilde{o}-1)^2+\acute{o}^2=1, \quad R=\sqrt{1}=1, \quad \frac{1}{R}=1.$

№ 3.8. Радиус кривизны плоской линии $2\tilde{o}+3\acute{o}-1=0$ равен…

▹ Радиусом кривизны называется величина, обратная кривизне: $R=\frac{1}{k}$

Кривизна прямой равна нулю $\Rightarrow R=\dfrac{1}{0}=\infty$.

3. <u>Полярные координаты</u>



$$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases},\ r=\sqrt{x^2+y^2},\ tg\varphi=\frac{y}{x}.$$

№ 3.9. Точка А$\left(2;\dfrac{5\pi}{6}\right)$ задана в полярной системе координат. Тогда в прямоугольной системе координат точка имеет вид…

▷ $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$, то есть $\begin{cases} x=2\cdot\cos\dfrac{5\pi}{6} \\ y=2\cdot\sin\dfrac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=1 \end{cases}$

№ 3.10. Уравнение $\tilde{o}^2+\acute{o}^2=\grave{a}\tilde{o}$ в полярных координатах имеет вид…

▷ $x=r\cos\varphi$, $x=r\sin\varphi \Rightarrow r^2\cdot\cos^2\varphi+r^2\sin\varphi=ar\cos\varphi \Rightarrow r=a\cos\varphi$.

<u>4. Аналитическая геометрия в пространстве</u>

1. <u>Плоскость.</u>

а) Общее уравнение плоскости $Ax+By+Cz+D=0,$ где $\bar{n}=(A;B;C)$ - нормальный вектор плоскости.

б) Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно нормальному вектору $\bar{n}=(A;B;C)$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

в) Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1;y_1;z_1), M_2(x_2;y_2;z_2)$ и $M_3(x_3;y_3;z_3)$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

г) Уравнение плоскости в отрезках $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1,$ где a,b,c - отрезки, отсекаемые плоскостью на осях Ox,Oy,Oz.

д) Расстояние от точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости $P: Ax+By+Cz+D=0$:

$$\rho(M_0;P)=d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

№ 4.1. Координата $\tilde{o}_0$ точки $\grave{A}(\tilde{o}_0;1,4)$, принадлежащей плоскости $3x-2y-z-3=0$ равна…

▷ $3\tilde{o}_0-2\cdot1-4-3=0$; $3\tilde{o}_0=9$; $\tilde{o}_0=3$.

2. <u>Прямая в пространстве</u>

а) Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ параллельно направляющему вектору $\bar{q}=(l;m;n)$:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

б) Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

в) Угол между прямой $L:\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ и плоскостью $P: Ax+By+Cz+D=0$:

$$\sin\left(\widehat{L\ P}\right)=\sin\varphi=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

г) Условие параллельности прямой $L:\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ и плоскости

$P: Ax+By+Cz+D=0$: $Al+Bm+Cn=0.$

д) Условие перпендикулярности прямой $L:\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ и плоскости

$P: Ax+By+Cz+D=0$: $\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}.$

№ 4.2. Вид уравнения прямой через точки A(-2;3) и B(3;-3) имеет вид…

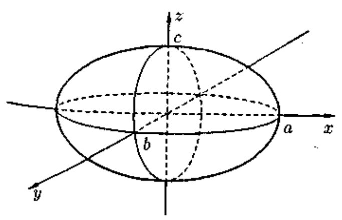
▹ $\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}$, $\frac{x+2}{3+2}=\frac{y-3}{-3-3}$, то $6x+5y-3=0$.

№ 4.3. Синус угла между прямой $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{2}$ и плоскостью $x-2y-3z+9=0$ равен…

$$\sin\alpha=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|3\cdot1-1\cdot(-2)+2\cdot(-3)|}{\sqrt{9+1+4}\cdot\sqrt{1+4+9}}=\frac{1}{14}.$$

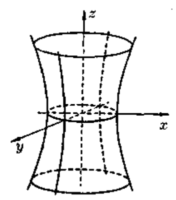
3. <u>Поверхности второго порядка</u>

а) Эллипсоид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$



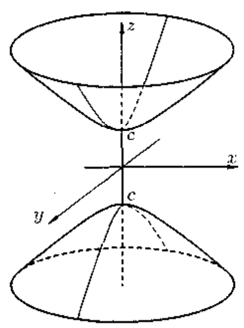
б) Однополостный гиперболоид:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$



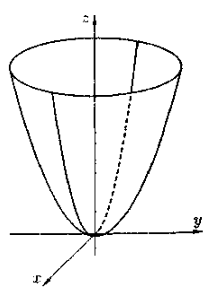
в) Двухполостный гиперболоид:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$



г) Эллиптический параболоид:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z.$

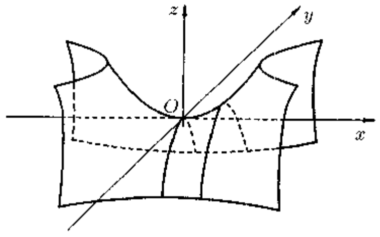


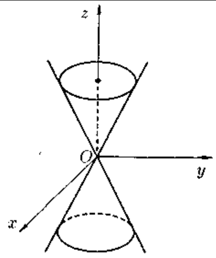
д) Гиперболический параболоид:

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z.$

е) Конус второго порядка:

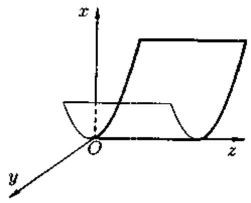
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$



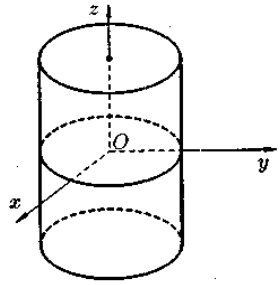


ж) Цилиндр второго порядка:

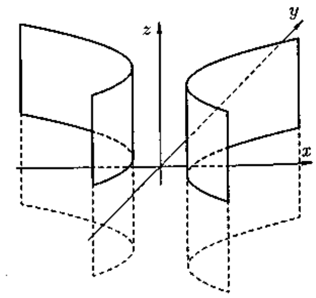
– Параболический цилиндр:
$y^2 = 2px.$



– Эллиптический цилиндр:
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$



– Гиперболический цилиндр:
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$



№ 4.4. Уравнение линии пересечения гиперболоида $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = -1$ и плоскости $x = 0$ имеет вид…

▷ $\frac{0}{5} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = -1 \Rightarrow \frac{z^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ - гипербола.

5. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Множества

№ 5.1. Установите соответствие между заданными числами и множествами, которым они принадлежат.

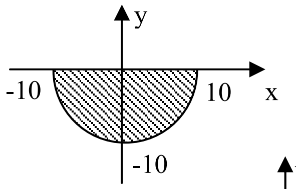
1) $\tilde{o} = -10$	$\hat{A} = \{x \in R \mid 2,1 < x \le 4,85\}$
2) $\tilde{o} = \sqrt{14}$	$\mathring{A} = \{x \in N \mid -10 \le x < 6\}$
3) $\tilde{o} = 6$	$\grave{A} = \{x \in Z \mid -14 < x < -9\}$
4) $\tilde{o} = -6,3$	$D = \{x \in R \mid -7,1 \le x < -6,2\}$

$$C = \left\{ x \in N \middle| 4 \le x < 7 \right\}$$

$\triangleright$ $1) \to \grave{A}$; $2) \to \hat{A}$; $3) \to \tilde{N}$; $4) \to D$.

№ 5.2. Множество действительных чисел с расстоянием $\rho(x,y) = |x-y|$ образует метрическое пространство… R^1.

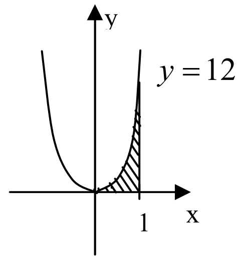
№ 5.3. Мера множества, изображенного на рисунке:



$\triangleright$ Это площадь половины круга

$$S = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi \cdot 100}{2} = 50\pi \ .$$

№ 5.4. Мера плоского множества, изображенного на рисунке:

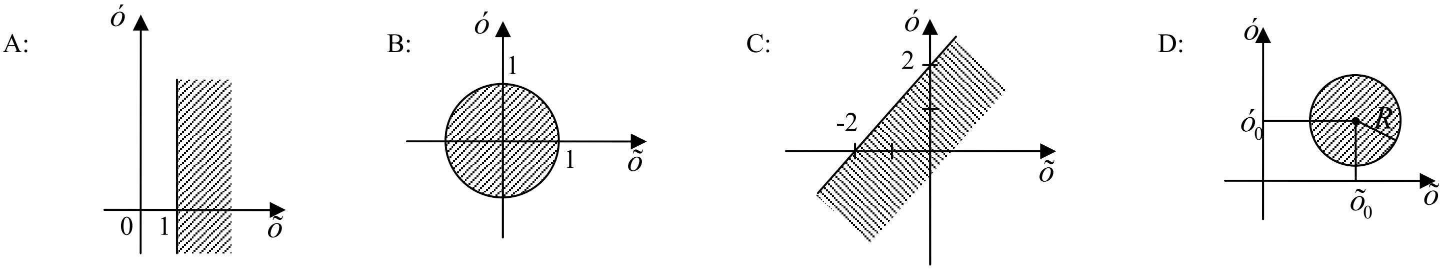


$\triangleright$ $S = \int\limits_0^1 12x^2 dx = 12 \cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = 4(1-0) = 4$.

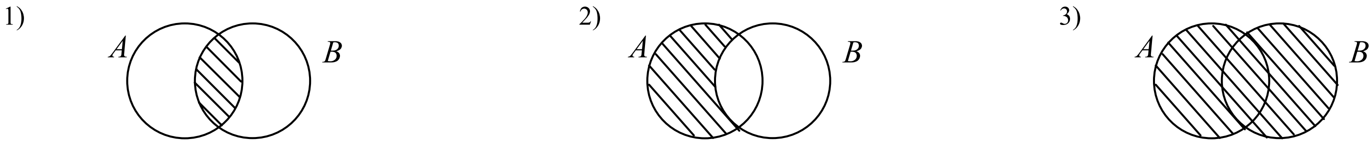
№ 5.5. Для множеств A=$\{0,1,3,8\}$ и B=$\{3,0,7\}$. Найти. $A \cup B = \{1,0,3,7,8\}$, $A \cap B = \{0,3\}$, $A - B = \{1,8\}$.

№ 5.6. Даны множества и их геометрическое изображение.

1. $\grave{A} = \left\{ (\tilde{o}, \acute{o}) \in R^2 : \tilde{o} \ge 1 \right\}$;2. $\hat{A} = \left\{ (\tilde{o}, \acute{o}) \in R^2 : \tilde{o}^2 + \acute{o}^2 \le 1 \right\}$; 3. $\tilde{N}\left\{ (\tilde{o}, \acute{o}) \in R^2 : \acute{o} - \tilde{o} < 2 \right\}$; 4) $|z - z_0| \le R$, где $z_0 = x_0 + iy_0$



№ 5.7. Операцией над множествами A и B результат, которой выделен на рисунке является…



$\grave{A} \cap \hat{A}$ $\grave{A} - \hat{A}$ $\grave{A} \cup \hat{A}$

№ 5.8. Линейным является отображение…

1) $f(x) = 2^x$; 2) $f(x) = 3x$; 3) $f(x) = x^2$; 4) $f(x) = \sin x$

$\triangleright$ Ответ 2)

№ 5.9. Общий член последовательности $a_n = a_{n+1} - 10$. Из этого соотношения последовательно вычисляем: $a_2 = a_3 - 10 = -2 - 10 = -12$; $a_1 = a_2 - 10 = -12 - 10 = -22$.

Функции

№ 5.10. Области определения функций

$1^0. \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow g(x) \ne 0;$ $2^0. \sqrt{f(x)} \Rightarrow f(x) \ge 0;$

$3^0. \dfrac{f(x)}{\sqrt{g(x)}} \Rightarrow g(x) > 0;$ $4^0. \log_a f(x) \Rightarrow f(x) > 0;$

$5^0. \begin{matrix} \arcsin f(x) \\ \arccos f(x) \end{matrix} \Rightarrow -1 \le f(x) \le 1;$ $6^0. f(x) = tgx \Rightarrow x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z;$

$7^0. f(x) = ctgx \Rightarrow x \ne \pi k, k \in Z.$

№ 5.11. Найти область определения функции.

а) $ó = \sqrt[3]{õ} \Rightarrow õ \in (-\infty; +\infty);$

б) $ó = \sqrt{õ^2 - 1} \Rightarrow õ^2 - 1 \ge 0 \Rightarrow õ^2 \ge 1 \Rightarrow |õ| \ge 1 \Rightarrow õ \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty);$

в) $y = \ln(1 - õ^2) \Rightarrow 1 - õ^2 > 0 \Rightarrow õ^2 < 1 \Rightarrow |õ| < 1 \Rightarrow õ \in (-1; 1);$

г) $ó = å^{\frac{1}{õ-1}} \Rightarrow õ - 1 \ne 0 \Rightarrow õ \ne 1;$

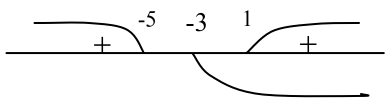
д) $ó = arctgx \Rightarrow õ \in (-\infty; +\infty);$

е) $ó = \sqrt{5 - 4õ - õ^2} + \lg(õ + 3) \Rightarrow \begin{cases} 5 - 4õ + õ^2 \ge 0 \\ õ + 3 > 0 \end{cases}$

$5 - 4õ - õ^2 \ge 0$. корни $õ_1 = -5, \quad õ_2 = 1$

$\Rightarrow õ \in (-\infty; -5) \cup [1; +\infty)$

$õ + 3 > 0 \Rightarrow õ > -3$



Тогда $õ \in [1; +\infty)$

ж) $ó = \sqrt{\log_2 õ} \Rightarrow \begin{cases} \log_2 õ \ge \\ õ > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_2 õ \ge \log_2 1 \\ õ > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} õ \ge 1 \\ õ > 0 \end{cases} \Rightarrow õ \ge 1, \; õ \in [1; +\infty).$

№ 5.12. Установите соответствие между промежутками и их образами при отображении $ó = 3õ - 1$

1) $[1;2]$, 2) $(1;2)$, 3) $[-1;0]$, 4) $(-1;0)$

Варианты ответов:

A) $(2;5)$, B) $[-4;-1)$, C) $[-4;-1]$, D) $(2;5]$, E) $[2;5]$, F) $(-4;-1)$

$\triangleright$ 1) $[1;2]$, $ó(1) = 2, ó(2) = 5$

$[1;2] \to [2;5], ò.å.1) \to Å)$

2) $(1;2) \to (2;5), ò.å.2) \to À)$

3) $[-1;0]$, $ó(-1) = -4; \; ó(0) = -1$

$[-1;0] \to [-4;-1], ò.å.3) \to Â)$

4) $(-1;0) \to (-4;-1), ò.å.4) \to F)$.

1. Периоды функций:

$\left.\begin{matrix} y = \sin ax \\ y = \cos ax \end{matrix}\right\} \Rightarrow T = \dfrac{2\pi}{a};$ $\left.\begin{matrix} y = tgax \\ y = ctgax \end{matrix}\right\} \Rightarrow T = \dfrac{\pi}{a}.$

№ 5.13. Найдите периоды для функций

$y = \sin\dfrac{\pi x}{2} \Rightarrow T = 2\pi : \dfrac{\pi}{2} = 4;$

$y = tg 2\pi x \Rightarrow T = \pi : 2\pi = \dfrac{1}{2};$

$y = \cos\dfrac{2\pi x}{5} \Rightarrow T = 2\pi : \dfrac{2\pi}{5} = 5$.

2. Гармонические колебания

$y = A\sin(\omega t + \varphi_0)$, где

$\grave{A}$ - амплитуда колебания;

ω - угловая скорость;

t - время;

φ_0 - начальная фаза колебания.

Если Т – период функции, то $\omega = \dfrac{2\pi}{\grave{O}}$ или $\grave{O} = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

№ 5.14. Найти период, амплитуду и начальную фазу следующих функций:

1) $y = 3\sin(2x - \dfrac{\pi}{6})$.

Здесь $\grave{A} = 3,\quad \omega = 2,\quad \varphi_0 = -\dfrac{\pi}{6}\quad \grave{O} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$.

2) $\acute{o} = -3\sin\dfrac{x}{3}$

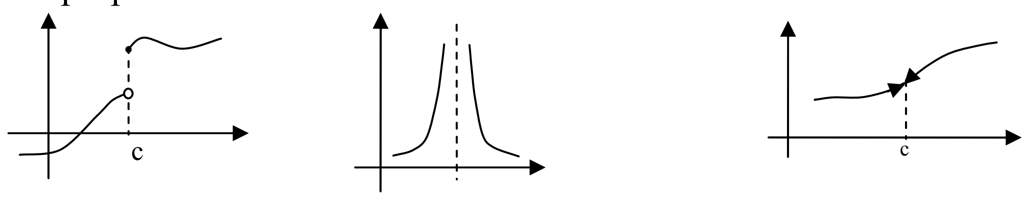
$\grave{A} = |-3| = 3,\quad \omega = \dfrac{1}{3},\quad \grave{O} = 2\pi : \dfrac{1}{3} = 6\pi$, $\varphi_0 = 0$.

Для вычисления начальной фазы запишем функцию в виде

$y = 3\cdot\sin\left(\dfrac{x}{3} + \pi\right) \Rightarrow \varphi_0 = \pi$

3) $y = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - 2x\right) \Rightarrow \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \left(\dfrac{\pi}{4} - 2x\right)\right) = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$, оттуда $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{4}$, $\grave{A} = 1,\quad \omega = 2,\quad \grave{O} = 2\pi : 2 = \pi$.

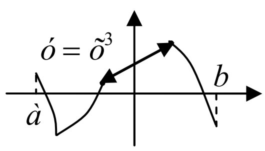
3.Точки разрыва



1-го рода 2-го рода Точка устранимого разрыва

№ 5.15. Число точек разрыва функции заданной на отрезке $[\grave{a};\hat{a}]$, график которой имеет вид.

▹ Точек разрыва нет.



№ 5.16. Количество точек разрыва функции $f(x) = \dfrac{x-3}{e^x\cdot(x^2+1)}$, равно…

▹Точками разрыва функции являются те точки, в которых функция не определена, то есть те в которых знаменатель равен нулю $e^x\cdot(x^2+1) = 0$, но $e^x \neq 0$, $(x^2+1) \neq 0$. Вывод: точек разрыва нет.

№ 5.17. Точки устранимого разрыва для функций

а) $\acute{o} = \dfrac{\tilde{o}^2 - 1}{\tilde{o}^2 + 2\tilde{o}} = \dfrac{\tilde{o}^2 - 1}{\tilde{o}(\tilde{o}+2)};\quad \tilde{o}_1 = 0, \tilde{o}_2 = -2$; б) $\acute{o} = 7^{\frac{1}{\tilde{o}+2}} \Rightarrow \tilde{o} = -2$; в) $\acute{o} = \sin\dfrac{1}{\tilde{o}} \Rightarrow \tilde{o} = 0$.

Пределы

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$

Таблица эквивалентности

$x\to 0$, то	
1) $\sin x \sim x$.	5) $e^{x}-1 \sim x$.
2) $\operatorname{tg} x \sim x$.	6) $\ln(1+x) \sim x$.
3) $\operatorname{arctg} x \sim x$.	7) $(1+x)^{\alpha}-1 \sim \alpha\cdot x$.
4) $\arcsin x \sim x$.	8) $1-\cos x \sim x^{2}/2$

№ 5.18. Найти пределы

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x^{2}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^{2}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}x=0$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\tilde{o}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x}=2$;

3) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{tg3x}{x-\pi}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\left(tg3x\right)'}{\left(x-\pi\right)'}=\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\dfrac{1}{\cos^{2}3x}\cdot 3}{1}=3$.

№ 5.19. Если $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=2$, то $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^{2}\cdot f(x)-\dfrac{3}{1+f(x)}\right)$ равен… $=(-1)^{2}\cdot 2-\dfrac{1}{-1+2}=2-1=1$.

№ 5.20. Из последовательностей выбрать наименьшее значение, при

$n\to\infty$ $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right\};\left\{\sqrt[n]{n}\right\};\left\{\dfrac{n+1}{24-1}\right\};\left\{\dfrac{n}{n^{2}+1}\right\}$

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Основные правила дифференцирования

$U(x)$, $V(x)$ – дифференцируемые функции, C – произвольная const.

1. $(C)'=0$;

2. $(CU)'=C\cdot U'$;

3. $(U\pm V)'=U'\pm V'$;

4. $(U\cdot V)'=U'V+UV'$;

5. $\left(\dfrac{U}{V}\right)'=\dfrac{U'V-UV'}{V^{2}}$;

6. $\left(\dfrac{U}{C}\right)'=\dfrac{1}{C}\cdot U'$;

7. $\left(\dfrac{C}{U}\right)'=-\dfrac{C\cdot U'}{U^{2}}$.

	Правило	Пример
1.	$(x)'=1$	$(3x)'=3$
2.	$\left(x^{C}\right)'=C\cdot x^{C-1}$	$\left(x^{3}\right)'=3x^{2}$ $\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^{2}}}$ $\left(\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^{4}}}\right)'=\left(x^{-\frac{4}{5}}\right)'=-\dfrac{4}{5}x^{-\frac{9}{5}}=-\dfrac{4}{5\sqrt[5]{x^{9}}}$

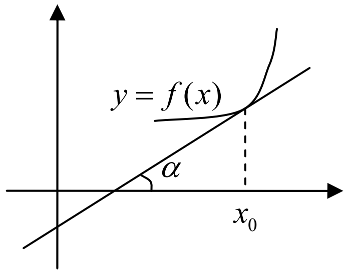
3.	$\left(U^C\right)' = CU^{C-1}U'$	$\left((7x+2)^5\right)' = 5(7x+2)^{5-1}(7x+2)' = 5(7x+2)^4\,7 = 35(7x+2)^4$ $\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \left(\left(1+x^2\right)^{-\frac12}\right)' = -\frac12\left(1+x^2\right)^{-\frac32}\left(1+x^2\right)' = -\frac12\left(1+x^2\right)^{-\frac32}2x = \frac{-x}{\sqrt{\left(1+x^2\right)}}$
4.	$\left(C^U\right)' = C^U \ln C\,U'$	$\left(7^{5x+2}\right)' = 7^{5x+2}\ln 7\,(5x+2)' = 7^{5x+2}\ln 7\cdot 5$ $\left(8^{\sqrt[3]{2-x^4}}\right)' = 8^{\sqrt[3]{2-x^4}}\ln 8\left(\sqrt[3]{2-x^4}\right)' = 8^{\sqrt[3]{2-x^4}}\frac{\ln 8}{3}\left(2-x^4\right)^{\frac13-1}\left(2-x^4\right)' = \frac{8^{\sqrt[3]{2-x^4}}\ln 8(-4x^{3}}{3\sqrt[3]{\left(2-x^4\right)^2}}$
5.	$\left(e^U\right)' = e^U\,U'$	$\left(e^{\sqrt{x}}\right)' = e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}\right)' = e^{\sqrt{x}}\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\left(e^{x^4-5x}\right)' = e^{x^4-5x}\left(x^4-5x\right)' = e^{x^4-5x}\left(4x^3-5\right)$
6.	$(\log_a U)' = \frac{1}{U\ln a}U'$	$\left(\log_4(3x-2)\right)' = \frac{1}{(3x-2)\ln 4}(3x-2)' = \frac{3}{(3x-2)\ln 4}$
7.	$(\ln U)' = \frac{1}{U}U'$	$\left(\ln\left(\sqrt[5]{x}-e^{-x}\right)\right)' = \frac{\left(\sqrt[5]{x}-e^{-x}\right)'}{\sqrt[5]{x}-e^{-x}} = \frac{1}{\sqrt[5]{x}-e^{-x}}\left(\frac15 x^{-\frac45}-e^{-x}(-1)\right) = \frac{1}{\sqrt[5]{x}-e^{-x}}\left(\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}+e^{-x}\right)$
8.	$(\lg U)' = \frac{1}{U\ln 10}U'$	$\left(\lg^3\frac2x\right)' = 3\left(\lg\frac2x\right)^2\left(\lg\frac2x\right)' = 3\left(\lg\frac2x\right)^2\frac{1}{\frac2x\ln 10}\left(\frac2x\right)' = \frac{3\left(\lg\frac2x\right)^2 x}{2\ln 10}\left(-\frac{2}{x^2}\right)$
9.	$(\sin U)' = \cos U\;U'$	$\left(\sin\sqrt[3]{x}\right)' = \cos\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \cos\sqrt[3]{x}\,\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
10	$(\cos U)' = -\sin U\;U'$	$\left(\cos\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right)' = -\sin\frac{1}{\ln x}\left(\frac{1}{\ln x}\right)' = -\sin\frac{1}{\ln x}\left(-\frac{1}{(\ln x)^2}\right)\frac1x$ $\left(\cos\left(e^{2x}\right)\right)' = -\sin\left(e^{2x}\right)\left(e^{2x}\right)' = -\sin e^{2x}\cdot e^{2x}\cdot 2$
11	$(\mathrm{tg}\,U)' = \frac{1}{\cos^2 U}U'$	$\left(\mathrm{tg}\left(3^x\right)\right)' = \frac{1}{\cos^2 3^x}\left(3^x\right)' = \frac{1}{\cos^2 3^x}3^x\ln 3$
12	$(\mathrm{ctg}\,U)' = -\frac{1}{\sin^2 U}U'$	$\left(\mathrm{ctg}\sqrt[6]{\frac{2}{x^2}}\right)' = -\frac{1}{\sin^2\sqrt[6]{\frac{2}{x^2}}}\left(\sqrt[6]{\frac{2}{x^2}}\right)' = -\frac{1}{\sin^2\sqrt[6]{\frac{2}{x^2}}}\frac16\left(\frac{2}{x^2}\right)^{-\frac56}\left(-\frac{2\cdot 2x}{x^4}\right) =$ $= \frac{4x}{\sin^2\sqrt[6]{\frac{2}{x^2}}\cdot 6\cdot\sqrt[6]{\left(\frac{2}{x^2}\right)^5}\cdot x^4}$
13	$(\arcsin U)' = \frac{1}{\sqrt{1-U^2}}U'$	$\left(\arcsin\left(3^{-x^2}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(3^{-x^2}\right)^2}}3^{-x^2}\ln 3(-2x)$
14	$(\arccos U)' = -\frac{1}{\sqrt{1-U^2}}U'$	$\left(\arccos\left(4x^7\right)\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(4x^7\right)^2}}4\cdot 7\cdot x^6$

15	$(\operatorname{arctg}U)'=\frac{1}{1+U^2}U'$	$\left(\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^3}\right)'=\frac{\left(\sqrt{1+x^3}\right)'}{1+\left(\sqrt{1+x^3}\right)^2}=\frac{1}{1+1+x^3}\frac{1}{2}\left(1+x^3\right)^{\frac{1}{2}-1}3x^2=\frac{3x^2}{2\left(2+x^3\right)\sqrt{1+x^3}}$
16	$(\operatorname{arc\,ctg}U)'=-\frac{1}{1+U^2}U'$	$\left(\operatorname{arc\,ctg}(\lg x)\right)'=-\frac{1}{1+(\lg x)^2}(\lg x)'=-\frac{1}{1+(\lg x)^2}\frac{1}{x\ln 10}$
17	$(\operatorname{sh}U)'=\operatorname{ch}U\cdot U'$	$\left(\operatorname{sh}(\ln x)\right)'=\operatorname{ch}(\ln x)(\ln x)'=\operatorname{ch}(\ln x)\frac{1}{x}$
18	$(\operatorname{ch}U)'=\operatorname{sh}U\cdot U'$	$\left(\operatorname{ch}\left(3^{-x}\sqrt{x}\right)\right)'=\operatorname{sh}\left(3^{-x}\sqrt{x}\right)\left(3^{-x}\sqrt{x}\right)'=\operatorname{sh}\left(3^{-x}\sqrt{x}\right)\left(3^{-x}\ln 3(-1)\sqrt{x}+3^{-x}\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$
19	$(\operatorname{th}U)'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 U}U'$	$\left(\operatorname{th}\left(\frac{7}{x^5}\right)\right)'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2\frac{7}{x^5}}\left(\frac{7}{x^5}\right)'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2\frac{7}{x^5}}7(-5)x^{-6}$
20	$(\operatorname{cth}U)'=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 U}U'$	$\left(\operatorname{cth}\left(9^{5x^2}\right)\right)'=-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 9^{5x^2}}9^{5x^2}\ln 9\cdot 5\cdot 2\cdot x$

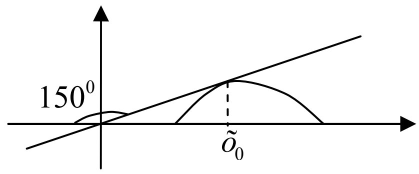
Применение производной

4. Геометрический смысл производной.

$y'(x_0)=tg\alpha$.



№ 5.20. График функции $y=f(x)$ изображен на рисунке Тогда значение производной этой функции в точке $\tilde{o}_0$ равно…



▹ $f'(x_0)=tg\left(180^0-150^0\right)=tg30^0=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

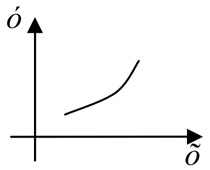
№ 5.21. Физический смысл производной:

$S(t)$ - путь, $v(t)=S'(t)$ - скорость, $a(t)=S''(t)$ - ускорение.

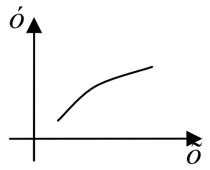
Закон движения материальной точки имеет вид $\tilde{o}(t)=4+10t^2$, где $\tilde{o}(t)$ координата точки в момент времени t. Тогда скорость точки при t=1 равна.

$v(t)=x'(t)=\left(4+10t^2\right)=20,\ \ v(1)=20-1=20$.

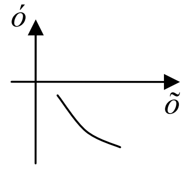
5. $y=f(x)$



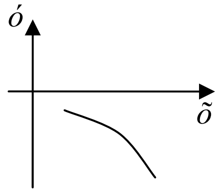
$y>0,\ y'>0,\ y''>0$



$y>0,\ y'>0,\ y''<0$

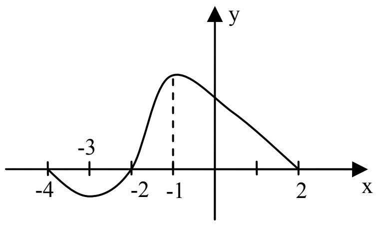


$y<0,\ y'<0,\ y''>0$



$y<0,\ y'<0,\ y''<0$

№ 5.22. Функция $y = f(x)$.Установите соответствие между заданными условиями и промежутками.



$(-2;-1)$: $y > 0,\ y' > 0,\ y'' < 0$.

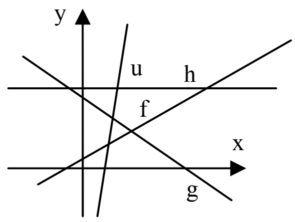
$(-4;-3)$: $y < 0,\ y' < 0,\ y'' > 0$.

$(-1;2)$: $y > 0,\ y' < 0,\ y'' < 0$.

$(-3;-2)$: $y < 0,\ y' > 0,\ y'' > 0$.

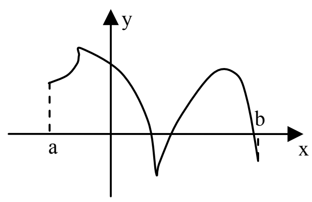
№ 5.23. Даны графики прямых f, g, h, u. Укажите последовательность этих прямых в порядке убывания их угловых коэффициентов.

▹ $k_u > k_f > k_h > k_g$.



№ 5.24. Функция задана графически.
Определите количество точек, принадлежащих интервалу $(a;b)$ в которых не существует производная этой функции.

▹ В точках, в которых не существует производная график угловатый. Таких точек две.

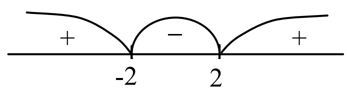


№ 5.25. Производная функции имеет вид $f'(x) = x^3 - 12x$. Тогда количество точек перегиба графика функции $y = f(x)$ равно…

▹ Достаточным условием того, что точка $x = x_0$ является точкой перегиба графика функции $f(x)$ является то, что $f''(x)$ меняет знак при переходе через x_0. Находим $f''(x)$ и критические точки.

$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = (x^3 - 12x)' = 3x^2 - 12$;

$f''(x) = 0$, $3x^2 - 12 = 0$, $x^2 = 4$, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Исследуем знак $f''(x)$.



Следовательно, точки $x = -2$, $x = 2$ являются точками перегиба

№ 5.26. Угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = \sin 2x + 3x$ в точке x=0, равен…

▹ $y'(x) = \left(\sin 2x + 3x\right)' = 2\cos 2x + 3$

$k = y'\left(0\right) = 2 \cdot \cos 0 + 3 = 2 + 3 = 5$.

6. Наклонные асимптоты $\acute{o} = f(\tilde{o}) : y = kx + b$, где $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f\left(x\right)}{x}$; $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[f\left(x\right) - kx\right]$

Горизонтальные асимптоты, если $k = 0,\quad b \ne \infty$.

Вертикальные асимптоты, если функция $f\left(x\right)$ имеет точки разрыва 2-го порядка.

№ 5.27. Горизонтальной асимптотой графика функции $\acute{o} = \dfrac{6 - 2\tilde{o}}{3 - 2\tilde{o}}$ является прямая, определяемая уравнением $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{6 - 2x}{x\left(3 - 2x\right)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{6 - 2x}{3x - 2x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-2}{3 - 4x} = 0$;

$b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[\dfrac{6 - 2x}{3 - 2x} - 0\right] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{-2}{-2} = 1$; $y = 1$.

№ 5.28. Наклонной асимптотой графика функции $y(x)=\dfrac{6x^3+x^2-1}{2x^2+x}$, является прямая…

$$\triangleright\ k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{6x^3+x^2-1}{2x^3+x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{6+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}{2+\frac{1}{x}}=\frac{6}{2}=3;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{6x^3+x^2-1}{2x^2+x}-3x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{6x^3+x^2-1-6x^3-3x^2}{2x^2+x}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-1}{2x^2+x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2-\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}}=-1,$$ тогда $\acute{o}=\hat{e}\tilde{o}+\hat{a}=3\tilde{o}-1$.

7.Приращение функции
$\square y=f(x+\square x)-f(x)$ или $\square y\approx dy=f'(x)dx=f'(x)\square x$

№ 5.29. Приращение $\square\acute{o}$ функции $\acute{o}=-\tilde{o}^2$ при изменении значения аргумента от -2 до 3 равно…

$\triangleright\ \square\acute{o}=\acute{o}(3)-\acute{o}(-2)=-3^2-(-2)^2=-9+4=-5$

8. Применение дифференциала функции:
$\square\acute{o}\approx dy\Rightarrow f(x+\square x)=f(x)+f'(x)\cdot\square x+o(\square x).$

№ 5.30. Значение функции $\acute{o}=\sqrt[5]{\tilde{o}^4}$ в точке $\tilde{o}_0+\square\tilde{o}$ можно вычислить по формуле…

$\triangleright$ Так как $f'(x)=\left(\sqrt[5]{x^4}\right)'=\dfrac{4}{5}x^{\frac{4}{5}-1}=\dfrac{4}{5\sqrt[5]{x}}$, то

$$\sqrt[5]{(\tilde{o}_0+\square\tilde{o})^4}=\sqrt[5]{\tilde{o}_0^4}+\frac{4}{5\sqrt[5]{\tilde{o}_0}}\cdot\square\tilde{o}+o(\square\tilde{o}).$$

Кривизна

$Y=Y(x):\quad K=\left\|\dfrac{y''}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}\right\|,\quad \begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}:\quad K=\left\|\dfrac{y''x'-y'x''}{((x')^2+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}\right\|.$

№ 5.31. Кривизна линии $y=-2x^2-x-1$ в точке $M(0;-1)$ равна…

$$\triangleright\ y'=-4x-1,\ y'(M)=-1,\ y''=-4,\ y''(M)=-4,\ K=\left|\frac{-4}{(1+(-1)^2)^{\frac{3}{2}}}\right|=\frac{4}{\sqrt{8}}=\sqrt{2}.$$

Неопределенный интеграл

Таблица интегралов

	Правило	Пример
1.	$\int x^m dx=\dfrac{x^{m+1}}{m+1}+C\quad (m\neq -1)$ $\int dx=\tilde{o}+C$	$\int x^5dx=\dfrac{x^6}{6}+C$; $\int\sqrt{x}dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$;

		$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int x^{-\frac{2}{3}}dx = \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + C = 3\sqrt[3]{x} + C$; $\int x \cdot \sqrt[5]{1+x^2}\,dx = \left\vert d\left(1+x^2\right) = \left(1+x^2\right)' dx = 2xdx \right\vert = \frac{1}{2}\int \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{5}} 2xdx =$ $= \frac{1}{2}\int \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{5}} d\left(1+x^2\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{5}+1}}{\frac{1}{5}+1} + C = \frac{5}{12}\sqrt[5]{\left(1+x^2\right)^6} + C$.
2.	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{dx}{3x+2} = \left\vert d(3x+2) = (3x+2)' dx = 3dx \right\vert = \frac{1}{3}\int \frac{3dx}{3x+2} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x+2)}{3x+2} =$ $= \frac{1}{3}\ln\lvert 3x+2\rvert + C$; $\int \frac{\sin 2xdx}{\cos 2x} = \left\vert d(\cos 2x) = (\cos 2x)' dx = -\sin 2x \cdot 2dx \right\vert = -\frac{1}{2}\int \frac{-2\sin 2xdx}{\cos 2x} =$ $= -\frac{1}{2}\int \frac{d(\cos 2x)}{\cos 2x} = -\frac{1}{2}\ln\lvert\cos 2x\rvert + C$.
3.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $\int e^x dx = e^x + C$	$\int 3^{1-2x} dx = \left\vert d(1-2x) = (1-2x)' dx = -2dx \right\vert = -\frac{1}{2}\int 3^{1-2x} d(1-2x) =$ $= -\frac{3^{1-2x}}{2\ln 3} + C$; $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \left\vert d\left(\sqrt{x}\right) = \left(\sqrt{x}\right)' dx = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \right\vert = 2\int \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{2\sqrt{x}} = 2\int e^{\sqrt{x}} d\left(\sqrt{x}\right) = 2e^{\sqrt{x}} + C$
4.	$\int \cos xdx = \sin x + C$	$\int \cos(5x-1)dx = \left\vert d(5x-1) = 5dx \right\vert = \frac{1}{5}\int \cos(5x-1)5dx =$ $= \frac{1}{5}\int \cos(5x-1)d(5x-1) = \frac{1}{5}\sin(5x-1) + C$; $\int \cos\left(e^{-x}\right) \cdot e^{-x}dx = \left\vert d\left(e^{-x}\right) = -e^{-x}dx \right\vert = -\int \cos\left(e^{-x}\right) d\left(e^{-x}\right) = -\sin\left(e^{-x}\right) + C$
5.	$\int \sin xdx = -\cos x + C$	$\int \frac{\sin(\ln x)dx}{x} = \left\vert d(\ln x) = (\ln x)' dx = \frac{1}{x}dx \right\vert = \int \sin(\ln x)d(\ln x) =$ $= -\cos(\ln x) + C$; $\int \frac{\sin(arctgx)}{1+x^2}dx = \left\vert d(arctgx) = (arctgx)' dx = \frac{dx}{1+x^2} \right\vert =$ $= \int \sin(arctgx)d(arctgx) = -\cos(arctgx) + C$.
6.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C$	$\int \frac{x^3dx}{\cos^2\left(2+x^4\right)} = \left\vert d\left(2+x^4\right) = \left(2+x^4\right)' dx = 4x^3dx \right\vert = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3dx}{\cos^2\left(2+x^4\right)} =$ $= \frac{1}{4}\int \frac{d\left(2+x^4\right)}{\cos^2\left(2+x^4\right)} = \frac{1}{4}tg\left(2+x^4\right) + C$.
7.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2(\arccos x) \cdot \sqrt{1-x^2}} = \left\vert d(\arccos x) = (\arccos x)' dx = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \right\vert =$ $= -\int \frac{d(\arccos x)}{\sin^2(\arccos x)} = ctg(\arccos x) + C$.
8.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{7-x^2}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{7}} + C$;

		$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{3-e^{2x}}} = \left\| d\left(e^x\right) = \left(e^x\right)' dx = e^x dx \right\| = \int \frac{d\left(e^x\right)}{\sqrt{3-e^{2x}}} = \arcsin \frac{e^x}{\sqrt{3}} + C$.
9.	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C$	$\int \frac{\cos x dx}{8+\sin^2 x} = \left\| d\left(\sin x\right) = \left(\sin x\right)' dx = \cos x dx \right\| = \int \frac{d\left(\sin x\right)}{8+\sin^2 x} =$ $= \frac{1}{\sqrt{8}}\, arctg \frac{\sin x}{\sqrt{8}} + C$.
10.	$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\| + C$	$\int \frac{xdx}{9-x^4} = \left\| d\left(x^2\right) = \left(x^2\right)' dx = 2xdx \right\| = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{9-x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2\right)}{9-\left(x^2\right)^2} =$ $= \frac{1}{2\cdot 3}\ln\left\|\frac{3+x^2}{3-x^2}\right\| + C$.
11.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3}} = \ln\left\|x+\sqrt{x^2-3}\right\| + C$.

<u>Основные свойства интегрирования</u>

№ 5.32. Множество первообразных функции $f(x) = x\cos(x^2)$ равно…

▹ $\int x\cos(x^2)dx = \frac{1}{2}\int \cos(x^2)d(x^2) = \frac{1}{2}\sin(x^2) + C$.

1^0. Формула интегрирования по частям: $\int udv = uv - \int vdu.$

I

$\int$	õ	$\mathring{a}^{\tilde{o}}dx$
$\int$	õ	$\cos xdx$
$\int$	õ	$\sin xdx$
	u	dv

II

$\int$	arctgõ	õdx
$\int$	arcsin õ	õdx
$\int$	ln õ	õdx
	u	dv

№ 5.33. Установите соответствие между интегралами и разложениями подынтегральных функций на элементарные дроби.

$$1)\ \int \frac{9x-7}{(x-1)^3(x-6)}dx;\quad 2)\ \int \frac{5x-3}{(x-1)(x^2+49)}dx;$$

$$3)\ \int \frac{4x+1}{x(x-10)}dx;\qquad 4)\ \int \frac{1}{(x-1)^2(x^2+64)}dx.$$

Разложения:

$$\text{A)}\ \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+49};\quad \text{B)}\ \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x-6};$$

$$\text{C)}\ \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x^2+49};\quad \text{D)}\ \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+64};\quad \text{E)}\ \frac{A}{x} + \frac{B}{x-10}.$$

▹ 1)→B; 2)→A; 3)→E; 4)→D.

2^0. Формула Ньютона – Лейбница: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

№ 5.34. Сходящимися являются несобственные интегралы…

$$1)\ \int_1^{+\infty} x^{-\frac{8}{3}}dx;\quad 2)\ \int_1^{+\infty} x^{-\frac{5}{3}}dx;\quad 3)\ \int_1^{+\infty} x^{-\frac{3}{8}}dx;\quad 4)\ \int_1^{+\infty} x^{-\frac{3}{5}}dx.$$

▹ Несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \int_a^{+\infty} x^{-\alpha}dx$ сходится, если $\alpha > 1$.

Ответ: 1), 2).

№ 5.35. Если $f(x)\ge 0$ на $[a,c]$ и $a<b<c$, то $\int_a^b f(x)dx$ может быть равен…

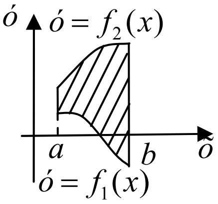
$\triangleright$ $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx-\int_b^c f(x)dx$

3^0. $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$. 4^0. $\int_{-a}^{a} f(x)dx=\begin{cases}2\int_0^a f(x)dx, & \text{åñëè } f(x) - \text{÷åòíàÿ}\\ 0, & \text{åñëè } f(x) - \text{íå÷åòíàÿ}\end{cases}$

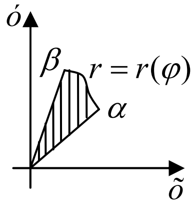
5^0. Площадь криволинейной трапеции $0\le y\le f(x), a\le x\le b: S=\int_a^b f(x)dx$.

6^0. Площадь обобщенной криволинейной трапеции $f_1(x)\le y\le f_2(x), a\le x\le b$:

$S=\int_a^b\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx$.



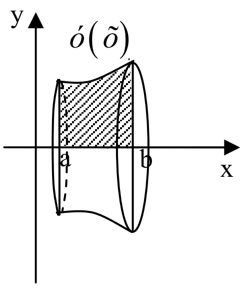
7^0. Площадь криволинейной трапеции: $S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$.



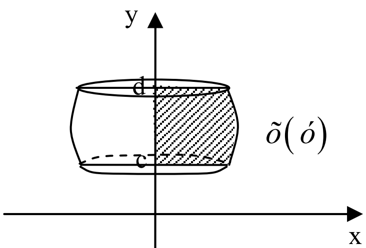
8^0. Длины дуг: $L_{AB}=\int_{x_A}^{x_B}\sqrt{1+(y')^2}\,dx$;

$L_{AB}=\int_{t_A}^{t_B}\sqrt{\left(\tilde{o}'(t)\right)^2+(y'(t))^2}\,dt$; $L_{AB}=\int_{\varphi_A}^{\varphi_B}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi$.

9^0. Объем тел вращения:



вокруг ОХ
$V=\pi\int_a^b y^2(x)dx$;



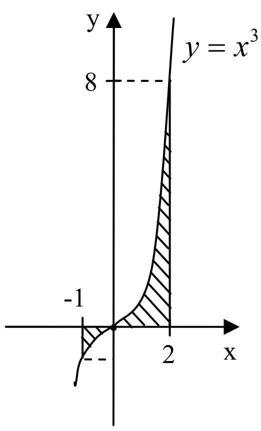
$\tilde{o}(\acute{o})$

вокруг ОУ
$V=\pi\int_{\tilde{n}}^{d} x^2(y)dy$.

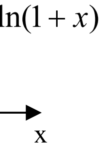
№ 5.36. Площадь фигуры, изображенной на рисунке.

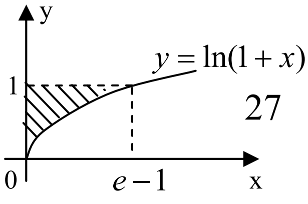
$S=S_1+S_2$, $S_1=\int_{-1}^{0}(0-x^3)dx=-\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0}=0+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$, $S_2=\int_0^2 x^3dx=\frac{x^4}{4}\Big|_0^2=\frac{16}{4}=4$,

$S=S_1+S_2=\frac{1}{4}+4=4{,}25$.

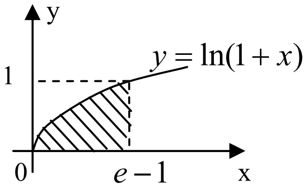


№ 5.37. Установите соответствие между заштрихованными фигурами и определенными интегралами, которые выражают площади этих фигур.

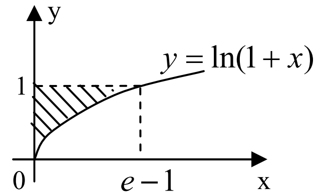




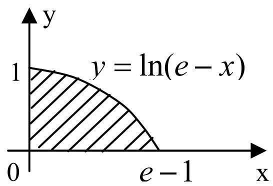
1.



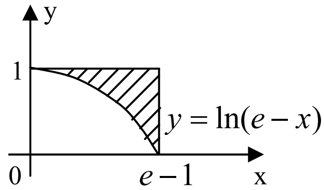
2.



3.



4.



Варианты ответов:

A) $\int_0^1 (e-1-\ln(1+x))dx$

B) $\int_0^{e-1} (1-\ln(1+x))dx$

C) $\int_0^{e-1} \ln(1+x)dx$

D) $\int_0^{e-1} \ln(e-x)dx$

E) $\int_0^{e-1} (1-\ln(e-x))dx$

F) $\int_0^1 (e-1-\ln(e-x))dx$

Ответ: 1. $\to$ C); 2. $\to$ B); 3. $\to$ D); 4. $\to$ E).

<u>Функции нескольких переменных</u>

Полный дифференциал функции: $u = f(x, y, z)$: $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$.

Градиент функции: $u = f(x,y,z)$, тогда $grad\ \ u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$;

$$|grad\,u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} .$$

Экстремум функции двух переменных для $z = f(x, y)$.

а) Необходимое условие: $\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases}$.

В результате решения данной системы определяются стационарные точки функции.

б) Достаточное условие экстремума: для каждой стационарной точки P_i выполняются

$$\Delta = AC - B^2 \text{, где } A = f''_{xx}(P_i);\ B = f''_{xy}(P_i);\ \tilde{N} = f''_{\acute{o}\acute{o}}(P_i).$$

Если $\Delta > 0$, $A > 0$, то в точке P_i минимум.

Если $\Delta > 0$, $A < 0$, то в точке P_i максимум.

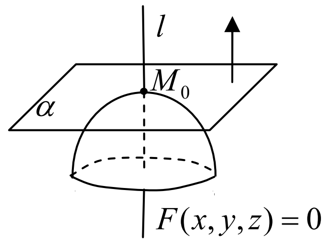
Если $\Delta < 0$, то экстремума нет.

Если $\Delta = 0$, то требуются дополнительные исследования.

Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

$\alpha: F'_x(M_0)\cdot(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(z-z_0)$;

$l: \dfrac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\dfrac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\dfrac{z-z_0}{F'_z(M_0)}$.



№ 5.38. Для функции $z=2xy+y^2$ справедливы соотношения:

▹ $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2y$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x+2y$, тогда

1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=0\Rightarrow 2y+2x+2y\neq 0$; 2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial y}\Rightarrow 2y\neq 2x+2y$; 3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}-2y=0\Rightarrow 2y-2y=0$. верно.

4) $\dfrac{\partial z}{\partial y}-2y=2x\Rightarrow 2x+2y-2y=2x$. верно.

№ 5.39. Найти производную $\dfrac{\partial z}{\partial l}$ в точке А (1;1) функции $z=x^2+y^2$ в направлении вектора $\bar{l}=2\bar{i}+\bar{j}$.

▹ Найдем направляющие косинусы вектора $\bar{l}=\{2;1\}$:

$\cos\alpha=\dfrac{x}{|\bar{a}|}=\dfrac{2}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$; $\cos\beta=\dfrac{y}{|\bar{a}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Найдем частные производные функции $z=x^2+y^2$ в точке А (1;1)

$\dfrac{\partial t}{\partial x}=2x,\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_A=2\cdot 1=2$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2y,\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_A=2\cdot 1=2.$

Следовательно, $\dfrac{\partial z}{\partial l}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_A\cdot\cos\alpha+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_A\cdot\cos\beta=2\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{6}{\sqrt{5}}$.

№ 5.40. Определить градиент функции $z=x^2+xy+y^3$ в точке В (1;2)

▹ $gradz=\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_B\cdot\bar{i}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_B\cdot\bar{j}$. Найдем частные производные

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x+y,\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_B=2\cdot 1+2=4,$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\tilde{o}+3y^2,\qquad \dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_B=1+3\cdot 2^2=13.$

Следовательно, $gradz=4\bar{i}+13\bar{j}$.

№ 5.41. Уравнение касательной плоскости к поверхности $z=x^2-y^2$ в точке $(0,-2,2)$ имеет вид…

▹ $F(x,y,z)=0\ \Rightarrow\ x^2-y^2-z=0$; $F'_x=2x$; $F'_x(M_0)=0$; $F'_y=-2y$; $F'_y(M_0)=-2\cdot(-2)=4$;

$F'_z=-1$; $F'_z(M_0)=-1$. $0\cdot(x-0)+4\cdot(y+2)-1\cdot(z-2)=0$; $4y+8-z+2=0$; $z-2=-4(y+2)$.

Дифференциальные уравнения

Уравнения с разделяющимися переменными: $\dfrac{dy}{dx}=P(x)\cdot Q(y)$ сводятся к виду $\dfrac{dy}{Q(y)}=P(x)dx$.

Почленное интегрирование: $\displaystyle\int\frac{dy}{Q(y)}=\int P(x)dx+C$ определяет в неявной форме решение

уравнения.

№ 5.42. Общее решение дифференциального уравнения $yxdx+(1+x^2)dy=0$ при $y\neq 0$ имеет вид…

⊳ Разделим переменные $\dfrac{dy}{y}=-\dfrac{xdx}{1+x^2}$ и проинтегрируем.

$\int\dfrac{dy}{y}=-\int\dfrac{xdx}{1+x^2}$. Тогда $\ln|y|=-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+\ln C$, $y=\dfrac{C}{\sqrt{x^2+1}}$.

Однородные дифференциальные уравнения I порядка: $y'=f(x,y)$, $f(x,y)$ - однородная функция нулевого порядка. $f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y)$, $t=\dfrac{y}{x}$ - подстановка. $\Rightarrow y'=t'x+t$
Линейные дифференциальные уравнения I порядка: $y'+P(x)y=Q(x)$, Подстановка $y=uv$, $y'=u'v+uv'$
Уравнение Бернулли: $y'+P(x)y=Q(x)y^n$.
Линейные однородные дифференциальные уравнения II порядка: $a_0y''+a_1y'+a_2y=0$. Характеристическое уравнение: $a_0k^2+a_1k+a_2=0$. $D=a_1{}^2-4a_0a_2$ - дискриминант. 1) $D>0,\ k_1\neq k_2,\ y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$, 2) $D=0,\ k_1=k_2,\ y=(C_1+C_2x)e^{k_1x}$, 3) $D<0,\ k_{1,2}=\alpha\pm i\beta,\ y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$.
Линейные неоднородные дифференциальные уравнения II порядка: $a_0y''+a_1y'+a_2y=f(x)$. Общее решение: $y=\overline{y}+y^*$. 1) Пусть $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n=P_n(x)$ - многочлен. Если нуль – не корень характеристического уравнения, то $y^*=A_0x^n+A_1x^{n-1}+...+A_n=Q_n(x)$. Если нуль – корень кратности r, то $y^*=x^r\left(A_0x^n+A_1x^{n-1}+...+A_n\right)$. 2) Пусть $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$. Если α - не корень характеристического уравнения, то $y^*=Q_n(x)e^{\alpha x}$. Если α – корень кратности r, то $y^*=x^rQ_n(x)e^{\alpha x}$.

№ 5.43. Порядок дифференциального уравнения $(y'')^3-xy''=2y'$ можно понизить заменой…

1) $y'=z(x)$; 2) $y'=z(y)$; 3) $y''=z(x)$; 4) $y''=z(y)$. ⊳ 1).

№ 5.44. Дано дифференциальное уравнение $(k+2)\cdot y''+(k-3)\cdot y'-4y=(k+1)\cdot x^5$. Тогда его порядок равен одному, если значение параметра k равно…

⊳ $k+2=0 \Rightarrow k=-2 \Rightarrow (-2-3)\cdot y'-4y=(-2+1)\cdot x^5$;

$-5y'-4y=-x^5 \Rightarrow 5y'+4y=x^5$.

№ 5.45. Функция $y=\dfrac{a}{x^3}$ будет частным решением задачи Коши: $y'+b\dfrac{y}{x}=0$, $y(-2)=2$ при…

⊳ Из начального условия $y(-2)=2$ следует, что $2=\dfrac{a}{(-2)^3}$, то есть $a=-16$. Подставим $y=\dfrac{-16}{x^3}$ в дифференциальное уравнение: $y'+b\dfrac{y}{x}=0$. Тогда $-16\cdot(-3)\dfrac{1}{x^4}+b\cdot\dfrac{(-16)}{x^4}=0$ $\Rightarrow b=3$.

Ряды

$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + .. = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1)

Необходимый признак сходимости знакоположительных числовых рядов. Если ряд (1) сходится, $a_n \geq 0$, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд (1) расходится.

Признак Даламбера. Если существует $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то при $q < 1$ ряд (1) сходится, а при $q > 1$ - расходится. Данный признак удобно применять, если общий член ряда a_n содержит факториал или a^n $(a > 0)$.

Радикальный признак Коши. Если существует $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, то при $q < 1$ ряд (1) сходится, а при $q > 1$ - расходится.

Признак Лейбница. Знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a^n$ сходится, если выполняются условия: а) $\grave{a}_0 > a_2 > a_3 ...$ б) $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$.

№ 5.46. Установите соответствие между знакопеременными рядами и видами сходимости.

1. Абсолютно сходится
2. Условно сходится
3. Расходится

A) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (3n-1)$ B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^n}$ C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+7}$.

▹ $1. \to \hat{A})$; $2. \to \tilde{N})$; $3. \to \grave{A})$.

Рядом Тейлора функции $f(x)$ в окрестности точки $x = a$ называется степенной ряд вида:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + ...$$

При $a = 0$ ряд Тейлора называется **рядом Маклорена** и примет вид:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Разложение функций в степенные ряды.

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... \quad -\infty < x < \infty$, $\qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... \quad -1 < x < 1$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... \quad -\infty < x < \infty$ $\qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... \quad -\infty < x < \infty$

Степенной ряд. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$ Радиус сходимости: $R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$,

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}}.$$

Числовые ряды. <u>Ряд геометрической прогрессии:</u> $\sum_{n=0}^{\infty} b_n q^{n-1} = b + bq + bq^2 + ... + bq^n + ...$, при $|q| < 1$ ряд сходится, при $|q| > 1$ ряд расходится. Если $|q| < 1$, то сумма ряда: $S = \frac{b}{1-q}$.

<u>Ряд Дирихле</u>: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$. При $\alpha>1$ ряд сходится, при $\alpha<1$ ряд расходится, $\alpha=1$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - гармонический ряд расходится.
Эти ряды используются также для определения сходимости числовых рядов (признак сравнения).

№ 5.47. Сумма числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^4$ равна…

▹ Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}=3.$$

№ 5.48. Область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\tilde{o}-2)^n\cdot n^2}{4^n}$ имеет вид…

▹ Интервалом сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n$ является интервал (x_0-R,x_0+R), где R - радиус сходимости ряда $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Полагая $\grave{a}_n=\frac{n^2}{4^n}$, $\grave{a}_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{4^{n+1}}$, находим

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{4^n}\cdot\frac{4^{n+1}}{(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^2}=4.$$

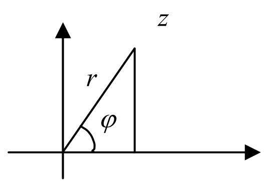
Тогда интервал сходимости: $-2<\tilde{o}<6$. Исследуем сходимость ряда на граничных точках.
$x=6:\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(6-2)^n n^2}{4^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}n^2$ расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости: $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}n^2=\infty\neq 0.$
В точке $\tilde{o}=-2$ не выполняется признак Лейбница.
Ответ. $\tilde{o}\in(-2;6)$.

Комплексные числа

<u>Алгебраическая форма комплексного числа</u>**.** $z=x+iy,\ x=\operatorname{Re}z,\ y=\operatorname{Im}z.\ r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$,
где $i^2=-1$; $i^3=-I$;$i^4=1$,….
<u>Действия над комплексными числами:</u> $z_1=x_1+iy_1,\ z_2=x_2+iy_2$**,**

$z_1z_2=x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+x_2y_1)$**,** $\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{z_1\cdot\overline{z_2}}$**,**

где $\overline{z_2}=x_2-iy_2$.



<u>Тригонометрическая форма записи:</u> $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),\ tg\varphi=\frac{y}{x},$.

<u>Показательная форма записи:</u> $z=r\cdot l^{i\varphi}$.

Формула Муавра. $z^n=|z|^n(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

Формулы Эйлера. $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$**,** $e^{-i\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi$

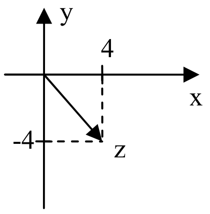
№ 5.49. Расположите комплексные числа в порядке возрастания их модулей.
A) -2; B)-1; C)$1-i$; D) $2-i$

▹ A) $|-2|=\sqrt{(-2)^2}=2$; B) $|-1|=\sqrt{(-1)^2}=1$;

C) $|1-i|=\sqrt{1+(-1)^2}=\sqrt{2}$; D) $|2-i|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$.

Ответ. D, A, C, B.

№ 5.50. На рисунке приведено геометрическое изображение комплексного числа. Его тригонометрическая форма записи имеет вид…



$\triangleright$ $z=r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$,

$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4^2+(-4)^2}=\sqrt{32}$

$\varphi=-\dfrac{\pi}{4}$, тогда $z=\sqrt{32}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

№ 5.51. Вычислить $\dfrac{7-7i}{2i}$. $\triangleright$ $\dfrac{7-7i}{2i}=\dfrac{(7-7i)\cdot i}{2i\cdot i}=\dfrac{7i+7}{-2}=-\dfrac{7}{2}-\dfrac{7}{2}\cdot i$.

№ 5.52. Пусть $z=1+i$. Известно, что $|z|=\sqrt{z}$, $\arg z=\dfrac{\pi}{4}$, тогда $(1+i)^4$ равно…

$\triangleright$ Комплексное число z можно возвести в n-ю степень по формуле Муавра

$z^n=|z|^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$

$z=1+i,\quad x=1,\quad y=1,\quad |z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2},\quad \varphi=arctg\dfrac{y}{x}=arctg1=\dfrac{\pi}{4}$.

Имеем $(1+i)^4=\left(\sqrt{2}\right)^4\cdot\left(\cos\left(4\cdot\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(4\cdot\dfrac{\pi}{4}\right)\right)=4\cdot(\cos\pi+i\sin\pi)=-4$.

№ 5.53. Мнимая часть функции $y=(z)=e^{3z}$, где $z=x+iy$, имеет вид…

$\triangleright$ $e^{3z}=e^{3(x+iy)}=e^{3x}\cdot e^{i3y}=e^{3x}\cdot(\cos 3y+i\sin 3y)$. Тогда мнимая часть есть: $e^{3x}\cdot\sin 3y$.

№ 5.54. Комплексное число $-5i$ можно представить в виде…

$\triangleright$ $z=-5i,\quad x=0, y=-5$, $r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{0+25}=5$, $\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$.

Тригонометрическая форма:

$z=5\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$. Показательная форма: $z=5\cdot e^{-\frac{\pi}{2}i}$.

№ 5.55. Действительная часть комплексного числа $(7-2i)^2$ равна…

$\triangleright$ $z=(7+2i)^2=7^2-2\cdot7\cdot2i+2^2\cdot i^2=49-28i-4=45-28i$. $\operatorname{Re} z=45$.

№ 5.56. Если z – комплексное число, $\operatorname{Im} z=10$, $\arg z=\arcsin\dfrac{5}{6}$, то модуль z равен…

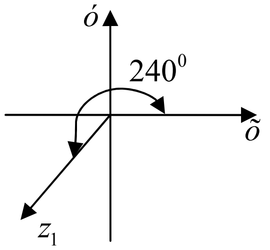
$\triangleright$ $z=x+yi$, $x=\operatorname{Re} z$, $y=\operatorname{Im} z$

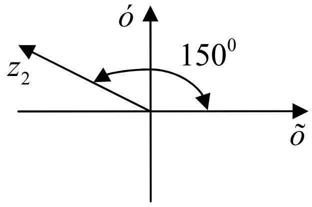
Так как $\operatorname{Im} z=y=r\sin\varphi$, то $10=r\sin\left(\arcsin\dfrac{5}{6}\right)$, $10=r\cdot\dfrac{5}{6}\Rightarrow r=12$.

№ 5.57. Если z – комплексное число, $\operatorname{Re} z=10$, $\arg z=\arccos\dfrac{2}{3}$, то модуль z равен…

$\triangleright$ $\operatorname{Re} z=x=r\cdot\cos\varphi\Rightarrow 10=r\cdot\cos\left(\arccos\dfrac{2}{3}\right)$, $10=r\cdot\dfrac{2}{3}$, $r=\dfrac{10\cdot3}{2}=15$.

№ 5.58. Даны два комплексных числа z_1, z_2



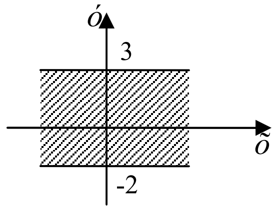


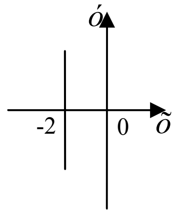
Тогда аргумент произведения $\arg(z_1 \cdot z_2)$ равен…

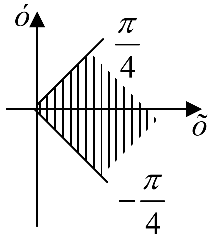
▹ $-\pi < \arg z \le \pi \Rightarrow$ $\arg z_1 = -\dfrac{2\pi}{3}$, $\arg z_2 = \dfrac{5\pi}{6}$, $\varphi = \arg(z_1 \cdot z_2) = -\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6}$. Ответ. $\varphi = 30$

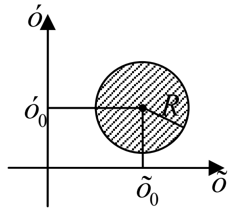
№ 5.59. Даны множества и их геометрическое изображение.

1) $-2 \le \operatorname{Im} z \le 3$ 2) $\operatorname{Re} z = -2$ 3) $|\arg z| \le \dfrac{\pi}{4}$ 4) $|z - z_0| \le R$, где $z_0 = x_0 + iy_0$



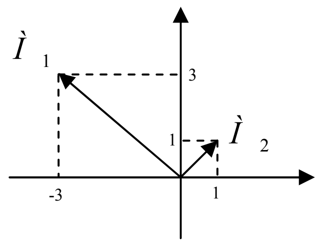






№ 5.60. Комплексные числа z_1 и z_2 заданы соответственно радиус-векторами $\overline{\hat{I}\grave{I}_1}$ и $\overline{\hat{I}\grave{I}_2}$.Тогда сумма $z_1 + z_2$, записанная в алгебраической форме имеет вид…

▹ $z_1 + z_2 = -3 + 2i + 1 + i = -2 + 3i$



№ 5.61. Если $z = x + iy$ и $f(z) = e^{4z}$, то $f'(z)$ имеет вид…

▹ Найдем производную функции $f(z) = e^{4z}$.

Имеем $f'(z) = 4e^{4z} = 4e^{4(x+iy)} = 4e^{4x} \cdot e^{i4y} = 4e^{4x}(\cos 4y + i \sin 4y)$.

Ряды Фурье

Тригонометрическим рядом Фурье для функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi;\pi]$ называется ряд вида: $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots a_n \cos nx + b_n \sin nx + .. = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$,

где коэффициенты Фурье a_n и b_n вычисляются по формулам $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$,

$a_n = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$, $b_n = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$.

Если функция $f(x)$ четная, то она разлагается в ряд Фурье по косинусам:

$f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, где $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)dx$, $a_n = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos nx dx$, $b_n = 0$.

Если функция $f(x)$ нечетная, то она разлагается в ряд Фурье по синусам:

$f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, где $b_n = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin nx dx$; $\grave{a}_n = 0$.

Функция $f(x)$ имеет период T, если $f(x+T) = f(x)$.

№ 5.62. Коэффициент $\grave{a}_0$ ряда Фурье периодической функции $f(x)$ с периодом, заданной на отрезке $[-l,l] = [-1,1]$ уравнением $f(x) = x^2$, равен…

▹ Функция $f(x)$ является четной, поэтому $a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)dx = 2\int_{0}^{1} x^2dx = \frac{2x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$.

№ 5.63. Коэффициент a_0 ряда Фурье с периодом $T = 2l$, заданной на интервале $(-l,l)$ соотношением, $f(x) = \begin{cases} 3, & \text{при } -l < x < 0, \\ 0, & \text{при } 0 < x < l, \end{cases}$ равен…

▹ $a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{0} 3dx = \frac{3}{l}x\Big|_{-l}^{0} = 3$.

6.Теория вероятностей

$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ **- размещение**, $P_n = n!$ **- перестановка**, $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ - **сочетание**.

№ 6.1. Количество перестановок букв в слове «зачет». ▹ $n! = 5! = 120$.

$P(A) = \frac{m}{n}$, где m - число всех благоприятствующих событию исходов, n - число элементарных исходов.

№ 6.2. Случайные события А и В, удовлетворяющие условиям $Đ(\grave{A}) = 0,3$, $Đ(\hat{A}) = 0,4$, $Đ(\grave{A}\hat{A}) = 0,2$ являются…

1) совместными и независимыми 2) несовместимыми и зависимыми
3) несовместными и независимыми 4) совместными и зависимыми

▹ • Два события называются *несовместными*, если не смогут произойти вместе в одном опыте.

В противном случае события называются совместными.

• Для независимых событий правило умножения принимает вид: $Đ(\grave{A}\hat{A}) = Đ(\grave{A}) \cdot Đ(\hat{A})$.

• Для зависимых: $Đ(\grave{A}\hat{A}) = Đ(\grave{A}) \cdot Đ_{\grave{A}}(\hat{A})$.

Так как $Đ(\grave{A}) \cdot Đ(\hat{A}) = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12 \neq Đ(\grave{A}\hat{A})$, то ответ 4).

$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + ... + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)$ - **формула полной вероятности**.

№ 6.3. Событие А может наступить лишь при условии появления одного из двух несовместных событий $\hat{A}_1$ и $\hat{A}_2$, образующих полную группу событий. Известна вероятность $P(B_1) = \frac{1}{3}$ и условные вероятности $P(A/B_1) = \frac{1}{2}$, $P(A/B_2) = \frac{1}{4}$. Тогда вероятность $P(A)$ равна…

▹ $P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2)$, где $P(B_1) + P(B_2) = 1 \Rightarrow P(B_2) = 1 - P(B_1) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Тогда $P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

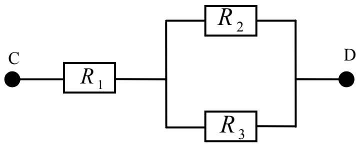
№ 6.4. В первой урне 3 черных и 7 белых шаров. Во второй урне 4 белых и 6 черных шаров. В третьей урне 11 белых и 9 черных шаров. Из наугад взятой урны вынули один шар. Тогда вероятность того, что этот шар окажется белым, равна…

▹ Для вычисления вероятности события А (вынут шар – белый) применим формулу полной вероятности:

$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+P(B_3)\cdot P_{B_3}(A)$, где $P(B_i)$ - вероятность того, что шар извлечен из i-ой урны. Тогда $P(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{10}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{10}+\frac{1}{3}\cdot\frac{11}{20}=\frac{11}{20}$.

Появление хотя бы одного события: $P(A)=1-q_1q_2...q_n$.

№ 6.5. Пусть $\grave{A}_i\left(i=\overline{1,3}\right)$ - событие заключающееся в том, что в электрической цепи

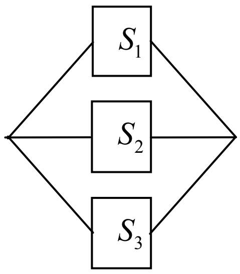


сопротивления R_i не вышли из строя за время Т, событие А – цепь из строя не вышла за время Т. Тогда А представимо через $\grave{A}_i$ следующим образом…

1) $\grave{A}=\grave{A}_1+\grave{A}_2+\grave{A}_3$; 2) $\grave{A}=\grave{A}_1+\grave{A}_2\grave{A}_3$; 3) $\grave{A}=\grave{A}_1\left(\grave{A}_2+\grave{A}_3\right)$; 4) $\grave{A}=\grave{A}_1\grave{A}_2\grave{A}_3$

▹ Ответ 3).

№ 6.6. Устройство представляет собой параллельное соединение элементов S_1,S_2,S_3.



Каждый из них может выйти из строя с вероятностью р. Функционирование схемы нарушается,
если все они выходят из строя. Тогда вероятность правильной работы равна…

▹ $1-ð^3$.

Дискретное распределение:

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

Математическое ожидание для ДСВ: $M(x)=x_1\cdot p_1+x_2\cdot p_2+...+x_n\cdot p_n$.

Свойства: 1) $M(n\cdot X+m\cdot Y)=n\cdot M(X)+m\cdot M(Y)$; 2) $M(C)=C$, C – число.

№ 6.7. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей.

X	0	x_2	9
P	0,1	0,5	0,4

Если математическое ожидание MX=5,6, то значение $\tilde{o}_2$ равно…

▹ $MX=x_1\cdot p_1+x_2\cdot p_2+x_3\cdot ð_3\Rightarrow 5,6=0\cdot 0,1+x_2\cdot 0,5+9\cdot 0,4$

$x_2\cdot 0,5=5,6-3,6;$ $x_2=2:0,5=4$

Ответ. 4.

№ 6.8. Даны две независимые дискретные случайные величины X и Y:

X	1	2
p	0,2	0,8

Y	3	5
p	0,4	0,6

Закон распределения суммы $X+Y$ имеет вид…

▹ Возможные значения Z_{ij} суммы $X+Y$ определяются как $Z_{ij}=x_i+y_j$, а соответствующие вероятности $P_{ij}=p_i\cdot q_j=P(X=\tilde{O}_i)\cdot P(Y=y_j)$. Тогда правильный ответ:

$X+Y$	4	5	6	7

p	0,08	0,32	0,12	0,48

Дисперсия для ДСВ: $D(X)=M(X^2)-M^2(X)$.

Свойства: 1) $D(n\cdot Y\pm m\cdot X)=n^2\cdot D(Y)+m^2\cdot D(X)$; 2) $D(C)=0$, C – число.

Формула Бернулли: $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, $q=1-p$.

Биномиальный закон распределения: $P_m=P(X=m)=C_n^m p^m q^{n-m}$, $M(X)=np$, $D(X)=npq$.

Закон распределения Пуассона: $P(X=m)=\dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$, $m=0,1,2...$, $M(X)=\lambda$, $D(X)=\lambda$.

Функцией распределения называют функцию F(x),определенную для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее x :

$$F(x)=F(X<x).$$

Свойства : $1)\ 0\le F(x)\le 1;\ 2)\ F(x_2)\ge F(x_1)$ при $x_2>x_1$;

$3)\ \lim\limits_{x\to\infty}F(x)=0;\ 4)\ \lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1;\ 5)\ P(a\le x<b)=F(b)-F(a);$

Плотностью распределения непрерывной случайной величины X называют производную от функции распределения:

Свойства: $1)\ F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}f(x)dx;\ 2)\ f(x)\ge 0;\ 3)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1;\ 4)\ P(a<x<b)=\int\limits_{a}^{b}f(x)dx.$

Математическое ожидание для непрерывной случайной величины (НСВ):

$M(\tilde{O})=\int\limits_a^b xf(x)dx$, $f(x)$ - плотность распределения.

Дисперсия для НСВ: $D(\tilde{O})=\int\limits_a^b x^2 f(x)dx-M^2(\tilde{O})$.

№ 6.9.Дискретная случайная величина задана законом распределения вероятностей

x	1	3	5
p	0,1	0,3	0,6

Тогда ее функция распределения вероятностей имеет вид…

$\triangleright$ а) при $x\le 1$, $F(x)=P(X<1)=0$,

б) при $1<x\le 3$, $F(x)=P(X<3)=0{,}1$

в) при $3<x\le 5$, $F(x)=P(X<5)=0{,}1+0{,}3=0{,}4$

г) при $x>5$, $F(x)=P(X=1)+P(X=3)+P(X=5)=0{,}1+0{,}3+0{,}6=1$.

$$F(x)=\begin{cases}0,\ x\le 1\\ 0{,}1,\ 1<x\le 3\\ 0{,}4,\ 3<x\le 5\\ 1,\ x>5\end{cases}$$

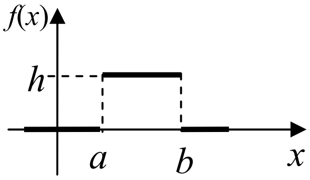
Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения вероятностей:

$$F(x)\begin{cases}0 & \text{ïðè} & \tilde{o}\le 0,\\ \dfrac{x^2}{16} & \text{ïðè} & 0<x\le 4,\\ 1 & \text{ïðè} & x>4.\end{cases}$$

Тогда ее плотность распределения вероятностей имеет вид…

$\triangleright$ Плотность распределения равне первой производной от функции распределения:

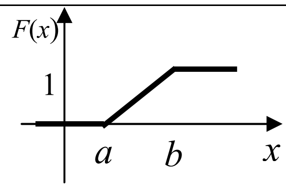
$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0 & \ddot{\imath}\eth\grave{e} \quad \tilde{o}\le 0,\\ \dfrac{x}{8} & \ddot{\imath}\eth\grave{e} \quad 0<x\le 4,\\ 0 & \ddot{\imath}\eth\grave{e} \quad x>4.\end{cases}$$



$h=\dfrac{1}{b-a}$ **- равномерное распределение.**

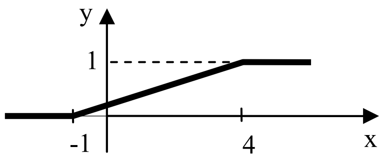
Математическое ожидание: $M(x)=\dfrac{(a+b)}{2}$.

Дисперсия: $D(x)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

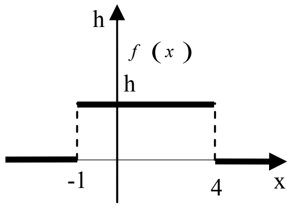


№ 6.10. Функция распределения вероятности равномерно распределенной случайной величины изображена на рисунке. Тогда ее дисперсия равна…

$\triangleright$ $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12} \Rightarrow D(X)=\dfrac{(4+1)^2}{12}=\dfrac{25}{12}$.

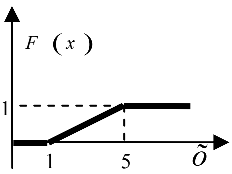


№ 6.11. График плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины $\tilde{O}$, распределенной равномерно на интервале $(-1;4)$ имеет вид, тогда значение h равно…



$\triangleright$ $h=\dfrac{1}{4-(-1)}=\dfrac{1}{5}=0,2$.

№ 6.12. График функции равномерного распределения вероятностей непрерывной случайной величины X имеет вид…
Тогда математическое ожидание X равно…



$\triangleright$ $\grave{I}\ \tilde{O}=\dfrac{\grave{a}+\hat{a}}{2}=\dfrac{1+5}{2}=3$.

Нормальное распределение: $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}$,

где a - математическое ожидание, σ - среднее квадратическое отклонение, $\sigma=\sqrt{D(x)}$.

Показательное распределение: $f(x)=\begin{cases}0,\ при\ x<0\\ \lambda e^{-\lambda x},\ при\ x\ge 0\end{cases}$, $M(x)=\dfrac{1}{\lambda}$, $D(x)=\dfrac{1}{\lambda^2}$, $\sigma(x)=\dfrac{1}{\lambda}$.

№ 6.13.Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}$. Тогда математическое ожидание этой нормально распределенной случайной величины равно…

$\triangleright$ $a=3$.

7.Математическая статистика

Статистический ряд частот: **Статистический ряд относительных частот:**

x	x_1	x_2	$\ldots$	x_k
n	n_1	n_2	$\ldots$	n_k

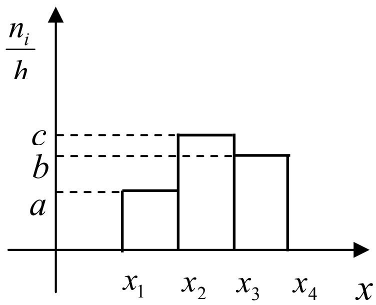
$\sum n_k = n$ - объем выборки

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

$\sum P_k = 1,\ P_k = \dfrac{n_k}{n}$

Эмпирическая функция распределения: и $F_n^*(x) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{x_i<x} n_i = \dfrac{n_x}{n}$**,** где n - объем выборки, n_x - число наблюдений меньших $x\ (x \in R)$. Эмпирическую функцию можно получить, если в статистическом ряде последовательно просуммировать относительные частоты.

Мода – элемент выборки, которому соответствует наибольшая частота.



$S = (x_2 - x_1)\cdot a + (x_3 - x_2)\cdot b + (x_4 - x_3)\cdot c = n$ - площадь гистограммы равна объему выборки n (сумма частот). Если вместо n_i W_i - относительная частота, то площадь равна 1. $W_i = \dfrac{n_i}{n}$

$\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$ - **выборочное среднее** – характеристика математического ожидания.

Выборочная дисперсия $D_в = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{k}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 n_i$, $\sigma_в = \sqrt{D_в}$ - выборочное среднее квадратическое отклонение.

№ 7.1. Дана выборка объема n. Если каждый элемент выборки увеличить в 4 раза, то выборочная дисперсия $D_{\hat{a}}\ldots$

$$\triangleright\ D_{\hat{a}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n},\ \bar{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n},\ \bar{x}_1 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}4x_i}{n} = 4\cdot\bar{x},$$

$$D_{\hat{a}1} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(4x_i - 4\cdot\bar{\tilde{o}})^2}{n} = 16\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = 16\cdot D_{\hat{a}}$$

Ответ: увеличивается в 16 раз.

<u>Несмещенной оценкой математического ожидания</u> служит выборочная средняя $\bar{x}$.
<u>Несмещенной оценкой дисперсии</u> является исправленная дисперсия
$S^2 = \dfrac{n}{n-1}D_в,\ S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$.

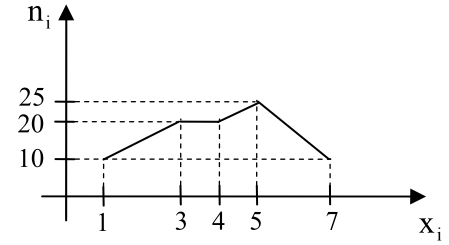
Выборочный коэффициент корреляции:
$r_{\hat{a}} = \dfrac{k_{xy}}{\sigma_x\sigma_y},\ k_{xy} = \overline{\tilde{o}\acute{o}} - \bar{\tilde{o}}\cdot\bar{\acute{o}},\ \sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - \left(\bar{x}\right)^2},\ \sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - \left(\bar{y}\right)^2}$**,** $-1 \le r_{\hat{a}} \le 1$**.**

Уравнение регрессии: $\overline{y_x} - \bar{y} = \beta_1\left(x - \bar{x}\right)$**,** $\beta_1 = r_{\hat{a}}\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$ **-** коэффициент регрессии.

№ 7.2. Точечная оценка математического ожидания нормального распределения равна 10. Тогда его интервальная оценка имеет вид…

1) (8,5; 11,5) 2)(8,6; 9,6) 3)(10; 10,9) 4)(8,4; 10)

▹ Ответ 1)



№ 7.3. Из генеральной совокупности извлечена выборка, полигон частот которой изображен на рисунке: Тогда объем выборки равен…

▹ $n = \sum_{i=1}^{k} n_i = 10 + 20 + 25 + 10 = 65$.

№ 7.4. Точечная оценка математического ожидания нормально распределенного количественного признака равна 21,5. Тогда его интервальная оценка симметрична относительно его точечной оценки. Таким свойством обладает интервал (20,05; 22,95).

№ 7.5. Размах вариационного ряда 3, 5, 5, 7, 9, 10, 16 и мода равна…

▹ $R = x_{\max} - x_{\min} = 16 - 3 = 13$, $Ì_{0} = 5$.

№ 7.6. В результате измерений (без систематических ошибок) получены следующие результаты 8, 10, 12. Тогда несмещенная оценка дисперсии равна…

▹ $\overline{x_{\hat{a}}} = \dfrac{8+10+12}{3} = 10$ - выборочная средняя.

Выборочная дисперсия: $D_{\hat{a}} = \dfrac{(8-10)^2 + (10-10)^2 + (12-10)^2}{3} = \dfrac{4+0+4}{3} = \dfrac{8}{3}$.

Исправленная дисперсия: $S^2 = \dfrac{n}{n-1} D_b = \dfrac{3}{3-1} \cdot \dfrac{8}{3} = \dfrac{8}{2} = 4$.

№ 7.7. Основная гипотеза имеет вид $H_0 : \sigma^2 = 4$. Тогда конкурирующей может являться гипотеза…

▹ Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу, которая противоречит основной гипотезе. Условно $\sigma^2 = 4$ противоречит $H_1 : \sigma^2 > 4$.

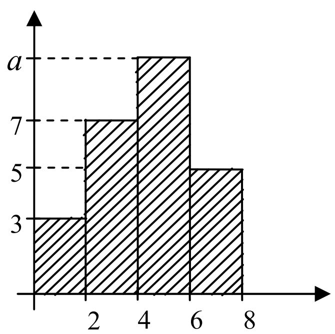
№ 7.8. Медиана вариационного ряда 3, 4, 5, 6, 7, 12 равна…

▹Медиана – это варианта, расположенная в середине вариационного ряда. Так как в середине ряда располагается две варианты: 5 и 6, то $M\mathring{a} = \dfrac{5+6}{2} = 5,5$.

№ 7.9. Выборочное уравнение парной регрессии имеет вид $y = 6 - 3x$. Тогда выборочный коэффициент корреляции может быть равен…

1) 0,9 2) -3 3) 6 4) -0,9

▹Значение выборочного коэффициента корреляции принадлежит [-1;1], кроме того, его знак совпадает со знаком выборочных коэффициентов регрессии k=-3<0. Этим условиям удовлетворяет значение -0,9.



№ 7.10. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема n=50, гистограмма частот имеет вид. Тогда значение a равно… ▹Так как объем выборки: $n = (a + 7 + 573) \cdot h$, то

$a = \dfrac{50}{2} - 7 - 5 - 3 = 10$

№ 7.11. При построении выборочного уравнения парной регрессии вычислим: $r_{\hat{a}} = 0,75$, $\sigma_x = 1,1$, $\sigma_y = 2,2$. Тогда выборочный коэффициент регрессии Y и X равен…

▹ $\beta_1 = r_{\hat{a}} \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x} = 0,75 \cdot \dfrac{2,2}{1,1} = 1,5$.

№ 7.12. Соотношением вида $P(K < -1,88) + P(K > 1,88) = 0,05$ можно определить…

▹ двустороннюю критическую область, так как двусторонней называют критическую область определяемую, например соотношением вида $P\left(K<-k_{ïð}\right)+P\left(K>k_{ïð}\right)=\alpha$, где $\hat{e}_{ïð}$ - положительное число, α - уровень значимости.

№ 7.13. Если основная гипотеза имеет вид $Í_0 : à = 20$, то конкурирующей может быть гипотеза…

1) $Í_1 : à \geq 10$ 2) $Í_1 : à \leq 20$ 3) $Í_1 : à \geq 20$ 4) $Í_1 = à > 20$ ▹ Ответ 4)

№ 7.14. Левосторонняя критическая область может определится из соотношения…

1) $Ð\left(\hat{E}>2,45\right)=0,05$ 2) $P\left(K<-1,5\right)+P\left(K>1,5\right)=0,05$

3) $P\left(-2,2<K<2,2\right)=0,95$ 4) $P\left(K<-1,92\right)=0,05$

▹ Левосторонней называют область, определяемую соотношением $P\left(K<k_{êð}\right)=\alpha$, где $\hat{e}_{êð}$ - отрицательное число, α - уровень значимости. Таким соотношением является 4).

№ 7.15. Интересуясь размером, проданной в магазине мужской обуви мы получили по 100 парам обуви:

Размер обуви	37	38	39	40	41	42	43
Число проданных пар	2	8	12	25	28	17	8

Распределения по размеру проданной обуви равно…

▹ Мода $Ì_0 = 41$

Медиана… ▹ $n=100$, $\hat{e}=\frac{100}{2}=50$,

$Ì\,\mathring{a}=\frac{\tilde{o}_{50}+\tilde{o}_{51}}{2}=\frac{41+41}{2}=41$

8.Вычислительная математика

№ 8.1. Значение функции $y = arctgx$ в точке $\tilde{o}_0 + \square\tilde{o} = 0,8$ можно вычислить по формуле…

▹ $f\left(x_1\right)\approx f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x_1-x_0\right)$

$\tilde{o}_1 = 0,8$; $\tilde{o}_0 = 1$,

$f\left(x_0\right)=arctg1=\frac{\pi}{4}$, $f'\left(x\right)=\left(arctgx\right)'=\frac{1}{1+x^2}$, $f'\left(x_0\right)=\frac{1}{2}$

$arctg0,8\approx\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\left(0,8-1\right)=\frac{\pi}{4}-0,1$.

№ 8.2. График функции $y = f\left(x\right)$ проходит через точки. Тогда ее интерполяционный многочлен Лагранжа второго порядка равен…

x_i	1	2	3
y_i	2	4	8

▹ $P\left(x\right)=y_0\cdot\frac{\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)}{\left(x_0-x_1\right)\left(x_0-x_2\right)}+y_1\cdot\frac{\left(x-x_0\right)\left(x-x_2\right)}{\left(x_1-x_0\right)\left(x_1-x_2\right)}+y_2\frac{\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)}{\left(x_2-x_0\right)\left(x_2-x_1\right)}$;

$P\left(\tilde{o}\right)=2\cdot\frac{\left(\tilde{o}-2\right)\left(\tilde{o}-3\right)}{-1\cdot\left(-2\right)}+4\frac{\left(\tilde{o}-1\right)\left(\tilde{o}-3\right)}{1\cdot\left(-1\right)}+8\cdot\frac{\left(\tilde{o}-1\right)\left(\tilde{o}-2\right)}{2\cdot 1}=\left(\tilde{o}-2\right)\left(\tilde{o}-3\right)-4\left(\tilde{o}-1\right)\left(\tilde{o}-3\right)+$

$+4\left(\tilde{o}-1\right)\left(\tilde{o}-2\right)=\tilde{o}^2-\tilde{o}+2$.

Замечание. Можно проверить подстановкой.

$Ð\left(1\right)=1-1+2=2$;

$Đ(2)=4-2+2=4$;

$Đ(3)=9-3+2=8$.

№ 8.3. Действительный корень уравнения $\tilde{o}^3+3\tilde{o}-2=0$ принадлежит интервалу…

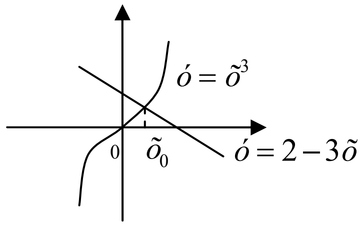
▹ $\tilde{o}^3+3\tilde{o}-2=0 \Rightarrow \tilde{o}^3=2-3\tilde{o}$; построим графики $\acute{o}=\tilde{o}^3$, $\acute{o}=2-3\tilde{o}$.

Абсцисса точки пересечения $\tilde{o}_0 \in \left(\frac{1}{2};1\right)$ так как функция $\acute{o}=\tilde{o}^3+3\tilde{o}-2$ имеет

$\acute{o}(0)=0^3+3\cdot 0-2=-2<0$,

$\acute{o}\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{3}{2}-2=-\frac{3}{8}\leq 0$,

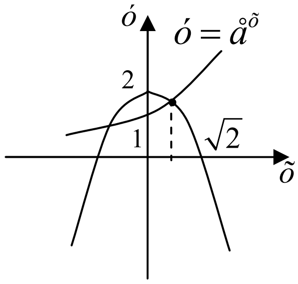
$\acute{o}(1)=1^3+3\cdot 1-2=2>0$.



№ 8.4. Положительный корень уравнения $\mathring{a}^{\tilde{o}}+\tilde{o}^2-2=0$ принадлежит интервалу…

▹ Запишем исходное уравнение в виде $\mathring{a}^{\tilde{o}}=-\tilde{o}^2+2$ и построим графики функций $\acute{o}=\mathring{a}^{\tilde{o}}$ и $\acute{o}=2-\tilde{o}^2$.

Ответ. $\left(0,\sqrt{2}\right)$.



№ 8.5. Дано дифференциальное уравнение $\acute{o}'=\acute{o}^2-\tilde{o}$ при $\acute{o}(0)=1$.

Тогда первые три члена разложения его решения в степенной ряд имеют вид…

▹ Из уравнения начальных условий находим $\acute{o}'(0)=1^2-0=1$.

Дифференцируя данное уравнение, получаем

$\acute{o}''=2\acute{o}\cdot\acute{o}'$; $\acute{o}''(0)=2\cdot 1\cdot 1-1=1$

$\acute{o}(\tilde{o})=\acute{o}(0)+\frac{\acute{o}'(0)}{2!}\tilde{o}+\frac{\acute{o}''(0)}{2!}\tilde{o}^2+\ldots\ \acute{o}(\tilde{o})=1+\tilde{o}+\frac{\tilde{o}^2}{2}\ldots$

1. Приближенное вычисление интегралов

1) Формулы прямоугольников:

$$\int_{\grave{a}}^{\hat{a}} f(x)dx=h\left(y_0+y_1+\ldots+y_{n-1}\right)+R_n;$$

$$\int_{a}^{\hat{a}} f(x)dx=h\left(y_1+y_2+\ldots+y_n\right)+R_n$$

2) Формула трапеций:

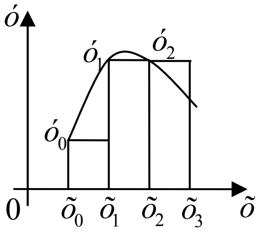
$$\int_{\grave{a}}^{\hat{a}} f(x)dx=h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right)+R_n$$

3) Формула Симпсона:

$$\int_{\grave{a}}^{\hat{a}} f(x)dx=\frac{h}{3}\left(y_0+y_{2k}+4\left(y_1+y_2+\ldots+y_{2k-1}\right)+2\left(y_2+y_4+\ldots+y_{2k-2}\right)\right)+R_n$$

№ 8.6. Формула приближенного вычисления определенного интеграла соответствующая рисунка, имеет вид…

▹ $\int_{0}^{\tilde{o}_3} f(x)dx \approx h\left(y_0+y_1+y_2\right)$.



Метод Эйлера

Требуется решить задачу $y' = f(x, y)$ удовлетворяющую начальному условию $y(x_0) = y_0$:

$y_1 \approx y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$, где h - шаг изменения аргумента. Обычно $h = \dfrac{\tilde{O} - x_0}{n}$.

$y_2 \approx y_1 + h \cdot f(x_1, y_1)$, $y_3 \approx y_2 + h \cdot f(x_2, y_2)$ ….

№ 8.7. Если последовательные значения функции, являющейся решением задачи Коши для дифференциального уравнения $y' = 4y$ с начальными условиями $y(x_0) = y_0$, $x = x_0$, находится по методу Эйлера с шагом 0,1, то y_1 равно…

▷ $y_1 \approx y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = y_0 + 0{,}1 \cdot 4 \cdot y_0 = -1{,}4 y_0$.

9. Элементы математической логики

	Название	Прочтение	Обозначение
1.	Отрицание	не	$\overline{X}$ или $\neg \tilde{O}$
2.	Дизъюнкция	или	$\tilde{O} \vee \acute{O}$
3.	Конъюнкция	и	$\tilde{O} \wedge \acute{O}$ или $X \cdot У$
4.	Импликация	если … то	$X \to У$
5.	Эквивалентность	тогда и только тогда, когда	$X \leftrightarrow У$ или $\tilde{O}$ □ $\tilde{O}$
6.	Штрих Шеффера	антиконъюнкция	$\tilde{O} \mid \acute{O} = \overline{\tilde{O} \wedge \acute{O}}$
7.	Стрелка Пирса	антидизъюнкция	$\tilde{O} \downarrow \acute{O} = \overline{\tilde{O} \vee \acute{O}}$
8.	Сумма по модулю два	антиэквивалентность	$X \oplus У = \overline{X \leftrightarrow У}$

Составим таблицы истинности для перечисленных операций.

1)

X	$\overline{X}$
0	1
1	0

2)

X	$У$	$\tilde{O} \vee \acute{O}$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

3)

X	$У$	$\tilde{O} \wedge \acute{O}$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

4)

X	$У$	$X \to У$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

5)

X	$У$	$X \leftrightarrow У$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

6)

X	$У$	$X\|У$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

7)

X	$У$	$X\downarrow У$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

8)

X	$У$	$X\oplus У$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Основные равносильности:

1) $\tilde{O}\vee\tilde{O}=\tilde{O}$; $\tilde{O}\wedge\tilde{O}=\tilde{O}$; 2) $\tilde{O}\vee\acute{O}=\acute{O}\vee\tilde{O}$; $\tilde{O}\wedge\acute{O}=\acute{O}\wedge\tilde{O}$;
3) $\tilde{O}\vee(\acute{O}\vee Z)=(\tilde{O}\vee\acute{O})\vee Z$; $\tilde{O}\wedge(\acute{O}\wedge Z)=(\tilde{O}\wedge\acute{O})\wedge Z$;
4) $\tilde{O}\vee(\acute{O}\wedge Z)=(\tilde{O}\vee\acute{O})\wedge(\tilde{O}\vee Z)$; $\tilde{O}\wedge(\acute{O}\vee Z)=(\tilde{O}\wedge\acute{O})\vee(\tilde{O}\wedge Z)$; 5) $\overline{\overline{X}}=X$;
6) $\overline{\tilde{O}}\vee\overline{\acute{O}}=\overline{\tilde{O}\wedge\acute{O}}$; $\overline{\tilde{O}}\wedge\overline{\acute{O}}=\overline{\tilde{O}\vee\acute{O}}$; 7) $(\tilde{O}\vee\acute{O})\wedge(\tilde{O}\vee\overline{\acute{O}})=\tilde{O}$; $(\tilde{O}\wedge\acute{O})\vee(\tilde{O}\wedge\overline{\acute{O}})=\tilde{O}$;
8) $\tilde{O}\vee(\tilde{O}\wedge\acute{O})=\tilde{O}$; $\tilde{O}\wedge(\tilde{O}\vee\acute{O})=\tilde{O}$;
9) $\tilde{O}\vee 0=\tilde{O}$; $\tilde{O}\vee 1=1$; $\tilde{O}\wedge\overline{\tilde{O}}=0$; $\tilde{O}\wedge\tilde{O}=\tilde{O}$; $\tilde{O}\oplus\tilde{O}=0$; $\tilde{O}\oplus 0=\tilde{O}$;
$\tilde{O}\wedge 0=0$; $\tilde{O}\wedge 1=\tilde{O}$; $\tilde{O}\vee\overline{\tilde{O}}=1$; $\tilde{O}\vee\tilde{O}=\tilde{O}$; $\tilde{O}\oplus\overline{\tilde{O}}=1$; $\tilde{O}\oplus 1=\overline{\tilde{O}}$;

10) $\tilde{O}\vee\overline{\tilde{O}}=1$; 11) $X=X$; 12) $\overline{\overline{\tilde{O}}\wedge\tilde{O}}=1$; 13) $\tilde{O}\to\acute{O}=\overline{\acute{O}}\to\overline{\tilde{O}}$; 14) $\tilde{O}\to\acute{O}=\overline{\tilde{O}}\vee\acute{O}$

15) $\tilde{O}\leftrightarrow\acute{O}=(\tilde{O}\to\acute{O})\wedge(\acute{O}\to\tilde{O})=(\overline{\tilde{O}}\vee\acute{O})\wedge(\overline{\acute{O}}\vee\tilde{O})=(\tilde{O}\wedge\acute{O})\vee(\overline{\tilde{O}}\wedge\overline{\acute{O}})$;

16) $((\tilde{O}\to\acute{O})\wedge(\acute{O}\to Z))=(\tilde{O}\to Z)$; 17) $(X\leftrightarrow У)=(\overline{X}\leftrightarrow\overline{У})$; 18) $(\tilde{O}\wedge(\tilde{O}\to\acute{O}))\to\acute{O}=1$;

19) $X|Y=\overline{X\wedge Y}=\overline{X}\vee\overline{Y}$; 20) $X\downarrow Y=\overline{X\vee Y}=\overline{X}\wedge\overline{Y}$;

21) $X\oplus Y=\overline{X\leftrightarrow Y}=\overline{(X\to Y)\wedge(Y\to X)}=\overline{(\overline{X}\vee Y)\wedge(\overline{Y}\vee X)}=(X\wedge\overline{Y})\vee(Y\wedge\overline{X})$.

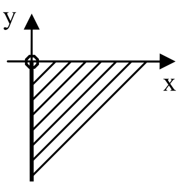
№ 9.1. Логическая операция X~Y равносильна формуле…

Функция X~Y задается таблицей истинности:

X	Y	X~Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

На основании таблицы истинности определим совершенную дизъюнктивную нормальную форму операции X~Y=$\overline{X}\overline{Y}\vee XY$.

№ 9.2. Даны множества $M_1=\{a\in R,\ a\geq 0\}$, $M_2=\{b\in R,\ b<0\}$. Тогда прямым произведением $M_1\times M_2$ является область, изображенная на рисунке…



⊳ Декартовым произведением $M_1\times M_2$ является множество упорядоченных пар (X,Y), где $x\in M_1$, $y\in M_2$. То есть $M_1\times M_2=\{(x,y):\ x\geq 0, y<0\}$. Изображением данного множества является IV четверть координатной плоскости, дополненная отрицательной полуосью ОУ.

№ 9.3. Высказывание: «Если студент не занимается, то он не сдаст экзамен», может быть записано логической формулой…
Ответ: $\overline{\mathrm{A}} \to \overline{\mathrm{B}}$, где А – «Студент занимается», В – «Студент сдает экзамен».

№ 9.4. Определить декартово произведение множеств $X = \{1,2,3\}$ и $Y = \{4,5\}$.
▹ Декартово произведение равно $X \times Y = \{(1,4)\ ,(1,5)\ ,(2,4)\ ,(2,5)\ ,(3,4)\ ,(3,5)\}$.

№ 9.5. Определить декартов квадрат множества $X = \{1,2,3\}$.
▹ $X^2 = \{(1,1)\ ,(1,2)\ ,(1,3)\ ,(2,1)\ ,(2,2)\ ,(2,3)\ ,(3,1)\ ,(3,2)\ ,(3,3)\}$.

№ 9.6. Дано множество $X = \{1,2,3\}$. Истинными утверждениями являются:
1) $\{2\} \in X$ 3) $3 \subset X$
2) $\{1.2\} \subset X$ 4) $1 \in X$
Ответ: истинными утверждениями являются 2), 4).

№ 9.7. Условие истинности высказывания $|\tilde{O}| \geq 5$ можно записать в виде…
▹ $(\tilde{o} \leq -5) \cup (\tilde{o} \geq 5)$.

№ 9.8. Даны высказывания: а – «Иван занимается в хоровом кружке», в – «Иван занимается в драматическом кружке». На языке логики высказываний утверждение и если Иван не занимается в хоровом кружке, то он не занимается и в драматическом кружке», записывается в виде.
▹ $\neg \grave{a} \to \neg \hat{a}$.

№ 9.9. Высказывание: «Число 14 делится на 7 и не делится на 8» может быть записано логической формулой…
▹ Введем простые высказывания:
A - число 14 делится на 7,
B - число 14 делится на 8,
$\overline{B}$ - число 14 не делится на 8.
Тогда имеем $\grave{A} \wedge \overline{\hat{A}}$.

10.Графы

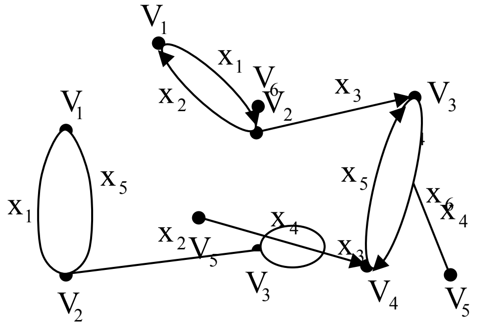
Множество точек назовем *множеством вершин* V, а соединяющие линии – *множеством ребер* X. Совокупность двух множеств (вершин и ребер) называется *графом* $\mathrm{G(V,X)}$.

Ребро называется *дугой* и изображается стрелкой, направленной от начальной вершины к конечной вершине. Граф, состоящий из дуг, называется *ориентированным* (или *орграфом*), а образованный ребрами – *неориентированным.*

Ребро, концевые вершины которого совпадают, называется *петлей*. Ребра с одинаковыми концевыми вершинами называются *кратными*. Граф называется *полным*, если каждые две различные вершины его соединены одним и только одним ребром.

№ 10.1. Для графа G указать вершины, ребра, дуги, изолированные вершины, кратные ребра, петли.

а) Вершины $V = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6\}$;



ребра $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$;

V_6 - изолированная вершина;

x_1 и x_5 - кратные ребра;

x_3 - петля;

V_1 и V_2 - концевые вершины ребра x_1

б) G - орграф

Вершины $V = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$;

дуги $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$;

Степенью вершины называется число ребер графа, которым принадлежит эта вершина.

В графе $G(V, X)$ сумма степеней всех его вершин–число четное, равное удвоенному числу ребер графа $\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2 \cdot m$, где m – число ребер, $d(v_i)$ - степень вершины v_i.

Маршрутом в графе называется чередующаяся последовательность вершин и ребер, в которой любые два соседних элемента *инцидентны*: $V_1, x_1, V_2, x_2, ..., x_n, V_n$

Пусть V_1, V_2 - вершины, x_1 - соединяющее их ребро. Тогда вершина V_1 и ребро x_1 *инцидентны*. Вершина V_2 и ребро x_1 также инцидентны.

Замкнутый маршрут приводит в туже вершину, из которой он начался, то есть $V_1 = V_n$.

Цепь – это маршрут, все ребра которого различны.

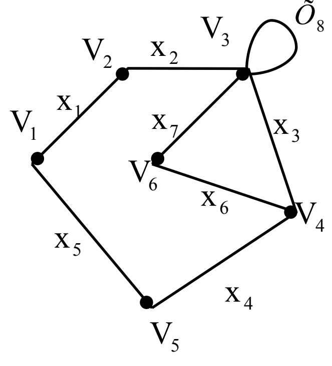
Простая цепь – это цепь без повторяющихся вершин.

Замкнутая цепь называется *циклом*. *Простой цикл* – это простая замкнутая цепь.

Длиной маршрута называется количество ребер в нем (с повторениями).

Если маршрут $M = V_1, x_1, V_2, x_2, ..., x_ê, V_ê$, то длина маршрута M равна k, обозначается $|M| = k$.

№ 10.2. Дан граф $G(V, X)$:



$M_1 = V_1, x_1, V_2, x_2, V_3, x_3, V_4, x_6, V_6, x_7, V_3, x_2, V_2$;

Длина маршрута $|M_1| = 6$.

$M_2 = V_1, x_1, V_2, x_2, V_3, x_3, V_4, x_6, V_6, x_7, V_3, x_2, V_2, x_1, V_1$ - это замкнутый маршрут; $|M_2| = 7$. Цепь: $V_1, x_1, V_2, x_2, V_3, x_3, V_4, x_6, V_6, x_7, V_3$ - все ребра различны. Длина равна 5. Эта цепь не является простой, так как при обходе вершину V_3 мы посетили два раза;

$V_1, x_1, V_2, x_2, V_3, x_3, V_4$ - пример простой цепи (все вершины на нашем пути были различны);

$V_4, x_6, V_6, x_7, V_3, x_8, V_3, x_3, V_4$ - цикл; $V_4, x_6, V_6, x_7, V_3, x_3, V_4$ - простой цикл;

Граф G *связанный*, если любая пара его вершин соединяется цепью.

Связанный неориентированный граф называется *Эйлеровым*, если существует цикл, содержащий все ребра графа.

Связанный неориентированный граф называется гамильтоновым, если существует простой цикл, проходящий через каждую вершину графа.

Матрица смежности графа G – это квадратная матрица A(G) размера nxn (n число вершин) с элементами

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если в графе G вершины } V_i,\ V_j \text{ соединены ребром} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Матрица инцидентности графа G – это матрица B(G) размера nxm (n - число вершин, m - число ребер) с элементами

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } V_i \text{ - концевая вершина ребра } x_j \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Матрица смежности орграфа D – это квадратная матрица A(D) размера nxn (n число вершин) с элементами

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если в орграфе D есть дуга из вершины } V_i \text{ в вершину } V_j, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

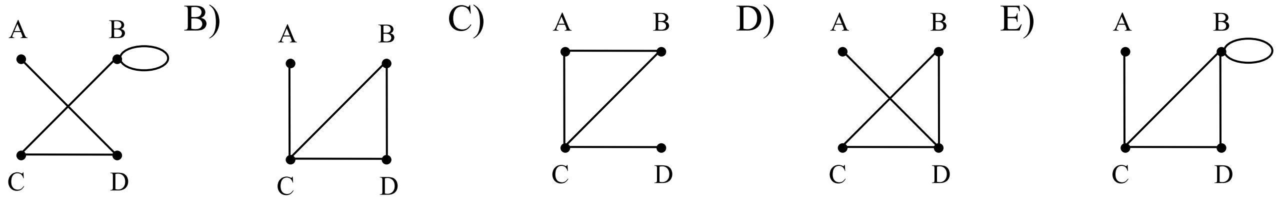
Матрица инцидентности орграфа D – это матрица B(D) размера nxm (n - число вершин, m - число дуг) с элементами.

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_j \text{ исходит из } V_i, \\ -1, & \text{если } x_j \text{ заходит в } V_i, \\ 0, & \text{если } x_j \text{ не инцидентна } V_i. \end{cases}$$

№ 10.3. Неориентированные графы имеют множество вершин $\{A,B,C,D\}$. Множества их ребер заданы отношением инцидентности: каждое ребро представлено как пара вершин. Подставьте в соответствие каждому графу его графическое изображение.

1. $\{(A,D), (B,C), (C,D), (B,D)\}$; 2. $\{(A,B), (A,C), (B,C), (C,D)\}$;
3. $\{(A,D), (B,C), (C,D), (B,B)\}$.

A) B) C) D) E)



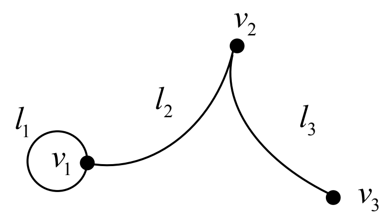
Ответ: 1 $\to$ D); 2 $\to$ C); 3 $\to$ A).

№ 10.4. Матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ является матрицей смежности ориентированного графа.

Тогда списком ребер ориентированного графа является…

▹ $\{(1;1),(1;3),(2;2),(3;1)\}$.

№ 10.5. Матрицей инцидентности $I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ задан граф…



▹ Матрицей инцидентности неориентированного графа с n вершинами и m ребрами называется прямоугольная матрица порядка nxm, отражающие инцидентность вершин и ребер с элементами.

11. Экономические задачи

Уравнения $\tilde{o}_j = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_j \quad (i = 1,2,...,n)$ называются соотношениями баланса, где x_j - объемы валового продукта $i-é$ отрасли для непроизводственного потребления, x_{ij} - объем продукции $i-é$ отрасли, потребляемой $j-é$ отраслью в процессе производства $(i = 1,2,...,n)$. Соотношения баланса могут быть записаны:

1) $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i$, где $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j} \quad (i = 1,2,...,n)$

a_{ij} - коэффициент прямых затрат (или технологические коэффициенты), показывающие затраты продукции $i-é$ отрасли на производство единицы продукции $j-é$ отрасли.

2) $X = A \cdot X + Y$ или $(E - A) \cdot X = Y$, где $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ - вектор валового выпуска, $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)^T$ - вектор конечного продукта, $\grave{A} = (a_{ij})$ - матрица прямых затрат.

Основная задача межотраслевого баланса состоит в отыскивании такого вектора валового выпуска Х, который при известной матрице прямых затрат А обеспечивает заданный вектор конечного продукта У: вектор Х находится по формуле $\tilde{O} = \left(\mathring{A} - \grave{A}\right)^{-1} \cdot \acute{O}$.

$S = \left(E - A\right)^{-1}$ - матрица полных затрат, где элемент матрицы S_{ij} показывает величину валового выпуска продукции $i - \acute{e}$ отрасли, необходимой для обеспечения выпуска единицы конечного продукта $j - \acute{e}$ отрасли $y_j = 1$.

Матрица $A \geq 0$ называется *продуктивной*, если для любого вектора $Y \geq 0$ существует решение $\tilde{O} \geq 0$ уравнения $\left(E - A\right) \cdot X = Y$.

Матрица А продуктивна, если $a_{ij} \geq 0$ для любых $i, j = 1, 2, ..., n$; $\max \sum_{n=1}^{n} a_{ij} \leq 1$ и существует номер j такой, что $\sum_{n=1}^{n} a_{ij} < 1$.

Чистой продукцией отрасли называется разность между валовой продукцией этой отрасли и затратами продукции всех отраслей на производство этой продукции.

№ 11.1. Модель межотраслевого баланса, для выпускаемых продуктов в объеме $\tilde{o}_1$ и $\tilde{o}_2$ с матрицей коэффициентов затрат $\begin{pmatrix} 0,34 & 0,18 \\ 0,25 & 0,53 \end{pmatrix}$ и конечным продуктом (выпуском) в объеме 340 и 280 единиц соответственно, имеет вид…

⊳ Используем формулу $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j + y_i$.

$$\begin{cases} \tilde{o}_1 = 0,34\tilde{o}_1 + 0,18\tilde{o}_2 + 340 \\ \tilde{o}_2 = 0,25\tilde{o}_1 + 0,53\tilde{o}_2 + 280. \end{cases}$$

№ 11.2. Межотраслевые потоки $\tilde{o}_{ij}$ в трехотраслевой производственно-экономической системе представлена матрицей

$\begin{pmatrix} 20 & 10 & 20 \\ 40 & 20 & 10 \\ 20 & 40 & 20 \end{pmatrix}$, а конечные продукты отраслей – столбцом $Y = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}$, тогда матрица коэффициентов прямых затрат имеет вид…

⊳ Учитывая $x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \left(i = 1, 2, ..., n\right)$ и $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j + y_j$, где $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}\left(i = 1, 2, ..., n\right)$.

Найдем $\tilde{o}_i : \tilde{o}_1 = 20 + 10 + 20 + 30 = 80$

$$\tilde{o}_2 = 40 + 20 + 10 + 10 = 80$$

$$\tilde{o}_3 = 20 + 40 + 20 + 20 = 100.$$

Далее $\grave{a}_{11} = \dfrac{\tilde{o}_{11}}{\tilde{o}_1} = \dfrac{20}{80} = 0,25,$ $\qquad \grave{a}_{12} = \dfrac{\tilde{o}_{12}}{\tilde{o}_2} = \dfrac{10}{80} = 0,125$

$$\grave{a}_{13} = \frac{\tilde{o}_{13}}{\tilde{o}_3} = \frac{20}{100} = 0,2, \qquad \grave{a}_{21} = \frac{\tilde{o}_{21}}{\tilde{o}_1} = \frac{40}{80} = 0,5,$$

$$\grave{a}_{22} = \frac{\tilde{o}_{22}}{\tilde{o}_2} = \frac{20}{80} = 0,25, \qquad \grave{a}_{23} = \frac{\tilde{o}_{23}}{\tilde{o}_3} = \frac{10}{100} = 0,1,$$

$$\grave{a}_{31} = \frac{\tilde{o}_{31}}{\tilde{o}_1} = \frac{20}{80} = 0,25, \qquad \grave{a}_{32} = \frac{\tilde{o}_{32}}{\tilde{o}_2} = \frac{40}{80} = 0,5.$$

$\grave{a}_{33} = \dfrac{\tilde{o}_{33}}{\tilde{o}_3} = \dfrac{20}{100}$. Матрица затрат имеет вид: $\grave{A} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,125 & 0,2 \\ 0,5 & 0,25 & 0,1 \\ 0,25 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}$.

№ 11.3. Кривая безразличия задана уравнением $u = \sqrt{\tilde{o}\acute{o}} = 30$, а оптимальный набор благ потребителя $\tilde{o} = 25$, $\acute{o} = 36$. Тогда предельная норма замены блага $\acute{o}$ благом $\tilde{o}$ равна…

▹ Предельная норма замены блага $\acute{o}$ благом $\tilde{o}$ вычисляется по формуле $S_x = \dfrac{\partial u / \partial y}{\partial u / \partial x}$

Тогда $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \sqrt{x} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$; $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \sqrt{y} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$S_x = \dfrac{\sqrt{\tilde{o}}}{2\sqrt{\acute{o}}} : \dfrac{\sqrt{\acute{o}}}{2\sqrt{\tilde{o}}} = \dfrac{x}{y}$. В точке (25; 36): $S_x = \dfrac{25}{36}$.

№ 11.4. Неоклассическая мультипликативная производственная функция может иметь вид…

1) $Y = 2K^{0,6}L^{0,7}$; 2) $Y = 2 \cdot K^{1,2}L^{0,7}$;

3) $Y = 0,6 \cdot K + 0,7L$ 4) $Y = 2 \cdot K^{0,6}L^{-0,7}$

▹ Неоклассическая мультипликативная производственная функция имеет вид $Y = a_0 K^{a_1} L^{a_2}$, где $\grave{a}_0 > 0$, $\grave{a}_1 \in (0,1)$, $\grave{a}_2 \in (0,1)$.

Этим условиям удовлетворяет функция $Y = 2 \cdot K^{0,6} \cdot L^{0,7}$.

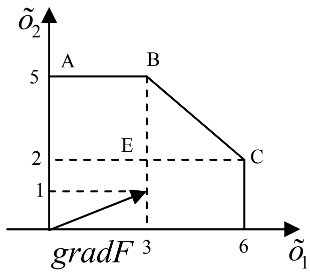
№ 11.5. Зависимость между себестоимостью продукции $\tilde{N}$ и объемом производства Q выражается как $\tilde{N} = 20 - 0,5Q$. Тогда эластичность себестоимости при объеме производства $Q = 10$ равна…

▹ Коэффициент эластичности себестоимости вычисляется по формуле $\varepsilon = \dfrac{dC / dQ}{C / Q}$. Тогда

$\dfrac{dC}{dQ} = (20 - 0,5Q)' = -0,5$, $\varepsilon = \dfrac{-0,5}{\dfrac{20 - 0,5Q}{Q}} = \dfrac{-0,5}{\dfrac{20}{Q} - 0,5} = \dfrac{-0,5}{2 - 0,5} = -\dfrac{1}{3}$.

№ 11.6. Область допустимых решений OABCD задачи линейного программирования имеет вид.

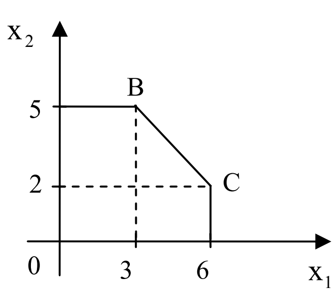
Тогда максимальное значение функции $F(x) = 3x_1 + x_2$ достигается в точке…

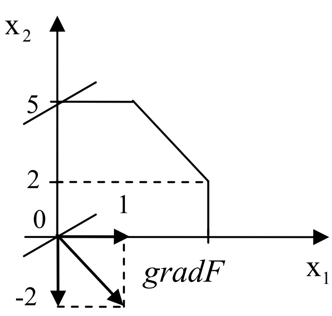


▹ Построим линию уровня $F(x) 3x_1 + x_2 = 0$ и градиент целевой функции $gradF = \{3,1\}$.

Тогда целевая функция будет принимать наибольшее значение в точке «выхода» линии уровня
из области допустимых решений в направлении градиента.
Из рисунка видно, что точкой максимума будет точка С.

№ 11.7. Область допустимых решений OABCD задачи линейного программирования имеет вид.





Тогда минимальное значение функции $F(x) = x_1 - 2x_2$ равно…

▹ Построим линию уровня $x_1 - 2x_2 = 0$ и градиент целевой функции $gradF = \{1;-2\}$. Тогда целевая функция будет принимать наименьшее значение в точке «входа» линии уровня в область допустимых решений в направлении градиента. Это точка A(0,5). Следовательно, $F_{\min} = F(0,4) = 0 - 2 \cdot 5 = -10$

№ 11.8.Транспортная задача будет открытой, если…

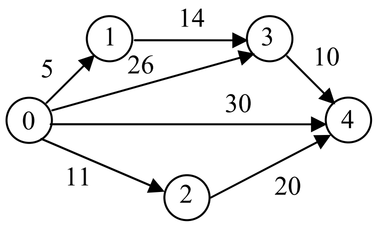
	120	200	c
300	10	15	18
a	17	10	5
b	4	20	10

▹ Транспортная задача будет открытой, если суммарная мощность поставщиков не равна суммарной мощности потребителей. То есть, $300 + a + b \neq 120 + 200 + c$, или $a + b \neq 20 + c$. Этому условию удовлетворяет ответ: $a = 150$, $b = 150$, $c = 320$.

№ 11.9.Матричная игра задана платежной матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 9 & 7 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда верхняя цена игры равна…

▹ Верхняя цена этой матричной игры определяется как $\beta = \min[\beta_1, \beta_2, \beta_3]$, где $\beta_1 = \max\{1{,}9\} = 9$, $\beta_2 = \max\{3{,}7\} = 7$, $\beta_3 = \max\{5{,}2\} = 5$, то есть $\beta = \min\{9{,}7{,}5\} = 5$.

№ 11.10.Для сетевого графика, изображенного на рисунке длина критического пути равна…



▹ Выделим полные пути:

$L_1 : 0 \to 1 \to 3 \to 4$, $L_3 : 0 \to 4$,

$L_2 : 0 \to 3 \to 4$, $L_4 : 0 \to 2 \to 4$,

и вычислим их длины:

$t(L_1) : 5 + 14 + 10 = 29$, $t(L_3) = 30$,

$t(L_2) = 26 + 10 = 36$, $t(L_4) = 11 + 20 = 31$.

Критическим путем называется наиболее продолжительный (по времени) полный путь, поэтому $L_2 : 0 \to 3 \to 4$ и его длина $t_{кр} = 36$.

№ 11.11.Дана функция полезности $u = 3\sqrt{x} + y$. Тогда кривая безразличия задается уравнением…

▹ Для функции полезности $u = u(x, y)$ кривая безразличия задается уравнением $u(x, y) = C$, то есть уравнением $3\sqrt{x} + y = C$.

Задача межотраслевого баланса: $X = A \cdot X + Y$, где X - вектор валового выпуска, Y - вектор конечного продукта, A - матрица прямых затрат. Матрица $A \geq 0$ называется <u>продуктивной</u>, если для любого вектора $Y \geq 0$ существует решение $X \geq 0$. В этом случае модель Леонтьева называется продуктивной.

Критерий продуктивности: если максимум сумм элементов ее столбцов не превосходит 1, то есть $\max\limits_{j=1,2,\ldots,n} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1$ и существует номер j, что для одного из столбцов сумма элементов строго меньше 1 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$.

№ 11.12. Матрица $A=\begin{pmatrix}0{,}07 & 0{,}21\\ 0{,}12 & 0{,}15\end{pmatrix}$ имеет неотрицательные элементы и удовлетворяет критерию продуктивности:
$\max\{0{,}07+0{,}12;\ 0{,}21+0{,}15\}=\max\{0{,}19;\ 0{,}36\}=0{,}36<1$.

В точке (25; 36) $S_x=\dfrac{25}{36}$.

№ 11.13. Задана производная функция $Y=3K^{0,5}L^{0,5}$. Тогда средний продукт труда при $K=25,\quad L=100$ равен…

⊳ Средний продукт труда вычисляется по формуле $\grave{A}_L=\dfrac{Y}{L}$. Тогда $A_L=\dfrac{3K^{0,5}L^{0,5}}{L}=3\sqrt{\dfrac{K}{L}}$.

В точке $(25;100)$: $\grave{A}_L=3\sqrt{\dfrac{25}{100}}=1{,}5$.

№ 11.14. Дана мультипликативная производственная функция $Y=1{,}84K^{0,45}\cdot L^{0,65}$. Тогда коэффициент эластичности по труду равен…

⊳ Коэффициент эластичности по труду вычисляется по формуле $\varepsilon_L=\dfrac{\frac{\partial Y}{\partial L}}{\frac{Y}{L}}$.

Тогда $\dfrac{\partial Y}{\partial L}=1{,}84K^{0,45}\cdot 0{,}65L^{-0,35}$, $\varepsilon_L=\dfrac{1{,}84K^{0,45}\cdot 0{,}65L^{-0,35}}{1{,}84K^{0,45}\cdot L^{-0,35}}=0{,}65$.

№ 11.15. Дана функция спроса $q=\dfrac{p+13}{p+1}$ и предложения $S=kp+5$, где p – цена товара. Если равновесный объем спроса-предложения равен 7, то значение параметра k равно…

⊳ Из условия $q=7$ или $\dfrac{\eth+13}{\eth+1}=7$ определим равносильную цену спроса-предложения p=1.
Подставив p=1, S=7 в уравнение $S=kp+5$, получим искомое значение k=2.

№ 11.16. Даны функции спроса $q=\dfrac{p+12}{p+1}$ и предложения $S=2p+4{,}5$, где p – цена товара. Тогда равновесная цена спроса – предложения равна…

⊳ Для определения равновесной цены спроса-предложения необходимо решить уравнение $q=S$, или $\dfrac{p+12}{p+1}=2p+4{,}5$. Получаем квадратное уравнение $2p^2+5{,}5p-7{,}5=0$ корни которого равны $p_1=-3{,}75 \quad p_2=1$. Так как $p>0$, то равновесная цена спроса-предложения равна 1.

№ 11.17. Зависимость между издержками производства С и объемом продукции Q выражается функцией $C=29\cdot Q-0{,}08Q^3$. Тогда предельные издержки $\dfrac{dC}{dQ}$ при объеме производства $Q=10$ равны…

⊳ $C'(Q)=29-3\cdot 0{,}08Q^2$, $C'(10)=29-24=5$.

№ 11.18 Матричная игра задана платежной матрицей $\begin{pmatrix}2 & 4 & 7\\ 8 & 5 & 3\end{pmatrix}$. Тогда нижняя цена игры равна…

⊳ $\alpha=\max\{\alpha_1,\alpha_2\}$, где $\alpha_1=\min\{2,4,7\}=2$; $\alpha_2=\min\{8,5,3\}=3$, то $\alpha=\max\{2,3\}=3$.
Ответ: 3.

№ 11.19 Неоклассическая мультипликативная производственная функция может иметь вид…

$$\text{A) } Y = 2K^{0,6}L^{0,7};\quad \text{B) } Y = 2K^{0,6}L^{-0,8};\quad \text{C) } Y = 2K^{1,2}L^{0,7}.$$

⊳ $Y = \alpha_0 K^{\alpha_1} L^{\alpha_2}$, где $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 \in (0,1)$, $\alpha_2 \in (0,1)$. Этим условиям удовлетворяет функция A).

№ 11.20. Матрицей выигрышей в игре с природой имеет вид тогда оптимальной по критерию Байсса будет стратегия…

⊳ Определим неизвестную вероятность $p = 1 - 0,6 = 0,4$, и вычислим средние выигрыши игрока:

$$\overline{a}_1 = 16 \cdot 0,6 + 4 \cdot 0,4 = 11,2$$

$$\overline{a}_2 = 13 \cdot 0,6 + 9 \cdot 0,4 = 11,4$$

$$\overline{a}_3 = 10 \cdot 0,6 + 13 \cdot 0,4 = 11,2$$

	$P(Q_1) = 0,6$	$P(Q_2) = P$
A_1	16	4
A_2	13	9
A_3	10	13
A_4	8	15

$$\overline{a}_4 = 8 \cdot 0,6 + 15 \cdot 0,4 = 10,8$$

Так как наибольший средний выигрыш равен 11,4, то оптимальной будет стратегия A_2.

№ 11.21. Задана производственная функция $Y = 3K^{0,5}L^{0,5}$. Тогда средний продукт труда при $K = 25$, $L = 100$ равен…

⊳ Средний продукт труда вычисляется по формуле $A_L = \dfrac{Y}{L}$. Тогда $A_L = \dfrac{3K^{0,5}L^{0,5}}{L} = 3\sqrt{\dfrac{K}{L}} \Rightarrow A_L = 3\sqrt{\dfrac{25}{100}} = 1,5$.

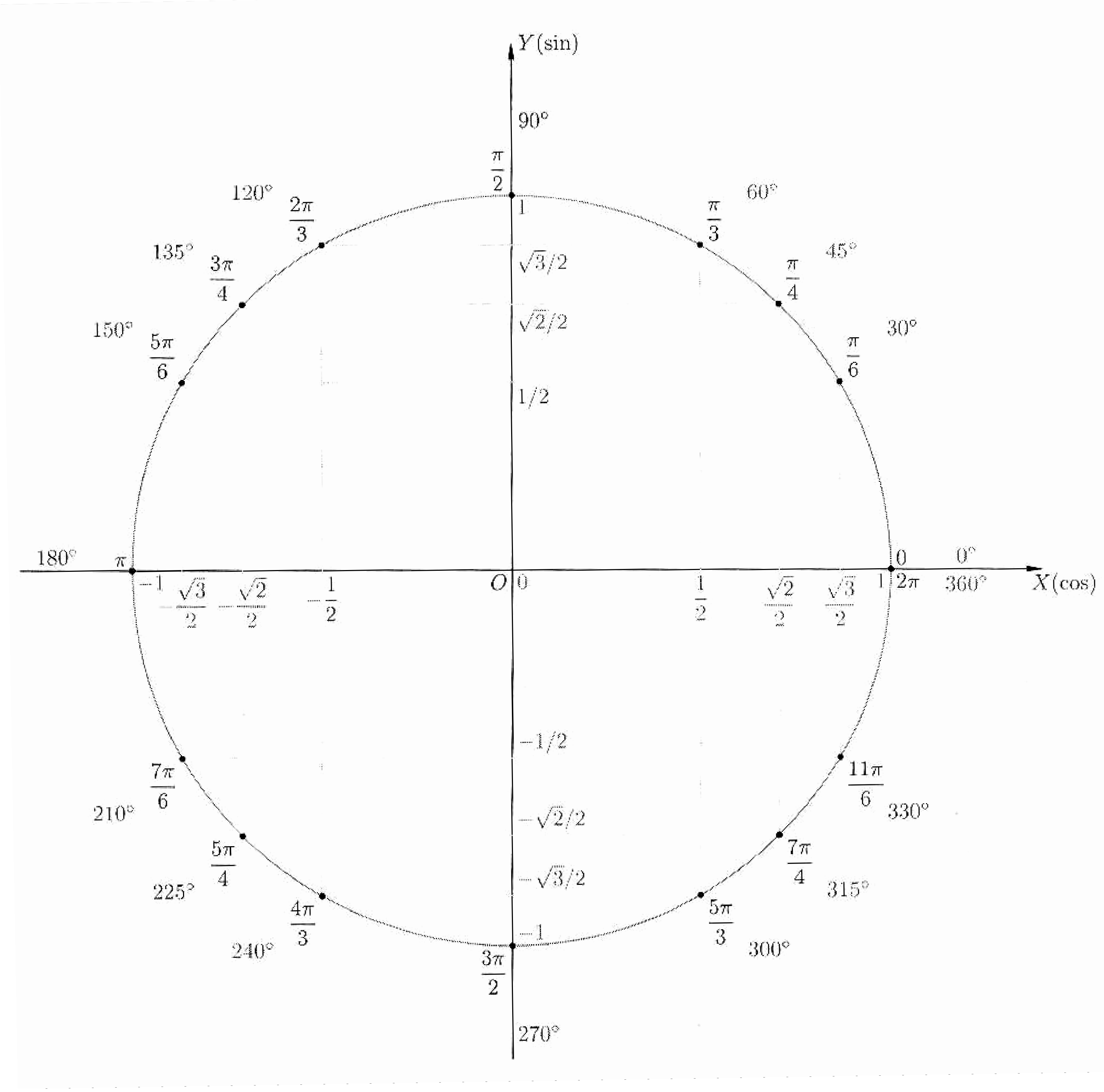
№ 11.22. Дана мультипликативная производственная функция $Y = 1,84K^{0,45}L^{0,65}$. Тогда коэффициент эластичности по труду равен…

⊳ Коэффициент эластичности по труду вычисляется по формуле $\varepsilon_L = \dfrac{Y'_L}{Y/L}$.

$$Y'_L = 1,84K^{0,45} \cdot 0,65 \cdot L^{0,65-1} \Rightarrow \varepsilon_L = \frac{1,84K^{0,45} \cdot 0,65 \cdot L^{-0,35}}{1,84K^{0,45} \cdot L^{0,65}/L} = 0,65.$$

12.Тригонометрические формулы

Тригонометрический круг



Тригонометрические формулы

Соотношения между функциями:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \qquad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \qquad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \qquad 1 + \mathrm{ctg}^2\,\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Формулы сложения:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}; \qquad \mathrm{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}.$$

Формулы двойного угла:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha; \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\,\alpha}.$$

Формулы понижения степени:

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}; \qquad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$$

Формулы преобразования:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}; \qquad \mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$

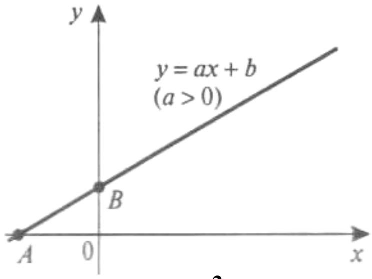
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)];$$

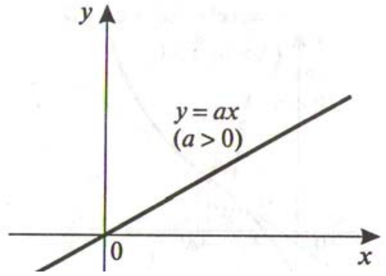
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)];$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)].$$

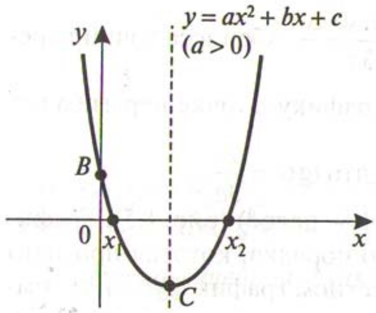
13.Графики элементарных функций

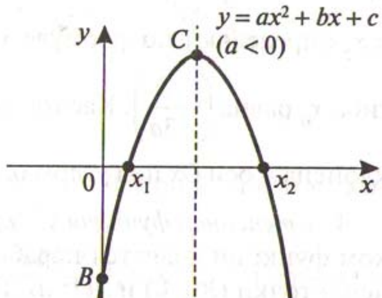
1.Линейная функция $y=ax+b$.



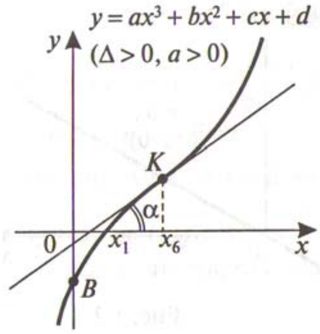


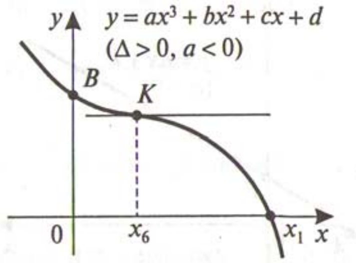
2.Квадратичная функция $y=ax^2+bx+c$.

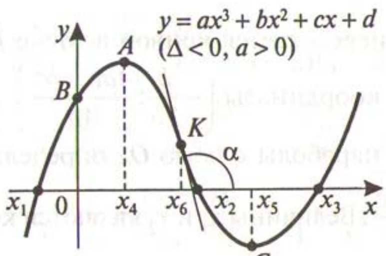




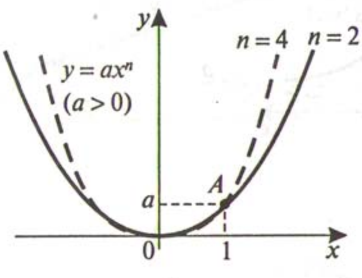
3.Многочлен третьей степени $y=ax^3+bx^2+cx+d$.

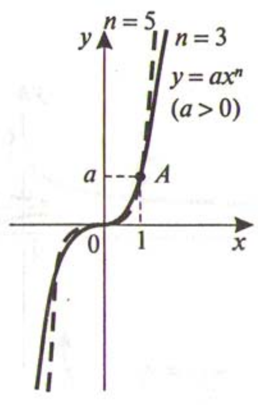






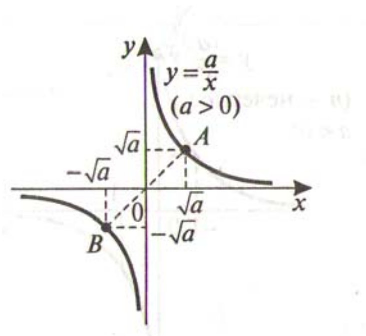
4.Степенная функция $y=ax^n$ (n>1-целое).

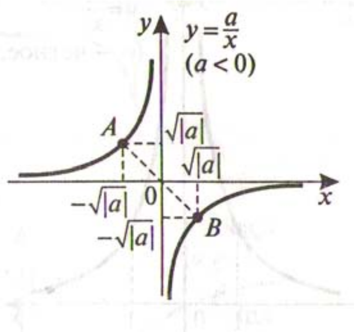




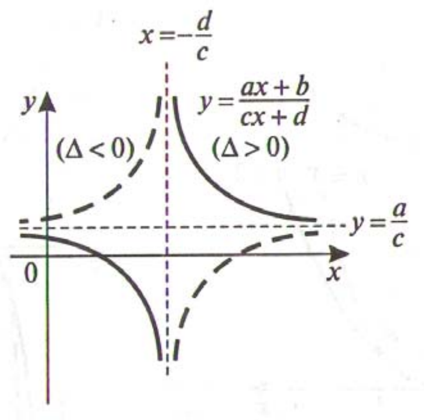
Дробно-рациональная функция:

1.Обратно пропорциональная функция y= $\frac{a}{y}$

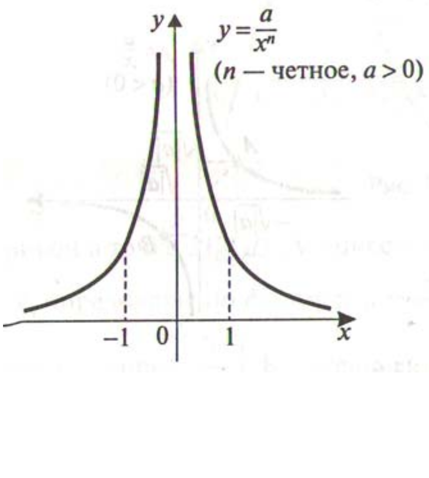


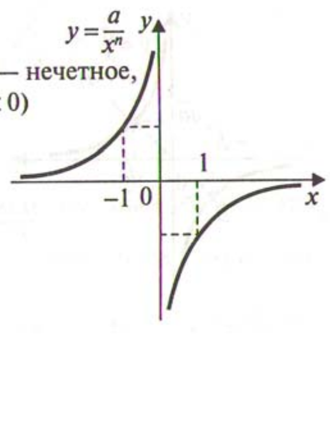


2.Дробно-линейная функция $y=\frac{ax+b}{cx+b}$



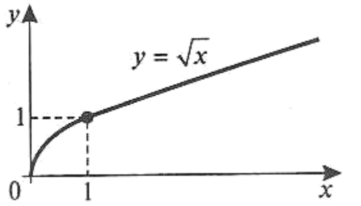
3.Степенная функция $y=\frac{a}{x^n}$

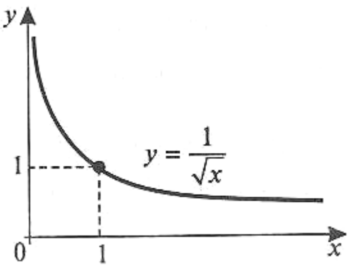


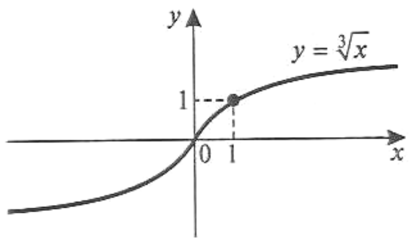


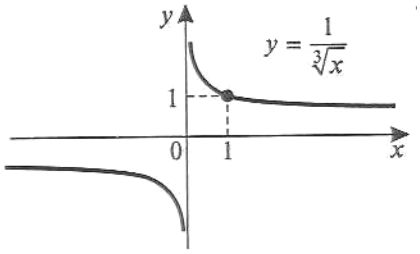
Некоторые иррациональные функции

- $y = \sqrt{x}$;
- $y = \sqrt[3]{x}$;
- $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$;
- $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.



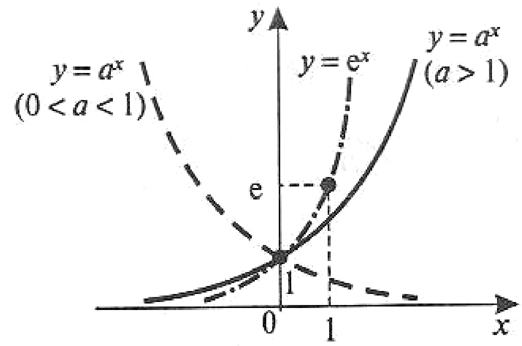




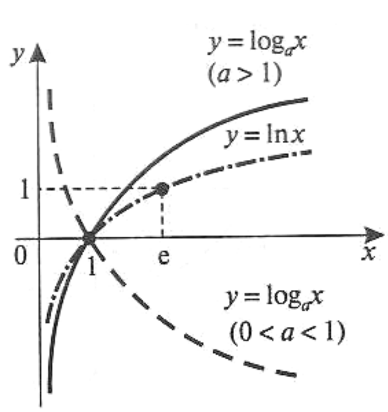


Показательные и логарифмические функции:

1.Показательная функция $y=a^x$ ($a>0$, $a\neq 1$)

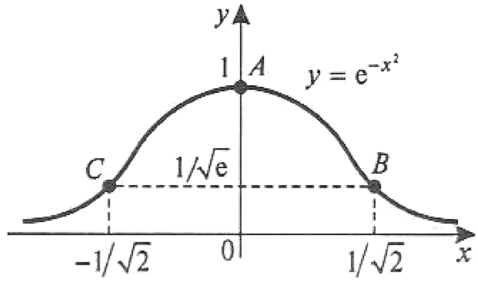


2.Логарифмическая функция $y= \log_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$).



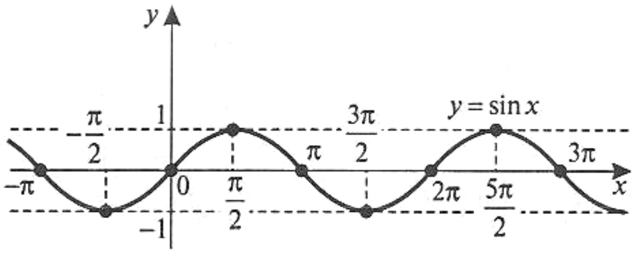
<u>*3.Кривая Гаусса*</u>

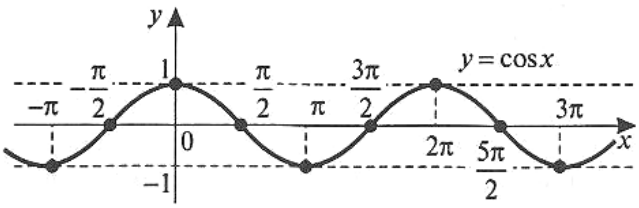
$y = e^{-x^2}$



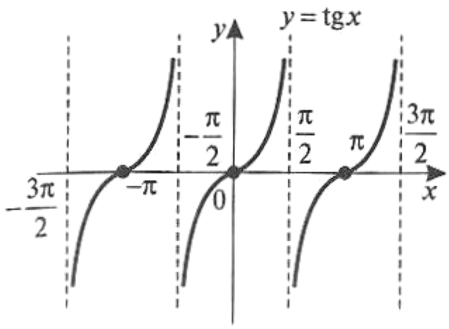
<u>*Тригонометрические функции.*</u>

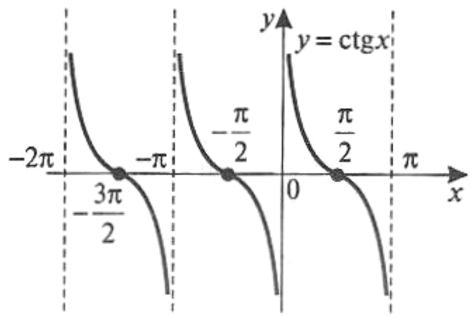
<u>*1.Синус и косинус: y=sinx и y=cosx.*</u>



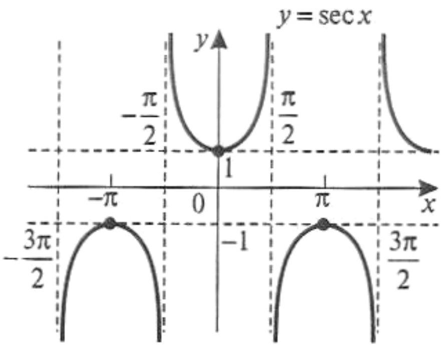


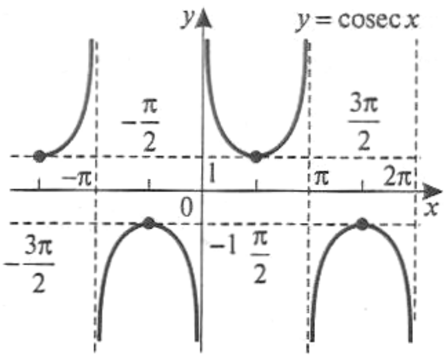
<u>*2.Тангенс и котангенс: y=tgx и y=ctgx.*</u>





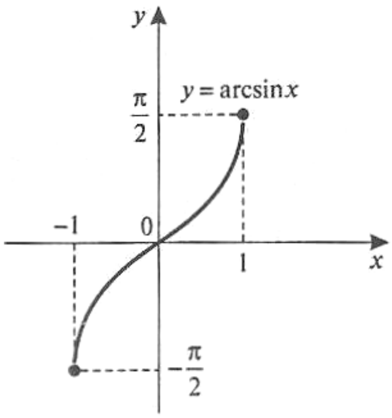
3.Секанс, косеканс: y=secx и y=cosecx.

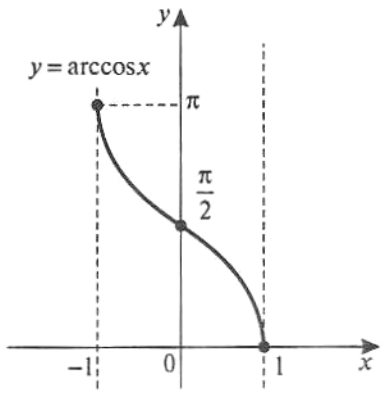




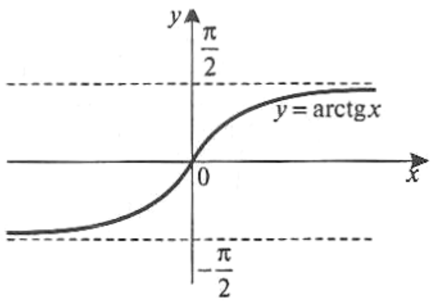
Обратные тригонометрические функции.

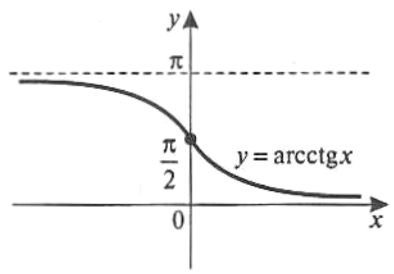
1.Аркосинус и арксинус: y=arcsinx и y=arccosx.





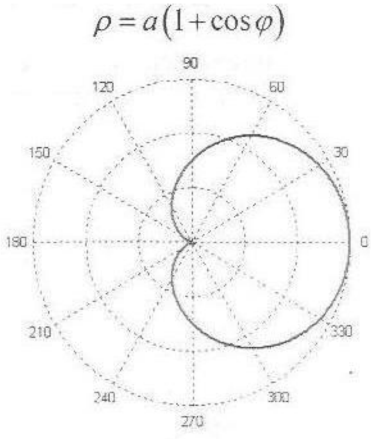
2.Арктангенс и арккотангенс: y=arctgx и y=arcctgx.

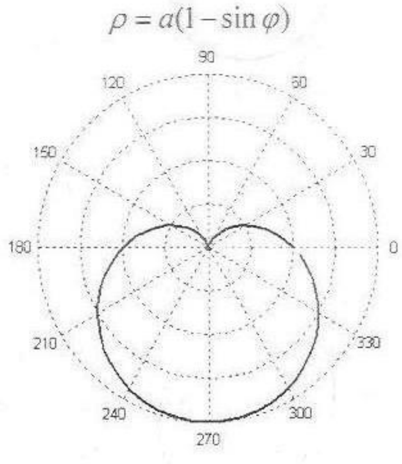




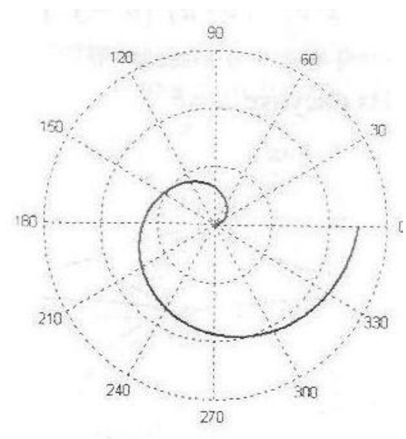
14.Кривые в полярной системе координат

Кардиоида(частный случай улитки Паскаля при a=1).

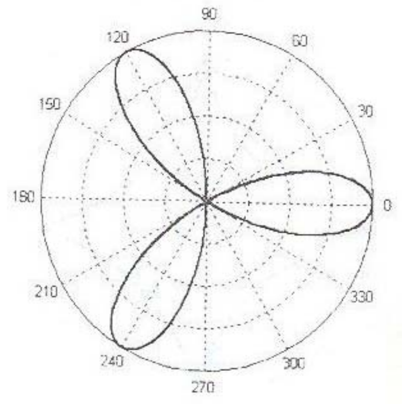




Спираль Архимеда ρ=aφ.



Трехлепестковая роза ρ=acos3φ.



Учебное издание

Шувалова Л.Е.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ИНТЕРНЕТ-ТЕСТИРОВАНИЮ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Корректор Габдурахимова Т.М.
Худ. редактор Федорова Л.Г.

Сдано в набор 30.06.2013
Подписано в печать 19.08.2013.
Бумага писчая. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 3,8. Тираж 100.
Заказ №35.

НХТИ (филиал) ФГОУ ВПО «КНИТУ»,
г. Нижнекамск, 423570, ул.30 лет Победы, д.5а.