

Министерство образования и науки РФ
Нижекамский химико-технологический институт (филиал)
Государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Казанский государственный технологический университет»

Д.Б. Вафин

**ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ
РАБОТЫ ПО ФИЗИКЕ**

ЧАСТЬ 1

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Нижекамск

2010

Содержание

Введение	4
1. Физические основы механики	9
1.1. Основные законы и формулы	9
1.2. Примеры решения и оформления задач	18
1.3. Задания для расчетно-графической работа РГР 11	31
2. Молекулярная физика и термодинамика	47
2.1. Основные формулы и определения	47
2.2. Примеры решения и оформления задач	63
2.3. Задания для РГР 12. Термодинамика	75
3. Электростатика	84
3.1. Основные законы и формулы	84
3.2. Примеры решения задач по электростатике	92
3.3. Задания для РГР 12 по электростатике	106
Библиографический список	114
Приложения	114

Введение

В рамках объема самостоятельной работы студенты выполняют расчетно-графические работы по физике. Каждому студенту даются задания согласно своему варианту. Эти задания включают ряд типич-

ных задач из различных разделов физики. При подборе задач постарались, чтобы они охватывали несколько тем изучаемого материала. От традиционных задач они отличаются большей трудоемкостью и для их решения нужны знания из различных разделов. Эти задачи без «хитростей» и главным образом рассчитаны на развитие навыков решения типичных задач. Задачи, требующие определенной смекалки, предлагаются при проведении физических олимпиад.

Расчетно - графические работы оформляются в простых учебных тетрадях в клетку. Все задачи должны снабжаться подробными пояснениями, рисунками и при необходимости, графиками. Предлагается следующая схема оформления решения: 1) Исходные данные; 2) Анализ; 3) Решение; 4) Ответ. В разделе «Анализ» необходимо привести поясняющий рисунок, вывод формул для искомых величин и анализ размерностей полученных формул. Промежуточные вычисления рекомендуется не делать. Если только получение формул для искомых величин через исходные данные становятся слишком громоздкими, в этих формулах можно использовать обозначения промежуточных величин. Также можно поступить, если некоторые промежуточные величины входят в формулы нескольких искомых величин.

На обложке необходимо написать:

Вариант № _____
Расчетно-графическая работа по физике (РГР 11).
студента(ки) гр. (Ф.И.О.)
Проверил:

Физика является базовой дисциплиной для большого числа инженерных дисциплин, изучающая наиболее общие свойства материи: существующие формы материи, её строение, взаимодействие и движение – механическое, тепловое, электромагнитное и др.

Открытия в физике имели большое значение для создания и развития новых отраслей техники. Развитие техники, в том числе и оборудования химико-технологического производства, базируется на достижениях физики. Физические методы исследования используются в самых различных областях производства для установления оптимальных параметров технологических процессов, при разработке новой технологии. Приборы, используемые для исследования и подготовки сырья, для контроля за ходом и качеством технологических процессов и для многих других инженерных целей, построены на основе слож-

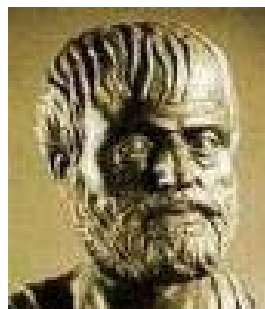
ных физических законов. Поэтому четкое понимание логики постановки и решения физических задач необходимо для плодотворной деятельности современного инженера.

Основоположником физики считается древнегреческий философ Аристотель (384 – 322 г. до н.э.). В его трактатах «Физика», «О небе», «Механика» и других была предпринята первая успешная попытка научной систематизации всех физических знаний того времени. В этих трудах наряду с верными наблюдениями содержатся и ошибочные, порой наивные теории. Например, Аристотель был сторонником геоцентрической модели мироздания, считал, что сила определяет не ускорение тела, а его скорость, полагал, что движение «лёгких» и «тяжёлых» тел происходит по разным законам... Эти заблуждения просуществовали почти две тысячи лет!

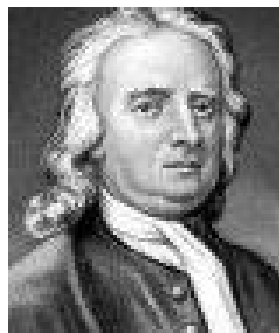
Революция в механике связана с именами Джордано Бруно, Кеплера, Леонардо да Винчи, Галилея и других учёных, но, прежде всего, конечно, с именем великого английского физика Исаака Ньютона (1603 – 1727), который сформулировал основные законы механики. Так, если у Демокрита атомы сцеплялись крючками, то у Ньютона их связывала уже сила гравитационного притяжения. Сами атомы по-прежнему рассматривались как максимально плотные образования материи, как предел физического ее деления. Механическое движение атомов происходит в абсолютном пространстве и абсолютном времени. В рамках этой атомистической концепции строения материи была развита классическая механика, которая достигла огромных успехов в описании природы. Однако некоторые оптические явления с трудом вписывались в рамки механической картины мира.

В начале XX столетия фундаментальные работы Альберта Эйнштейна (1879 – 1956) ознаменовали новый этап в истории механики.

В своей теории Эйнштейн создал принципиально новое учение о пространстве и времени. Согласно этой теории, размер движущегося



Аристотель



Исаак Ньютон

тела и течение времени зависят от скорости движения. Поразительным является вывод теории относительности об эквивалентности массы и энергии тела:



Эрвин Шрёдингер

$$E = mc^2.$$

Вскоре оказалось, что классическая ньютоновская механика — механика макромира — не может быть использована при рассмотрении процессов, происходящих в микромире — в мире атомов, ядер, элементарных частиц. Микромир живёт по своим особым законам. Эти законы микромира изучаются в квантовой (волновой) механике. В создании этой науки участвовали многие учёные мира. Среди них Нобелевские лауреаты Эрвин Шрёдингер, Вернер Гейзенберг, Макс Борн, Поль Дирак и многие другие.

Важно отметить, что квантовая механика — механика микромира, также как и релятивистская механика Эйнштейна — механика движений с околосветовыми скоростями не отвергают классическую механику Ньютона, но переходят в нее при определенных условиях.

С молекулярным строением вещества связано множество важных физических свойств тел, а также законов их взаимодействия. Наблюдаемые на практике физические свойства реализуются как результат совокупного действия гигантского числа молекул, каждая из которых (согласно классическим представлениям) в любой момент времени занимает определенное положение, обладает определенной массой, скоростью, и другими конкретными свойствами. Состояние системы, описанное с такой степенью детализации, называется динамическим состоянием или *микросостоянием*. Подобное детальное описание оказывается практически невозможным из-за громоздкости задачи и отсутствия необходимых конкретных данных. К счастью, этого и не требуется. Реально наблюдаемые физические параметры тел выражаются через усредненные значения динамических параметров молекул (скорость, импульс, энергию). Параметры, связанные с этими усредненными значениями, называют *макроскопическими параметрами состояния* системы. Количество этих параметров невелико. К ним относят давление, плотность, температуру, концентрацию и объем. Состояние системы, описанное с помощью макроскопических параметров, называют *макросостоянием*. Термодинамика рассматривает мак-

росостояния систем, состоящих из большого числа частиц и описывает эти макросостояния с помощью указанных макроскопических параметров. При этом молекулярные процессы и другие микроскопические явления не рассматриваются.

Первые научные шаги в изучении электричества и магнетизма были сделаны только в конце XVI века врачом Уильямом Гильбертом (1540 – 1603). В своей монографии «О магните, магнитных телах и о большом магните – Земля», Гильберт впервые ввёл понятие «магнитное поле Земли»... Экспериментируя с различными материалами, он обнаружил, что свойством притягивать легкие предметы обладает не только янтарь, потёртый о шёлк, но и многие другие тела: алмаз, хрусталь, смола, сера и т.д. Эти вещества он назвал «электрические», то есть «как янтарь». Так возник термин «электричество».

Первую теорию электрических явлений попытался создать французский исследователь Шарль Дюфэ (1698 – 1739). Он установил, что существует электричество двух родов: «Один род, — писал он, — я назвал «стеклянным» электричеством, другой — «смоляным». Особенность этих двух родов электричества: отталкивать однородное с ним и притягивать противоположное...» (1733 г.).

Дальнейшее развитие теория электричества получила в работах американского ученого Бенджамина Франклина (1706 – 1790). Он ввел понятие «положительное» и «отрицательное» электричество, установил закон сохранения электрического заряда, исследовал «атмосферное электричество», предложил идею громоотвода. Несмотря на обилие различных веществ в природе, существуют только два вида электрических зарядов: заряды, подобные возникающим на стекле, потертом о шелк, и заряды, подобные появляющимся на эбоните, потертом о мех. Первые из них получили название положительных зарядов, а вторые – отрицательных зарядов. Одноименные заряды отталкиваются, а разноименные притягиваются.

В 1785 году французский исследователь Шарль Кулон (1736 – 1806) экспериментально установил закон взаимодействия неподвижных электрических зарядов и позднее – магнитных полюсов. Закон Кулона — фундамент электростатики. Он позволил, наконец-то, установить единицу измерения электрического заряда и магнитных масс. Открытие этого закона стимулировало разработку математической теории электрических и магнитных явлений.



Шарль Кулон

В некоторых телах электрические заряды могут свободно перемещаться между различными частями тела, в других же телах это не имеет места. Тела первого рода называют проводниками электричества, а тела второго рода – диэлектриками или изоляторами. Проводниками являются все металлы в твердом и жидком состояниях, водные растворы солей и кислот и многие другие вещества. Примерами изоляторов могут служить янтарь, кварц, эбонит и все газы в нормальных условиях. Отметим, что разделение тел на проводники и диэлектрики весьма условно. Все известные вещества в большей или меньшей степени проводят электричество. Когда мы говорим, что данное тело есть изолятор, этим мы выражаем только

то обстоятельство, что в данных условиях опыта заряд, прошедший через тело, мал по сравнению с другими зарядами, участвующими в рассматриваемом явлении.

Электростатика – раздел электричества, изучающий свойства и взаимодействие систем электрических зарядов, неизменных во времени и неподвижных в системе отсчета, в которой их рассматривают.

1. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

1.1. Основные законы и формулы

Положение материальной точки M в пространстве определяется тремя ее координатами x , y , z – расстояниями от данной точки до координатных плоскостей. Положение частицы можно также задать радиус–вектором (Рис. 1.1.). Радиус–вектором \mathbf{r} называется отрезок, направленный из начала системы отсчета к данной материальной точке, проекции которого на оси системы равны координатам частицы x , y , z :

$$\mathbf{r} = r_x + r_y + r_z = xi + yj + zk,$$

где r_x, r_y, r_z – составляющие радиус-вектора по координатным осям, причем $|r_x| = \pm x, |r_y| = \pm y, |r_z| = \pm z; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – орты системы координат, т.е. единичные векторы, направленные по осям координат ($|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$), образующие ее *ортонормированный базис*.

Радиус-вектор r материальной точки и пройденный путь S связаны со временем функциональными зависимостями $r = r(t)$ и $S = f(t)$, которые называются *уравнением движения*. Иногда уравнение движения материальной точки задают в параметрическом виде:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t).$$

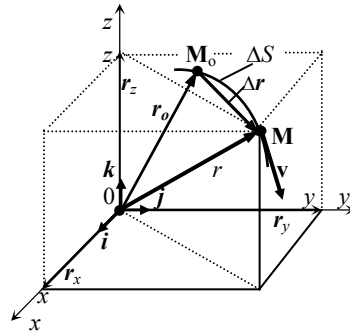


Рис. 1.1

Отношение пути ΔS к промежутку времени Δt , в течение которого этот путь пройден, называется *средней скоростью по пути*

$$v_{cp} = \frac{\Delta S}{\Delta t}, [v] = \frac{[S]}{[t]} = \frac{м}{с}.$$

Предел средней скорости при стремлении промежутка времени к нулю называется *мгновенной скоростью по пути*

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}$$

Предел средней скорости по перемещению при стремлении промежутка времени к нулю называется *вектором скорости*

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{v}_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v \bar{\tau}, \text{ м/с.}$$

где $v = \frac{dS}{dt}$ скорость по пути, $\bar{\tau}$ – единичный вектор, направленный

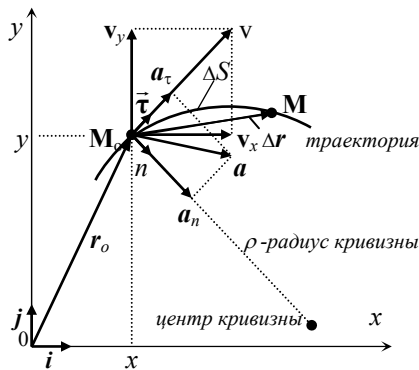


Рис. 1.2

по вектору скорости (рис. 1.2)

Скорость можно разложить на составляющие вдоль осей координат

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y + \mathbf{v}_z = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k},$$

где $\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y, \mathbf{v}_z$ – составляющие скорости, $v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}$

– проекции вектора скорости на оси координат.

Характер изменения скорости (быстрота ее изменения) определяется *ускорением*:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \text{ м/с}^2.$$

Можно представить $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$,

где $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$; $a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$; $a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$.

Ускорение можно разложить на тангенциальную \mathbf{a}_τ и нормальную \mathbf{a}_n составляющие $\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n$,

где $a_\tau = \frac{dv}{dt}$, $a_n = v^2/\rho$, ρ – радиус кривизны траектории.

Значение полного ускорения через свои составляющие определяется соотношениями

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Если материальная точка М движется по окружности радиуса r , то за промежуток времени Δt пройдет путь ΔS и его радиус–вектор повернется на некоторый угол $\Delta\varphi$.

Угол поворота радиус–вектора (рис. 1.3) определяется как отношение длины дуги окружности к радиусу окружности:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta S}{r}, \quad [\varphi] = \frac{[S]}{[r]} = \frac{\text{м}}{\text{м}} = \text{радиан}.$$

Угловая скорость определяется как предел средней угловой скорости при стремлении промежутка времени к нулю, т.е. равняется первой производной от угла поворота по времени:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}, \quad 1/\text{с} = \text{Гц (герц)}.$$

Угловую скорость считают векторной величиной, направленной перпендикулярно плоскости окружности по *оси вращения* так, что если посмотреть с конца вектора $\vec{\omega}$, то вращение происходит против часовой стрелки (правило правого винта).

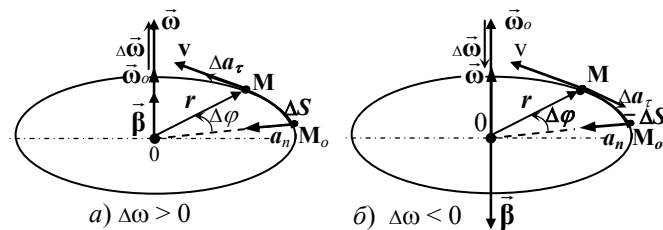


Рис. 1.3

Угловое ускорение это производная от угловой скорости по времени:

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad \text{или} \quad \beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}, 1/c^2.$$

Связь между линейными и угловыми величинами

$$S = r\varphi, \quad v = r\omega, \quad a_\tau = r\beta, \quad a_n = r\omega^2.$$

Рассмотрим самые простые виды движения материальной точки:

1) $a_\tau = 0$ – *равномерное движение* (если $a_n = 0$, то движение по прямой). При равномерном движении точки остается постоянным модуль ее скорости: $v = v_{cp}$. Пройденный путь за время t : $S = vt$.

2) $a_\tau = \text{const}$ – *равнопеременное движение*. Если $a_\tau > 0$, то движение *равноускоренное*, при $a_\tau < 0$ – *равнозамедленное движение*.

Скорость и путь при равнопеременном движении в момент времени t :

$$v = v_0 + at; \quad S = v_0t + \frac{at^2}{2}; \quad S = \frac{v_0+v}{2}t; \quad S = \frac{v^2-v_0^2}{2a},$$

где v_0 – начальное значение скорости.

Если постоянен вектор ускорения ($\mathbf{a} = \text{const}$), то радиус-вектор материальной точки \mathbf{r} в произвольный момент времени t через начальные значения \mathbf{r}_0 и \mathbf{v}_0 определяется выражением:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0t + \mathbf{a}t^2/2.$$

3) $a_n = v^2/r = \text{const}$, $a_\tau = 0$ – *равномерное вращение* по окружности.

Угол поворота за время t : $\varphi = \omega t$.

Если N – число полных оборотов за время t , то $T = t/N$ – период вращения, т.е. время одного полного оборота; $\nu = 1/T$ – частота вращения, т.е. число оборотов за 1 с, и при равномерном вращении

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T, \quad N = \nu t = (\omega/2\pi)t.$$

4) $\vec{\beta} = \text{const}$ – *равнопеременное вращение* по окружности.

Угловая скорость за время t : $\omega = \omega_0 + \beta t$.

Угол поворота за время t : $\varphi = \omega_0t + \beta t^2/2$,

где ω_0 – начальная угловая скорость.

Импульс частицы $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$.

Первый закон Ньютона: *если на тело не действуют другие тела, или действие этих тел скомпенсировано, то оно находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения:*

$$\mathbf{a} = 0, \text{ при } \mathbf{F}_{\text{рез}} = 0.$$

Здесь $\mathbf{F}_{\text{рез}} = \Sigma \mathbf{F}_i$ – результирующая (равнодействующая) сила, векторная сумма всех сил, действующих на тело.

Второй закон Ньютона: ускорение, с которым движется тело, прямо пропорционально равнодействующей всех сил, действующих на тело, и обратно пропорционально массе тела:

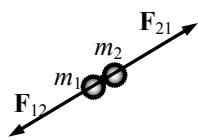
$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i / m = \frac{\mathbf{F}_{\text{рез}}}{m} \text{ или } \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Силу можно выразить через составляющие ускорения

$$\mathbf{F} = m (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}).$$

Сила трения скольжения $F_{\text{тр}} = \mu N$,

где μ – коэффициент трения скольжения, N – сила реакции опоры.



Третий закон Ньютона: силы взаимодействия двух материальных точек, равны по величине, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти материальные точки

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}.$$

Здесь \mathbf{F}_{12} – сила, действующая на первое тело со стороны второго, \mathbf{F}_{21} – сила, действующая на второе тело со стороны первого (рис. 1.4).

Закон сохранения импульса:

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \equiv \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i = \text{const},$$

векторная сумма импульсов всех тел изолированной системы с течением времени не меняется (импульс системы сохраняется).

При вращательном движении инертность тела определяется моментом инерции. Момент инерции системы N материальных точек

$$J = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2,$$

где r_i – расстояние i -ой материальной точки массой m_i до оси вращения O .

Момент инерции цилиндра относительно своей оси

$$J = m R^2 / 2.$$

Роль силы при вращательном движении твердого тела играет *вращающий момент* или момент силы относительно оси вращения. Произвольную силу F можно разложить на три взаимно перпендикулярные составляющие (рис. 1.5): $F = F_o + F_r + F_\tau$. Здесь F_o – осевая составляющая силы, проекция силы на направление оси вращения O_1-O_2 : $F_o = F \cos \theta$; F_r – радиальная составляющая силы, проекция силы на направление радиус-вектора точки приложения силы A ; F_τ – *тангенциальная составляющая силы*, которая направлена по касательной к

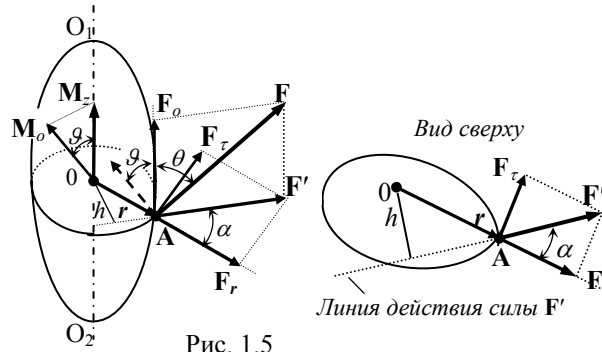


Рис. 1.5

траектории движения точки приложения силы A . Пусть F' – составляющая силы F на плоскость, перпендикулярную оси вращения (можно представить: $F = F_o + F'$): $F' = F \sin \theta$. Тогда радиальная составляющая определяется как $F_r = F' \cos \alpha = F \sin \theta \cos \alpha$, а тангенциальная составляющая – $F_\tau = F' \sin \alpha = F \sin \theta \sin \alpha$. Вращение тела относительно оси $O_1 - O_2$ происходит только за счет тангенциальной составляющей силы.

Вращающим моментом, или моментом силы, относительно оси вращения $O_1 - O_2$ называется величина, равная произведению численного значения радиус-вектора точки приложения силы r и тангенциальной составляющей силы F_τ :

$$M_z = r F_\tau.$$

Учитывая выражение для F_τ :

$$M_z = r \sin \alpha F' = h F',$$

где $h = r \sin \alpha$ – *плечо силы F'* , это кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы F' . Таким образом, получается другое выражение для вращающего момента:

$$M_z = h F'.$$

Вращающий момент считают векторной величиной, направленной по оси вращения так, что если посмотреть из конца вектора M_z , то вращение будет происходить против часовой стрелки (рис. 1.5). Тогда вращающий момент можно представить как векторное произведение радиус-вектора r и силы F' : $M_z = [r, F']$. Вращающий момент M_z является составляющей (проекцией) момента силы M_o вдоль оси вращения, т.е. вдоль оси z : $M_z = M_o \cos \vartheta$.

Закон динамики вращательного движения (II закон Ньютона)

$$M = J \ddot{\varphi} = \frac{dL}{dt},$$

где $L = J \omega$ – момент импульса тела.

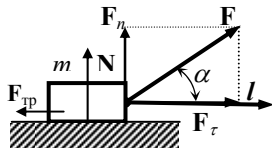


Рис. 1.6

Работа постоянной силы

$$A = F_\tau l = F \cos \alpha l, \text{ Дж}$$

где F_τ – проекция силы F на направление перемещения l , α угол между направлениями силы и перемещения (рис. 1.6).

Работа переменной силы, совершаемая при перемещении тела из точки 1 в точку 2, равна сумме *элементарных работ* $\delta A_i = F_i \cos \alpha_i \Delta l_i$ на отдельных бесконечно малых участках пути (рис. 1.7). Эта сумма приводит к интегралу:

$$A_{1-2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F_i \cos \alpha_i \Delta l_i = \int_1^2 F \cos \alpha dl.$$

Работа постоянного вращающего момента

$$A = M \varphi.$$

Для характеристики скорости совершения работы силой вводится понятие мощности. *Мощностью силы F* называется физическая величина, численно равная работе, совершаемой этой силой за единицу времени:

$$N = \frac{\delta A}{dt}. \quad [N] = \frac{[A]}{[t]} = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт (ватт)}.$$

При движении с постоянной скоростью v : $N = F v \cos \alpha$.

Механическая энергия складывается из кинетической и потенциальной энергии:

$$W = W_k + W_p.$$

Кинетическая энергия – это энергия движущегося тела, которая равняется работе, совершаемой телом при его торможении до полной

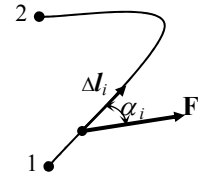


Рис. 1.7

остановки. Кинетическая энергия материальной точки или поступательно движущегося тела определяется по формуле

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}.$$

Кинетическая энергия вращающегося тела относительно неподвижной оси

$$W_k = J\omega^2/2.$$

Кинетическая энергия тела, которое катится без скольжения

$$W_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}.$$

Потенциальная энергия тела обусловлена взаимодействием этого тела с другими телами системы (нахождением тела в поле консервативных сил) и численно равняется работе, которую совершают силы поля, перемещая тело из данного состояния в состояние, в котором потенциальная энергия тела считается равной нулю.

Если потенциальная энергия тела в состоянии 2 равна нулю, тогда потенциальная энергия в произвольном состоянии 1:

$$W_{\text{П}} = A_{1-2} = \int_1^2 \mathbf{F}dl.$$

Потенциальная энергия тела массой m под действием силы тяжести на высоте h от начала отсчета (рис. 1.8):

$$W_{\text{П}} = mgh.$$

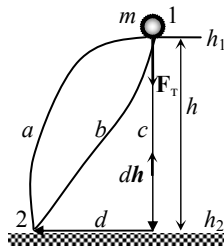


Рис. 1.8

Если потенциальную энергию недеформированного тела считать равной нулю, то *потенциальная энергия упругодеформированного тела*:

$$W_{\text{п}}(x) = \frac{kx^2}{2},$$

где k – коэффициент упругости; x – деформация тела.

Сумма кинетической и потенциальной энергий остается постоянной, если на тело не действуют другие силы. Этот *закон сохранения механической энергии* применим для всех замкнутых консервативных систем: *полная механическая энергия тел консервативной системы не изменяется с течением времени*.

$$\sum_{i=1}^N (W_K + W_{\Pi})_i = \text{const.}$$

Удар – это кратковременное контактное взаимодействие тел.

Абсолютно упругим называется удар, в результате которого сохраняется суммарная кинетическая энергия тел.

Пусть $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ скорости шаров с массами m_1 и m_2 до удара; $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ – скорости после удара (рис. 1.9). Из определения сумма кинетических энергий шаров после удара равняется сумме кинетических энергий до удара:

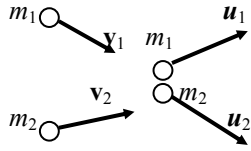


Рис. 1.9

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}.$$

Для системы из двух шаров выполняется и закон сохранения импульса:

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{u}_1 + m_2 \mathbf{u}_2.$$

Удар называется *центральный*, при котором скорости соударяющихся тел направлены вдоль линии, соединяющей их центры инерции. Тогда и после удара центры инерции будут двигаться вдоль этой же прямой. Из системы уравнений законов сохранения кинетической энергии и импульса можно получить формулы для скоростей шаров после центрального удара:

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}; \quad u_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}.$$

Абсолютно неупругим называется удар, в результате которого скорости соударяющихся тел становятся одинаковыми и они движутся как одно целое со скоростью \mathbf{u} (рис. 1.10). При таком ударе закон сохранения кинетической энергии не выполняется. Часть кинетической энергии затрачивается на работу деформации шаров и обычно выделяется в виде теплоты. Закон сохранения импульса выполняется:

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{u}.$$

Отсюда скорость шаров после удара:

$$\mathbf{u} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Подчеркнем, что это векторное выражение.

Теплота, которая выделяется при ударе неупругих тел (шаров), равняется разности кинетических энергий шаров до и после уда-

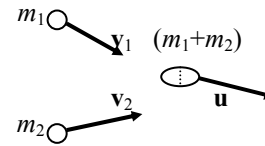


Рис. 1.10

ра:

$$Q = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2}.$$

Изучая движение небесных тел и падение тел в земных условиях, Ньютон установил, что две материальные точки притягиваются друг к другу с силой \mathbf{F} , пропорциональной произведению их масс m_1 , m_2 и обратно пропорциональной квадрату расстояния r между ними (рис. 1.11):

$$F = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

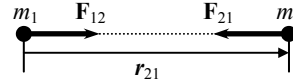


Рис. 1.11

где \mathbf{F}_{21} – сила, действующая на m_2 со стороны m_1 ($F = |\mathbf{F}_{21}|$); \mathbf{r}_{21} – радиус-вектор m_2 относительно m_1 ; $r = |\mathbf{r}_{21}|$; $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Нм}^2/\text{кг}^2$ – гравитационная постоянная.

Второй закон Ньютона в неинерциальных системах отсчета

$$m \mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{ин}},$$

где \mathbf{F} – равнодействующая реальных сил, \mathbf{a}' – ускорение тела относительно неинерциальной системы, $\mathbf{F}_{\text{ин}}$ – равнодействующая сил инерции. Силы инерции вызваны ускоренным движением системы отсчета и направлены противоположно ускорению системы \mathbf{a}_o : $\mathbf{F}_{\text{ин}} = -m \mathbf{a}_o$.

1.2. Примеры решения и оформления задач

Пример 1. Известно, что радиус-вектор материальной точки массой $m = 10 \text{ г}$ меняется с течением времени согласно уравнению $\mathbf{r} = (a + bt + ct^2)\mathbf{i} + (d + ft + gt^2)\mathbf{j}$. В начальный момент времени координаты материальной точки $x_o = -20 \text{ м}$, $y_o = 10 \text{ м}$; скорость $\mathbf{v}_o = 60\mathbf{i} + 50\mathbf{j} \text{ м/с}$; ускорение $\mathbf{a} = -4\mathbf{i} - 10\mathbf{j} \text{ м/с}^2$. Для первых $t_2 = 10 \text{ с}$ движения построить траекторию движения материальной точки. Для момента времени $t_1 = 7 \text{ с}$ определить: скорость, ускорение, радиус кривизны траектории и силу, действующую на частицу.

Дано

$$\begin{aligned} m &= 10 \text{ г} = 0,01 \text{ кг} \\ \mathbf{r}_x &= (a + bt + ct^2)\mathbf{i} \text{ м} \\ \mathbf{r}_y &= (d + ft + gt^2)\mathbf{j} \text{ м} \\ x_o &= -20 \text{ м}, y_o = 10 \text{ м} \\ \mathbf{v}_o &= 60\mathbf{i} + 50\mathbf{j} \text{ м/с} \\ \mathbf{a} &= -4\mathbf{i} - 10\mathbf{j} \text{ м/с}^2 \\ t_1 &= 7 \text{ с} \\ t_2 &= 10 \text{ с} \\ \hline y &= f(x); \mathbf{v}(t_1); \mathbf{a}(t_1); \\ \rho(t_1); \mathbf{F}(t_1) \end{aligned}$$

Анализ:

Исходя из уравнения движения можно заключить, что движение материальной точки происходит в плоскости (Oxy). Для построения траектории движения необходимо определить численные значения коэффициентов, входящих в уравнение движения. Для

этого необходимо использовать начальные условия. Из уравнения движения для начального момента времени $t = 0$ с вытекает, что $a = x_0, d = y_0$.

Составляющие скорости определяются дифференцированием уравнения движения:

$$\mathbf{v}_x = \frac{dr_x}{dt} = (b + 2ct)\mathbf{i}; \quad \mathbf{v}_y = \frac{dr_y}{dt} = (f + 2gt)\mathbf{j}.$$

Подставив в полученные выражения $t = 0$ с получаем, что $b = v_{0x} = 60$ м/с; $f = v_{0y} = 50$ м/с.

Ускорение есть первая производная от вектора скорости

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2c\mathbf{i} + 2g\mathbf{j}.$$

Отсюда определяются значения оставшихся двух коэффициентов: $c = -2$ м/с²; $g = -5$ м/с².

Сила, действующая на частицу, определяется из второго закона Ньютона: $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = -4m\mathbf{i} - 10m\mathbf{j}$ кг· м/с².

После определения численного значения скорости по полученным выражениям для момента времени t_1 через значения составляющих $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ и определив из построения нормальную составляющую ускорения $a_n = a \sin\beta$, можно вычислить радиус кривизны траектории в заданный момент времени, исходя из выражения:

$$\rho = v^2/a_n.$$

Определение угла β между векторами скорости \mathbf{v} и ускорения \mathbf{a} обсудим в разделе «Решение» в ходе построения траектории движения и соответствующих векторов.

В данной задаче размерности полученных выражений не вызывают сомнения, и поэтому их анализировать не будем.

Решение:

Определяем численные значения коэффициентов в уравнении движения:

$$a = x_0 = -20 \text{ м}; \quad d = y_0 = 10 \text{ м}; \quad b = v_{0x} = 60 \text{ м/с}; \quad f = v_{0y} = 50 \text{ м/с}; \quad c = -2 \text{ м/с}^2; \quad g = -5 \text{ м/с}^2.$$

Таким образом, координаты частицы с течением времени меняются по законам: $x = -20 + 60t - 2t^2$; $y = 10 + 50t - 5t^2$. По этим выражениям через каждую секунду вычислим значения координат и занесем в таблицу.

Таблица

Координаты частицы

$t, \text{ с}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x, \text{ м}$	-20	38	92	142	188	230	268	302	332	358	380
$y, \text{ м}$	10	55	90	115	130	135	130	115	90	55	10

Выбрав масштаб так, чтобы все точки уложились в пределах страницы, строим траекторию частицы.

Для момента времени $t_1 = 7 \text{ с}$ определяем значения составляющих скорости и ускорения:

$$v_x = b + 2ct = 60 - 2 \cdot 2 \cdot 7 = 32 \text{ м/с}; \quad v_y = f + 2gt = 50 - 5 \cdot 2 \cdot 7 = -20 \text{ м/с};$$

$$a_x = 2c = 2 \cdot (-2) = -4 \text{ м/с}^2; \quad a_y = 2g = 2 \cdot (-5) = -10 \text{ м/с}^2.$$

Выбрав масштабы для построения векторов скорости и ускорения ($1 \text{ см} = 10 \text{ м/с}$ и $1 \text{ см} = 2 \text{ м/с}^2$) от соответствующей точки на графике движения откладываем отрезки, изображающие v_x, v_y и a_x, a_y (рис. 1.12). По составляющим чертим и сами векторы \mathbf{v} и \mathbf{a} . Если вычисления и построения верные, то вектор скорости получится направленным по касательной к траектории движения.

Определяем численные значения скорости и ускорения в момент времени $t_1 = 7 \text{ с}$:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{60^2 + 50^2} = 78,1 \text{ м/с}.$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{4^2 + 10^2} = 10,77 \text{ м/с}^2.$$

Определим углы наклонов векторов \mathbf{v} и \mathbf{a} относительно оси Ox :

$$\alpha_1 = \arctg \frac{v_y}{v_x} = \arctg \frac{20}{32} = 32^\circ, \quad \alpha_2 = \arctg \frac{a_y}{a_x} = \arctg \frac{10}{4} = 68,2^\circ.$$

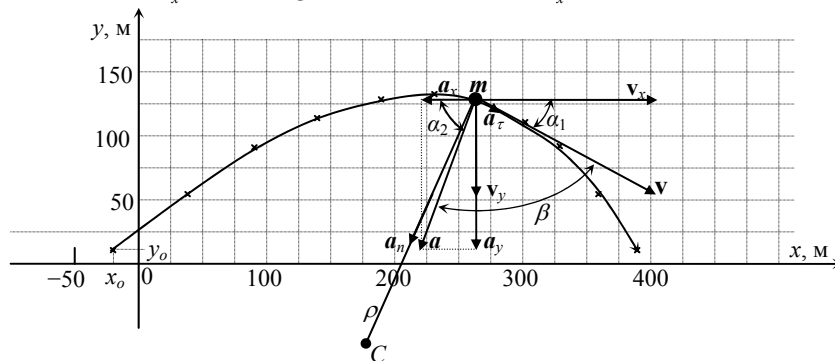


Рис. 1.12. Траектория частицы, векторы скорости и ускорения

Зная углы α_1 и α_2 (их определили без учета знаков) из рис. 1.12 определяем угол β между векторами \mathbf{v} и \mathbf{a} :

$$\beta = 180 - (\alpha_1 + \alpha_2) = 180 - (32 + 68,2) = 79,8^\circ.$$

Вычисляем нормальную составляющую ускорения:

$$a_n = a \sin\beta = 10,77 \cdot \sin 79,8^\circ = 10,6 \text{ м/с}^2.$$

Радиус кривизны траектории

$\rho = v^2/a_n = 78,1^2/10,6 = 575,4 \text{ м}$ (на рис. 1.12 показан в уменьшенном масштабе). Откладывая отрезок, пропорциональный ρ вдоль a_n находим положение центра кривизны траектории С.

Сила, действующая на частицу:

$$\mathbf{F} = -4m\mathbf{i} - 10m\mathbf{j} = -0,04 \mathbf{i} - 0,1 \mathbf{j} \text{ Н};$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{0,04^2 + 0,1^2} = 0,108 \text{ Н}.$$

Ответ:

В момент времени $t_1 = 7 \text{ с}$:

скорость частицы $-\mathbf{v} = 60\mathbf{i} + 50\mathbf{j} \text{ м/с}$, $v = 78,1 \text{ м/с}$;

ускорение $-\mathbf{a} = -4\mathbf{i} - 10\mathbf{j} \text{ Н}$, $a = 10,77 \text{ м/с}^2$;

сила, действующая на частицу $\mathbf{F} = -0,04 \mathbf{i} - 0,1 \mathbf{j}$, $F = 0,108 \text{ Н}$;

радиус кривизны траектории $\rho = 575,4 \text{ м}$.

Пример 2: Тело массой $m = 100 \text{ кг}$ в течение $t_1 = 6 \text{ с}$ движется по наклонной поверхности под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту под действием некоторой силы тяги. При этом координата x' тела вдоль этой поверхности меняется по закону $x' = 10 + 20t - t^2$. Затем тело в течение $t_2 = 4 \text{ с}$ падает с обрыва. Определить длину пути, среднюю скорость на прямолинейном участке пути и максимальную скорость на этом участке, а также силу, действующую на тело. Коэффициент трения тела по поверхности $\mu = 0,1$. Найти полное перемещение тела, среднюю скорость по перемещению за все время движения.

Дано:

$$m = 100 \text{ кг};$$

$$t_1 = 6 \text{ с};$$

$$x' = 10 + 20t - t^2;$$

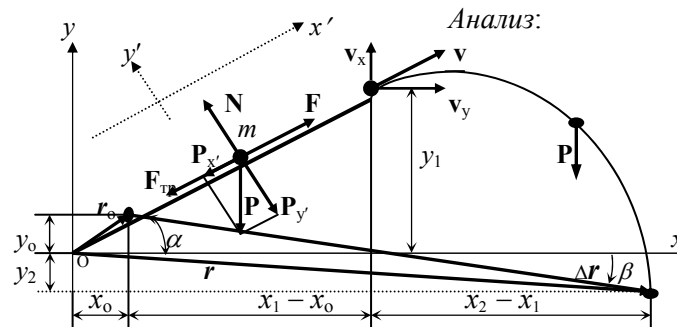
$$t_2 = 4 \text{ с};$$

$$\mu = 0,1.$$

$$S; \Delta r; v_{\text{ср}}; v_{\text{max}};$$

$$F; v_{\text{ср}};$$

Рис. 1.13



Движение тела по наклонной поверхности рассмотрим в системе координат $Ox'y'$ (рис. 1. 13). Начало координат этой системы совпадает с началом системы координат Oxy . Движение тела рассмотрим как движение материальной точки.

Полный путь по наклонной плоскости:

$$S = x'_1 - x'_0 = x'(t_1) - x'(0) = 10 + 20 \cdot t_1 - t_1^2 - x'(0).$$

Средняя скорость по пути:

$$v_{\text{cp}} = \frac{S}{\Delta t} = \frac{S}{t_1}.$$

Мгновенная скорость по пути на прямолинейном участке движения определяется как производная от пути по времени:

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{dx'}{dt} = 20 - 2t.$$

Как видно из этой формулы максимальная скорость будет в начале движения, когда $t = 0$: $v_{\text{max}} = 20$ м/с.

Чтобы определить результирующую всех сил, действующих на тело, напишем проекцию второго закона Ньютона в направлении оси Ox' : $F_p = ma'$. Ускорение в направлении оси Ox' найдем как производную от мгновенной скорости:

$$a' = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -2 \text{ м/с}^2.$$

Как видно, движение тела по наклонной плоскости является равнозамедленным.

Вдоль линии движения на тело действует составляющая силы тяжести $-P_x = mg \sin \alpha$, а также сила трения $F_{\text{тр}} = \mu N$. Для определения силы реакции опоры N спроектируем все силы, действующие на тело, на направление оси Oy' . Так как в этом направлении движения нет, сумма проекций всех сил должна равняться нулю: $N - P_{y'} = 0$. Отсюда $N = P_{y'} = mg \cos \alpha$. Таким образом, сила трения:

$$F_{\text{тр}} = \mu mg \cos \alpha.$$

Результирующая сила в направлении оси Ox' :

$$F_p = F - P_x - F_{\text{тр}}.$$

Отсюда искомая сила тяги, действующая на тело:

$$F = F_p + P_x + F_{\text{тр}} = ma' + mg \sin \alpha + \mu mg \cos \alpha = m(a' + g \sin \alpha + \mu g \cos \alpha).$$

Для определения полного перемещения тела в пространстве необходимо определить его конечные координаты. Начальные координаты тела в системе Oxy :

$$x_0 = x'_0 \cos \alpha, \quad y_0 = x'_0 \sin \alpha.$$

Координаты перед отрывом от наклонной поверхности:

$$x_1 = x'_1 \cos \alpha, \quad y_1 = x'_1 \sin \alpha.$$

Скорость тела перед отрывом от наклонной поверхности определяется из формулы для мгновенной скорости: $v_{01} = 20 - 2 t_1$.

В дальнейшем тело движется только под действием силы тяжести. Если не учитывать сопротивление воздуха, то горизонтальная составляющая скорости $v_x = v_{01} \cos \alpha$ не меняется и движение вдоль оси Ox будет равномерным:

$$x_2 = x_1 + v_{01} \cos \alpha t_2.$$

Координата по оси Oy будет определяться по формуле:

$$y_2 = y_1 + v_{01} \sin \alpha t_2 - g t_2^2 / 2.$$

Перемещение тела определяется как приращение его радиус-вектора:

$$\Delta r = r - r_0.$$

Модуль перемещения можно определить по теореме Пифагора через изменения координат тела:

$$\Delta r = \sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2}.$$

Тангенс угла наклона Δr к оси Ox можно определить по формуле

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}.$$

Модуль средней скорости тела по перемещению определяется по формуле:

$$|v_{\text{cp}}| = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\Delta r}{t_1 + t_2}.$$

Направление вектора v_{cp} совпадает с направлением перемещения Δr .

Анализ размерностей:

Единица измерения изменения координаты тела вдоль наклонной поверхности $[x'] = \text{м}$. Поэтому коэффициенты в законе изменения x' со временем должны быть размерными.

$$[S] = [x] = \text{м}; \quad [v_{\text{cp}}] = [v] = [S] / [t] = \text{м/с}; \quad [a] = [v] / [t] = \text{м/с}^2;$$

$$[F] = [m] [a] = \text{кг} \cdot \text{м/с}^2 = \text{Н}; \quad [\Delta r] = [\sqrt{x^2}] = \text{м}.$$

Решение:

$$S = 10 + 20 \cdot t_1 - t_1^2 - x'(0) = 10 + 20 \cdot 6 - 6^2 - 10 = 84 \text{ м.}$$

$$v_{\text{cp}} = \frac{S}{t_1} = \frac{84}{6} = 14 \text{ м/с.} \quad v_{\text{max}} = 20 \text{ м/с.}$$

$$v_{01} = 20 - 2 t_1 = 20 - 2 \cdot 6 = 8 \text{ м/с.}$$

$$F = m(a' + g \sin \alpha + \mu g \cos \alpha) = 60(-2 + 9,8/2 + 0,1 \cdot 9,8 \sqrt{3}/2) = 225 \text{ Н.}$$

$$x_0 = x'_0 \cos \alpha = 10 \sqrt{3}/2 = 8,66 \text{ м; } y_0 = x'_0 \sin \alpha = 10/2 = 5 \text{ м.}$$

$$x_1 = x'_1 \cos \alpha = 94 \sqrt{3}/2 = 81,4 \text{ м; } y_1 = x'_1 \sin \alpha = 94/2 = 47 \text{ м.}$$

$$x_2 = x_1 + v_{01} \cos \alpha t_2 = 81,4 + 8(\sqrt{3}/2)4 = 109 \text{ м.}$$

$$y_2 = y_1 + v_{01} \sin \alpha t_2 - g t_2^2/2 = 47 + (8/2)4 - 9,8 \cdot 4^2/2 = -15 \text{ м.}$$

$$\Delta r = \sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2} = \sqrt{(109 - 8,66)^2 + (-15 - 5)^2} = 102 \text{ м.}$$

$$|v_{\text{cp}}| = \frac{\Delta r}{t_1 + t_2} = \frac{102}{6 + 4} = 10,2 \text{ м/с.}$$

$$\beta = \arctg \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} = \arctg \frac{-15 - 5}{109 - 8,66} = -11^\circ 16'$$

Ответ:

Длина пути тела по наклонной поверхности: $S = 84 \text{ м.}$

Средняя скорость на прямолинейном участке пути: $v_{\text{cp}} = 14 \text{ м/с.}$

Максимальная скорость в начале движения: $v_{\text{max}} = 20 \text{ м/с.}$

Сила тяги, действующая на тело при движении по наклонной плоскости: $F = 225 \text{ Н.}$ Так как ускорение на этом участке $a' = -2 \text{ м/с}^2$ отрицательное, значит, движение тела равнозамедленное.

Полное перемещение тела: $\Delta r = 102 \text{ м.}$

Средняя скорость по перемещению: $|v_{\text{cp}}| = 10,2 \text{ м/с.}$

Перемещение тела Δr и средняя скорость по перемещению v_{cp} направлены под углом $\beta = -11^\circ 16'$ к горизонту.

Пример 3: В системе, показанной на рисунке, массы тел равны m_1, m_2, m_3 . Брусок A перемещается в горизонтальном направлении с ускорением a_0 . Коэффициент трения между бруском и обоими телами равен μ . Трения в блоке нет, и масса нити пренебрежимо мала. Найти ускорения тел m_1 и m_3 , силы натяжения нитей.

Дано:

$$m_1 = 2 \text{ кг}$$

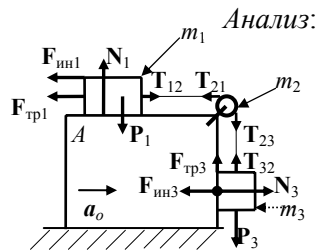
$$m_2 = 2 \text{ кг}$$

$$m_3 = 3 \text{ кг}$$

$$a_0 = 1 \text{ м/с}^2$$

$$\mu = 0,01$$

$$a_1, a_3, T_1, T_2$$



Так как брусок движется с ускорением, то

Рис. 1.14

движение тел m_1 и m_3 относительно бруска будет движением в неинерциальной системе отсчета. Поэтому, кроме реальных сил, на тела будут действовать силы инерции, направленные противоположно направлению ускорения бруска (рис. 1.14). Так как трением на оси блока пренебрегаем, то силу инерции, действующую на него, можно не учитывать. Силы инерции, действующие на тела m_1 и m_3 , соответственно будут равны: $F_{ин1} = -m_1 a_0$ и $F_{ин3} = -m_3 a_0$. За счет ускоренного движения бруска тело m_3 будет прижиматься к бруску, что вызывает возникновения *силы трения* $F_{тр3} = \mu N_3$, где μ – коэффициент трения скольжения; N_3 – сила реакции опоры со стороны бруска A на тело m_3 . Все силы, действующие на тела, показаны на рисунке. Если написать проекции сил, действующих на тело m_3 , на ось Ox , то получим $N_3 - F_{ин3} = 0$. Откуда $F_{тр3} = \mu m_3 a_0$. Если предположить, что нить нерастяжима, то численные значения ускорений тел m_1 и m_3 относительно бруска будут одинаковы. Это ускорение обозначим через a . Направления относительных ускорений a_1 и a_3 не совпадают. Напишем второй закон Ньютона для тел m_1 и m_2 в векторной форме:

$$m_1 a_1 = \mathbf{T}_{12} + \mathbf{F}_{ин1} + \mathbf{N}_1 + \mathbf{P}_1 + \mathbf{F}_{тр1}; \quad (1)$$

$$m_3 a_3 = \mathbf{T}_{32} + \mathbf{P}_3 + \mathbf{N}_3 + \mathbf{F}_{ин3} + \mathbf{F}_{тр3}, \quad (2)$$

где $\mathbf{P}_1 = m_1 \mathbf{g}$, $\mathbf{P}_3 = m_3 \mathbf{g}$ – соответственно силы тяжести тел m_1 и m_2 (здесь \mathbf{g} – ускорение свободного падения).

Силы натяжения нити $\mathbf{T}_{12} = -\mathbf{T}_{21}$ и $\mathbf{T}_{32} = -\mathbf{T}_{23}$. Поэтому обозначим

$$T_{12} = T_{21} = T_1, \quad T_{32} = T_{23} = T_2.$$

С учетом, что $F_{мп1} = \mu N_1 = \mu m_1 g$, уравнения (1) и (2) в проекциях на направления ускорений a_1, a_3 запишутся в виде

$$m_1 a = T_1 - m_1 a_0 - \mu m_1 g; \quad (3)$$

$$m_3 a = m_3 g - T_2 - \mu m_3 a_0. \quad (4)$$

Блок m_2 совершает вращательное движение. Поэтому второй закон Ньютона для вращающегося блока имеет вид

$$J \beta = M, \quad (5)$$

где $J = m_2 R^2 / 2$ – момент инерции блока (здесь R – радиус блока).

Если нить не проскальзывает по блоку, то угловое ускорение блока β связано с относительным ускорением грузов – $\beta = a/R$.

Вращательный момент создается силами T_1 и T_2 :

$$M = (T_2 - T_1) R.$$

Уравнение (5) приобретает вид

$$m_2 R^2 a / 2R = (T_2 - T_1) R.$$

После сокращений получаем

$$m_2 a / 2 = T_2 - T_1. \quad (6)$$

Складывая уравнения (3), (4) и (6), получаем выражение

$$(m_1 + m_3 + m_2/2)a = g(m_3 - \mu m_1) - a_0(m_1 + \mu m_3).$$

Откуда относительное ускорение грузов

$$a = \frac{g(m_3 - m_1) - a_0(m_1 + \mu m_3)}{m_1 + m_3 + m_2/2}.$$

Силу натяжения нити между телом m_1 и блоком m_2 можно определить из уравнения (3):

$$T_1 = m_1(a + \mu g + a_0).$$

Силу натяжения нити между блоком и телом m_3 определяем из уравнения (6):

$$T_2 = T_1 + m_2 a/2.$$

Абсолютные ускорения тел определяются как векторная сумма ускорения бруска и относительных ускорений этих тел относительно бруска:

$$a_{10} = a_1 + a_0; \quad a_{30} = a_3 + a_0.$$

Направления a_1 и a_0 совпадают, поэтому их численные значения просто складываются. Направления a_3 и a_0 взаимно перпендикулярны (рис. 1.15). Поэтому значение абсолютного ускорения тела m_3 :

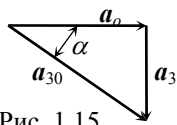


Рис. 1.15

$$a_{30} = \sqrt{a_3^2 + a_0^2}.$$

Абсолютное ускорение тела m_3 направлено под углом α к горизонту. Причем

$$\operatorname{tg} \alpha = a_3/a_0.$$

Анализ размерностей:

$$[a] = [g] [m]/[m] = \text{м/с}^2.$$

$$[T] = [m] [a] = \text{кг}\cdot\text{м/с}^2 = \text{Н}.$$

Решение:

$$a = \frac{g(m_3 - m_1) - a_0(m_1 + \mu m_3)}{m_1 + m_3 + m_2/2} = \frac{9,81(3-0,01\cdot 2) - 1\cdot(2+0,01\cdot 3)}{2+3+2/2} = 4,534 \text{ м/с}^2.$$

$$a_{10} = a_1 + a_0 = 4,534 + 1 = 5,534 \text{ м/с}^2.$$

$$a_{30} = \sqrt{a_3^2 + a_0^2} = \sqrt{4,534^2 + 1^2} = 4,643 \text{ м/с}^2.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = a_3/a_0 = 4,534 / 1 = 4,534.$$

Откуда, угол наклона вектора полного ускорения тела m_3

$$\alpha = \arctg(4,534) = 77^{\circ}32'.$$

$$T_1 = m_1(a + \mu g + a_0) = 2(4,534 + 0,01 \cdot 9,81 + 1) = 11,264 \text{ Н.}$$

$$T_2 = T_1 + m_2 a / 2 = 11,264 + 2 \cdot 4,534 / 2 = 15,798 \text{ Н.}$$

Ответ:

Абсолютное ускорение тела m_1 направлено вдоль горизонта и имеет значение $a_{10} = 5,534 \text{ м/с}^2$. Абсолютное ускорение тела m_3 направлено под углом к горизонту вниз ($\alpha = 77^{\circ} 32'$) и численное значение которого $a_{30} = 4,634 \text{ м/с}^2$.

Сила натяжения нити между телом m_1 и блоком: $T_1 = 11,264 \text{ Н.}$

Сила натяжения нити между блоком и телом m_3 : $T_2 = 15,798 \text{ Н.}$

Пример 4. Маляр работает в подвесной лебедке и начинает подниматься вверх, подтягивая трос с силой, равной $5/6$ части своего веса. Масса лебедки $m_1 = 50 \text{ кг}$, а масса маляра $m_2 = 80 \text{ кг}$. С каким ускорением движется лебедка? С какой силой маляр действует на лебедку? Какая максимальная масса лебедки, чтобы таким способом можно было ее двигать вверх? Определить силу натяжения подвески блока.

Анализ:

Дано

$$\begin{array}{l} m_1 = 50 \text{ кг} \\ m_2 = 80 \text{ кг} \\ T_{23} = 5/6 \cdot m_2 g \\ a, N_{12}, m_{1\max}, T \end{array}$$

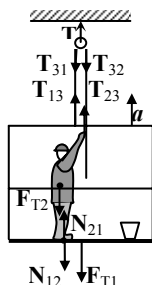


Рис. 1. 16 N_{12} F_{T1}

Сначала напишем уравнение второго закона Ньютона для системы, состоящей из лебедки и маляра:

$$T_{13} + T_{23} + F_{T1} + F_{T2} = (m_1 + m_2)a,$$

где T_{13} и T_{23} – силы натяжения троса с двух сторон троса (при пренебрежении массой блока и трением на его оси эти силы равны); F_{T1} , F_{T2} – силы тяжести лебедки и маляра соответственно (рис. 1.16).

Силы взаимодействия между лебедкой и маляром N_{12} и N_{21} являются внутренними силами системы и в уравнение не входят. Под весом маляра мы будем понимать его силу тяжести. Исходя из условия задачи $T_{23} = 5/6 \cdot m_2 g$. Учитывая сказанное выше, проекция уравнения второго закона Ньютона на вертикальную ось примет вид:

$$2 \cdot 5/6 \cdot m_2 g - (m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a.$$

Отсюда

$$(\frac{2}{3} m_2 - m_1)g = (m_1 + m_2)a.$$

Из этого уравнения можно заметить, что система может подниматься вверх когда выражение в скобках положительное. Учитывая, что максимальная сила, с которой маляр может тянуть трос, равняется его силе тяжести ($T_{23\max} = m_2g$), заключаем, что максимальная масса лебедки может быть $m_{1\max} \leq m_2$.

Получаем формулу для ускорения системы:

$$a = (\frac{2}{3} m_2 - m_1)g / (m_1 + m_2).$$

Сила натяжения подвески блока:

$$T = T_{31} + T_{32} = 2 T_{23} = 2 \cdot 5/6 \cdot m_2g.$$

Для определения силы, действующей со стороны маляра на лебедку, напишем проекцию уравнения второго закона Ньютона на вертикальную ось для маляра:

$$T_{23} - F_{T2} + N_{21} = m_2a \quad \text{или} \quad 5/6 \cdot m_2g - m_2g + N_{21} = m_2a.$$

Отсюда

$$N_{21} = (g/6 + a)m_2.$$

По третьему закону Ньютона $N_{21} = -N_{12}$, поэтому

$$N_{12} = (g/6 + a)m_2.$$

Анализ размерностей:

$$[a] = [m] \cdot [g] / [m] = [g] = \text{м/с}^2.$$

$$[T] = [m] \cdot [g] = \text{кг} \cdot \text{м/с}^2 = \text{Н}.$$

$$[N_{12}] = [g] \cdot [m] = \text{м/с}^2 \cdot \text{кг} = \text{Н}.$$

Решение:

Ускорение системы:

$$a = (\frac{2}{3} m_2 - m_1)g / (m_1 + m_2) = (\frac{2}{3} \cdot 80 - 50) \cdot 9,8 / (50 + 80) = 0,25 \text{ м/с}^2.$$

Максимальная масса лебедки, которую вручную сможет поднять маляр: $m_{1\max} \leq m_2$ т.е. $m_{1\max} \leq 80$ кг.

Сила натяжения подвески блока:

$$T = 2 \cdot 5/6 \cdot m_2g = 2 \cdot 5/6 \cdot 80 \cdot 9,8 = 1306,7 \text{ Н}.$$

Сила давления маляра на лебедку:
 $N_{12} = (g/6 + a)m_2 = (9,8/6 + 0,25)80 = 150,7 \text{ Н.}$

Ответ:

Ускорение системы: $a = 0,25 \text{ м/с}^2$.

Сила давления маляра на лебедку: $N_{12} = 150,7 \text{ Н.}$

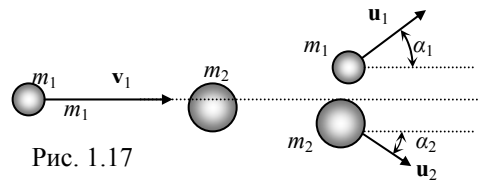
Максимальная масса лебедки, которую вручную сможет поднять маляр: $m_{1\text{max}} \leq 80 \text{ кг.}$

Сила натяжения подвески блока: $T = 1306,7 \text{ Н.}$

Пример 5. Тело массой $m_1 = 1 \text{ кг}$ движется со скоростью $v_1 = 6 \text{ м/с}$ и неупруго сталкивается с покоящимся телом $m_2 = 2 \text{ кг}$. После удара первое тело отклоняется от своего первоначального направления движения на угол $\alpha_1 = 45^\circ$ и движется со скоростью $u_1 = 3 \text{ м/с}$. Определить скорость второго тела u_2 после соударения. Какая доля кинетической энергии ξ теряется при данном ударе?

Дано
 $m_1 = 1 \text{ кг}$
 $m_2 = 2 \text{ кг}$
 $v_1 = 6 \text{ м/с}$
 $u_1 = 3 \text{ м/с}$
 $\alpha_1 = 45^\circ$
 u_2, ξ

Анализ:
 После удара тела движутся в разных направлениях, т.е. удар не является абсолютно неупругим (рис. 1.17).



При таком ударе закон сохранения кинетической энергии не выполняется. Запишем закон сохранения импульса в векторной форме:

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2.$$

Отсюда выражаем u_2 :

$$u_2 = \frac{m_1}{m_2} (v_1 - u_1).$$

Для нахождения вектора $(v_1 - u_1)$ воспользуемся правилом треугольника (рис. 1.18). По теореме косинусов находим

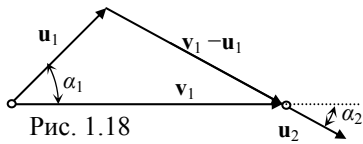


Рис. 1.18

$$u' = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1| = \sqrt{v_1^2 + u_1^2 - 2v_1u_1 \cos \alpha_1}.$$

$$u_2 = \frac{m_1}{m_2} u'.$$

Угол α_2 направления вектора \mathbf{u}_2 также выразим из теоремы косинусов

$$\alpha_2 = \arccos \frac{v_1^2 + (u')^2 - u_1^2}{2v_1u'}.$$

Доля потери кинетической энергии

$$\xi = \frac{W_{K1} - (W'_{K1} + W'_{K2})}{W_{K1}} = 1 - \frac{m_1 u_1^2 + m_2^2}{m_1 v_1^2}.$$

Размерности формул для искомых величин в данной задаче очевидны, поэтому анализ проводить не будем.

Решение:

Определим разность скоростей первого тела

$$u' = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1| = \sqrt{v_1^2 + u_1^2 - 2v_1u_1 \cos \alpha_1} = \sqrt{6^2 + 3^2 - 2 \cdot 6 \cdot 3 \sqrt{2}/2} = 4,42 \text{ м/с}.$$

Скорость второго тела после удара

$$u_2 = \frac{m_1}{m_2} u' = 0,5 \cdot 4,42 = 2,21 \text{ м/с}.$$

Угол наклона вектора скорости второго тела после удара относительно первоначального направления движения первого тела

$$\alpha_2 = \arccos \frac{v_1^2 + (u')^2 - u_1^2}{2v_1u'} = \arccos \frac{6^2 + 4,42^2 - 3^2}{2 \cdot 6 \cdot 4,42} = 28,7^\circ.$$

Доля потери кинетической энергии

$$\xi = 1 - \frac{m_1 u_1^2 + m_2^2 u_2^2}{m_1 v_1^2} = 1 - \frac{1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 2,21^2}{1 \cdot 6^2} = 0,48.$$

Ответ:

Скорость второго тела после удара $u_2 = 2,21 \text{ м/с}$.

Угол наклона вектора скорости второго тела после удара

$$\alpha_2 = 28,7^\circ.$$

Доля потери кинетической энергии при неупругом ударе $\xi = 0,48$.

1.3. Задания для расчетно-графической работы РГР 11

Задачи 111. Нечетные варианты.

Параметрические уравнения движения материальной точки массой m имеют вид $x = a_1 + b_1t + c_1t^2 + d_1t^3$; $y = a_2 + b_2t + c_2t^2 + d_2t^3$; $z = 0$. Построить графики зависимости $x = x(t)$; $y = y(t)$ и траектории точки за первые t_2 (с) движения. Найти векторы скорости, ускорения, силы, действующей на частицу, а также угол между ними, радиус кривизны траектории движения в момент времени t_1 (с).

(Рекомендации: График траектории движения частицы построить на отдельной странице. На этом графике, для момента времени t_1 , в масштабе показать составляющие векторов скорости, ускорения, силы и сами эти векторы.)

№ вар.	m , г	a_1 , м	b_1 , м/с	c_1 , м/с ²	d_1 , м/с ³	a_2 , м	b_2 , м/с	c_2 , м/с ²	d_2 , м/с ³	t_1 , с	t_2 , с
1	1	-8	2	1	-0,1	3	4	-1	0,1	4	7
3	3	3	4	3	-0,3	3	5	-1,5	0,5	5	8
5	5	5	0,6	2	-0,6	5	7	-1,5	0	4	9
7	7	3	2,5	0,7	-0,1	6	20	0	-1	3	7
9	9	-5	5	1	-0,2	9	4	-1,5	0	6	9
11	11	-2	5	1	-0,1	6	4	-1	0,02	4	8
13	13	4	6	-0,3	0	8	15	0	-0,3	5	10
15	15	5	15	1,5	-0,4	5	5	5	-0,4	4	8

17	17	7	1,7	7	-0,7	7	1	-0,7	0,1	4	7
19	19	9	9	0,9	-0,2	1	9	-5	0,5	3	9
21	21	1	4	1	-0,4	3	5	-1	0	5	8
23	23	4	6	0,6	-0,3	8	3	-3	0,1	3	6
25	25	5	5	2	-0,2	5	4	-5	0	4	9
27	27	2	7	2	0	7	2	-7	0	3	7
29	29	4	9	-3	0,9	2	5	-8	0,1	3	9
31	31	3	3	3	-0,3	0	2	-4	0	3	8
33	33	3	5	3	-0,2	6	3	-3	0,3	4	9
35	35	7	2,5	-0,5	0,5	3,5	3	-0,5	-0,3	5	10

Задачи 111. Четные варианты.

Известно, что параметрические уравнения движения материальной точки массой m можно представить в полиномиальной форме: $x = a_1 + b_1t + c_1t^2$; $y = a_2 + b_2t + c_2t^2$. Определить параметры этих уравнений, если при $t = 0$: $x = x_0$; $y = y_0$; $v_x = v_{x0}$; $v_y = v_{y0}$; $F_x = F_{x0}$; $F_y = F_{y0}$. Построить графики изменения координат точки в зависимости от времени, а также график траектории движения за период времени до t_2 . Для момента времени t_1 найти векторы скорости, ускорения, силы, а также радиус кривизны траектории. Под каким углом к горизонту направлена начальная скорость материальной точки?

(Рекомендации: График траектории движения частицы построить на отдельной странице. На этом графике для момента времени t_1 в масштабе показать составляющие векторов скорости, ускорения, силы и сами эти векторы.)

№ вар.	m , г	x_0 , м	v_{x0} , м/с	F_{x0} , мН	y_0 , м	v_{y0} , м/с	F_{y0} , мН	t_1 , с	t_2 , с
2	2	-4	12	-1,2	-2	12	-18	5	8
4	4	8	14	-3,4	4	14	-36	3	8
6	6	6	16	-4,6	6	16	-54	4	8
8	8	8	18	-6,8	8	18	-81	3	7
10	10	10	10	-8	10	10	-90	5	9
12	12	6	12	-9,6	12	12	-108	3	8
14	14	14	14	-11	14	14	-114	4	10

16	16	6	16	-12	16	16	-116	5	8
18	18	8	18	-14	8	18	-162	3	8
20	20	2	20	-16	20	20	-180	4	8
22	22	2	22	-18	22	22	-198	3	9
24	24	4	24	-19	24	24	-124	4	8
26	26	6	26	-21	6	24	-134	3	8
28	28	2	28	-22	28	20	-152	5	8
30	30	3	30	-24	30	25	-270	4	10
32	32	32	32	-26	32	32	-188	6	10
34	34	4	34	-27	34	34	-204	4	10
36	36	6	36	-28	6	16	-206	5	9

Задачи 1.1.2

Задачи 112. Варианты: 1,5,9,13,17,21,25,29.

Частица движется вдоль оси x по закону $x = a t^2 - b t^3$, где a и b – положительные постоянные. В момент времени $t = 0$, сила, действующая на частицу, равна F_0 . Найти значение F_x силы в точках поворота и в момент, когда частица опять окажется в точке $x = 0$. Построить графики скорости $v = v(t)$ и ускорения $a = a(t)$, так, чтобы были видны характерные моменты движения.

№ вар.	1	5	9	13	17	21	25	29
$a, \text{м/с}^2$	10	17	19	30	16	22	20	29
$b, \text{м/с}^3$	1,2	0,5	0,9	2	2,5	3	2,5	2,9
$F_0, \text{Н}$	0,01	0,02	0,03	0,005	0,006	0,02	0,02	0,03

Задачи 112. Варианты: 2,6,10,14,18,22,26,30.

Найти модуль и направление силы, действующей на частицу массы m при ее движении в плоскости (θ x y) по закону $x = A \sin(\omega t)$; $y = B \cos(\omega t)$ в характерных точках траектории. Построить траекторию движения точки.

№ вар.	2	6	10	14	18	22	26	30
$A, \text{м}$	1	1,5	1	1,5	0,6	1	2	3
$B, \text{м}$	0,5	0,5	1,5	1	0,2	0,6	3	1,5
$\omega, \text{с}^{-1}$	$\pi/2$	π	$\pi/8$	$\pi/5$	3π	4π	$\pi/2$	3π

$m, \text{ г}$	2	1,5	10	3	9	7	5	3
----------------	---	-----	----	---	---	---	---	---

Задачи 112. Варианты: 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31.

На покоившуюся частицу массы m в момент времени $t = 0$ начала действовать сила, зависящая от времени по закону $F = b t(\tau - t)$, где b – постоянная, τ – время, в течение которого действует данная сила. Найти:

- импульс частицы после окончания действия силы ;
- путь, пройденный частицей за время действия силы.

Построить графики изменения скорости и ускорения в зависимости от времени.

№вар	3	7	11	15	19	23	27	31
$m, \text{ г}$	3	7	11	15	19	23	27	31
$b, \text{ Н/с}^2$	0,3	0,7	0,11	0,15	0,19	0,23	0,27	0,31
$\tau, \text{ с}$	30	7	11	15	19	23	27	31

Задачи 112. Варианты: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32

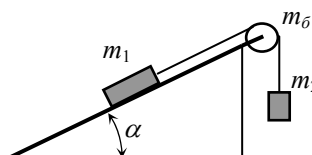
На гладкой горизонтальной плоскости лежит доска массы m_1 и на ней брусок массы m_2 . К бруску приложили горизонтальную силу, увеличивающуюся со временем t по закону $F = \alpha t$, где α – постоянная. Найти зависимость ускорений доски a_1 и бруска a_2 от времени, если коэффициент трения между доской и бруском равен μ . Построить графики этих зависимостей.

№ вар	4	8	12	16	20	24	28	32
$m_1, \text{ кг}$	4	8	12	6	7	5	8	3,2
$m_2, \text{ кг}$	0,4	0,8	1,2	1,6	0,2	0,4	0,8	0,3
$\alpha, \text{ Н/с}$	4	8	12	6	2	4	8	3
μ	0,04	0,08	0,02	0,06	0,02	0,04	0,08	0,03

Задачи 1.1.3

Задачи 113. Варианты: 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31

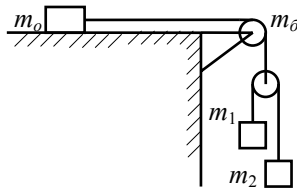
В установке известны угол α и коэффициент трения μ между телом m_1 и наклонной плоскостью, масса блока m_b и его ради-



ус R . Найти ускорение тела m_2 и среднюю мощность за первые t секунды.

№ вар.	1	6	11	16	21	26	31
m_1 , кг	10	6	11	16	12	6	5
m_2 , кг	15	9	8	6	21	13	15
α , °	30	60	45	60	30	60	45
m_0 , кг	10	6	8	6	9	6	7
R , см	5	3	4	6	5	6	7
μ	0,01	0,01	0,015	0,016	0,02	0,01	0,015
t , с	5	6	3	6	5	4	5

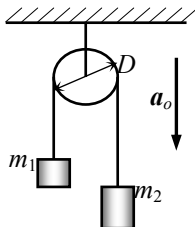
Задачи 113. Варианты: 2, 7, 12, 17, 22, 27, 32



В системе, показанной на рисунке массы тел равны m_0, m_1, m_2 . Коэффициент трения между телом и плоскостью μ . Найти ускорение тела m_i , работу по перемещению тела m_0 и среднюю мощность за первые t с.

№ вар.	2	7	12	17	22	27	32
m_0 , кг	5	7	12	7	2	4	6
m_1 , кг	5	7	6	5	6	7	4
m_2 , кг	6	4	8	7	7	4	6
i	1	2	2	1	2	1	2
μ	0,02	0,01	0,02	0,01	0,02	0,01	0,015
t , с	2	3	2	3	2	3	3

Задачи 113. Варианты: 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33



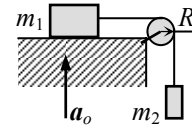
В установке, показанной на рисунке, известны диаметр D однородного сплошного цилиндра из материала Me и его толщина b ; массы тел m_1, m_2 . Найти угловое ускорение цилиндра и отношение сил натяжений T_1/T_2 вертикальных участков нити в процессе движения, если опора подвеса движется с

ускорением a_0 вверх.

№ вар.	3	8	13	18	23	28	33
D , см	13	18	26	18	23	28	30
Me	Сталь	Сu	Латунь	Сталь	Сu	Латунь	Сталь
b , мм	33	28	32	18	23	28	33
m_1 , кг	3	8	3	4	3	8	5
m_2 , кг	7	5	5	7	6	5	10
a_0 , м/с ²	3	2,8	3	4,8	2,3	2,8	3,3

Задачи 113. Варианты: 4, 9, 14, 19, 24, 29, 34

В системе известны массы тел m_1 , m_2 , коэффициент трения μ между телом m_1 и горизонтальной поверхностью, а также радиус R однородного блока из металла Me толщиной b . Скольжения нити по блоку нет. Вся система движется вниз с общим ускорением a_0 . Пренебрегая массой нити и трением в оси блока, найти: 1) ускорение тела m_2 ; 2) работу силы трения, действующей на тело m_1 , за первые t секунды после начала движения.



m_1

a_0

№ вар.	4	9	14	19	24	29	34
R , см	4	5	7	9	4	7	8
Me	Сталь	Сu	Латунь	Сталь	Сu	Латунь	Сталь
b , мм	24	19	14	19	24	29	34
m_1 , кг	4	9	14	9	6	9	8
m_2 , кг	4	9	7	7	8	11	9
μ	0,1	0,09	0,07	0,09	0,08	0,09	0,034
t , с	4	3	4	5	4	5	4
a_0 , м/с ²	4	3	4	1,9	2,4	2,9	3,4

Задачи 113. Варианты: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35

Мальр работает в подвесной лебедке и начинает подниматься вверх, подтягивая трос (см. рис. 1. 16). Масса лебедки m_1 , а масса маляра m_2 . Давление маляра на лебедку при подтягивании троса составляет ξ -ю часть от его силы тяжести. С каким ускорением движется лебедка? С какой силой маляр действует на лебедку? Какая максимальная масса лебедки, чтобы таким способом можно было ее двигать вверх? Определить силу натяжения подвески блока. Как будут отли-

чатся силы натяжения троса с двух сторон блока, если его масса m_6 , а его диаметр D ?

№ вар.	5	10	15	20	25	30	35
m_1 , кг	50	40	45	42	55	53	45
m_2 , кг	75	80	90	82	85	73	78
ξ	0,25	0,2	0,23	0,18	0,22	0,24	0,28
m_6 , кг	15	10	15	14	16	19	8
D , см	15	12	16	17	18	20	25

Задачи 1.1.4

Задачи 114. Варианты: 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28

Охотник производит выстрел, сидя в легкой лодке под углом α к горизонту. Суммарная масса лодки с охотником M . Масса пули m . Из-за отдачи лодка перемещается с места выстрела на расстояние l . Коэффициент трения скольжения лодки μ . Пуля попадает в утку, улетающую в горизонтальном направлении на высоте h , со скоростью v и застревает в ней. Масса утки m_y . Определить, на каком расстоянии от лодки упадет утка, если не учитывать сопротивление воздуха. Под каким углом к горизонту упадет утка?

№вар	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28
M , кг	210	140	170	200	230	160	190	220	150	140
α , °	45	50	55	60	60	60	45	45	55	45
m , г	10	14	17	10	13	16	19	12	25	14
l , см	21	14	7	10	13	16	19	12	25	14
$\mu, 10^{-4}$	1	4	7	10	13	16	19	22	25	14
h , м	10	40	17	10	13	16	19	22	25	14
v , км/ч	10	14	17	10	13	16	9	12	15	14
m_y , кг	3,1	3,4	3,7	3	3,3	3,6	2,9	3,2	3,5	2,8

Задачи 114. Варианты: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 30

На платформе установлена безоткатная пушка, из которой производится выстрел вдоль пути под углом α к горизонту. После выстрела

платформа откатилась на расстояние L . Масса платформы с пушкой M , масса снаряда m . Коэффициент трения качения между колесами платформы и рельсами μ . Через некоторое время t после выстрела снаряд разорвался на два осколка, соотношение масс которых $m_1: m_2$. Большой осколок приобрел при взрыве дополнительную скорость Δv в прежнем направлении. Определить дальность полета каждого осколка без учета сопротивления воздуха. Под каким углом к горизонту упадет большой осколок?

№вар	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29
L , м	3,2	3,5	2,8	3,1	3,4	3,7	4,0	4,2	2,5	2,9
M , 10^3 кг	22	15	28	31	24	17	20	22	25	29
α , °	30	35	38	41	44	47	50	53	46	49
μ , 10^{-3}	2	2,5	1,8	1,1	1,4	1,7	0,2	0,22	0,25	0,29
t , с	12	5	8	11	14	7	10	13	16	9
$m_1: m_2$	1:2	1:5	1:3	1:4	1:4	1:7	1:2	1:3	1:6	1:4
Δv , м/с	70	50	80	110	140	170	220	230	160	190
m , кг	20	25	28	21	24	27	20	23	26	29

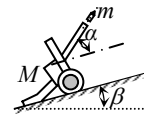
Задачи 114. Варианты: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27

Мальчик массой M , стоя на роликовых коньках, бросает мяч массой m под углом α к горизонту и попадает прямо в открытое окно, которое расположено на высоте h выше его плеча. Мяч влетает в окно горизонтально. 1) На какое расстояние откатится мальчик, если коэффициент трения качения роликов μ ? 2) Чему равняется радиус кривизны траектории мяча, когда он перелетает через подоконник?

№вар	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
m , кг	0,3	0,6	0,9	0,42	0,45	0,48	0,21	0,25	0,27	0,3
M , кг	30	60	39	42	45	48	51	54	47	50
α , °	30	60	55	42	45	48	51	54	47	30
h , м	3	6	9	5,2	5,5	4,8	5,1	5,4	4,7	5,3
μ	0,03	0,01	0,009	0,012	0,05	0,008	0,02	0,024	0,027	0,03

Задачи 114. Варианты: 31, 32, 33, 34, 35, 36

Орудие массой M стоит на склоне горы и производит выстрел под углом α к поверхности земли снарядом массой m . После выстрела орудие откатывается на расстояние L . Угол наклона склона β , коэффициент трения между поверхностью земли и орудием μ . На каком расстоянии и на какой высоте от места выстрела упадет снаряд? На какую максимальную высоту поднимется снаряд, и какой радиус кривизны его траектории в этот момент?



№ вар.	31	32	33	34	35	36
M , т	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
m , кг	7	8	9	10	11	12
α , °	40	45	50	35	40	45
L , м	2,1	2	1,9	1,8	1,7	1,6
β , °	20	15	10	25	20	20
μ	0,1	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16

Задачи 1.1.5

Задачи 115. Варианты: 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31

Частица массой m_1 имеет кинетическую энергию $W_{к1}$. В результате упругого столкновения с покоящейся частицей массой m_2 сообщает ей кинетическую энергию $W_{к2}$. Определить угол α , на который отклонится частица от своего первоначального направления.

№вар	1	6	11	16	21	26	31
$m_1, 10^{-24}$ Г	1	6	11	16	2	6	3
$m_2, 10^{-24}$ Г	4	3	5	6	4	12	13
$W_{к1}, 10^{-12}$ Дж	9	16	11	16	12	16	13
$W_{к2}, 10^{-12}$ Дж	5	10	9	6	4	8	7

Задачи 115. Варианты: 2, 7, 12, 17, 22, 27, 32

На покоящийся шар налетает со скоростью v_1 другой шар, с одинаковой с ним массы. В результате упругого столкновения шар изменил направление движения на угол α . Определить 1) скорости шаров после удара; 2) угол β между вектором скорости второго шара и первоначальным движением первого шара.

№вар.	2	7	12	17	22	27	32
v_1 , м/с	2	7	1,2	1,7	2,2	2,7	3,2
α , °	20	70	12	17	22	27	32

Задачи 115. Варианты: 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33

Два груза из свинца с радиусами r_1 и r_2 подвешены на нитях длиной l так, что грузы соприкасаются между собой. Меньший груз был отклонен на угол φ и выпущен. На какую высоту поднимутся грузы после абсолютно неупругого удара? На сколько градусов повысится их температура?

№вар.	3	8	13	18	23	28	33
r_1 , см	3	8	13	8	2	4	3
r_2 , см	6	4	7	9	5	3	5
l , м	3	2	3	2	3	2	3
φ , °	30	40	50	60	55	45	35

Задачи 115. Варианты: 4, 9, 14, 19, 24, 29, 34

Найти начальную скорость скользящей по льду хоккейной шайбы, если она до удара о бортик прошла путь S , а после удара, который можно считать абсолютно упругим, прошла еще некоторый путь и через время t остановилась. Коэффициент трения шайбы о лед μ .

№вар.	4	9	14	19	24	29	34
S , м	4	9	14	6	5	7	8
t , с	2	4	4	3	2	3	3
μ	0,1	0,09	0,08	0,09	0,1	0,09	0,08

Задачи 115. Варианты: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35

Частица с массой m_1 столкнулась с частицей 2, в результате чего возникла составная частица. Найти её скорость \mathbf{v} , если масса у частицы 2 в два раза больше, чем у частицы 1, а их скорости перед столкновением равны $\mathbf{v}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j}$ и $\mathbf{v}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}$. Какое количество теплоты выделяется при ударе?

№вар.	5	10	15	20	25	30	35
m_1 , г	5	10	15	20	25	30	25
x_1 , м/с	2	3	-1	2	5	3	-5
x_2 , м/с	4	-2	-4	-3	-2	4	-4
y_1 , м/с	3	5	5	4	-3	-3	4
y_2 , м/с	-5	-4	-2	-1	4	4	5

Задачи 1.1.6

Задачи 116. Варианты: 1, 7, 13, 19, 25, 31

Деревянный шар массой M подвешен на неупругой нити. Снизу в шар попадает пуля массой m , летящая вертикально со скоростью v , и пробивает его. При этом скорость пули уменьшается в n раз. На какую высоту поднимутся пуля и шар?

№ вар.	1	7	13	19	25	31
M , кг	1	0,7	1,3	1,9	2,5	3,1
m , г	5	7	13	9	5	6
v , м/с	310	270	230	290	250	310
n	10	7	6	9	5	13

Задачи 116. Варианты: 2, 8, 14, 20, 26, 32

На железнодорожной платформе, движущейся равномерно со скоростью v , укреплено орудие, ствол которого направлен в сторону движения платформы под углом α к горизонту. Орудие произвело выстрел, после чего скорость платформы уменьшилась в n раз. Найти на какое расстояние улетит снаряд, если его масса m , а масса платформы с орудием равна M .

№ вар.	2	8	14	20	26	32
v , км/ч	20	18	14	20	26	32
α , °	30	45	60	30	45	60
n	1,05	1,06	1,04	1,04	1,06	1,03
m , кг	20	80	14	20	26	32
M , т	20	80	40	50	26	32

Задачи 116. Варианты: 3, 9, 15, 21, 27, 33

Горизонтально летящая пуля массой m попадает в деревянный куб массой M , лежащей на полу, и пробивает его. Определить какая энергия пули перешла в тепло, если ее начальная скорость v уменьшается в n раз при выходе из куба. Траектория пули проходит через центр инерции куба. На какое расстояние перемещается куб, если коэффициент трения между кубом и полом μ ?

№ вар.	3	9	15	21	27	33
m , г	13	9	15	7	7	15
M , кг	3	4	5	6	7	7
v , м/с	230	190	150	210	270	250
n	3	4	2	3	4	3
μ	0,03	0,09	0,05	0,02	0,07	0,06

Задачи 116. Варианты: 4, 10, 16, 22, 28, 34

Снаряд в верхней точке траектории на высоте h разорвался на две части с массами m_1 и m_2 . Скорость снаряда в этой точке v . Большой осколок при взрыве приобрел дополнительную скорость Δv в прежнем направлении. Без учета сопротивления воздуха, определить расстояние между точками падения обоих осколков. Какую кинетическую энергию имеет меньший осколок при падении на землю?

№ вар.	4	10	16	22	28	34
h , м	140	90	160	122	128	134
v , м/с	140	90	160	122	128	144
Δv , м/с	40	45	60	32	38	34
m_1 , кг	1,4	0,9	1,6	2,2	1,8	2,4
m_2 , кг	2,4	1,9	0,6	1,2	0,8	1,8

Задачи 116. Варианты: 5, 11, 17, 23, 29, 35

Струя воды сечением S ударяет под углом α к нормали стенки вагонетки сверху вниз и стекает по стенке. Какая должна быть скорость струи, чтобы вагонетка двигалась с постоянной скоростью?

Масса вагонетки M , коэффициент трения между вагонеткой и рельсами μ .

№ вар.	5	11	17	23	29	35
S , см ²	5	11	7	3	9	5
α , °	45	30	60	30	45	35
M , кг	150	100	170	230	90	140
μ	0,05	0,1	0,07	0,03	0,09	0,06

Задачи 116. Варианты: 6, 12, 18, 24, 30, 36

Снаряд в верхней точке траектории на высоте h разрывается на две части, соотношение масс которых $m_1:m_2 = n$. Через время t после взрыва большая часть падает на Землю под тем местом, где произошел взрыв. На каком расстоянии S_2 от места выстрела упадет вторая часть снаряда, если первая упала на расстоянии S_1 ? Силу сопротивления воздуха не учитывать.

№ вар.	6	12	18	24	30	36
h , м	19,6	122,5	176,4	78,4	44,1	56
n	1,6	1,2	1,8	1,4	1,3	1,6
t , с	2	5	6	4	3	3,5
S_1 , м	600	1000	1800	1000	660	800

Задачи 1.1.7

Задачи 117. Варианты: 1, 7, 13, 19, 25, 31

Материальная точка, вращаясь по окружности радиуса R , проходит путь согласно уравнению $S = a + bt + ct^2$. В момент времени τ найти нормальное, тангенциальное и полное ускорения частицы и начертить эти векторы в масштабе. Какие значения имеют угловое ускорение, вращающий момент и момент импульса частицы в этот момент, если ее масса m ?

№ вар.	1	7	13	19	25	31
R , м	1	0,7	1,3	1,9	2,5	3,1
m , г	100	70	130	90	25	31
b , м/с	11	7	13	19	25	31

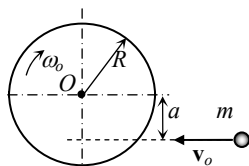
$c, \text{ м/с}^2$	-1	-0,7	1,3	-1,9	-2,5	2
$\tau, \text{ с}$	5	7	3	9	5	4

Задачи 117. Варианты: 2, 8, 14, 20, 26, 32

Платформа вращается вокруг неподвижной оси так, что угол поворота меняется с течением времени по уравнению $\varphi = a + bt + ct^2$. На расстояниях R_1 и R_2 от оси вращения закреплены два небольших тела с одинаковыми массами m . Для момента времени τ определить нормальное, тангенциальное и полное ускорения, скорость тел, и начертить эти векторы в масштабе. Для более отдаленного тела на платформе найти угловое ускорение, вращающий момент и момент импульса.

№ вар.	2	8	14	20	26	32
$b, 1/\text{с}$	2	8	1,4	2,2	2,6	3,2
$c, 1/\text{с}^2$	3	4	6	2	-0,6	-0,3
$R_1, \text{ см}$	20	8	14	20	26	32
$R_2, \text{ см}$	40	18	28	30	52	64
$m, \text{ кг}$	2	8	14	20	26	32
$\tau, \text{ с}$	2	8	4	5	6	3

Задачи 117. Варианты: 3, 9, 15, 21, 27, 33



Диск массой m_0 и радиусом R по инерции вращается вокруг горизонтальной оси O с угловой скоростью ω_0 . В точку A на ободу диска попадает пластилиновый шарик массой m и прилипает к диску. Скорость шарика перед ударом направлена горизонтально и имеет значение v_0 . Определить угловую скорость диска после удара (можно использовать закон сохранения момента импульса), линейную скорость и момент импульса шарика после удара.

№ вар.	3	9	15	21	27	33
--------	---	---	----	----	----	----

m_0 , кг	3	0,9	1,5	2,1	2,7	3,3
R , см	30	19	25	21	27	33
m , г	300	90	150	210	270	330
ω_0 , 1/с	13	9	15	14	11	10
v_0 , м/с	3	9	5	7	6	5
a , см	20	15	20	17	19	25

Задачи 117. Варианты: 4, 10, 16, 22, 28, 34

Студент стоит на горизонтальной платформе в виде диска (на скамье Жуковского), который может свободно вращаться относительно вертикальной оси без заметного трения. Он, стоя на расстоянии r от оси платформы, руками ловит шар массой m . Шар летит горизонтально на расстоянии r от оси платформы со скоростью v . Платформа радиуса R и толщиной b сделана из стали. Масса студента m_1 . С какой угловой скоростью начнет вращаться платформа со студентом, и каков момент импульса всей системы, когда шар оказался в руках студента? (Момент инерции студента вычислить как для материальной точки).

№ вар.	4	10	16	22	28	34
r , м	0,84	0,9	0,86	0,82	0,8	0,74
m , кг	1,4	2	1,6	2,2	2,8	2,4
v , м/с	4,4	5	6	5,2	4,8	5,4
R , м	1,04	1,0	1,06	1,2	1,08	0,94
b , см	2	3	2,6	2,3	2,8	3,4
m_1 , кг	64	70	66	62	68	74

Задачи 117. Варианты: 5, 11, 17, 23, 29, 35

Горизонтальная платформа в виде диска радиуса R и толщиной b сделана из стали и по инерции вращается с частотой ν относительно вертикальной оси. Студент массой m , стоявший на краю платформы, переходит к ее центру. С какой частотой начнет вращаться платформа? Определить линейную скорость и нормальное ускорение точек на краю платформы после перехода студента и момент импульса всей

системы. (Момент инерции студента вычислить как для материальной точки).

№ вар.	5	11	17	23	29	35
R , м	1,05	1,1	1,07	1,03	0,99	0,95
b , см	3,5	3,1	2,7	2,3	2,9	2,55
ν , 1/с	0,15	0,11	0,17	0,13	0,19	0,15
m , кг	75	71	67	73	69	65

Задачи 117. Варианты: 6, 12, 18, 24, 30, 36

В центре горизонтальной платформы в виде диска радиуса R и толщиной b , сделанной из стали, стоит студент и держит в руках стержень длиной и массой m , расположив вертикально по оси вращения платформы. Платформа со студентом вращается с частотой вращения n_0 . С какой частотой будет вращаться платформа, если студент повернет стержень в горизонтальное положение? Определить линейную скорость и центростремительное ускорение точек на краю платформы. Момент инерции студента J .

№ вар.	6	12	18	24	30	36
R , м	1,06	1,02	1,08	1,04	1,03	0,96
b , см	2,6	2,2	2,8	2,4	2,3	2,6
l , м	2,6	2,5	2,8	2,4	2,3	2,6
m , кг	6	7	8	9	10	11
n_0 , мин ⁻¹	1,6	1,2	1,8	2,4	2,3	2,6
J , кг·м ²	1,3	1,2	1,3	1,4	1,35	1,36

2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

2.1. Основные формулы и определения

Все окружающие нас тела состоят из атомов. *Атом* является наименьшей частицей химического элемента – простого вещества (от греч. *atomos* – неделимый). Связанные состояния небольшого числа атомов, образующих устойчивую систему, называются *молекулами*. Атомы и молекулы имеют размеры в среднем $d \sim 10^{-10} - 10^{-9}$ м.

Все непосредственно наблюдаемые нами тела являются *макроскопическими*, т.е. состоят из громадного числа микроскопических частиц. Структурными элементами инертных газов и металлов являются атомы, а у большинства веществ – молекулы. Для измерения масс микроскопических частиц в 1961 г. ввели *атомную единицу массы* (а.е.м.) в качестве которой выбрана масса $m_{ин}$, равная 1/12 массы изотопа углерода C^{12} :

$$m_{ин} = 1,660565 \cdot 10^{-27} \text{ кг.}$$

Единицей *количества вещества* ν является *моль* – это такое количество вещества, в котором содержится столько структурных элементов, сколько имеется атомов в 0,012 кг изотопа углерода C^{12} .

Число структурных элементов (атомов, молекул, ионов) в одном моле вещества называется *постоянной (числом) Авогадро*:

$$N_A = 6,02252 \cdot 10^{23} \text{ 1/моль.}$$

Отношение массы структурного элемента вещества m_o к $m_{ин}$ называется *относительной атомной (молекулярной) массой*: $\mu = m_o/m_{ин}$.

Масса одного моля вещества составляет *молярную массу* и выраженная в граммах она равна относительной массе:

$$\mu = \frac{m}{\nu} = m_o N_A, \text{ г/моль} = 10^{-3} \text{ кг/моль},$$

где ν – количество молей; m – масса вещества.

Молекулы (структурные частицы), образующие тело, находятся в состоянии непрерывного, беспорядочного теплового движения. Фундаментальным свойством теплового движения является его способность «заставлять» вещество макроскопических тел «забывать» свое первоначальное состояние. Каким бы ни было внутреннее состояние тела до его помещения в данные условия, при постоянстве внешних условий вещество перейдет в новое состояние, которое со временем меняться не будет. Это состояние называется состоянием *теплового* или *термодинамического равновесия*. Равновесное состояние *термодинамической системы* не зависит от деталей движения отдельных частиц системы, а определяется поведением всего их коллектива и характеризуется постоянством небольшого числа параметров, называемых *макроскопическими* или *термодинамическими параметрами*.

Важнейшими термодинамическими параметрами являются объем, плотность, давление, температура.

Объем V – это часть пространства, которую занимает данное тело. Единица измерения объема: $[V] = \text{м}^3$. внесистемная единица объема: 1л = 10^{-3} м^3 – литр.

Плотностью называется масса единицы объема тела:

$$\rho = \frac{m}{V}, [\rho] = \frac{[m]}{[V]} = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Благодаря тепловому движению частиц газ или жидкость оказывает давление на стенки емкости (сосуда). При столкновении структурных элементов со стенкой сосуда происходит изменение их импульса, что приводит к возникновению силы, действующей на стенку.

Давлением называется среднее значение силы, действующей по нормали на единицу площади поверхности емкости со стороны молекул газа или жидкости:

$$p = \frac{F}{S}.$$

Единица измерения давления: $[p] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{1\text{Н}}{1\text{м}^2} = 1 \text{ Па (паскаль)}$.

Некоторые внесистемные единицы измерения давления:

1 бар = 10^5 Па;
1 ат = кгс/см² = $0,981 \cdot 10^5$ Па – техническая атмосфера;
1 атм = $1,013 \cdot 10^5$ Па – физическая атмосфера;
1 мм рт.ст. = 133,332 Па – миллиметр ртутного столба.

Температура – это мера интенсивности теплового движения частиц тела.

Для классических частиц средняя кинетическая энергия поступательного движения одной частицы тела пропорциональна температуре:

$$\overline{W}_k = \frac{\overline{m}_0 \overline{v}^2}{2} = \frac{3}{2} kT, \text{ отсюда } kT = \frac{2}{3} \overline{W}_k = \frac{1}{3} \overline{m}_0 \overline{v}^2,$$

где \overline{m}_0 – средняя масса одной частицы, \overline{v} – ее средняя скорость. Температура, определяемая с помощью данной формулы, называется *абсолютной температурой*. Абсолютная температура измеряется в *кельвинах*: $[T] = \text{К}$. Коэффициент пропорциональности k называется *постоянной Больцмана*: $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К, показывает какая часть 1 Дж содержится в 1 К.

Значение $T = 0$ К считается *абсолютным нулем температуры*, это такое состояние, при котором тепловое движение структурных элементов тела прекращается. Однако даже при $T = 0$ К сохраняется некоторое движение частиц, связанное с *нулевой энергией*.

Между абсолютной температурой и часто используемой на практике температурой t по *шкале Цельсия*, которая строится по двум реперным точкам, существует линейная зависимость

$$T = t + 273,15.$$

За $t = 0^\circ\text{C}$ берется температура плавления чистого льда, а за $t = 100^\circ\text{C}$ – температура кипения дистиллированной воды при нормальном атмосферном давлении, т.е. при $p = 1$ атм.

Различные макроскопические параметры не являются независимыми. Закон, выражающий зависимость между термодинамическими параметрами, называется *уравнением состояния*: $F(p, V, T) = 0$.

Аналитический вид уравнения состояния установлен только для идеального газа. Газ считается *идеальным*, если: а) размеры молекул пренебрежимо малы; б) между молекулами не проявляются силы взаимного притяжения; в) соударения молекул такого газа происходят как соударения упругих шаров. Таким условиям удовлетворяют разреженные реальные газы при не очень низких температурах.

Уравнением состояния идеального газа является уравнение Клапейрона – Менделеева, полученное обобщением экспериментальных газовых законов:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, (pV = \nu RT) \text{ или } p = nkT,$$

где p – давление; V – объем; m – масса; μ – молярная масса; T – температура газа; n – концентрация молекул (количество молекул в единице объема); $R = 8,314$ Дж/(моль·К) – универсальная газовая постоянная, одинаковая для всех газов.

Частные случаи уравнения состояния – это уравнения *изопроцессов*, когда один из термодинамических параметров постоянен.

Изотермический процесс: $T = \text{const}$ – закон Бойля–Мариотта

$$pV = \text{const} \text{ или } p_1V_1 = p_2V_2.$$

Этот закон в 1662 г. экспериментально был получен англичанином Р. Бойлем. В 1676 г француз Э. Мариотт уточнил закон Бойля, дополнив формулировку условием «при постоянной температуре».

Графики зависимостей давления от объема $p = \nu RT/V$ изотермического процесса (*изотермического расширения*) для двух температур представлены на рис. 2.1. Они называются *изотермами* идеального газа.

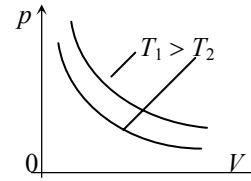
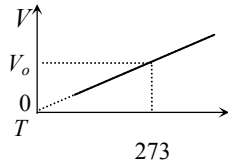


Рис. 2.1

Изобарический процесс: $p = \text{const}$ – закон Гей–Люссака,

$$\frac{V}{T} = \text{const} \left(\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \right) \text{ или } V = V_0(1 + \alpha t), V = \alpha V_0 T,$$

где V_0 – объем при температуре $t = 0$ °С; $\alpha = 1/273,15$ К⁻¹ – *температурный коэффициент объемного расширения*.



Этот закон в 1787 г. был получен Ж. Шарлем но не был опубликован. В 1802 г. Гей–Люссак получил этот же закон исследуя газ при постоянном давлении. График изобарического процесса (*изобара*) показан на рис.2.2.

Изохорический процесс: $V = \text{const}$ – закон Шарля,

$$\frac{p}{T} = \text{const} \left(\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \right) \text{ или } p = p_0(1 + \beta t),$$

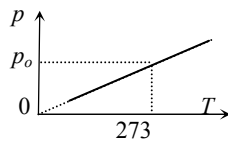


Рис. 2.3

где p_0 – давление при температуре $t = 0$ °С; β – температурный коэффициент давления газа. Для идеального газа $\alpha = \beta$. Зависимость $p = f(T)$ при $V = \text{const}$ (изохора) представлена на рис. 2.3.

Универсальная газовая постоянная определяется из уравнения, установленного в 1843 г. французским физиком Б. Клапейроном:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = \text{const. Отсюда } R = \frac{p_0 V_\mu^0}{T_0},$$

где $p_0 = 1,01325 \cdot 10^5$ Па; $V_\mu^0 = 22,4136 \cdot 10^{-3}$ м³/моль – молярный объем; $T_0 = 273,15$ К – термодинамические параметры при нормальных условиях. Эту константу в 1874 г. определил Д.И. Менделеев, используя следствие закона Авогадро: один моль любого газа при одинаковом давлении и температуре занимает один и тот же объем.

Внутренняя энергия является однозначной функцией состояния системы, т.е. зависит только от внутреннего состояния термодинамической системы: $U = f(p, V, T)$. Приращение внутренней энергии во всяком процессе, совершаемом системой внутри теплоизолирующей (адиабатической) оболочки, равно работе внешних сил над системой при переходе ее из начального равновесного состояния в конечное равновесное состояние.

Внутренняя энергия складывается из кинетической энергии хаотического поступательного и вращательного движения молекул $W_{\text{км}}$; потенциальной энергии, обусловленной силами межмолекулярного взаимодействия молекул $W_{\text{пм}}$; кинетической и потенциальной энергии колебаний атомов в молекуле $W_{\text{ка}}$, $W_{\text{па}}$; энергии электронных оболочек электронов и ионов W_e ; энергии движения и взаимодействия нуклонов в ядрах атомов W_y и собственной энергии самих нуклонов $E_{\text{он}}$

$$U = W_{\text{км}} + W_{\text{пм}} + W_{\text{ка}} + W_{\text{па}} + W_e + W_y + E_{\text{он}}.$$

Изменение состояния системы обусловлено передачей энергии от одного тела системы к другому или за счет обмена энергией с внешними телами. Передача энергии может происходить либо в форме механической работы A , либо в форме теплоты Q .

Работа есть мера передачи механической энергии от одного тела к другому телу, и сопровождается перемещением тел в целом или их макроскопических частей.

Работа связанная с изменением объема системы вычисляется суммированием элементарных работ расширений $A = \int p dV$.

Теплота есть мера передачи кинетической энергии структурных элементов более нагретого тела к отдельным частицам менее нагретого тела при соприкосновении этих тел. Передача теплоты может осуществляться также за счет теплообмена излучением.

Работа и теплота измеряются в одинаковых единицах:

$$[Q] = [A] = \text{Дж.}$$

Внесистемная единица теплоты: 1 кал = 4,1868 Дж (калория), это количество теплоты, которое необходимо сообщить 1 г дистиллированной воды, для увеличения температуры на 1°C.

Количество теплоты, которое необходимо сообщить единице массы вещества для повышения его температуры на 1К, называется удельной теплоемкостью:

$$c = \frac{\delta Q_m}{m dT}, \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}},$$

где $\delta Q_m = c m dT$ – количество теплоты, при сообщении которого телу массой m его температура увеличивается на небольшую величину dT .

Аналогично определяется молярная теплоемкость:

$$C_\mu = \frac{\delta Q_\nu}{\nu dT}, \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$$

Связь между молярной и удельной теплоемкостями: $C_\mu = \mu c$.

Количество теплоты, которое необходимо сообщить газу для изменения его температуры на одну и ту же величину, зависит от процесса, при котором происходит передача теплоты. Поэтому различают изохорические теплоемкости c_v и $C_{\mu v}$ (при постоянном объеме) и изобарические теплоемкости c_p и $C_{\mu p}$ (при постоянном давлении).

Закон сохранения энергии называется *первым законом* или *первым началом* термодинамики:

$$Q = \Delta U + A_{12}.$$

Теплота Q , переданная системе в процессе изменения ее состояния из начального 1 в конечное 2, расходуется на изменение ее внутренней энергии $\Delta U = U_2 - U_1$ и на совершение работы A_{12} против внешних сил.

Для квазистатического процесса, при котором термодинамические параметры совершают элементарные изменения, первый закон термодинамики приобретает вид

$$\delta Q = dU + \delta A.$$

Здесь для обозначения элементарной теплоты и работы использован оператор δ , так как изменения этих величин не являются полным

дифференциалом, т.е. не могут быть представлены как малые приращения функций состояния системы.

Рассмотрим изохорический процесс. Так как $V = \text{const}$, $dV = 0$. Работа над внешними телами не совершается: $\delta A = p dV = 0$.

Отсюда

$$\delta Q = dU,$$

т.е. вся подводимая к системе теплота затрачивается на увеличение ее внутренней энергии.

Подводимая к газу теплота при изохорическом процессе

$$\delta Q = mc_v dT \quad \text{или} \quad \delta Q = \nu C_{\mu v} dT$$

Отсюда формула для изменения внутренней энергии имеет вид

$$dU = mc_v dT = \nu C_{\mu v} dT.$$

При постоянном давлении работа расширения газа против сил внешнего давления

$$A_{12} = p(V_2 - V_1) = p\Delta V = \Delta(pV) \quad \text{и} \quad \delta A = p dV = d(pV).$$

Первый закон термодинамики примет вид

$$Q = \Delta U + \Delta(pV).$$

Введем новую величину, которая называется *энтальпией*

$$I = U + pV.$$

Первый закон термодинамики при $p = \text{const}$, тогда запишется в виде

$$Q = I_2 - I_1 \quad \text{или} \quad Q = \Delta I.$$

Так как при $p = \text{const}$ $\delta Q = \nu C_{\mu p} dT$, то $dI = \nu C_{\mu p} dT$.

Таким образом, при постоянном объеме количество теплоты Q равно приращению внутренней энергии системы, а при постоянном давлении – приращению энтальпии. Энтальпия I является функцией состояния системы, используется при термодинамических расчетах.

Из первого закона термодинамики при $p = \text{const}$ получается связь между изобарической и изохорической молярными теплоемкостями:

$$C_{\mu p} = C_{\mu v} + R.$$

Данное соотношение называется уравнением Роберта Майера.

При $T = \text{const} \rightarrow dT = 0$ и $dU = mc_v dT = 0$. Поэтому

$$Q_{12} = A_{12} \quad \text{и} \quad \delta Q = \delta A,$$

т.е., теплота, передаваемая газу, полностью затрачивается на совершение работы над внешними телами при переходе из состояния 1 в 2:

$$Q_{12} = A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \frac{m}{\mu} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Адиабатическим называется процесс, при котором отсутствует теплообмен с окружающей средой. Для осуществления такого процесса система должна быть теплоизолирована. Быстропротекающие процессы приближенно можно считать адиабатическими.

При адиабатическом процессе $\delta Q = 0$. Поэтому

$$dU + \delta A = 0 \quad \text{и} \quad \delta A = -dU.$$

Отсюда $p dV = -m c_v dT$, т.е. внешняя работа может производиться за счет уменьшения внутренней энергии газа.

Проинтегрировав дифференциальное уравнение адиабатического процесса без учета зависимости показателя адиабаты $\gamma = c_p/c_v$ от температуры, получаем алгебраические уравнения *адиабатического процесса – уравнение Пуассона*:

$$V^{\gamma-1} T = \text{const} \quad \text{или} \quad p V^\gamma = \text{const}.$$

Сравнительные графики адиабатического (*адиабаты*) и изотермического процессов (*расширений*) показаны на рис. 2.4. Адиабата более крута, чем изотерма. Это объясняется тем, что при адиабатическом сжатии увеличение давления газа происходит не только за счет уменьшения объема, но и из-за повышения температуры.

Выражение для работы при адиабатическом процессе получается из первого закона термодинамики:

$$A_{1-2} = \frac{p_1 V_1}{\gamma-1} \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) = \frac{p_1 V_1}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right] = \frac{m R T_1}{\mu(\gamma-1)} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right].$$

Для смеси не реагирующих газов общее количество вещества определяется как сумма количества вещества отдельных компонент:

$$\nu = \frac{m}{\mu_{\text{см}}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{\mu_i} = \sum_{i=1}^n \nu_i.$$

Из последнего соотношения можно определить *эффективную*

молярную массу смеси: $\mu_{\text{см}} = m / \sum_{i=1}^n \nu_i.$

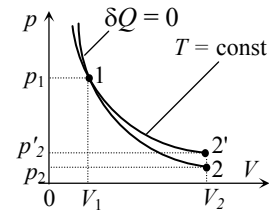


Рис. 2.4

Уравнение состояния для смеси идеальных газов с помощью $\mu_{см}$ можно представить в обычном виде:

$$pV = \frac{m}{\mu_{см}} RT.$$

Масса отдельного компонента смеси в единице объема называется *массовой концентрацией* данного компонента:

$$C_i = \frac{m_i}{V}.$$

Сумма массовых концентраций всех компонент равняется плотности газовой смеси:

$$\sum_{i=1}^N C_i = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{V} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N m_i = \frac{m}{V} = \rho.$$

Отношение массы отдельного компонента смеси ко всей массе называется *массовой долей* данного компонента:

$$g_i = m_i/m.$$

Отношение количества молей отдельного компонента смеси к количеству молей всей смеси называется *мольной долей*: $v_i = \nu_i/\nu$.

С помощью данных понятий можно вывести соотношения для эффективной молярной массой смеси через массовые и мольные доли:

$$\mu_{см} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{g_i}{\mu_i}} = \sum_{i=1}^N v_i \mu_i.$$

Давление, которое установится в объеме, если из него откачать все компоненты смеси, оставив, лишь одну из компонент при постоянной температуре, называется *парциальным давлением* данного компонента. Из уравнения состояния парциальное давление i -го компонента

$$p_i = \frac{m_i}{\mu_i} \frac{RT}{V}.$$

В состоянии теплового равновесия давление в смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений каждой компоненты смеси:

$$\sum_{i=1}^N p_i = p \quad (\text{закон Дальтона}).$$

Теплоемкости смеси вычисляются из условия их аддитивности:

$$C_{\mu} = \sum_{i=1}^N v_i C_{\mu i}; \quad c = \sum_{i=1}^N g_i c_i.$$

Пусть q_i – удельная теплота сгорания i -го компонента газообразного топлива. Тогда удельная теплота сгорания смеси

$$q = \sum g_i q_i.$$

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов:

$$p = \frac{1}{3} n \bar{m} \langle v \rangle^2,$$

где \bar{m} – средняя масса одной молекулы, $\langle v \rangle$ – среднеквадратичная скорость молекул.

Данную формулу можно написать в виде

$$p = \frac{2}{3} n \bar{W}_k.$$

Здесь \bar{W}_k – средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы одноатомного, идеального газа:

$$\bar{W}_k = \frac{\bar{m} \langle v \rangle^2}{2} = \frac{3}{2} kT.$$

При тепловом движении изменения в положении каждой частицы носят случайный характер. На основании теории вероятности в 1859 г. Д.К. Максвелл установил закономерность, по которой можно определить число молекул dN газа, скорости которых заключены в некотором интервале от v до $v + dv$ ($v, v + dv$) (закон распределения Максвелла молекул по скоростям):

$$dN = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N \frac{u^2}{v_m} \exp(-u^2) dv,$$

где N – общее число молекул; $u = v/v_m$ – относительная скорость; v_m – наиболее вероятная скорость (при которой функция распределения имеет максимум). Наиболее вероятная скорость вычисляется по формуле

$$v_m = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}},$$

где m_0 – масса одной молекулы.

Закон Максвелла можно написать относительно функции распределения молекул по скоростям:

$$f(v) = \frac{dN}{Ndv} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{u^2}{v_m} \exp(-u^2).$$

Функция распределения $f(v)$ определяет относительное число dN/N молекул, скорости которых лежат в некотором интервале ($v, v + dv$).

Средняя арифметическая скорость молекул:

$$\bar{v} = \frac{\sum_{i=1}^N v_i}{N} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}.$$

Среднеквадратичная скорость молекул:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N v_i^2}{N}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

Изменение концентрации молекул в пределах изменения высоты от h_0 до h (при этом концентрация молекул изменяется от n_0 до n):

$$n = n_0 \exp \left[-\frac{mg}{kT} (h - h_0) \right].$$

Приращение потенциальной энергии молекул при изменении высоты над поверхностью земли $\Delta W_{\text{п}} = mg(h - h_0)$. Поэтому

$$n = n_0 \exp \left(-\frac{\Delta W_{\text{п}}}{kT} \right).$$

Данное выражение является законом (функцией) Больцмана распределения молекул по потенциальным энергиям во внешнем силовом поле.

Барометрическая формула:

$$p = p_0 \exp \left[-\frac{mg}{kT} (h - h_0) \right],$$

где p и p_0 – давление на высоте h и h_0 соответственно.

Средний путь, который молекула проходит свободно между двумя последовательными соударениями называется *средней длиной свободного пробега молекул*:

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{N_{\text{cm}}} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi p d^2},$$

где d – эффективный диаметр молекул; N_{cm} – число столкновений за единицу времени.

Число независимых координат, которые полностью определяют положение молекулы в пространстве, называется *числом степеней свободы молекулы*.

Одноатомные молекулы обладают тремя поступательными степенями свободы: $i = i_{\text{пост}} = 3$.

Двухатомные молекулы обладают пятью степенями свободы:

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} = 3 + 2 = 5.$$

Сложные молекулы обладают шестью степенями свободы:

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} = 3 + 3 = 6,$$

где $i_{\text{вр}} = 2$ вращательные степени свободы.

Внутренняя энергия идеального газа:

$$U_0 = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} RT.$$

Молярные теплоемкости идеальных газов:

$$C_{\text{мв}} = \frac{i}{2} R. \quad C_{\text{мп}} = \frac{i+2}{2} R. \quad \gamma = \frac{i+2}{i}.$$

Действие сил притяжения между молекулами приводит к появлению дополнительного давления на газ, называемого *внутренним давлением*. По оценке Ван-дер-Ваальса, внутреннее давление обратно пропорционально квадрату молярного объема:

$$p' = a/V_{\mu}^2.$$

Фактический свободный объем для движения молекул одного моля реального газа будет не V_{μ} , а $V_{\mu} - b$, где b – объем, занимаемый самими молекулами одного моля.

Уравнение состояния Ван-дер-Ваальса для реального газа:

$$(p + v^2 \frac{a}{V^2})(V - vb) = \nu RT,$$

где a, b – постоянные Ван-дер-Ваальса, определяемые из опыта.

Внутренняя энергия Ван-дер-Ваальсовского газа:

$$U = \nu C_{\text{мв}} T - \frac{\nu^2 a}{V}.$$

Гидростатическое давление жидкости глубиной h :

$$p_g = \rho g h.$$

Данная формула определяет давление, обусловленное самой жидкостью. Обычно на свободную поверхность жидкости действует атмосферное давление p_0 . Поэтому абсолютное давление жидкости на глубине h определяется как сумма атмосферного давления и гидростатического давления:

$$p = p_0 + \rho g h.$$

Закон Архимеда: *на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, равная силе тяжести вытесненной жидкости.*

Допустим, V – объем тела, погруженного в жидкость. Сила тяжести жидкости, которая занимала до этого данный объем, т.е. выталкивающая сила:

$$F_A = \rho_{\text{ж}} g V,$$

где $\rho_{\text{ж}}$ – плотность жидкости.

Поверхность жидкости ведет себя как натянутая эластичная пленка. Это натяжение, действующее параллельно поверхности, возникает из-за существующих между молекулами жидкости сил притяжения. Данное явление называется *поверхностным натяжением*. Количест-

венно этот эффект характеризуется *коэффициентом поверхностного натяжения*

$$\alpha = F/L,$$

где F – сила, которая действует перпендикулярно на любую линию длины L , проведенную на поверхности, и стремится стянуть поверхность по этой линии. Коэффициент поверхностного натяжения уменьшается с увеличением температуры.

Дополнительное давление под искривленной поверхностью жидкости:

$$\Delta p = 2\alpha/R.$$

Данное соотношение называется формулой Лапласа. В общем случае она приобретает вид

$$\Delta p = \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где R_1 и R_2 – радиусы кривизны двух перпендикулярных сечений поверхности жидкости.

Для переноса молекулы из глубины жидкости на поверхностный слой необходимо совершить работу против силы поверхностного натяжения. Данная работа, приводящая к увеличению потенциальной энергии молекул поверхностного слоя, называется *энергией свободной поверхности*:

$$W = \alpha S,$$

где S – свободная поверхность жидкости.

Высота поднятия или опускания уровня жидкости по капиллярной трубке:

$$h = \frac{2\alpha}{\rho g r}.$$

Массовые расходы газа через любые сечения трубы одинаковы:

$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2.$$

Данное соотношение называется *уравнением неразрывности*.

Уравнение Бернулли для потока газа (жидкости):

$$p_1 + \frac{\rho_1 v_1^2}{2} + \rho_1 g h_1 = p_2 + \frac{\rho_2 v_2^2}{2} + \rho_2 g h_2.$$

Если в объеме термодинамической системы имеется неоднородное распределение концентрации отдельных компонент, температуры, скоростей движения макроскопических частей среды, то за счет беспорядочного теплового движения молекул с течением времени эти неоднородности будут ликвидироваться. При этом в объеме тела про-

исходит перенос вещества, тепловой энергии и импульса структурных элементов. Эти явления называются *процессами (явлениями) переноса*. К ним относятся диффузия, теплопроводность и внутреннее трение.

Под диффузией понимают взаимопроникновение веществ в различных смесях сопровождающееся переносом массы. Пусть вдоль направления x (рис. 2.5) массовая концентрация C_i некоторого компонента смеси уменьшается. Тогда через площадку ΔS , расположенную перпендикулярно к направлению x , за время Δt переносится масса вещества Δm_i :

$$\Delta m_i = -D \frac{dC_i}{dx} \Delta S \Delta t,$$

где $\frac{dC_i}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C_2 - C_1}{\Delta x}$ – производная от

концентрации i -го компонента смеси по направлению x , показывающая степень неравномерности распределения концентрации в данном направлении; D – коэффициент пропорциональности, или *коэффициент диффузии*. Знак « \leftarrow » показывает, что перенос массы происходит в направлении убывания массовой концентрации. Единица измерения коэффициента диффузии: $[D] = \text{м}^2/\text{с}$.

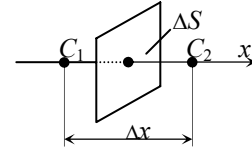


Рис. 2.5

В рамках молекулярно–кинетической теории идеальных газов:

$$D = \bar{v} \bar{\lambda} / 3, \text{ м}^2/\text{с},$$

где \bar{v} – среднеарифметическая скорость, $\bar{\lambda}$ – средняя длина свободного пробега молекул газа.

Процесс молекулярного переноса теплоты из более нагретых мест в области с меньшей температурой называется теплопроводностью.

Процесс передачи энергии в форме теплоты подчиняется *закону теплопроводности Фурье*: количество теплоты ΔQ_x , которое переносится в направлении x , прямо пропорционально градиенту температуры в данном направлении, площади поверхности ΔS и промежутку времени Δt :

$$\Delta Q_x = -\kappa \frac{dT}{dx} \Delta S \Delta t,$$

где κ – коэффициент теплопроводности. По молекулярно кинетической теории газов:

$$\kappa = \frac{1}{3} c_v \bar{v} \bar{\lambda} \rho, \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К}),$$

где c_v – удельная теплоемкость при постоянном объеме; ρ – плотность газа; \bar{v} – среднеарифметическая скорость теплового движения молекул.

Возникновение силы внутреннего трения между слоями жидкости, движущимися с разными скоростями, называется внутренним трением или явлением вязкости. Сила внутреннего трения подчиняется закону Ньютона:

$$F_{\text{тр}} = -\eta \frac{du}{dy} S,$$

где $F_{\text{тр}}$ – сила внутреннего трения между движущимися слоями жидкости площадью S ; u – скорость течения; du/dy – поперечный градиент скорости течения, который характеризует интенсивность изменения скорости течения поперек потока (рис. 2.6); y – поперечная координата, отсчитываемая от стенки канала (тела); η – коэффициент динамической вязкости.

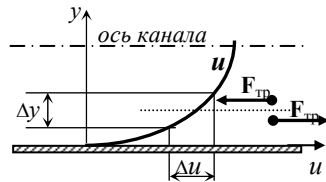


Рис. 2.6

Единица измерения η в системе СИ: $[\eta] = \text{Па}\cdot\text{с}$. (Внесистемная единица – 1 пуаз = 0,1 Па·с).

Формула для коэффициента вязкости по кинетической теории газов:

$$\eta = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \rho.$$

Практически важной является средняя скорость течения \bar{u} , при которой расход жидкости по трубе будет равняться действительному расходу. Экспериментально изучая течение жидкости по трубам, Гаген (в 1839 г.) и независимо от него Пуазель (в 1841 г.) получили эмпирическую формулу

$$\bar{u} = \frac{p_1 - p_2}{l} \frac{R^2}{8\eta}.$$

При движении тел в жидкостях и газах на них действует сила вязкого сопротивления. Например, сила сопротивления F , действующая со стороны потока жидкости на медленно движущейся в ней шарик определяется формулой Стокса:

$$F = 6\pi\eta r v,$$

где r – радиус шарика; v – его скорость.

Формула справедлива при числах Рейнольдса $Re = \rho v d / \eta \ll 1$.

Отношение полезной работы цикла A к подводимой к системе теплоте Q_1 называется *термическим коэффициентом полезного действия цикла* или просто *коэффициентом полезного действия* (КПД):

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}.$$

При этом считается, что $Q_1 > 0$, а отводимая в холодильник теплота $Q_2 < 0$. Термический КПД характеризует экономичность цикла тепловой машины или холодильника.

Анализируя работу тепловых двигателей, французский инженер Сади Карно в 1824 году пришел к выводу, что наивыгоднейшим круговым процессом является обратимый цикл, состоящий из двух изотермических и двух адиабатических процессов (рис. 2.7).

На участке 1–2 газ изотермически расширяется при температуре $T_1 = T_2 = T_H$. Постоянство температуры поддерживается за счет подвода теплоты Q_1 из *нагревателя тепловой машины* с температурой T_H :

$$Q_1 = A_{1-2} = \frac{m}{\mu} RT_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

На участке 2–3 газ расширяется адиабатически, $Q_{2-3} = 0$:

$$A_{2-3} = - \frac{m}{\mu} C_{\mu\nu}(T_3 - T_2) = \frac{m}{\mu} C_{\mu\nu}(T_H - T_x).$$

На участке 3–4 газ изотермически сжимается при $T_3 = T_4 = T_x = \text{const}$. Чтобы поддерживать постоянную температуру от рабочего тела (газа), отводится теплота Q_2 в холодильник с температурой T_x :

$$A_{3-4} = Q_2 = \frac{m}{\mu} T_2 \ln \frac{V_4}{V_3}.$$

На участке 4–3 газ возвращается в исходное состояние за счет адиабатического сжатия, т.е. без теплообмена:

$$A_{4-1} = - \frac{m}{\mu} C_{\mu\nu}(T_1 - T_4) = \frac{m}{\mu} C_{\mu\nu}(T_x - T_H).$$

Термический коэффициент полезного действия цикла (КПД);

$$\eta_o = \frac{T_H - T_x}{T_H}.$$

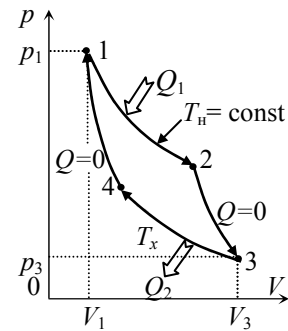


Рис. 2.7

Из-за наличия потери энергии КПД реальных машин ниже, чем КПД цикла тепловой машины Карно:

$$\eta = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} < \frac{T_n - T_x}{T_n}.$$

Функция состояния S , дифференциалом которой является $\delta Q/T$, называется *энтропией*:

$$dS = \frac{\delta Q}{T}.$$

Изменение энтропии системы:

$$\Delta S = -\oint \left(\frac{\delta Q}{T} \right).$$

Неравенство Клаузиуса.

$$\Delta S \geq 0.$$

Данное выражение относится только к замкнутым системам. Для незамкнутых систем энтропия может как возрастать, так и уменьшаться. Неравенство Клаузиуса является математическим выражением *второго закона*, или *второго начала*, термодинамики.

Второй закон термодинамики определяет направление естественных процессов. Согласно этому закону естественные процессы протекают в сторону увеличения энтропии.

Выражение для изменения энтропии идеального газа:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \nu C_{\mu\nu} \ln \frac{T_2}{T_1} + \nu R \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Можно рассматривать *энтропию как количественную меру беспорядка, существующего в системе*: $S = k \ln W$, где k – постоянная Больцмана; W – термодинамическая вероятность состояния системы.

2.2. Примеры решения и оформления задач

Пример 1. В баллоне объемом $V = 50$ л имеется смесь метана и пропана при давлении $p = 1$ МПа и температуре $T = 300$ К. Соотношение масс метана и пропана $\xi = m_1/m_2 = 3/2$. Определить эффективную молярную массу смеси, массы и концентрации отдельных компонент, а

Дано:	$V = 50 \text{ л} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3$ $p = 1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па}$ $T = 300 \text{ К}$ $\xi = m_1/m_2 = 3/2$
	$\mu_{\text{см}}, m_1, n_1, m_2, n_2,$ $\langle \nu \rangle_1, \langle \nu \rangle_2$

также среднеквадратичные скорости теплового движения молекул.

Анализ:

Через массовые доли компонент эффективная молярная масса смеси определяется по формуле

$$\mu_{\text{см}} = 1 / \sum_{i=1}^N \frac{g_i}{\mu_i},$$

где g_i и μ_i – соответственно массовая доля и молярная масса i -го компонента смеси.

Сначала массовые доли выразим через заданное в условии задачи соотношение масс $\xi = m_1/m_2$. Общая масса смеси $m = m_1 + m_2$, а $m_1 = \xi m_2$. Поэтому $m = m_1 + m_2 = \xi m_2 + m_2 = \xi(1 + \xi)m_2$. Отсюда

$$g_2 = \frac{m_2}{m} = \frac{1}{1 + \xi}. \quad g_1 = 1 - g_2 = \frac{\xi}{1 + \xi}.$$

С учетом полученных выражений:

$$\mu_{\text{см}} = 1 / \left(\frac{g_1}{\mu_1} + \frac{g_2}{\mu_2} \right) = 1 / \left(\frac{\xi}{(1 + \xi)\mu_1} + \frac{1}{(1 + \xi)\mu_2} \right).$$

Из уравнения Клапейрона-Менделеева масса смеси:

$$m = \frac{\mu_{\text{см}} p V}{RT} \quad \text{и} \quad m_1 = m g_1 = \frac{\mu_{\text{см}} p V}{RT} \cdot \frac{\xi}{1 + \xi}, \quad m_2 = m g_2 = \frac{\mu_{\text{см}} p V}{RT} \cdot \frac{1}{1 + \xi}.$$

По уравнению состояния идеального газа парциальное давление метана и концентрация молекул связаны соотношением $p_1 = n_1 k T$. Из уравнения Клапейрона-Менделеева:

$$p_1 = \frac{m_1 R T}{\mu_1 V} = \frac{\mu_{\text{см}} p}{\mu_1} \cdot \frac{\xi}{1 + \xi}.$$

Из этих двух выражений получаем

$$n_1 = \frac{p_1}{k T} = \frac{\mu_{\text{см}} p \xi}{\mu_1 k T (1 + \xi)}.$$

Таким же образом

$$n_2 = \frac{p_2}{k T} = \frac{\mu_{\text{см}} p}{\mu_2 k T (1 + \xi)}.$$

Формулы для среднеквадратичных скоростей молекул:

$$\langle v \rangle_1 = \sqrt{\frac{3RT}{\mu_1}}, \quad \langle v \rangle_2 = \sqrt{\frac{3RT}{\mu_2}}.$$

Анализ размерностей:

$$[\mu_{\text{см}}] = 1 / ([g_i]/[\mu_i]) = [\mu_i] = \text{кг/моль}.$$

$$[m] = \frac{[\mu][p][V]}{[R][T]} = \frac{(\text{кг/моль}) \cdot (\text{Н/м}^2) \cdot \text{м}^3}{(\text{Н} \cdot \text{м}/(\text{моль} \cdot \text{К})) \cdot \text{К}} = \text{кг}.$$

$$[n] = \frac{[p]}{[k][T]} = \text{Па}/((\text{Дж} \cdot \text{К}^{-1}) \cdot \text{К}) = \frac{\text{Н/м}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}} = \text{м}^{-3}.$$

$$\langle v \rangle = \{ [R] \cdot [T] / [\mu] \}^{1/2} = \left\{ \left(\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \right) / \left(\frac{\text{кг}}{\text{моль}} \right) \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{кг}} \right\}^{1/2} = \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Решение:

Из приложения находим молярные массы метана и пропана:

$$\mu_1 = 16,04 \text{ г/моль} = 16,04 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль},$$

$$\mu_2 = 44,1 \text{ г/моль} = 44,1 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль},$$

$$\mu_{\text{см}} = 1 / \left(\frac{\xi}{(1+\xi)\mu_1} + \frac{1}{(1+\xi)\mu_2} \right) = 1 / \left(\frac{3/2}{(1+3/2)0,01604} + \frac{1}{(1+3/2)0,0441} \right) = 0,0215 \text{ кг/моль}.$$

$$m_1 = \frac{\mu_{\text{см}} p V}{R T} \cdot \frac{\xi}{1+\xi} = \frac{0,0215 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{8,31 \cdot 300} \cdot \frac{3/2}{1+3/2} = 0,259 \text{ кг}.$$

$$m_2 = \frac{\mu_{\text{см}} p V}{R T} \cdot \frac{1}{1+\xi} = \frac{0,0215 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{8,31 \cdot 300} \cdot \frac{1}{1+3/2} = 0,172 \text{ кг}.$$

$$n_1 = \frac{\mu_{\text{см}} p \xi}{\mu_1 k T (1+\xi)} = \frac{0,0215 \cdot 10^6 \cdot 3/2}{0,01604 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 (1+3/2)} = 1,94 \cdot 10^{26} \text{ м}^{-3}.$$

$$n_2 = \frac{\mu_{\text{см}} p}{\mu_2 k T (1+\xi)} = \frac{0,0215 \cdot 10^6}{0,0441 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 (1+3/2)} = 0,471 \cdot 10^{26} \text{ м}^{-3}.$$

$$\langle v \rangle_1 = \sqrt{\frac{3RT}{\mu_1}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,31 \cdot 300}{0,01604}} = 682,8 \text{ м/с}.$$

$$\langle v \rangle_2 = \sqrt{\frac{3RT}{\mu_2}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,31 \cdot 300}{0,0441}} = 411,8 \text{ м/с}.$$

Ответ:

Молярная масса смеси $\mu_{\text{см}} = 0,0215 \text{ кг/моль}$;

массы и концентрации метана и пропана: $m_1 = 0,259 \text{ кг}$, $n_1 = 1,94 \cdot 10^{26} \text{ м}^{-3}$, $m_2 = 0,172 \text{ кг}$, $n_2 = 0,471 \cdot 10^{26} \text{ м}^{-3}$;

среднеквадратичные скорости теплового движения молекул:

$$\langle v \rangle_1 = 682,8 \text{ м/с}, \langle v \rangle_2 = 411,8 \text{ м/с}.$$

Пример 2. Кислород имеет температуру $T = 273\text{К}$. Для этой температуры вычислить наиболее вероятную скорость, построить график функции Максвелла. Определить долю молекул, скорости которых лежат в интервале от 200 до 400 м/с.

<p><i>Дано:</i></p> <p>Газ – O_2</p> <p>$T = 273\text{ К}$</p> <p>$v_1 = 200\text{ м/с}$</p> <p>$v_2 = 400\text{ м/с}$</p> <p>$\Delta N/N, v_m$</p>	<p><i>Анализ:</i></p> <p>Относительное число молекул dN/N, скорости которых лежат в интервале от v до $v + dv$ определяется функцией Максвелла:</p> $\frac{dN}{N} = f(v, T) dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{v_m^3} \exp\left(-\frac{v^2}{v_m^2}\right) dv,$ <p>где $v_m = \sqrt{2RT/\mu}$ – наиболее вероятная скорость</p>
--	--

(здесь μ – молярная масса кислорода).

Первая часть задачи сводится к вычислению значений функции Максвелла и построению по этим значениям графика. Чтобы оценить значения скоростей молекул, сначала вычислим наиболее вероятную скорость v_m . После этого интервал скоростей от 0 до не менее $2v_m$ разделим на равные участки с шагом Δv и для узловых точек вычислим значения функции Максвелла (имеет смысл вычислить относительную скорость $u = v/v_m$).

Относительное число молекул $\Delta N/N$, скорости которых лежат в диапазоне от v_1 до v_2 , может быть рассчитано по формуле

$$\frac{\Delta N}{N} = \int_{v_1}^{v_2} f(v, T) dv.$$

Этот интеграл можно вычислить каким-либо численным методом на компьютере, а приближенно – графическим способом. Относительное число молекул, скорости которых лежат в пределах от v_1 до v_2 , численно равно площади, ограниченной графиком функции Максвелла, осью абсцисс (осью скоростей) и ординатами $f(v_1, T)$, $f(v_2, T)$. На рисунке эта часть графика заштрихована (см. раздел «решение»).

Решение:

Наиболее вероятная скорость

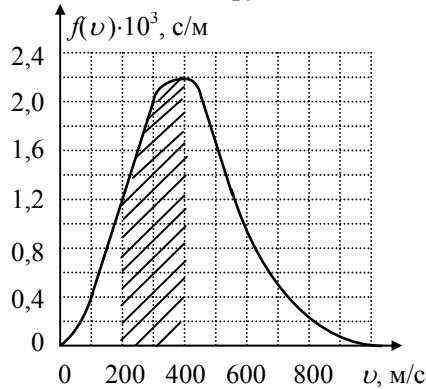
$$v_m = \sqrt{2RT/\mu} = \sqrt{2 \cdot 8,31 \cdot 273 / 0,032} = 376,5\text{ м/с}.$$

Диапазон скоростей от нуля до 1000 м/с разделим на 10 интервалов с шагом 100 м/с. Вычислим значения функции Максвелла и результаты занесем в таблицу:

Таблица для результатов расчета

$v, \text{ м/с}$	100	200	300	400	500	600	800	1000
u	0,2656	0,5311	0,7967	1,062	1,3278	1,5934	2,1245	2,656
u^2	0,0705	0,2821	0,6347	1,1278	1,7631	2,5389	4,5135	7,052
$f(v) \cdot 10^3, \text{ с/м}$	0,39	1,28	2,02	2,19	1,81	1,20	0,297	0,04

По полученным значениям построим график функции Максвелла. Для этого выбираем масштабы: для оси скоростей – $m_v = 100 \text{ м/с}$ на деление; для оси функции Максвелла – $m_f = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ с/м}$ на деление.



Для построения графика рекомендуется использовать миллиметровую бумагу. Необходимо посчитать целые клетки (их 16), затем неполные (таких 5). Таким образом, примерно $z_s = 18,5$ клеток. Площадь заштрихованной части графика $S = z_s \cdot m_f \cdot m_v = 18,5 \cdot 0,2 \cdot 10^{-3} \cdot 100 = 0,37$. Следовательно, такая часть молекул имеют скорости в диапазоне от $v = 200 \text{ м/с}$ до $v = 400 \text{ м/с}$.

Ответ:

Наиболее вероятная скорость молекул кислорода при $T = 273\text{К}$ – $v_m = 376,5 \text{ м/с}$. Доля молекул, скорости которых лежат в диапазоне от 200 до 400 м/с составляет около 37%.

Пример 3. Азот при температуре $T = 350\text{К}$ и давлении в сосуде $p = 0,5 \text{ МПа}$ занимает объем $V = 5 \text{ л}$. Вычислить изохорическую теплоемкость C_v газа. Определить среднюю кинетическую энергию поступательного и вращательного движения молекулы азота. Определить также полную кинетическую энергию молекулы при тех же условиях. Чему равняется полная кинетическая энергия всех молекул газа?

Дано:

$$N_2: i_{\text{пост}} = 3, i_{\text{вр}} = 2, i = 5$$

$$T = 350\text{К}$$

$$p = 0,5 \text{ МПа} = 5 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$$V = 5 \text{ л} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$\overline{W}_{\text{пост}}, \overline{W}_{\text{вр}}, \overline{W}, U, C_V$$

Анализ:
 При этих данных свойства азота не сильно отличаются от свойств идеального газа. Для решения задачи будем использовать формулы для идеального газа.

Средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы:

$$\overline{W}_{\text{пост}} = \frac{3}{2} kT,$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана.

Известно, что на каждую степень свободы молекулы газа в среднем приходится одинаковая энергия $\overline{W}_1 = \frac{1}{2} kT$. Так как молекула азота является двухатомной, а, следовательно, обладает двумя вращательными степенями свободы $i_{\text{вр}} = 2$, то средняя кинетическая энергия вращательного движения молекулы азота:

$$\overline{W}_{\text{вр}} = i_{\text{вр}} \frac{1}{2} kT = kT.$$

Полная кинетическая энергия одной молекулы \overline{W} равна сумме средней кинетической энергии поступательного движения $\overline{W}_{\text{пост}}$ и средней кинетической энергии вращательного движения $\overline{W}_{\text{вр}}$:

$$\overline{W} = \overline{W}_{\text{пост}} + \overline{W}_{\text{вр}} = \frac{5}{2} kT.$$

Из уравнения Клапейрона – Менделеева определим количество вещества газа:

$$v = pV/(RT).$$

Кинетическую энергию всех молекул газа находим, умножив среднюю кинетическую энергию одной молекулы \overline{W} на общее количество молекул $N = N_A \cdot v$, т.е. она равняется внутренней энергии идеального газа:

$$U = v \cdot N_A \frac{5}{2} kT = v \frac{5}{2} RT = \frac{5}{2} pV.$$

При преобразовании мы учли, что $N_A k = R$.

Молярную теплоемкость газа при постоянном объеме:

$$C_{\mu v} = \frac{5}{2} R,$$

где i – число степеней свободы молекулы газа ($i = 5$ – для двухатомного газа как азот), $R = 8,31$ Дж/(моль·К) – универсальная газовая постоянная.

Теплоемкость всего газа при постоянном объеме равна:

$$C_v = \nu C_{\mu v} = \frac{i}{2T} pV.$$

Анализ размерности:

$$[W] = [k] \cdot [T] = \text{Дж} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{К} = \text{Дж}.$$

$$[U] = [p] \cdot [V] = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \cdot \text{м}^3 = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}.$$

$$[C_v] = [p] \cdot [V] / [T] = \text{Дж} / \text{К}.$$

Решение:

$$\bar{W}_{\text{пост}} = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 350 = 7,245 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}.$$

$$\bar{W}_{\text{вр}} = kT = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 350 = 4,83 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}.$$

$$\bar{W} = \frac{i}{2} kT = \frac{5}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 350 = 1,208 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}.$$

$$U = \frac{i}{2} pV = \frac{5}{2} \cdot 5 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 6,25 \text{ кДж}.$$

$$C_v = \frac{i}{2T} pV = \frac{5}{2 \cdot 350} \cdot 5 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 350 = 17,86 \text{ Дж/К}.$$

Ответ:

Средняя энергия поступательного движения молекулы азота
 $\bar{W}_{\text{пост}} = 7,245 \cdot 10^{-21}$ Дж.

Средняя энергия вращательного движения молекулы азота
 $\bar{W}_{\text{вр}} = 4,83 \cdot 10^{-21}$ Дж.

Средняя кинетическая энергия молекулы азота
 $\bar{W} = 1,208 \cdot 10^{-20}$ Дж.

Полная энергия хаотического теплового движения молекул газа
 $U = 6,25$ кДж.

Теплоемкость газа при постоянном объеме $C_v = 17,86$ Дж/К.

Пример 4. В цилиндрической емкости вместимостью $V = 3$ л, диаметр которого D равняется высоте h , содержащей азот, создан вакуум с давлением $p = 80$ мкПа. Температура газа $T = 250$ К. Можно ли считать вакуум в емкости высоким?

Дано:

$$\begin{array}{l} \text{N}_2: d = 0,38 \cdot 10^{-9} \text{ м} \\ V = 3 \text{ л} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \\ p = 80 \text{ мкПа} = 8 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \\ T = 250 \text{ К} \\ h = D \\ \hline \bar{\lambda} \gg D? \end{array}$$

Анализ:

Вакуум считается высоким, если длина свободного пробега молекул в нем много больше линейных размеров сосуда. Средняя длина свободного пробега молекул газа равна

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n}$$

где $d = 0,38 \cdot 10^{-9}$ м – эффективный диаметр молекулы азота, n – концентрация молекул.

Зависимость давления p от концентрации n молекул и абсолютной температуры T выражается формулой

$$p = nkT,$$

отсюда

$$n = \frac{p}{k \cdot T},$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана.

Подставляя это соотношение в формулу для $\bar{\lambda}$, получим

$$\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi p d^2}.$$

Определим линейный размер сосуда. Так как сосуд цилиндрический и $D = h$, то диаметр сосуда D будет являться его линейным размером. Тогда из формулы объема цилиндра:

$$V = S \cdot h = \pi D^3 / 4, \quad D = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot V}{\pi}}.$$

Анализ размерности:

$$[\bar{\lambda}] = \frac{[k][T]}{[p][d]^2} = \frac{\text{Дж} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{К}}{\text{Н} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{Н}} = \text{м}.$$

Решение:

Определяем среднюю длину свободного пробега молекул азота

$$\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 250}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot (0,38 \cdot 10^{-9})^2 \cdot 80 \cdot 10^{-6}} = 67,2 \text{ м.}$$

Определяем диаметр сосуда

$$D = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot V}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 3 \cdot 10^{-3}}{\pi}} = 0,18 \text{ м.}$$

Ответ:

Так как длина свободного пробега молекул в сосуде много больше линейных размеров сосуда $\bar{\lambda} = 67,2 \text{ м} \gg D = 0,18 \text{ м}$, то вакуум можно считать высоким.

Пример 5. Водород массой $m = 2 \text{ г}$ расширяется в $\zeta = V_2/V_1 = 3$ раза. Начальная температура газа $T_1 = 300 \text{ К}$. Определить количество теплоты, сообщенное газу и изменение энтропии ΔS , если процесс расширения происходит: а) при постоянном давлении; б) при постоянной температуре.

Дано:

$$\begin{array}{l} \text{H}_2: \mu = 0,002 \text{ кг/моль} \\ m = 2 \text{ г} = 0,002 \text{ кг} \\ T_1 = 300 \text{ К} \\ \zeta = V_2/V_1 = 3 \\ \hline Q_p, \Delta S_p, Q_T, \Delta S_T \end{array}$$

Анализ:

Сначала найдем искомые величины при изобарическом расширении ($p = \text{const}$). При таком расширении элементарное количество теплоты, подводимого к газу для его нагрева на температуру dT равно $dQ = \nu C_{\text{изр}} dT$, где $C_{\text{изр}}$ – молярная изобарическая теплоемкость; $\nu = m/\mu$ – количество вещества, μ – молярная масса водорода.

ства, μ – молярная масса водорода.

Так как процесс изобарный, то $\frac{T_1}{V_1} = \frac{T_2}{V_2}$, откуда $\frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2}{V_1}$ и

$$T_2 = T_1 \frac{V_2}{V_1}.$$

Молярная изобарная теплоемкость вычисляется по формуле

$$C_{\text{изр}} = \frac{(i+2)R}{2},$$

где $R = 8,31 \text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}$ – молярная газовая постоянная, i – число степеней свободы молекулы. Для двухатомной молекулы (например, для

водорода) число степеней свободы равно $i = 3 + 2 = 5$ (три поступательные и две вращательные степени свободы).

Теплота, сообщаемая при изобарическом расширении:

$$Q_p = \nu C_{\mu p}(T_2 - T_1) = \frac{m}{\mu} \frac{i+2}{2} RT_1 \left(\frac{V_2}{V_1} - 1 \right) = \frac{m}{\mu} \frac{i+2}{2} RT_1 (\zeta - 1)$$

По определению дифференциал энтропии определяется выражением

$$dS_p = \frac{dQ}{T} = \frac{m C_{\mu p} dT}{\mu \cdot T}.$$

Проинтегрируем уравнение и получим

$$\Delta S_p = \int_{T_1}^{T_2} \frac{m C_{\mu p} dT}{\mu \cdot T} = \frac{m}{\mu} C_{\mu p} \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right),$$

где T_1, T_2 – начальная и конечная температура газа.

Поэтому

$$\Delta S_p = \frac{m}{\mu} \frac{(i+2)R}{2} \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) = \frac{m}{\mu} \frac{(i+2)R}{2} \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = \frac{m}{\mu} \frac{(i+2)}{2} R \ln \zeta.$$

При постоянной температуре сообщаемая газу теплота :

$$\delta Q_T = p dV = \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V},$$

$$Q_T = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \zeta.$$

Приращение энтропии:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{m}{\mu} R \frac{dV}{V},$$

$$\Delta S_T = \frac{m}{\mu} R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} R \ln \zeta.$$

Анализ размерности:

$$[Q] = \frac{[m]}{[\mu]} [R] \cdot [T] = \frac{\text{кг}}{\text{кг} \cdot \text{моль}^{-1}} \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \text{К} = \text{Дж}.$$

$$[\Delta S] = \frac{[m]}{[\mu]} [R] = \frac{\text{кг}}{\text{кг} \cdot \text{моль}^{-1}} \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} = \text{Дж/К}.$$

Решение:

Теплота, сообщаемая водороду при изобарическом расширении:

$$Q_p = \frac{m}{\mu} \frac{i+2}{2} RT_1(\zeta - 1) = \frac{0,002}{0,002} \frac{5+2}{2} 8,31 \cdot 300 \cdot 2 = 17,45 \text{ кДж.}$$

Изобарическое приращение энтропии:

$$\Delta S_p = \frac{m}{\mu} \frac{(i+2)}{2} R \ln \zeta = \frac{0,002}{0,002} \frac{5+2}{2} 8,31 \cdot \ln 3 = 32 \text{ Дж/К.}$$

Теплота, сообщаемая при изобарическом расширении:

$$Q_T = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \zeta = \frac{0,002}{0,002} 8,31 \cdot 300 \cdot \ln 3 = 2,74 \text{ кДж.}$$

Изотермическое приращение энтропии:

$$\Delta S_T = \frac{m}{\mu} R \ln \zeta = \frac{0,002}{0,002} 8,31 \cdot \ln 3 = 9,13 \text{ Дж/К.}$$

Ответ:

Теплота, сообщаемая при изобарическом расширении:

$$Q_p = 17,45 \text{ кДж.}$$

Изобарическое приращение энтропии: $\Delta S_p = 32 \text{ Дж/К.}$

Теплота, сообщаемая при изобарическом расширении:

$$Q_T = 2,74 \text{ кДж.}$$

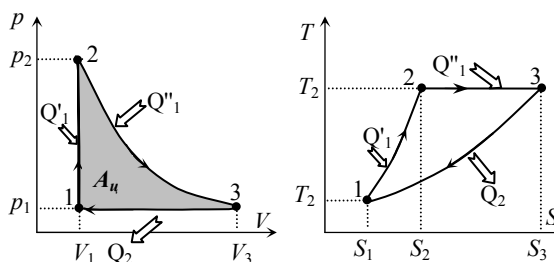
Изотермическое приращение энтропии: $\Delta S_T = 9,13 \text{ Дж/К.}$

Пример 6: Рабочим телом в тепловой машине является трехатомный идеальный газ. Из начального состояния 1 газ изохорно нагревается, увеличив температуру в 4 раза. Затем происходит изотермическое расширение и изобарный переход в начальное состояние. Определить КПД цикла.

Дано:

$$\begin{array}{l} i = 6 \\ n = T_2/T_1 = 4 \\ \hline \eta \end{array}$$

Анализ:



Коэффициент полезного действия цикла (КПД) тепловой машины определяется выражением:

$$\eta = \frac{A_{\text{ц}}}{Q_1} = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1},$$

где $A_{\text{ц}}$ – работа цикла (на p - V – диаграмме равняется площади закрашенной фигуры; Q_1 и Q_2 – подводимая и отводимая теплота. В данном цикле рабочее тело получает теплоту в ходе изохорического процесса $Q_1' = \nu C_{\text{ув}}(T_2 - T_1)$ и в ходе изотермического расширения. Так как в условии задачи значения термодинамических параметров в явном виде не приведены цикл будем анализировать, используя T - S – диаграмму. Через разность энтропий теплота, подводимая при изотермическом расширении: $Q_1'' = T_2 (S_3 - S_2)$. Общая подводимая теплота:

$$Q_1 = \nu C_{\text{ув}}(T_2 - T_1) + T_2 (S_3 - S_2).$$

При изобарическом возвращении газа в исходное состояние 1 теплота отводится:

$$|Q_2| = \nu C_{\text{уп}}(T_2 - T_1).$$

Воспользуемся известными формулами для изменения энтропии:

$$S_3 - S_1 = \nu C_{\text{ув}} \ln \frac{T_2}{T_1} + \nu R \ln \frac{V_3}{V_1},$$

$$S_2 - S_1 = \nu C_{\text{ув}} \ln \frac{T_2}{T_1} + \nu R \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Второе уравнение вычтем из первого:

$$S_3 - S_2 = \nu R \left(\ln \frac{V_3}{V_1} - \ln \frac{V_2}{V_1} \right) = \nu R \ln \frac{V_3 \cdot V_1}{V_1 \cdot V_2} = \nu R \ln n.$$

Термодинамические параметры газа в трех точках связаны уравнением Клапейрона:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p_3 V_3}{T_3}.$$

Учитывая, что $V_1 = V_2$ и $T_2 = T_3$ получаем соотношение

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{V_3}{V_2} = n.$$

Кроме того $R = C_{\text{мп}} - C_{\text{мв}}$.
Отсюда

$$\eta = 1 - \frac{C_{\text{мп}}(T_2 - T_1)}{C_{\text{мв}}(T_2 - T_1) + T_2 R \ln(n)} = 1 - \frac{1}{\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{1-\frac{1}{\gamma}} \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \ln(n)} =$$

$$= 1 - \frac{\gamma(n-1)}{n-1+(\gamma-1)n \ln(n)} = 1 - \frac{(i+2)(n-1)}{i(n-1+\frac{2n}{i} \ln(n))}.$$

При преобразованиях применили промежуточное обозначение

$$\gamma = C_{\text{мп}}/C_{\text{мв}} = \frac{i+2}{i},$$

где i – число степеней свободы молекулы.

Анализ размерности:

Как видим в полученной формуле все величины оказались безразмерными, поэтому КПД также является безразмерной величиной.

Решение:

$$\eta = 1 - \frac{(i+2)(n-1)}{i(n-1+\frac{2n}{i} \ln(n))} = 1 - \frac{(6+2)(4-1)}{6(4-1+\frac{2 \cdot 4}{6} \ln 4)} = 0,175.$$

Ответ:

Термический коэффициент полезного действия цикла $\eta = 17,5 \%$.

2.3. Задания для РГР 12. Термодинамика.

Задачи 1.2.1

Задачи 121. Варианты: 1,7, 13,19, 25, 31

В сварочном цехе стоит N баллонов ацетилена(C_2H_2) цилиндрической формы высотой h и диаметром d . Все баллоны включены в общую магистраль. После использования в течении смены давление в баллонах упало с p_1 до p_2 , а температура от t_1 до t_2 . Определить секундный расход ацетилена и использованную тепловую мощность.

№ вар.	1	7	13	19	25	31
N	100	70	130	90	25	31
h , м	1	0,7	1,3	0,9	1,25	1,1
d , см	31	37	33	29	25	31
p_1 , ат	51	47	43	49	45	41
p_2 , ат	15	7	13	9	5	11
t_1 , °C	21	27	23	29	25	31
t_2 , °C	11	17	13	19	15	11

Задачи 121. Варианты: 2, 8, 14, 20, 26, 32

В закрытом сосуде объемом V находится азот массой m_1 и кислород массой m_2 при температуре t_1 . Найти давление и плотность газовой смеси. На сколько изменится давление, если температура смеси понизится на Δt ? Какая при этом теплота отдается окружающей среде?

№ вар.	2	8	14	20	26	32
V , м ³	2	1,8	2,4	2	2,6	3,2
m_1 , кг	2	1,8	1,4	1,2	1,6	3,2
m_2 , кг	1,5	2,5	2,4	2,2	2,8	1,6
t , °C	32	28	24	20	28	32
Δt , °C	12	18	14	12	18	16

Задачи 121. Варианты: 3, 9, 15, 21, 27, 33

Сухой атмосферный воздух содержит в основном азот, кислород и аргон массовые доли которых, соответственно g_1 , g_2 , g_3 . Определить эффективную молярную массу воздуха и мольные доли отдельных компонент. Определить парциальные давления составляющих и плотность воздуха при давлении p и температуре t . Какую теплоту необходимо сообщить воздуху с объемом V , чтобы температуру повысить на Δt при постоянном объеме?

Данные для задач 121

№ вар.	3	9	15	21	27	33
g_1	75,3	75,9	75,5	75,1	75,7	75,2
g_2	23,3	22,9	23,5	23,2	23,0	23,2
g_3	1,4	1,2	1,0	1,7	1,3	1,6
p_1 , ат	1,3	1,9	2,5	2,1	2,7	3,2
t , °C	23	29	25	21	27	32
V , м ³	3	9	5	2	7	3
Δt , °C	30	90	15	21	27	33

Задачи 121. Варианты: 4, 10, 16, 22, 28, 34

В сосуде с объемом V при температуре t_1 и давлении p находится смесь газов G_1 и G_2 . Определить парциальные давления компонент, если масса первого компонента m_1 . На сколько изменится внутренняя энергия смеси, если температуру изобарически повысить до t_2 ?

№ вар.	4	10	16	22	28	34
V , м ³	4	1	1,6	2,2	2,8	3,4
t_1 , °C	40	100	16	22	28	134
p , ат	4	1	1,6	2,2	2,8	1,4
G_1	H ₂	O ₂	N ₂	CO	CO ₂	H ₂ O
G_2	N ₂	SO ₂	He	N ₂	N ₂	CO ₂
m_1 , кг	4	1	1,6	2,2	2,8	1,4
t_2 , °C	400	200	160	220	280	234

Задачи 121. Варианты: 5, 11, 17, 23, 29, 35

Газ G занимавший при давлении p_1 объем V_1 , расширяют до объема V_2 , при этом давление падает до значения p_2 . Процесс происходит сначала по адиабате, затем по изохоре. Определить работу против внешнего давления, изменение внутренней энергии газа и количество поглощенной теплоты при этом переходе.

Данные для задач 121

№ вар.	5	11	17	23	29	35
G	CO ₂	N ₂	O ₂	SO ₂	CO	H ₂ O
p_1 , ат	5	11	17	23	29	35
p_2 , ат	2	5	7	3	9	15
V_1 , л	5	11	17	23	29	5
V_2 , л	10	22	34	46	60	11

Задачи 121. Варианты: 6, 12, 18, 24, 30, 36

Смесь газов G₁ и G₂ в количестве ν молей занимает объем V_1 при температуре t_1 и изотермически расширяется до объема V_2 . Мольная доля первого компонента смеси η_1 . Определить начальное давление газа, работу при расширении, изменение внутренней энергии газа и количество поглощенной теплоты.

№ вар.	6	12	18	24	30	36
G ₁	H ₂	CO ₂	O ₂	He	Ar	CO
G ₂	N ₂	CO	SO ₂	O ₂	CO ₂	Ar
ν	6	12	18	24	3	3,6
η_1	0,6	0,2	0,8	0,4	0,3	0,36
V_1 , л	6	1,2	1,8	2,4	3	2
V_2 , л	18	3	3,8	4,2	6	4
t_1 , °C	60	120	180	24	30	36

Задачи 1.2.2

Задачи 122. Варианты: 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33

В сферическом резервуаре радиусом R хранится попутный газ, состав которого приведен в таблице. Давление в резервуаре p_1 , температура газа t_1 . Некоторое количество газа использовали для получе-

ния водяного пара. Начальная температура воды $t_B=t_1$. Температура газа в резервуаре при этом понизилась до t_2 , а давление на Δp . Определить, какое количество водяного пара получили, какое количество теплоты поглощается из окружающей среды, пока температура газа в резервуаре не станет прежней? Какое давление установится в резервуаре?

Данные для задач 122

№вар	Состав газа, об%				$t_1, ^\circ\text{C}$	$p_1, \text{ат}$	$t_2, ^\circ\text{C}$	$\Delta p, \text{ат}$	$\eta, \%$	$R, \text{м}$
	CH_4	C_2H_6	C_3H_8	N_2						
1	41	21	11	27	21	31	1	11	81	1,1
5	45	15	15	25	25	35	5	15	85	1,5
9	49	19	19	13	19	39	9	19	89	1,9
13	53	23	13	11	23	43	3	23	83	1,3
17	57	17	7	19	17	37	7	17	87	1,7
21	51	21	11	17	21	41	11	21	81	2,1
25	65	15	15	5	25	45	15	25	85	1,5
29	59	18	12	11	29	39	19	19	79	1,9
33	53	23	11	13	33	43	17	23	83	1,3

Задачи 122. Варианты: 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34

В сферической емкости диаметром D хранится природный газ при температуре t_1 и давлении p_1 . Состав газа приведен в таблице. Путем параллельного соединения к емкости n цилиндрических газовых баллонов радиуса r и высотой h осуществляют их заправку. Температура оставшегося в баллонах газа t_1 , давление p_0 , а состав газа такой же, что и в емкости. Процесс заправки можно считать адиабатическим. Определить давление в баллонах сразу же после заполнения. Какое количество газа израсходовано из емкости? Каким станет давление в баллонах и в емкости, когда температура газа станет равной первоначальной? Какое количество теплоты поглотится при этом из окружающей среды?

№ вар.	Состав газа, об %				$D, \text{м}$	$r, \text{см}$	$h, \text{м}$	n	$t_1, ^\circ\text{C}$	$p_1, \text{ат}$	$p_0, \text{ат}$
	CH_4	C_2H_6	C_3H_8	N_2							
2	92	3,2	1,2	3,6	2,2	12	1,2	120	22	42	1,2
6	87	3,7	5,7	3,6	2,6	17	1,7	107	17	37	1,7
10	91	3,1	2,1	3,8	2,1	11	1,1	110	11	41	1,1

14	85	5	5	5	2,4	15	1,5	115	15	45	1,5
18	89	4,9	3,9	2,2	2,8	19	1,9	109	19	39	1,9
22	83	8,3	4,3	4,4	2,2	13	1,3	123	23	33	2,3
26	87	4,7	3,7	4,6	2,6	17	1,7	117	27	27	2,7
30	90	4	3	3	3,0	18	1,3	130	30	43	1,3
34	92	3	3	2	3,4	17	1,4	104	14	44	1,4

Задачи 122. Варианты 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35

Сферическая емкость диаметром D заполняется коксовым газом до давления p_2 , подводимым по газопроводной трубе с внутренним диаметром d (в дюймах). Давление газа p . Начальная температура газа в трубе и в емкости t_1 , а начальное давление газа в емкости p_1 . К концу процесса температура газа поднимается до t_2 . Какая средняя скорость газа в трубе, если емкость заполняется за время τ ? Какое количество теплоты отдается окружающей среде после заполнения объема, пока газ остывает до первоначальной температуры? Какое давление при этом установится в емкости?

№ вар.	D , м	d'	p , ат	p_1 , ат	p_2 , ат	t_1 , °C	t_2 , °C	τ , час	Состав газа, об%			
									H ₂	CO	CH ₄	N ₂
3	3	3/4	53	3	33	-13	63	2,3	23	13	53	11
7	2,6	1	56	6	46	16	56	2,6	26	6	62	6
11	3,1	1	50	1	40	-11	40	2,4	30	10	50	10
15	3,4	5/4	54	4	34	15	34	3,4	34	14	38	14
19	2,8	9/8	48	1,8	28	19	38	2,8	38	18	26	18
23	2,2	1/2	52	2,2	32	-13	32	2,2	42	12	34	12
27	2,6	7/8	46	2,6	36	-16	36	2,6	36	16	42	6
31	3	3/4	50	3,0	30	-1	30	2,3	23	13	54	10
35	3,5	5/4	45	2,5	35	3	35	2,5	25	7	55	13

Задачи 122. Варианты: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32

Газовый баллон имеет цилиндрическую форму диаметром d , торцы которого сделаны в виде полусфер. Длина цилиндрической части h . В баллоне содержится природный газ при начальном давлении p_1 и температуре t_1 . Газ расходуется для получения талой воды из льда. Давление газа при этом снижается до p_2 , а температура до t_2 . Какое количество талой воды можно получить, если к.п.д. газовой горелки η ?

Данные для задач 1.2.3.

№ вар.	d , см	h , см	p_1 , ат	p_2 , ат	t_1 , °C	t_2 , °C	η , %	Состав газа, об%			
								H ₂	CO	CH ₄	N ₂
4	24	140	44	4	24	4	84	94	4	1	1
8	28	108	38	8	18	8	78	88	3	4	5
12	32	112	42	2	22	2	82	92	5	2	1
16	26	116	36	6	26	6	86	86	6	4	4
20	30	120	40	2	20	2	92	90	5	3	3
24	34	124	34	4	24	4	84	84	4	6	6
28	28	128	34	4	18	4	88	78	12	8	2
32	32	132	32	3	32	9	92	82	8	6	4

Задачи 1.2.3.

Задачи 123. Варианты: 1, 7, 13, 19, 25, 31

Смесь азота и гелия при температуре t находится под давлением p . Масса азота составляет η часть от общей массы смеси. Найти плотность, молярную и удельную теплоемкость смеси, концентрацию молекул каждого из газов, а также среднюю кинетическую энергию хаотического движения молекул.

№ вар.	1	7	13	19	25	31
t , °C	10	70	13	19	25	31
p , 10 ² Па	1,0	7	1,3	1,9	2,5	3,1
η	0,1	0,7	0,13	0,19	0,25	0,31

Задачи 123. Варианты: 2, 8, 14, 20, 26, 32

Найти среднюю квадратичную, среднюю арифметическую скорость, а также среднюю кинетическую энергию поступательного движения и среднюю полную кинетическую энергию молекул смеси азота и кислорода при температуре t . Кислород составляет η часть от всего объема смеси. Определить полную энергию всех молекул каждого из газов, если масса смеси m .

№ вар.	2	8	14	20	26	32
$t, ^\circ\text{C}$	20	80	14	200	26	32
η	0,2	0,8	0,14	0,2	0,26	0,32
$m, \text{г}$	200	80	14	20	26	32

Задачи 123. Варианты: 3, 9, 15, 21, 27, 33

Площадь окна S , расстояние между рамами L . Наружное стекло имеет температуру t_1 , внутреннее t_2 . Давление воздуха между рамами атмосферное, а температура его линейно изменяется вдоль L от t_1 до t_2 . Определить полную энергию молекул и полное число молекул воздуха между рамами. Какое количество тепла за счет теплопроводности передается через раму?

№ вар.	3	9	15	21	27	33
$S, \text{м}^2$	3	0,9	1,5	2,1	2,7	3,3
$L, \text{см}$	30	9	15	21	27	13
$t_1, ^\circ\text{C}$	-3	-9	-15	-21	-27	-23
$t_2, ^\circ\text{C}$	30	19	15	21	17	23

Задачи 123. Варианты: 4, 10, 16, 22, 28, 34

Рассчитать среднюю длину свободного пробега молекул газа G , коэффициент диффузии и коэффициент динамической вязкости при давлении p и температуре t . Как изменяются найденные величины в результате двукратного увеличения объема газа: а) при постоянном давлении; б) при постоянной температуре? Эффективный диаметр молекул d .

№ вар	4	10	16	22	28	34
G	N_2	He	Ar	CO_2	H_2	N_2
$p, 10^5 \text{Па}$	0,4	1,0	1,6	2,2	2,8	0,34
$t, ^\circ\text{C}$	14	10	16	22	28	34

$d, 10^{-10} \text{ м}$	3,7	1,8	3	3,2	2,3	3,4
-------------------------	-----	-----	---	-----	-----	-----

Задачи 123. Варианты: 5, 11, 17, 23, 29, 35

Температура газа $G - t$. Определить долю молекул, скорость которых лежит в интервале от v_1 до v_2 , а также среднеквадратичную и среднеарифметические скорости.

№ вар	5	11	17	23	29	35
G	N ₂	O ₂	SO ₂	CO	CO ₂	H ₂
$t, ^\circ\text{C}$	50	11	17	23	29	25
$v_1, \text{ м/с}$	500	400	500	530	450	350
$v_2, \text{ м/с}$	600	500	700	600	550	450

Задачи 123. Варианты: 6, 12, 18, 24, 30, 36

Газ G нагревают от температуры t_1 до t_2 . Рассчитать для каждой из указанных температур значения функции Максвелла при скоростях : а) $v = v_m$; б) $v = v_m + 200 \text{ м/с}$; в) $v = v_m - 200 \text{ м/с}$; г) $v = 2v_m$. По полученным значениям построить графики функций плотности распределения $f(v, T)$ для каждой из температур. Определить, во сколько раз изменяется при увеличении температуры доля молекул, скорости которых находятся в интервале от v_1 до v_2 .

№ вар	6	12	18	24	30	36
G	O ₂	N ₂	H ₂	CO	CO ₂	Ar
$t_1, ^\circ\text{C}$	-6	-12	-18	-24	-30	-26
$t_2, ^\circ\text{C}$	256	262	278	244	300	360
$v_1, \text{ м/с}$	460	200	380	400	300	360
$v_2, \text{ м/с}$	560	300	480	500	400	460

Задачи 1.2.4.

Задачи 124. Варианты: 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31

Газ G массой m при давлении p занимает объем V . Определить температуру газа, если: 1) газ реальный; 2) газ идеальный. Определить

внутреннюю энергию реального газа и работу межмолекулярных сил притяжения, если объем газа увеличивается в два раза

№ вар	1	6	11	16	21	26	31
G	H ₂ O	N ₂	H ₂	SO ₂	O ₂	CO ₂	CH ₄
<i>m</i> , кг	0,8	6	2	7	8	6,6	3,1
<i>p</i> , МПа	0,1	0,15	0,2	0,1	0,18	0,1	0,31
<i>V</i> , м ³	3	2,5	2,6	3,5	4	3,75	0,16

Задачи 124. Варианты: 2, 7, 12, 17, 22, 27, 32

Плотность газа *G* – *ρ*, его давление *p*. Определить температуру и внутреннюю энергию газа, если: 1) газ реальный; 2) газ идеальный. Определить работу межмолекулярных сил притяжения, если объем газа увеличивается в два раза.

№ вар.	2	7	12	17	22	27	32
G	CO ₂	H ₂ O	N ₂	He	Ar	O ₂	CH ₄
<i>ρ</i> , кг/м ³	200	180	140	90	120	100	132
<i>p</i> , МПа	8	11	10	2	12	9	3,2

Задачи 124. Варианты: 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33

Газ *G* массой *m* находится при температуре *t* в сосуде вместимостью *V*. Определить давление и внутреннюю энергию газа, если 1) газ реальный; 2) газ идеальный. Определить работу межмолекулярных сил притяжения, если объем газа увеличивается в два раза

№ вар	3	8	13	18	23	28	33
G	H ₂ O	Ar	He	N ₂	O ₂	CO ₂	CH ₄
<i>m</i> , кг	3	1,5	0,8	2,4	2,5	2,2	3,3
<i>T</i> , К	300	400	450	250	320	290	330
<i>V</i> , л	35	25	30	28	40	30	33

Задачи 124. Варианты: 4, 9, 14, 19, 24, 29, 34

Вычислить температуру и плотность реального газа *G* в критическом состоянии, а также внутреннюю энергию и внутреннее давление.

№ вар	4	9	14	19	24	29	34
G	CO ₂	H ₂ O	N ₂	H ₂	O ₂	SO ₂	CH ₄

Задачи 124. Варианты: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35

Реальный газ G в количестве ν расширяется в вакуум, в результате чего объем газа увеличивается от $V_1 = 1$ л до V_2 . Какое количество теплоты Q необходимо сообщить газу, чтобы его температура осталась неизменной?

№ вар.	5	10	15	20	25	30	35
G	Ar	O ₂	H ₂ O	N ₂	H ₂ O	CO ₂	CH ₄
ν моль	0,5	0,25	0,4	0,3	0,36	0,45	0,35
V_2 , л	4	5	6	5,5	4,5	5,8	3,5

3. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

3.1. Основные законы и формулы

Французский физик Ш. Кулон в 1785 г. установил закон взаимодействия между двумя точечными неподвижными зарядами q_1 и q_2 (рис. 3.1): *сила взаимодействия двух точечных зарядов прямо пропорциональна произведению этих зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:*

$$\mathbf{F}_{21} = k_o \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{21} ,$$

где $k_o = 8,9875 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$ – коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц; $\hat{\mathbf{r}}_{21}$ – единичный вектор, направленный от первого заряда ко второму. В системе СИ коэффициент k_o иногда выражают в «рационализированном» виде:

$$k_o = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} , \text{ где } \epsilon_o = 8,8542 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2} \text{ – электрическая постоянная.}$$

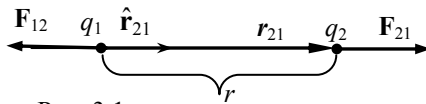


Рис. 3.1

Обозначим через F_o силу взаимодействия между зарядами в вакууме, тогда в алгебраической форме закон Кулона запишется в виде:

$$F_0 = k_0 \frac{q_1 q_2}{r^2} \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Отношение силы взаимодействия между двумя зарядами в вакууме F_0 к силе взаимодействия между ними в среде F (при отсутствии других тел) называется *диэлектрической проницаемостью среды*:

$$\epsilon = \frac{F_0}{F}.$$

Причем $\epsilon \geq 1$, т.е. в любой среде сила взаимодействия между зарядами меньше, чем в вакууме. Закон Кулона в среде записывается в виде:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}.$$

Пусть в поле точечного заряда q находится заряд q_0 (рис. 3.2). На пробный заряд q_0 со стороны заряда q действует сила

$$\mathbf{F} = \frac{k_0}{\epsilon} \frac{q \cdot q_0}{r^2} \hat{\mathbf{r}},$$

которая зависит как от величины заряда q , создающего исследуемое поле, так и от пробного заряда q_0 . Величина

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} = \frac{k_0}{\epsilon} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

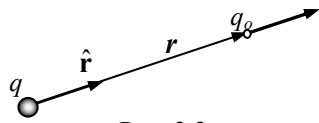


Рис. 3.2

не зависит от значения q_0 , а является лишь характеристикой поля заряда q . Эту величину называют *напряженностью электрического поля* – это силовая характеристика поля, равная силе, действующей на единичный, положительный точечный заряд, помещенный в исследуемую точку поля: $\mathbf{E} = \mathbf{F}/q_0$.

Отсюда, *электростатическая сила*, действующая на заряд q_0 :

$$\mathbf{F} = q_0 \mathbf{E}.$$

Единица измерения напряженности: $[E] = [F]/[q] = \text{Н/Кл}$.

Таким образом, напряженность поля точечного заряда

$$\mathbf{E} = \frac{k_0}{\epsilon} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от заряда r .

Опыт показывает, что к кулоновским силам применим принцип независимости действия сил, т.е. результирующая напряженность поля от системы точечных зарядов равна векторной сумме напряженностей отдельных зарядов:

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i.$$

Потенциал электростатического поля – энергетическая характеристика поля, численно равняется потенциальной энергии единич-

ного, положительного точечного заряда, помещенного в рассматриваемую точку поля:

$$\varphi = W_{\Pi} / q_0.$$

Единица измерения потенциала $[\varphi] = [W]/[q] = \text{Дж/Кл} = \text{В}$ (Вольт).

Потенциал поля точечного заряда: $\varphi = \frac{k_0 q}{\varepsilon r}$.

Как видим потенциал поля точечного заряда убывает с увеличением расстояния r от заряда. Из определения потенциала следует, что $W_{\Pi} = q_0 \varphi$. Тогда работу перемещения заряда q_0 из точки 1 в точку 2 можно представить в виде:

$$A_{1-2} = q_0 (\varphi_1 - \varphi_2).$$

С другой стороны, $A_{1-2} = \int_1^2 dA = q_0 \int_1^2 E \cos \alpha dl$. Отсюда

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E \cos \alpha dl.$$

Потенциал поля системы точечных зарядов:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \frac{k_0}{\varepsilon} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}.$$

Система, состоящая из двух одинаковых по величине, но противоположных по знаку точечных зарядов $-q$ и $+q$, расстояние l между которыми мало по сравнению с расстоянием r от этой системы до рассматриваемых точек поля называется *электрическим диполем* (рис. 3.3). Произведение модуля зарядов q диполя на плечо l называется *электрическим дипольным моментом*:

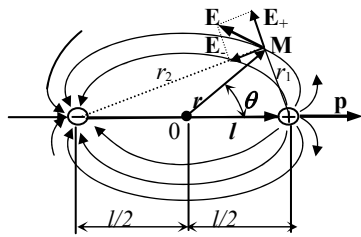


Рис. 3.3

$$\mathbf{p} = ql.$$

Для вычисления напряженности поля в произвольной точке M (рис. 3.3) необходимо выполнить векторное сложение напряженностей зарядов, а модуль результирующего вектора определить по теореме косинусов:

$$E = \frac{k_0}{\varepsilon} \frac{p}{r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2\theta}.$$

Потенциал поля электрического диполя в любой точке находится алгебраическим суммированием потенциалов отдельных зарядов:

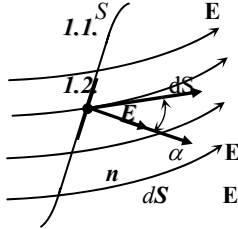
$$\varphi = \frac{k_0 q}{\varepsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{k_0 p \cos \theta}{\varepsilon r^2}.$$

Напряженность электростатического поля равна градиенту потенциала, но направлена в противоположную сторону

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad} \varphi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k} \right).$$

Знак «-» показывает, что вектор \mathbf{E} направлен в сторону убывания потенциала.

Пусть в электростатическом поле находится произвольная поверхность S (рис. 3.4): dS – элемент поверхности S ; \mathbf{n} – нормаль к dS – единичный вектор, перпендикулярный к dS ; $d\mathbf{S} = dS\mathbf{n}$ – направленная площадка (псевдовектор); α – угол между \mathbf{n} и \mathbf{E} .



Величина

$$d\Phi_E = E \cos \alpha dS \text{ или } d\Phi_E = \mathbf{E} d\mathbf{S}$$

называется *потоком вектора напряженности* через элементарную площадку dS .

Поток вектора напряженности через поверхность S находится как сумма потоков через все элементарные площадки:

$$\Phi_E = \iint_S d\Phi_E = \iint_S E \cos \alpha dS.$$

Поток вектора напряженности электростатического поля через поверхность S есть скалярная величина, численно равная числу силовых линий напряженности, пронизывающих данную поверхность. Если поверхность S замкнута, то

$$\Phi_E = \oiint_S E \cos \alpha dS.$$

Единицей потока \mathbf{E} в системе СИ является: $[\Phi_E] = (\text{Н} \cdot \text{м}^2) / \text{Кл} = \text{В} \cdot \text{м}$.

Принято считать силовые линии, выходящие из замкнутой поверхности, положительными, входящие – отрицательными. Пусть внутри произвольной замкнутой поверхности находятся n зарядов (рис. 3.5). Тогда *поток вектора напряженности электростатического поля через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на $\varepsilon_0 \varepsilon$* .

$$\Phi_E = \oiint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \oiint_S \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^n \oiint_S \mathbf{E}_i d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \sum_{i=1}^n q_i.$$

Следовательно,

$$\oiint_S E \cos \alpha dS = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \sum_{i=1}^n q_i .$$

Данная формула является математическим выражением *теоремы Гаусса* для электростатического поля:

Объемная плотности заряда:

$$\rho = dq/dV,$$

где $dq = \rho dV$ – заряд малого объема dV .

В результате теорема Гаусса в общем виде приобретает вид:

$$\oiint_S E \cos \alpha dS = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \iiint_V \rho dV .$$

Поверхностная плотности заряда:

$$\sigma = \frac{dq}{dS}, \quad \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2},$$

где $dq = \sigma dS$ – заряд площадки dS .

$$2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0 \varepsilon} .$$

Напряженность поля бесконечной плоскости

$$E = \frac{\sigma S}{2\varepsilon_0 \varepsilon} .$$

Напряженность электростатического поля между двумя разноименно заряженными, бесконечными, параллельными плоскостями определяется выражением

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} .$$

Разность потенциалов между плоскостями:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E \cos \alpha dl = E \int_1^2 dl = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} \int_1^2 dl = \frac{\sigma \cdot l}{\varepsilon_0 \varepsilon} .$$

Так как поле между пластинками однородное, то

$$E = (\varphi_1 - \varphi_2)/l = U/l,$$

Здесь $U = \varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов между плоскостями.

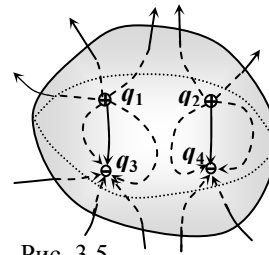


Рис. 3.5

Напряженности электростатического поля за пределами сферической поверхности (рис. 3.6):

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q}{r^2}.$$

Данная формула совпадает с формулой для напряженности поля точечного заряда, который находился бы в центре сферы.

Потенциал поля вне сферы

$$\varphi = \int_r^{\infty} E dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q}{r}.$$

Внутри заряженной поверхности зарядов нет: $\sum q_i = 0$. Исходя из теоремы Гаусса, при $r < R$ напряженность поля внутри заряженной сферической поверхности равна нулю $E = 0$.

Потенциал в любой точке внутри сферической поверхности имеет такое же значение, что и на поверхности сферы:

$$\varphi_0 = \varphi_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q}{R} = \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon} R.$$

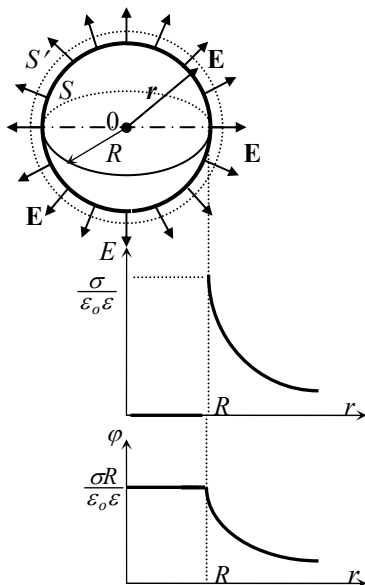


Рис. 3.6

Приобретение как полярными, так и неполярными диэлектриками суммарного дипольного момента под действием внешнего электрического поля называется *поляризацией диэлектрика*.

Степень поляризации (количественно) характеризуется вектором поляризованности \mathbf{P} , равным отношению суммарного дипольного момента диэлектрика к его объему:

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i / \Delta V,$$

где \mathbf{p}_i – дипольный момент отдельной молекулы в объеме ΔV .

Для большого класса диэлектриков:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E},$$

где ϵ – безразмерная величина, называемая *диэлектрической восприимчивостью диэлектрика* ($\epsilon > 0$).

Все молекулы неполярного диэлектрика в электрическом поле приобретают одинаковые индуцированные дипольные моменты \mathbf{p}_e .

Поэтому поляризованность $\mathbf{P} = n \mathbf{p}_e$, где n – концентрация молекул. Следовательно, $\mathfrak{e} = \alpha n$, где $\alpha = 4\pi R^3$ – *поляризуемость молекулы*, зависящая только от радиуса R .

Диэлектрическую восприимчивость полярных диэлектриков можно вычислить по формуле Дебая–Ланжевена:

$$\mathfrak{e} = n p_e^2 / (3 \varepsilon_0 k T).$$

Численное значение напряженности электростатического поля в диэлектрике

$$E = E_0 / (1 + \mathfrak{e}).$$

По определению отношение напряженности поля в вакууме к напряженности поля в среде называется диэлектрической проницаемостью среды: $\varepsilon = E_0 / E$, поэтому:

$$\varepsilon = 1 + \mathfrak{e}.$$

С целью исключения неудобств, связанных с прерывностью напряженности на границах раздела сред, ввели дополнительную векторную величину \mathbf{D} , которая называется *вектором электрического смещения* (вектором индукции): $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$.

Электрическое смещение не зависит от свойств среды, т.е. от ε . Учитывая, что $\varepsilon = 1 + \mathfrak{e}$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \mathfrak{e} \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P},$$

где $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathfrak{e} \mathbf{E}$ – поляризованность. Единица измерения \mathbf{D} : $[D] = \text{Кл/м}^2$.

Теорема Гаусса для потока электрического смещения \mathbf{D}

$$\oiint_S \mathbf{D} \cos \alpha dS = \iiint_V \rho \cdot dV.$$

Как показывает опыт, заряд проводника пропорционален его потенциалу: $q = C\varphi$. Коэффициент пропорциональности C :

$$C = \frac{q}{\varphi}$$

называется *электрической емкостью уединенного проводника*.

Емкость уединенного проводника равняется заряду, который необходимо сообщить проводнику, чтобы его потенциал увеличился на единицу.

Например, потенциал уединенного шара

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R},$$

отсюда емкость шара $C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R$.

Единица измерения емкости

$$[C] = \frac{[q]}{[\varphi]} = \frac{\text{Кл}}{\text{В}} = \text{Ф (фарад)}.$$

Система из двух проводников (*обкладок*), разделенных тонким слоем диэлектрика, называется *конденсатором* (рис. 3.7).

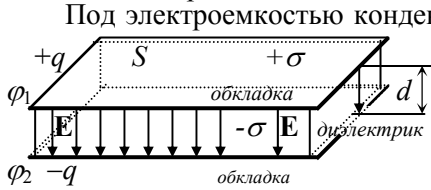


Рис. 3.7

Под *электроемкостью конденсатора*, или *взаимной емкостью* понимается физическая величина, численно равная заряду, который необходимо сообщить одному из проводников, чтобы разность потенциалов между ними увеличить на один вольт:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}.$$

Электроемкость плоского конденсатора:

$$C = \epsilon_0 \epsilon S / d.$$

Электроемкость цилиндрического конденсатора

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon \cdot l}{\ln(r_2/r_1)},$$

где r_1 и r_2 – радиусы внутреннего и внешнего цилиндров; l – длина цилиндра.

Емкость сферического конденсатора

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

При параллельном соединении конденсаторов (рис. 3.8) разность потенциалов (напряжение) между обкладками каждого конденсатора одинакова:

$$U_1 = U_2 = \dots = U_n = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Суммарный заряд равняется сумме зарядов отдельных конденсаторов:

$$q = q_1 + q_2 + \dots + q_n.$$

Общая емкость параллельно соединенных конденсаторов:

$$C = \sum_{i=1}^n C_i.$$

При последовательном соединении конденсаторов (рис. 3.9) общая разность потенциалов распределяется между отдельными конденсаторами:

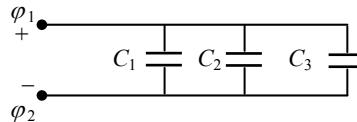


Рис. 3.8

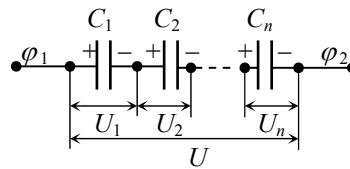


Рис. 3.9

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U = U_1 + U_2 + \dots + U_n.$$

Все конденсаторы заряжаются одинаковыми зарядами, равными заряду всей батареи:

$$q_1 = q_2 = \dots = q_n = q.$$

Общая емкость при последовательном соединении:

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}.$$

Энергия электрического поля заряженного конденсатора;

$$W_E = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C},$$

где $U = \varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов между обкладками.

Энергия, заключенная в единице объема называется *удельной* или *объемной плотностью энергии электростатического поля*:

$$w = \frac{W_E}{V} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \cdot E^2}{2} = \frac{ED}{2}.$$

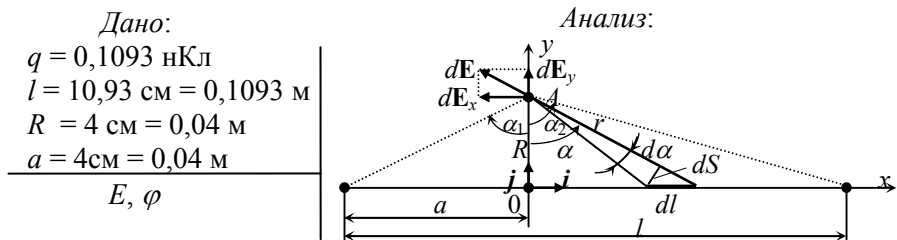
Полная энергия поля системы точечных зарядов:

$$W_E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i,$$

где q_i – заряд i -го точечного проводника; φ_i – его потенциал (относительно бесконечно удаленной точки) в электростатическом поле всех остальных зарядов. Предполагается, что среда электрически изотропна и не обладает сегнетоэлектрическими свойствами.

3.2. Примеры решения задач

Пример 1. Заряд $q = 0,1093$ нКл равномерно распределен по непроводящей нити длиной $l = 10,93$ см. Необходимо вычислить напряженность электростатического поля и потенциал в точке A , расположенной на расстоянии $R = 4$ см от нити и на расстоянии $a = 4$ см от ее левого конца.



Введем понятие линейной плотности заряда $\tau = q/l$ – это заряд, приходящийся на единицу длины нити. Возьмем бесконечно малый элемент нити dl (на рисунке он показан намного большим и выделен жирной черточкой). Заряд этого элемента $dq = \tau dl$ из-за малости элемента dl его можно считать точечным зарядом. Напряженность поля в рассматриваемой точке A от заряда малого элемента dq :

$$dE = \frac{k_0 \tau \cdot dl}{r^2}.$$

Здесь мы считаем, что нить находится в воздухе, т.е. диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 1$. Элементарный вектор напряженности электростатического поля dE от малого элемента dl направлен вдоль прямой, соединяющей данный элемент с рассматриваемой точкой, т.е. вдоль линии r . Элементарные напряженности от отдельных элементов направлены в разные стороны. Поэтому суммарная напряженность находится как векторная сумма элементарных напряженностей от всех элементов нити: $E = \int dE$. Вектор напряженности dE разложим на две

взаимно перпендикулярные составляющие. Ось Ox направим вдоль нити, ось Oy – через точку O . Тогда составляющие dE по соответствующим осям:

$$dE_x = -dE \sin \alpha; \quad dE_y = dE \cos \alpha.$$

Знак «-» показывает, что dE_x направлена в противоположном направлении оси Ox .

При таком разложении горизонтальные и вертикальные составляющие dE можно суммировать алгебраически отдельно. При суммировании вдоль нити переменными величинами являются расстояние от элемента dl до точки A – r , dl и угол α . Поэтому эти переменные надо выразить одни через другие, чтобы при интегрировании осталась только одна переменная величина. Выразим их через угол α . Угол $\alpha > 0$ для элементов, лежащих правее начала

координат, $\alpha < 0$ – для точек, лежащих левее начала координат. Из рисунка видно, что

$$r = R/\cos\alpha.$$

При переходе из одного конца элемента dl к другому угол α изменяется на $d\alpha$. При этом

$$d\alpha = \frac{dS}{r} = \frac{dl \cdot \cos\alpha}{r} = \frac{dl \cdot \cos^2\alpha}{R}.$$

Поэтому

$$dl = \frac{Rdx}{\cos^2\alpha}.$$

С учетом этих соотношений

$$dE_x = -\frac{k_o\tau}{R} \sin\alpha d\alpha, \quad dE_y = \frac{k_o\tau}{R} \cos\alpha d\alpha.$$

При переходе с левого конца нити к правому угол α меняется от α_1 до α_2 . Из рисунка можно определить выражения для этих углов:

$$\alpha_1 = -\operatorname{arctg} \frac{a}{R}, \quad \alpha_2 = \operatorname{arctg} \frac{l-a}{R}.$$

Угол α_1 берется с отрицательным знаком, так как он отсчитывается от нормали по часовой стрелке.

Определяем составляющие вектора суммарной напряженности:

$$E_x = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dE_x = -\frac{k_o\tau}{R} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha d\alpha = \frac{k_o\tau}{R} (\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1),$$

$$E_y = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dE_y = \frac{k_o\tau}{R} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos\alpha d\alpha = \frac{k_o\tau}{R} (\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1).$$

Суммарная напряженность поля может быть представлена в векторной форме

$$\mathbf{E} = \frac{k_o\tau}{R} [(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)\mathbf{i} + (\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)\mathbf{j}],$$

где \mathbf{i}, \mathbf{j} – орты системы координат. $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = 1$.

Численное значение вектора напряженности поля можно вычислить по теореме Пифагора:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}.$$

Проанализируем полученное решение в предельных случаях.

Пусть расстояние от нити до рассматриваемой точки намного меньше, чем длина проводника: $R \ll l$. В этом случае $\alpha_1 \rightarrow -\pi/2$, $\alpha_2 \rightarrow \pi/2$, $\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1 = 0$, $\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1 = 2$. Отсюда

$$E_y = \frac{k_o \tau}{2R} = \frac{\tau}{2\pi \epsilon_o R}.$$

Получили формулу для напряженности поля заряженной бесконечно длинной нити. Если $R \gg l$, то осесимметричность задачи становится незаметной, углы α_1, α_2 становятся бесконечно малыми: $\alpha_1 = \alpha_2 = d\alpha$; $\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1 = 0$; $E_x = 0$; $\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1 = 2 d\alpha$; $2 d\alpha = l/R$.

В результате

$$E_y = \frac{k_o \tau 2d\alpha}{R} = \frac{k_o \tau l}{R^2} = \frac{k_o q}{R^2}.$$

Получили формулу для напряженности поля точечного заряда.

Потенциал электростатического поля в точке A от заряда элементарного отрезка dl :

$$d\varphi = \frac{k_o \tau dl}{r} = \frac{k_o \tau d\alpha}{\cos\alpha}.$$

Потенциал поля заряженной нити находится как алгебраическая сумма потенциалов всех элементарных отрезков:

$$\varphi = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\varphi = k_o \tau \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{\cos\alpha} = k_o \tau \ln \frac{\left| \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_2}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right|}{\left| \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right|}.$$

Анализ размерности:

$$[E] = \frac{[k_o][\tau]}{[R]} = \frac{\frac{\text{НМ}^2 \cdot \text{Кл}}{\text{Кл}^2 \cdot \text{М}}}{\text{М}} = \frac{\text{Н}}{\text{Кл}}.$$

$$[\varphi] = [k_o] \cdot [\tau] = \frac{\text{НМ}^2}{\text{Кл}^2} \cdot \frac{\text{Кл}}{\text{М}} = \frac{\text{НМ}}{\text{Кл}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \text{В}.$$

Решение:

Сначала определим углы α_1 и α_2 :

$$\alpha_1 = -\operatorname{arctg} \frac{a}{R} = -\operatorname{arctg} \frac{0,04}{0,04} = -\frac{\pi}{4} (-45^\circ);$$

$$\alpha_2 = \operatorname{arctg} \frac{l-a}{R} = \operatorname{arctg} \frac{0,1093-0,04}{0,04} = \frac{\pi}{3} (60^\circ).$$

$$\tau = \frac{q}{l} = \frac{0,1093 \cdot 10^{-9}}{0,1093} = 10^{-9} \frac{\text{Кл}}{\text{М}}.$$

$$E_x = \frac{k_o \tau}{R} (\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1) = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-9}}{0,04} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -46,6 \frac{\text{Н}}{\text{Кл}}.$$

$$E_y = \frac{k_o \tau}{R} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-9}}{0,04} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) = 354 \frac{\text{Н}}{\text{Кл}}.$$

Как видно, горизонтальная составляющая напряженности поля в данной точке направлена противоположно направлению оси x :

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{46,6^2 + 354^2} = 357 \frac{\text{Н}}{\text{Кл}}.$$

$$\varphi = k_o \tau \ln \frac{\left| \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha_2}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|}{\left| \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|} = 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-9} \ln \frac{\operatorname{tg}(5\pi/12)}{\operatorname{tg}(\pi/8)} = 19,8 \text{ В}.$$

Ответ:

Напряженность электростатического поля заряженной нити конечной длины $E = 357 \text{ Н/Кл}$. Потенциал поля в этой точке $\varphi = 19,8 \text{ В}$.

Пример 2: Тонкое проволочное кольцо радиусом $R = 10 \text{ см}$ имеет суммарный электрический заряд $q = 60 \text{ мкКл}$. Найти модуль напряженности электрического поля и его потенциал на оси кольца на расстоянии $x = 20 \text{ см}$ от центра кольца.

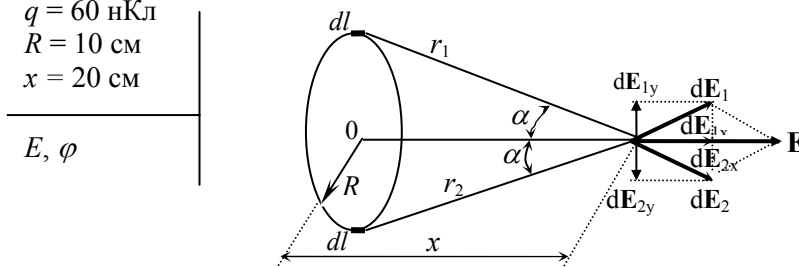
Дано:

$$q = 60 \text{ нКл}$$

$$R = 10 \text{ см}$$

$$x = 20 \text{ см}$$

Анализ:



Предположим, что заряд кольца распределен равномерно по его длине. Тогда можно ввести понятие линейной плотности заряда: $\tau = q / l = q / 2\pi R$. На противоположных концах диаметра кольца возьмем два элементарных отрезка длиной $dl_1 = dl_2$. Заряды этих отрезков $dq_1 = dq_2 = \tau dl$ можно считать точечными. Тогда напряженности полей данных зарядов в рассматриваемой точке можно вычислить по формуле

$$dE_1 = dE_2 = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} = \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2},$$

где r – расстояние от этих элементарных отрезков до рассматриваемой точки. Численные значения напряженностей этих элементарных отрезков равны, так как равны между собой расстояния r_1, r_2, r . Однако направления векторов напряженностей dE_1, dE_2 различны (они направлены вдоль прямых, соединяющих эти элементарные заряды с рассматриваемой точкой). Поэтому равнодействующая этих двух напряженностей находится как векторная сумма:

$$dE = dE_1 + dE_2.$$

Задача обладает осевой симметрией, следовательно, составляющие dE вдоль оси Oy (dE_{1y}, dE_{2y}) равны по величине и противоположно направлены ($dE_{1y} = -dE_{2y}$). Поэтому эти составляющие взаимно компенсируются. Таким же образом попарно взаимно компенсируются вертикальные составляющие напряженностей всех остальных элементарных отрезков. Сумма двух векторов определяется только суммой осевых составляющих $dE_x = dE \cos \alpha$. В результате суммарный вектор направлен по оси кольца.

С учетом того что

$$r^2 = x^2 + R^2,$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}},$$

$$dE_x = \frac{\tau x dl}{4\pi\epsilon_0\epsilon (x^2 + R^2)^{3/2}}.$$

Чтобы определить напряженность поля кольца, необходимо просуммировать осевые составляющие напряженностей всех элементарных отрезков по длине кольца:

$$E = \int_l dE_x = \int_l \frac{\tau x dl}{4\pi\epsilon_0\epsilon (x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\tau x}{4\pi\epsilon_0\epsilon (x^2 + R^2)^{3/2}} \int_{2\pi R} dl = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0\epsilon (x^2 + R^2)^{3/2}}.$$

Потенциал поля элементарного отрезка кольца можно вычислить по формуле для точечного заряда

$$d\varphi = \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_0\epsilon r} = \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_0\epsilon (x^2 + R^2)^{1/2}}.$$

Потенциал поля всего кольца можно определить алгебраическим суммированием потенциалов всех элементарных отрезков кольца

$$\varphi = \int_i d\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(x^2+R^2)^{1/2}}.$$

Напряженность поля можно также определить через потенциал поля, используя связь между напряженностью и потенциалом:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad}\varphi.$$

Отсюда

$$E = -\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}} \right)'_x = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(x^2+R^2)^{3/2}}.$$

Из формул для напряженности и потенциала поля на оси заряженного тонкого кольца можно заметить такую закономерность: когда радиус кольца намного меньше, чем расстояние от центра кольца до рассматриваемой точки ($R \ll x$), то эти формулы превращаются в формулы поля точечного заряда.

Анализ размерностей:

$$[E] = \frac{[q][x]}{[\varepsilon_0][x]^3} = \frac{\text{Кл}\cdot\text{м}}{\Phi/\text{м}\cdot\text{м}^3} = \frac{\text{Кл}}{\Phi\cdot\text{м}} = \frac{\text{В}}{\text{м}},$$

$$[\varphi] = \frac{[q]}{[\varepsilon_0]\cdot[x]} = \frac{\text{Кл}}{(\Phi/\text{м})\cdot\text{м}} = \text{В}.$$

Решение:

Так как в условии задачи не даются свойства среды, то будем считать, что кольцо находится в вакууме ($\varepsilon = 1$):

$$E = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(x^2+R^2)^{3/2}} = \frac{6\cdot 10^{-8}\cdot 0,2}{4\pi\cdot 8,85\cdot 10^{-12}(0,2^2+0,1^2)^{3/2}} = 9,66 \text{ кВ/м}.$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(x^2+R^2)^{1/2}} = \frac{6\cdot 10^{-8}}{4\pi\cdot 8,85\cdot 10^{-12}(0,2^2+0,1^2)^{1/2}} = 2,41 \text{ кВ}.$$

Ответ:

Напряженность электростатического поля на оси заряженного кольца на расстоянии 20 см от его центра $E = 9,66 \text{ кВ/м}$; а потенциал поля в той же точке $\varphi = 2,41 \text{ кВ}$.

Пример 3: Однородный фарфор имеет вид сферического слоя с радиусами $R_1 = 5 \text{ см}$ и $R_2 = 7 \text{ см}$. По внутренней поверхности слоя фарфора равномерно распределен положительный избыточный заряд с

поверхностной плотностью $\sigma = 6 \text{ мкКл/м}^2$. Построить графики зависимостей $E = E(r)$ и $\varphi = \varphi(r)$, где r – расстояние от центра слоев.

Дано:

$$R_1 = 0,05 \text{ м}$$

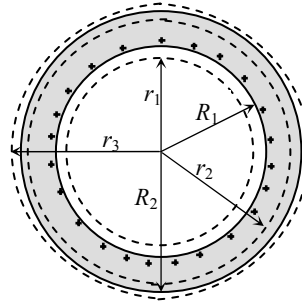
$$R_2 = 0,07 \text{ м}$$

$$\sigma = 8,85 \text{ нКл/м}^2$$

$$\varepsilon = 6$$

$$E = E(r)$$

$$\varphi = \varphi(r)$$



Анализ:

Возьмем вспомогательную (гауссовую) поверхность с радиусом $r_1 < R_1$ и напишем теорему Гаусса:

$$\oint_{S_1} \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{V_1} \rho dV = 0,$$

где $\rho = 0$ – объемная плотность заряда внутри полости. Поэтому при $r < R_1$ напряженность поля $E = 0$, т.е. внутри полости поле отсутствует.

Теперь воспользуемся теоремой Гаусса для сферической поверхности радиуса $R_1 < r_2 < R_2$:

$$E \oint_{S_2} dS = \frac{\sigma 4\pi \cdot R_1^2}{\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

В данном случае избыточный заряд находится только на внутренней сферической поверхности слоя. Учитывая сферическую симметрию напряженность из под двойного интеграла вынесли, а этот интеграл равняется площади вспомогательной сферической поверхности: $S_2 = 4\pi r^2$. Поэтому напряженность поля внутри слоя:

$$E = \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0 \varepsilon \cdot r^2}.$$

Если таким же образом поступить для сферической поверхности за пределами шарового слоя при $r_3 > R_2$, то получим:

$$E = \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0 r^2}.$$

При этих выкладках мы считали, что диэлектрическая проницаемость воздуха $\varepsilon = 1$.

Потенциал электростатического поля за пределами полого шара:

$$\varphi = \int_r^{\infty} E dr = \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0} \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0 r}.$$

Потенциал поля внутри слоя фарфора при $R_1 < r_2 < R_2$:

$$\varphi = \int_r^{R_2} E dr + \int_{R_2}^{\infty} E dr = \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0 \varepsilon} \int_r^{R_2} \frac{dr}{r^2} + \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0 R_2} = \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0 \varepsilon} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0 R_2}.$$

Так как внутри полости $E = 0$, то потенциал поля будет везде одинаковым и равняться потенциалу внутренней поверхности слоя, т.е. при $r < R_1$:

$$\varphi = \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0 \varepsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0 R_2}.$$

Анализ размерностей:

Структуры формул для напряженности и потенциала в разных областях одинаковы. Поэтому проверим единицы измерений для формул только за пределами полого шара.

$$[E] = \frac{[\sigma][R]^2}{[\varepsilon_0][r]^2} = \frac{(\text{Кл/м}^2)(\text{м})^2}{(\text{Кл}^2/(\text{Н}\cdot\text{м}^2))(\text{м})^2} = \frac{\text{Н}}{\text{Кл}}.$$

$$[\varphi] = \frac{[\sigma][R]^2}{[\varepsilon_0][r]} = \frac{(\text{Кл/м}^2)(\text{м})^2}{(\text{Кл}^2/(\text{Н}\cdot\text{м}^2))(\text{м})} = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{Кл}} = \text{В}.$$

Решение:

Для примерного построения графиков вычислим значения напряженностей поля и потенциала на внутренней и наружной поверхностях внутри фарфора. При $r = R_1$:

$$E(R_1) = \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0 \varepsilon \cdot R_1^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{8,85 \cdot 10^{-9}}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 6} = 167 \frac{\text{Н}}{\text{Кл}}.$$

$$\begin{aligned} \varphi(R_1) &= \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0 \varepsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0 R_2} = \frac{8,85 \cdot 10^{-9} \cdot 0,05^2}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 6} \left(\frac{1}{0,05} - \frac{1}{0,07} \right) + \\ &+ \frac{8,85 \cdot 10^{-9} \cdot 0,05^2}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,07} = 38,09 \text{ В}. \end{aligned}$$

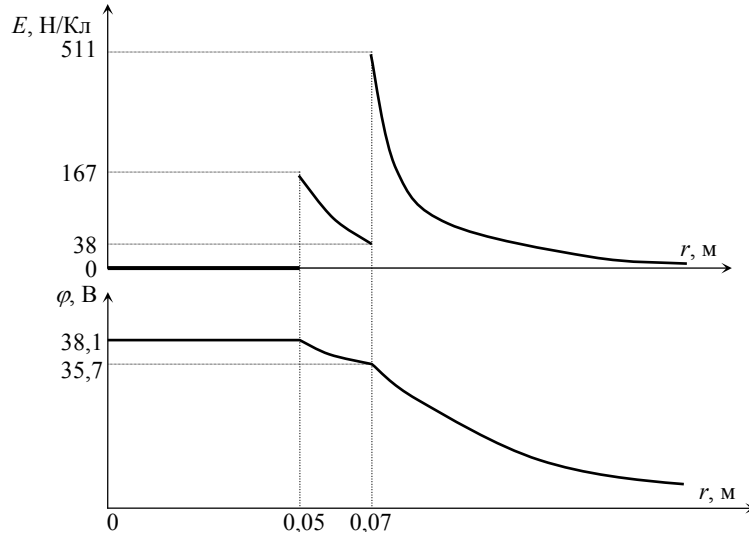
$$E(R_2) = \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0 \varepsilon \cdot R_2^2} = \frac{8,85 \cdot 10^{-9} \cdot 0,05^2}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 6 \cdot 0,07^2} = 85,2 \frac{\text{Н}}{\text{Кл}}.$$

Как видно из формулы, непосредственно за пределами шара напряженность будет больше на величину ε , т.е.

$$E'(R_2) = \varepsilon E(R_2) = 6 \cdot 85,2 = 511 \frac{\text{Н}}{\text{Кл}}.$$

$$\varphi(R_2) = \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0 R_2} = \frac{8,85 \cdot 10^{-9} \cdot 0,05^2}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,07} = 35,7 \text{ В}.$$

По найденным значениям построены графики зависимостей напряженности и потенциала поля в зависимости от расстояния r /



Графики напряженности и потенциала в зависимости от r , где r – расстояние от центра полого шара

За пределами шара и напряженность, и потенциал убывают.

Пример 4: Электрон ускоряется в однородном поле двух параллельных разноименно заряженных пластин, расстояние между которыми $d = 1$ см, а разность потенциалов $U = \varphi_1 - \varphi_2 = 100$ В. Электрон начинает двигаться из состояния покоя из отрицательной пластины, пролетает через небольшое отверстие в положительной пластине и влетает в однородное электростатическое поле других разноименно заряженных пластин параллельно пластинам. Напряженность поля этих пластин $E = 10^3$ Н/Кл, длина пластин $l = 10$ см. Необходимо

определить скорость электрона на выходе из поля первой пары пластин, траекторию движения в поле второй пары пластин и смещение по вертикали в конце траектории.

Дано:

$$m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$$

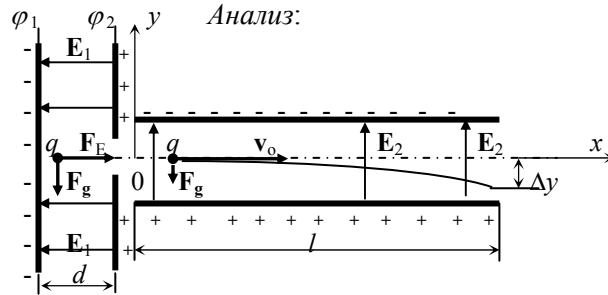
$$q = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

$$U = 100 \text{ В}$$

$$E_2 = 10^3 \text{ Н/Кл}$$

$$l = 10 \text{ см} = 0,1 \text{ м}$$

$$v_0, y = f(x), \Delta y$$



Пусть пластинки расположены так, как показано на рисунке. Выберем систему координат, направив ось Ox вдоль второй пары пластин посередине между ними. Начало отсчета совпадает с левыми краями пластин. Сначала на электрон действуют сила тяжести $\mathbf{F}_g = m\mathbf{g}$ и сила электростатического поля стороны со первой пары пластин $\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}_1$. Так как поле однородное, то $E_1 = U/d$. Можно будет показать, что сила тяжести намного меньше, чем сила со стороны электрического поля: $F_g \ll F_E$. Под действием электрического поля электрон разгоняется, при этом совершается работа $A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU$. Эта работа приводит к увеличению кинетической энергии электрона:

$$A = W_{k1} - W_{k2} = \frac{mv_0^2}{2}.$$

Начальная кинетическая энергия электрона, по условию задачи равняется нулю: $W_{k1} = 0$. Через v_0 обозначена скорость электрона при вылете через отверстие положительной пластины. Таким образом,

$$qU = \frac{mv_0^2}{2}.$$

Отсюда

$$v_0 = \sqrt{\frac{2qU}{m}}.$$

Будем считать, что в промежутке между двумя парами пластин на электрон силы не действуют. Поэтому он влетает в поле второй пары пластин со скоростью v_0 перпендикулярно к напряженности поля \mathbf{E}_2 .

Данное поле сообщает электрону ускорение, направленное вертикально вниз:

$$a_y = \frac{F_E}{m} = -\frac{qE_2}{m}.$$

Так как начальная скорость электрона в вертикальном направлении равняется нулю, то перемещение в этом направлении за время движения вдоль второй пары пластин t составит

$$y = \frac{a_y t^2}{2} = -\frac{qE_2}{2m} t^2.$$

В горизонтальном направлении электрон движется с постоянной начальной скоростью v_0 . Поэтому координата x меняется по закону

$$x = v_0 t.$$

Выразим из последнего выражения время движения вдоль пластин $t = x/v_0$ и подставим в формулу для координаты y электрона:

$$y = -\frac{qE_2 x^2}{2m v_0^2}.$$

Видно, что траекторией движения электрона в поле второй пары пластин является парабола. Общее время движения электрона между второй пары пластин $t = l/v_0$. Поэтому смещение в вертикальном направлении

$$\Delta y = -\frac{qE_2 l^2}{2m v_0^2}.$$

Анализ размерности:

$$[v_0] = \left(\frac{[q] \cdot [U]}{[m]} \right)^{1/2} = \left(\frac{\text{Кл} \cdot \text{Дж/Кл}}{\text{кг}} \right)^{1/2} = \left(\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг}} \right)^{1/2} = \left(\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{кг}} \right)^{1/2} = \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

$$[\Delta y] = \frac{[q] \cdot [E] \cdot [l]^2}{[m][v]^2} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{Н/Кл} \cdot \text{м}^2}{\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2} = \frac{\text{Н} \cdot \text{с}^2}{\text{кг}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{кг}} = \text{м}.$$

Решение:

Сначала оценим соотношение между силой тяжести электрона и силой, действующей со стороны электрического поля пласти

$$F_g = mg = 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 9,81 = 8,93 \cdot 10^{-30} \text{ Н}.$$

$$F_{E1} = qU/d = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 100/0,01 = 1,6 \cdot 10^{-15}.$$

$$\frac{F_{E1}}{F_g} = \frac{1,6 \cdot 10^{-15}}{8,93 \cdot 10^{-30}} = 1,79 \cdot 10^{14}.$$

Таким образом, сила, действующая на электрон со стороны электрического поля пластин 10^{14} раз больше, чем сила тяжести

электрона. Поэтому не учитывая силу тяжести мы в расчеты практически не вносим ошибку.

Скорость электрона на выходе из поля первой пары пластин

$$v_0 = \sqrt{\frac{2qU}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 100}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 5,93 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

$$\Delta y = -\frac{qE_2 l^2}{2mv_0^2} = -\frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^3 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 5,93^2 \cdot 10^{12}} = -0,025 \text{ м.}$$

Ответ:

Скорость электрона на выходе из электростатического поля первой пары пластин $v_0 = 5,93 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$

Траектория движения электрона в поле второй пары пластин представляет параболу

$$y = -\frac{qE_2 x^2}{2mv_0^2}.$$

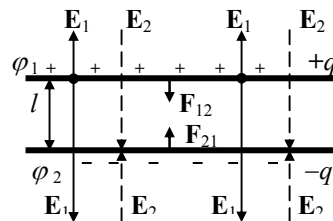
Смещение электрона в вертикальном направлении под действием электрического поля второй пары пластин, пока он перемещается вдоль них, $\Delta y = -0,025 \text{ м.}$

Пример 5: Площадь каждой обкладки плоского конденсатора $S = 100 \text{ см}^2$. Обкладки притягиваются друг к другу с силой, равной $F = 6 \cdot 10^{-4} \text{ Н}$. Определить заряды обкладок.

Дано:

$$\left. \begin{array}{l} S = 100 \text{ см}^2 = 10^{-2} \text{ м}^2 \\ F = 6 \cdot 10^{-4} \text{ Н} \\ q \end{array} \right\}$$

Анализ:



Заряды каждой из пластин находятся в электростатическом поле зарядов другой пластины. В конденсаторах расстояние между пластинами l намного меньше, чем размеры пластин. Поэтому электростатическое поле между пластинами можно считать однородным (за исключением краев обкладок). Напряженность

электростатического поля равномерно заряженной бесконечной плоскости определяется формулой

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{q}{2\varepsilon_0\varepsilon \cdot S}.$$

Следовательно, на заряды другой обкладки действует сила

$$F = qE = \frac{q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon \cdot S}.$$

Отсюда определяем заряд одной обкладки:

$$q = \sqrt{2\varepsilon_0\varepsilon FS}.$$

Анализ размерности:

$$[q] = [\varepsilon_0]^{1/2}[S]^{1/2}[F]^{1/2} = \left(\frac{\text{Кл}^2}{\text{Н}\cdot\text{м}^2}\right)^{1/2} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{Н} = \text{Кл}.$$

Решение:

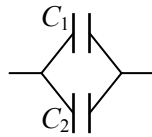
$$q = \sqrt{2\varepsilon_0\varepsilon FS} = \sqrt{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2} \cdot 6 \cdot 10^{-4}} = 10,3 \text{ нКл}.$$

Ответ:

Заряд обкладок плоского конденсатора $q = 10,3 \text{ нКл}$.

Пример 6: Конденсатор емкостью $C_1 = 5 \text{ мкФ}$ был заряжен до разности потенциалов $U_1 = 60 \text{ В}$. После отсоединения от источника тока данный конденсатор соединили с другим незаряженным конденсатором. В момент соединения конденсаторов образовалась искра с энергией $W_{\text{и}} = 4 \text{ мДж}$. Определить емкость второго конденсатора.

Дано:
 $C_1 = 5$
 $U_1 = 60 \text{ В}$
 $W_{\text{и}} = 4 \text{ мДж}$
 C_2



Анализ:
 Заряженный конденсатор обладает энергией электростатического поля

$$W_1 = \frac{C_1 U_1^2}{2}.$$

Конденсаторы соединили друг с другом после отключения от источника тока. Поэтому после соединения заряд батареи конденсаторов равняется заряду первого конденсатора:

$$q = C_1 U_1 = (C_1 + C_2) U,$$

где $U = C_1 U_1 / (C_1 + C_2)$ – напряжение между обкладками конденсаторов после соединения (так как при параллельном соединении емкости складываются).

Энергия батареи конденсаторов после соединения

$$W_2 = \frac{(C_1 + C_2) U^2}{2} = \frac{C_1^2 U_1^2}{2(C_1 + C_2)}.$$

В результате соединения общая энергия уменьшается, и лишняя энергия выделяется в виде энергии искры

$$W_{\text{и}} = W_1 - W_2 = \frac{C_1 U_1^2}{2} - \frac{C_1^2 U_1^2}{2(C_1 + C_2)} = \frac{C_1 U_1^2}{2} \left(1 - \frac{C_1}{C_1 + C_2}\right) = \frac{C_1 U_1^2}{2} \cdot \frac{C_2}{C_1 + C_2}.$$

Отсюда определяем емкость второго конденсатора:

$$C_2 = \frac{2W_{\text{и}} C_1}{C_1 U_1^2 - 2W_{\text{и}}}.$$

Анализ размерности:

Чтобы размерность полученного решения совпадала с размерностью емкости, размерность выражения $C_1 U_1^2$ в знаменателе должна совпадать с размерностью энергии:

$$[C] \cdot [U]^2 = \Phi \cdot \text{В}^2 = \frac{\text{Кл}}{\text{В}} \cdot \text{В}^2 = \text{Кл} \cdot \text{В} = \text{Кл} \cdot \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \text{Дж}.$$

Решение:

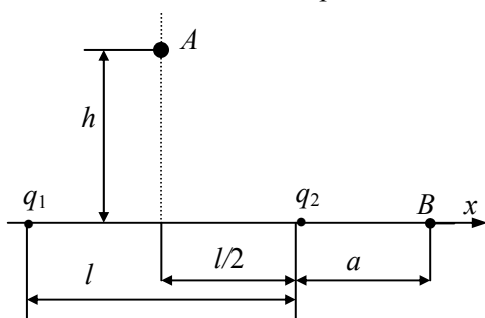
$$C_2 = \frac{2W_{\text{и}} C_1}{C_1 U_1^2 - 2W_{\text{и}}} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-6} \cdot 60^2 - 2 \cdot 4 \cdot 10^{-3}} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ Ф} = 4 \text{ мкФ}.$$

Ответ:

Электрическая емкость второго конденсатора $C_2 = 4 \text{ мкФ}$.

3.3. Задания для РГР 12 по электростатике

Задачи 125. Нечетные варианты



Два точечных заряда q_1 , q_2 находятся на расстоянии l один от другого. Найти напряженность поля и потенциал в точках A и B . Построить графики зависимости напряженности электростатического поля и потенциала от расстояния для точек, расположенных на линии, соединяющей заря-

ды. Напряженность считать положительной, если направление совпадает с направлением оси x .

№ вар.	q_1 , 10^{-11} Кл	q_2 , 10^{-11} Кл	l , см	a , см	h , см
1	3	1	10	5	5
3	-6	3	10	10	10
5	5	-7	5	10	10
7	-7	-5	6	12	6
9	5	-9	10	20	5
11	11	-7	5	5	5
13	-13	6	14	7	15
15	15	-5	15	8	10
17	-7	4	13	15	8
19	3	-9	9	12	4
21	1	-4	12	11	7
23	3	-2	13	12	8
25	5	-5	11	6	6

27	7	-4	6	7	6
29	-9	-3	16	15	8
31	-11	5	10	10	5
33	13	-3	13	7	7
35	-5	10	15	5	9

Задачи 125. Четные варианты

Два точечных заряда расположены на вершинах A и C квадрата $ABCD$. Причем $q_2 = nq_1$. Заряды взаимодействуют между собой с силой F . Определить напряженность электростатического поля и потенциал в точке B . Построить графики изменения напряженности и потенциала поля вдоль оси x , направленной по диагонали квадрата. Напряженность считать положительной, если направление совпадает с направлением оси x .

№ вар.	AB , см	n	F , мкН
2	4	-2	3
4	3	4	4
6	5	-6	5
8	7	3	7
10	9	-4	10
12	3	2	12
14	5	-3	14
16	7	-4	16
18	9	5	18
20	3	-4	2,0
22	5	4	2,2
24	6	-2	2,4
26	7	6	2,6
28	10	4	2,8
30	5	-4	3,0
32	6	3	3,2
34	4	-4	3,4
36	6	2	3,6

Задачи 1.2.6

Задачи 126. Варианты: 1, 7, 13, 19, 25, 31

В объеме длинного диэлектрического цилиндра радиусом R_o распределение объемной плотности зарядов от оси цилиндра меняется по зависимости $\rho = \rho_o (1 - r/R_o)$. Диэлектрическая проницаемость цилиндра ε . Определить напряженность поля в точках 1 и 2, лежащих на расстояниях r_1 и r_2 от оси цилиндра, и разность потенциалов между этими точками. Построить графики зависимостей напряженности поля $E = E(r)$, электрического смещения $D = D(r)$ и потенциала $\varphi = \varphi(r)$. Потенциал на поверхности цилиндра считать равным нулю: $\varphi(R_o) = 0$.

№ вар.	1	7	13	19	25	31
R_o , см	1	5	1,3	1,7	2,5	3,3
ρ_o , мкКл/м ³	1	5	1,3	1,7	2,5	3,3
ε	3,1	3,5	2,3	2,7	2,5	3,3
r_1 , см	0,5	3	0,9	1,2	2	3
r_2 , см	1,2	6	1,5	2	3	3,5

Задачи 126. Варианты: 2, 8, 14, 20, 26, 32

Вдоль оси диэлектрического цилиндра радиуса R_o протянута положительно заряженная бесконечная нить с линейной плотностью заряда τ . Диэлектрическая проницаемость цилиндра ε . Построить графики зависимостей напряженности поля $E = E(r)$, электрического смещения $D = D(r)$ и потенциала $\varphi = \varphi(r)$. Потенциал на поверхности цилиндра считать равным нулю: $\varphi(R_o) = 0$. Построить также график изменения скорости электрона, которая приближается к нити по силовой линии от точки с расстоянием r от нити до поверхности диэлектрика.

№ вар.	2	8	14	20	26	32
R_o , см	2	6	1,4	2,2	2,6	3,2
τ , нКл/см	2	2,6	2,4	2,2	2,6	3,2
ε	2	2,6	2,4	2,2	2,6	3
r , см	12	16	14	10	16	13

Задачи 126. Варианты: 3, 9, 15, 21, 27, 33

По оси длинного полого цилиндра радиусами R_1 и R_2 протянута положительно заряженная бесконечная нить с линейной плотностью заряда τ . Диэлектрическая проницаемость цилиндра ε . В одной плоскости с нитью внутри цилиндра находится тонкий стержень под углом α к нити, концы которого находятся на поверхностях цилиндра. Вдоль стержня равномерно распределен заряд q . Найти силу, действующую на стержень. Как изменилась бы эта сила, если стержень в таком же положении расположить в вакууме? Построить графики зависимостей напряженности поля $E = E(r)$, электрического смещения $D = D(r)$ и потенциала $\varphi = \varphi(r)$. Потенциал на внутренней поверхности цилиндра считать равным нулю: $\varphi(R_1) = 0$.

№ вар.	3	9	15	21	27	33
R_1 , см	3	2,9	1,5	2,1	2,7	3,3
R_2 , см	5	6	3,5	4,1	4,7	5,3
τ , нКл/см	3	3,6	2,5	2,3	3,7	3,3
ε	3	2,7	2,5	2,3	2,7	3,1
α	30	45	60	30	45	60
q , нКл	3	3,6	2,5	2,3	3,7	3,1

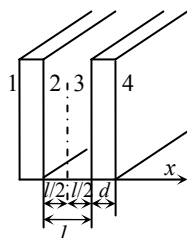
Задачи 126. Варианты: 4, 10, 16, 22, 28, 34

Кольцо радиусом R из тонкой проволоки имеет заряд q и расположен в воздухе на расстоянии x_0 от поверхности диэлектрической жидкости. Плоскость кольца параллельна поверхности жидкости с диэлектрической проницаемостью ε . Найти модуль напряженности и потенциал электрического поля на оси кольца как функцию расстояния x от его центра в направлении жидкости. (Использовать принцип суперпозиции полей). Определить максимальное значение напряженности и соответствующее расстояние x_{max} . Построить графики зависимостей напряженности поля $E = E(x)$, электрического смещения $D = D(x)$ и потенциала $\varphi = \varphi(x)$.

№ вар.	4	10	16	22	28	34
--------	---	----	----	----	----	----

R , см	4	12	16	10	14	16
x_0 , см	8	12	10	12	16	18
q , нКл	4	12	16	10	14	16
ε	24	32	26	20	23	32

Задачи 126. Варианты: 5, 11, 17, 23, 29, 35



Две металлические пластины, заряженные зарядами Q_1 и Q_2 , расположены на расстоянии l параллельно друг другу. Толщина пластинок d . Площадь каждой пластины S . Считая, что линейные размеры пластин несоизмеримо велики по сравнению с расстоянием l и толщиной пластин d , найти поверхностные плотности зарядов всех четырех поверхностей пластин и разность потенциалов между пластинами. Построить графики зависимостей напряженности

поля $E = E(x)$, и потенциала $\varphi = \varphi(x)$. Потенциал считать равным нулю по середине между пластинами.

№ вар.	5	11	17	23	29	35
Q_1 , нКл	15	-11	17	-23	29	-35
Q_2 , нКл	5	6	7	3	9	5
l , мм	5	4	7	3	5	3,5
d , мм	2	1	3	1	3	2
S , м ²	0,5	0,11	0,17	0,23	0,29	0,35

Задачи 126. Варианты: 6, 12, 18, 24, 30, 36

Внутри сферической металлической оболочки с радиусами R_1 и R_2 находится диэлектрический шар с диэлектрической проницаемостью ε_1 радиусом R_0 . Объемная плотность заряда шара зависит от расстояния до его центра как $\rho = \rho_0(1 - r/R_0)$, где ρ_0 – постоянная. Центры шара и оболочки совпадают. Между шаром и оболочкой непроводящая жидкость с диэлектрической проницаемостью ε_2 . Найти плотно-

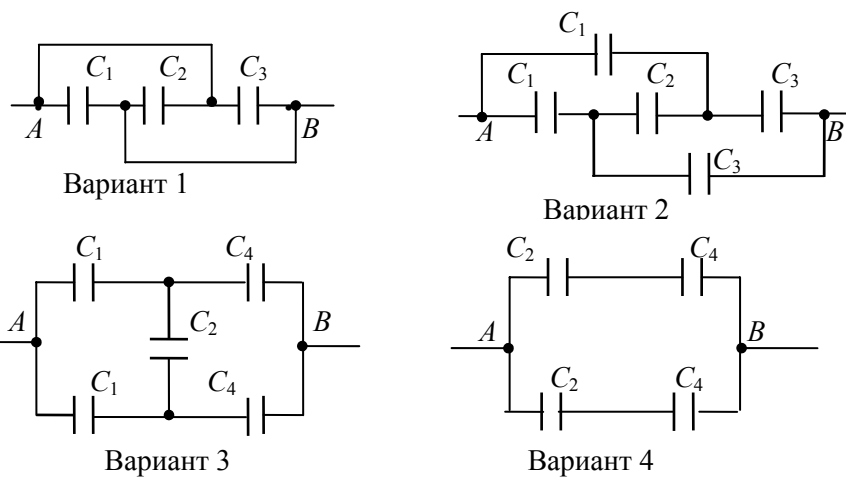
сти связанных зарядов на обеих поверхностях оболочки. Построить графики зависимостей напряженности поля $E = E(r)$, электрического смещения $D = D(r)$ и потенциала $\varphi = \varphi(r)$.

№ вар.	6	12	18	24	30	36
R_o , см	6	5	9	4	3	7
R_1 , см	8	6	11	6	5	9
R_2 , см	10	8	13	9	7	11
ρ_o , мкКл/м ³	3	6	4	2,4	2,5	3,6
ϵ_1	3,1	3,5	2,3	2,7	3	3,6
ϵ_2	6	7	6,5	7,4	7,3	6,6

Задачи 1.2.7

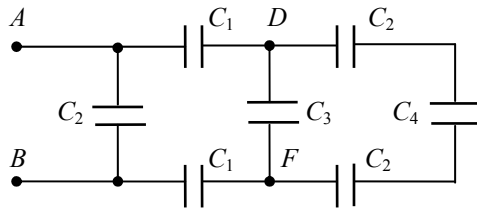
Задачи 127. Варианты: 1 – 4

Для схем, показанных на соответствующих рисунках, найти общую емкость системы конденсаторов $C_1 = 3$ мкФ, $C_2 = 4$ мкФ, $C_3 = 5$ мкФ, $C_4 = 6$ мкФ между точками А и В, заряды конденсаторов, если напряжение между этими точками 150 В.



Задачи 127. Варианты 5, 6

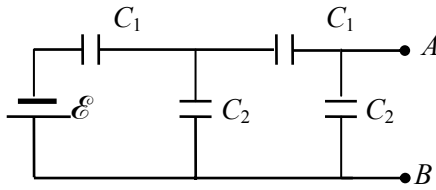
Вычислить емкость системы конденсаторов и разность потенциалов между точками D и F , если напряжение между точками A и B составляет U .



Для вариантов 5, 6

Данные	Вар. 5	Вар. 6
$U, \text{В}$	500	600
$C_1, \text{мкФ}$	1	2
$C_2, \text{мкФ}$	3	1
$C_3, \text{мкФ}$	4	3
$C_4, \text{мкФ}$	5	6

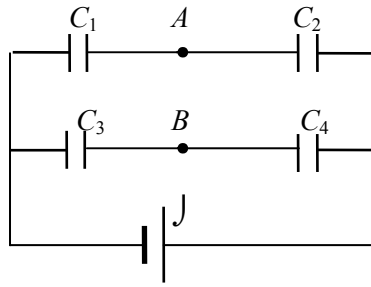
Задачи 127. Варианты: 7, 11, 13, 17, 19, 27, 29, 31



Найти разность потенциалов между точками A и B , а также заряды конденсаторов, если даны значение ЭДС \mathcal{E} и емкости C_1, C_2 .

№ вар.	7	11	13	17	19	27	29	31
$\mathcal{E}, \text{В}$	70	110	130	170	190	270	290	310
$C_1, \text{мкФ}$	7	11	13	7	9	6	9	3
$C_2, \text{мкФ}$	3	6	5	4	6	4	6	9

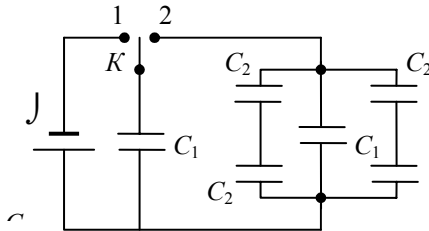
Задачи 127. Варианты: 8, 10, 14, 16, 24, 26, 32



Определить разность потенциалов между точками A и B . При каком условии она равна нулю?

№ вар.	8	10	14	16	24	26	32
C_1 , мкФ	0,8	1	1,4	1,6	2,4	2,6	3
C_2 , мкФ	1,6	2	2,8	3,2	4,8	5,2	5
C_3 , мкФ	0,4	0,5	0,7	0,8	1,2	1,3	4
C_4 , мкФ	1	2	4	1	2	4	2
J , В	8	10	14	16	24	26	32

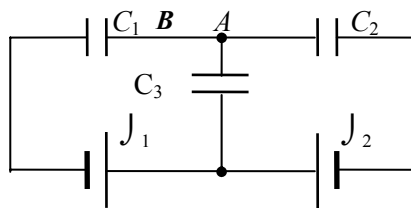
Задачи 127. Варианты: 9, 12, 15, 18, 21, 25, 33, 35



Конденсатор C_1 сначала заряжают при положении 1 ключа K , затем подключают к батарее конденсаторов, переставив ключ K в положение 2. Определить заряды каждого из конденсаторов.

№ вар.	9	12	15	18	21	25	33	35
J , В	9	12	15	18	21	25	25	35
C_1 , мкФ	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,5	5	3
C_2 , мкФ	1,8	2,4	3	3,6	4,2	5	4	5

Задачи 127. Варианты: 20, 22, 23, 28, 34



Найти разность потенциалов между точками A и B и заряды конденсаторов.

№ вар.	$J_1, В$	$J_2, В$	$C_1, мкФ$	$C_2, мкФ$	$C_3, мкФ$
20	20	24	0,5	2	4
22	22	12	0,4	2,2	1,2
23	24	12	0,3	0,5	1,0
28	28	13	1,8	0,8	0,4
30	30	15	3	1,5	6
32	32	16	6	4	2
34	34	24	4	6	2

Литература

1. *Детлаф, А. А.* Курс физики : учебное пособие для вузов / А.А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М. : Высш. шк., 2001. – 718 с.
2. *Трофимова, Т. И.* Курс физики : учебное пособие для вузов / Т. И. Трофимова. – М. : Высш. шк., 2001. – 478 с.
3. *Джоканоли, Д.* Физика : в 2 т. / Д. Джоканоли. – М.: Мир, 1989. – 654 и 669 с.
4. *Кухлинг, Х.* Справочник по физике : пер. с нем. / Х. Кухлинг – М. : Мир, 1985. – 520 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Некоторые основные физические постоянные

Скорость света в вакууме	$c = 2,997925 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
Ускорение свободного падения	$g = 9,81 \text{ м/с}^2$
Гравитационная постоянная	$\gamma = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$
Универсальная газовая постоянная	$R = 8,31441 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$
Нормальный молярный объем	$V_M = 22,41383 \text{ м}^3/\text{кмоль}$
Постоянная Авогадро	$N_A = 6,022045 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Число Лошмидта	$N_L = 2,686754 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$
Постоянная Больцмана	$k = 1,380662 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$
Постоянная Планка	$h = 6,626176 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
	$\hbar = h/2\pi = 1,0546 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Постоянная Стефана – Больцмана	$\sigma = 5,6687 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-4}$
Постоянная Вина (смещения)	$b_1 = 2,8978 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$
Электрическая постоянная	$\epsilon_0 = 8,854187 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 1,256637 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}$
Число Фарадея	$F = 9,648453 \cdot 10^4 \text{ Кл/моль}$
Масса покоя электрона	$m_e = 9,1093897 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
Масса покоя протона	$m_p = 1,6726485 \cdot 10^{-27} \text{ кг} =$ $= 1,00727647 \text{ а.е.м.}$
Масса покоя нейтрона	$m_n = 1,6749543 \cdot 10^{-27} \text{ кг} =$ $= 1,0086650 \text{ а.е.м.}$
Элементарный заряд	$e = 1,60217733 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Удельный заряд электрона	$-e/m_e = -1,75881962 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг}$
Атомная единица массы	$a.e.m. = 1,6605402 \cdot 10^{-27} \text{ кг} =$ $= 931494,32 \text{ кэВ}$
Радиус Бора	$r_1 = 5,29177249 \cdot 10^{-11} \text{ м}$
Постоянная Ридберга	$R = 3,2898419499 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ $R' = R/c = 1,097373 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$

Физические свойства некоторых твердых веществ

№ п/п	Вещество	Плотность, кг/м ³	Модуль упругости, ГПа	Удельная теплоемкость, Дж/(кг К)	Коэффициент температурной проводности, Вт/(м К)	Температура плавления, °С	Удельная теплота плавления, кДж/кг
1	Алюминий	2700	71	895	209	660	397

2	Вольфрам	19100	390	134		3380	192
3	Латунь	8500	98	390	111	920	330
4	Манганин	8400	120	420	22		
5	Медь	8800	123	395	380	1083	205
6	Золото	19300	160	130	308	1063	65,7
7	Никель	8800	210	460	58	1453	30
8	Нихром	8400			17,5	1100	
9	Серебро	10500	79	234	407	960,8	104,5
10	Свинец	11340	16	130	35	327,4	23
11	Сталь	7850	206	470	47	~1500	205
12	Титан	4500	116	130	70	1725	
13	Стекло	2200	70	729	0,74		
14	Дуб	800		2400	0,35		
15	Сосна	500		1700	0,15		

Физические свойства некоторых жидкостей

№ п/п	Вещество	Плотность, кг/м ³	Удельная теплоемкость, кДж/(кг·К)	Теплопроводности, Вт/м·К	Температура кипения, °С	Теплота парообразования, кДж/кг	Коэф. динамической вязкости при 20°С, мПа·с	Коэф. поверхностного натяжения при 20°С, мН/м	Удельная теплота сгорания, МДж/кг
1	Ацетон	800	2,18	0,17	56,7	525	0,32	24	34
2	Бензол	880	1,71	0,14	80,2	394	0,65	29	40
3	Вода	998	4,19	0,58	100	2260	1,002	73	
4	Глицерин	1300	2,43	0,29	290	828	1390	60	
5	Керосин	800	2,14	0,15		220	180	29	42,7
6	Эт. спирт	790	2,42	0,18	78	850	1,2	22	28
7	Бензин	700	2,09			250	0,5	17	41
8	Мазут	850	1,82	0,13			620	32	40

Физические свойства некоторых газов

Газ	Формула	Молярная масса, г/моль	c_p , кДж/(кг·К)	$\gamma = c_p/c_v$	κ, Вт/(м·К)	η , мПа·с	$D \cdot 10^5$, м ² /с в воздухе	Теплота сгорания низшая, МДж/кг	Постоянные Ван-дер-Ваальса		$T_{кр}$, К	$p_{кр}$, МПа	$V_{кр}$, см ³ /моль
									a , $\frac{Н \cdot м^4}{моль^2}$	b , $\frac{м^3}{моль}$			
Водород	H ₂	2,016	14,3	1,41	169	8,35	6,3	121,1	0,024	0,027	33,3	1,18	65
Гелий	He	4,003	5,24	1,65					0,00345	0,024	5,26	0,223	57,8
Аргон	Ar	39,948	0,503	1,67					0,132	0,032	151	4,44	75,2
Азот	N ₂	28,013	1,038	1,4	23,9	16,9			0,137	0,039	126,2	3,3	90,1
Кислород	O ₂	32,00	0,917	1,4	24,4	19,6	1,8		0,137	0,032	154,4	4,91	74,4
Оксид углерода	CO	28,01	1,047	1,4	23,4	16,9		10,1	0,147	0,040	133	3,4	93,1
Двуокись уг-да	CO ₂	44,011	0,845	1,3	14,7	14,1	1,4		0,367	0,043	304,3	7,2	94
Водяной пар	H ₂ O	18,02	1,793	1,32	23,7	8,7	2,3		0,554	0,030	647	21,6	57,7
Двуокись серы	SO ₂	64,07	0,618	1,3					0,686	0,057	430,7	7,68	122
Метан	CH ₄	16,04	2,153	1,32	30,4	10,55	2	50,04	0,235	0,044	190,7	4,5	99,3
Этан	C ₂ H ₆	30,07	1,644		18,8	8,77		47,56	0,594	0,069	305,4	4,7	14,8
Пропан	C ₃ H ₈	44,1	1,511		15,2	7,65		46,2	0,997	0,096	370	4,1	200
Бутан	C ₄ H ₁₀	58,12	1,524		13,3	6,97		44,9	1,484	0,124	425,2	3,7	255
Ацетилен	C ₂ H ₂	26,02	1,679					49,1	0,446	0,051	309,5	6,1	113
Сероводород	H ₂ S	34,08	0,985			11,8					373,5	9,0	97,6

Примечание: Свойства приведены при нормальных условиях. Для водяного пара при $t = 100^\circ\text{C}$

Эффективные диаметры некоторых молекул, нм

Водород	Гелий	Аргон	Азот	Кислород
0,28	0,22	0,35	0,38	0,38

Диэлектрическая проницаемость веществ

Диэлектрик	ϵ	Диэлектрик	ϵ
Ацетон	21,4	Полистирол	2,3÷2,5
Воздух	1,00059	Полихлорвинил	5
Воск	7,8	Слюда	4÷10
Вода	81	Стекло	5÷15
Керосин	7	Шифер	6÷10
Дерево	3,5÷5	Фарфор	6
Каучук	2,5÷3	Эбонит	2,7
Парафин	2÷2,4	Этиловый спирт	25,2
Полиэтилен	2,3	Метиловый спирт	33,5
Плексиглас	3÷4	Керамика	до 10 000