Министерство образования и науки РФ
Нижнекамский химико-технологический институт (филиал)
Федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего профессионального образования
«Казанский национальный исследовательский технологический
университет»

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ
Элементы математической логики. Графы

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Нижнекамск
2012

УДК 51
Ш 95

Печатаются по решению редакционного - издательского совета Нижнекамского химико-технологического института (филиала) ФГБОУ ВПО «КНИТУ».

Рецензенты:
Шемелова О.В., кандидат физ.-матем. наук;
Садыков А.В., кандидат техн. наук, доцент.

Шувалова, Л.Е.
Ш 95 Специальные главы математики. Элементы математической логики. Графы : методические указания / Л.Е. Шувалова, Л.А. Апайчева, А.Г. Багоутдинова. - Нижнекамск : Нижнекамский химико-технологический институт (филиал) ФГБОУ ВПО «КНИТУ». – 2012. – 34 с.

Даны методические указания к решению контрольных заданий с кратким изложением основных теоретических сведений по разделам «Математическая логика», «Графы».

Предназначены для студентов инженерно - технических специальностей.

Подготовлены на кафедре математики Нижнекамского химико-технологического института.

УДК 51

Дискретная математика

Основные блоки дискретной математики можно изобразить в виде схемы:

1. Элементы математической логики

1.1. Высказывание

Высказывание – это некое утверждение, о котором можно говорить, что оно истинно или ложно.

Пример 1. Высказывание «Казань – столица Татарстана» истинно. Высказывание «5>6» ложно.

Элементарное высказывание – это одно утверждение. Будем обозначать элементарные высказывания малыми буквами латинского алфавита x, y, z, … . Истинное высказывание – цифрой 1, ложное высказывание – цифрой 0.

Мы будем рассматривать функции и аргументы, значения которых могут принимать только значения 0 и 1. Это *булевы* функции.

Составные высказывания будем получать из простых с помощью логических операций.

	Название	**Прочтение**	**Обозначение**
1.	Отрицание	не	$\overline{X}$ или $\overline{\tilde{O}}$
2.	Дизъюнкция	или	$\tilde{O} \vee \acute{O}$
3.	Конъюнкция	и	$\tilde{O} \wedge \acute{O}$ или $X \cdot У$
4.	Импликация	если … то	$X \to У$

5.	Эквивалентность	тогда и только тогда, когда	$X \leftrightarrow У$ или $\tilde{O}$ □ $\tilde{O}$
6.	Штрих Шеффера	антиконъюнкция	$\tilde{O} \vert \acute{O} = \overline{\tilde{O} \wedge \acute{O}}$
7.	Стрелка Пирса	антидизъюнкция	$\tilde{O} \downarrow \acute{O} = \overline{\tilde{O} \vee \acute{O}}$
8.	Сумма по модулю два	антиэквивалентность	$X \oplus У = \overline{X \leftrightarrow У}$

Значение функции можно задать с помощью *таблицы истинности*, которая показывает, чему равна функция на всех возможных комбинациях значений ее переменных.

Составим таблицы истинности для перечисленных операций.

1) *Отрицанием* высказывания X называется высказывание $\overline{X}$, которое истинно, когда X ложно, и ложно, когда X истинно.

X	$\overline{X}$
0	1
1	0

2) *Дизъюнкцией* двух высказываний X и $У$ называется высказывание $\tilde{O} \vee \acute{O}$, которое истинно, когда хотя бы одно из них истинно.

X	$У$	$\tilde{O} \vee \acute{O}$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

3) *Конъюнкцией* двух высказываний X и $У$ называется высказывание $\tilde{O} \wedge \acute{O}$, которое истинно только в том случае, когда X и $У$ оба истинны.

X	$У$	$\tilde{O} \wedge \acute{O}$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

4) *Импликацией* двух высказываний X и $У$ называется высказывание $X \to У$, которое ложно тогда и только тогда, когда X истинно, а $У$ ложно.

X	$У$	$X \to У$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

5) *Эквивалентностью* высказываний X и $У$ называется высказывание $X \leftrightarrow У$, которое истинно тогда и только тогда, когда X и $У$ оба истинны или ложны.

X	$У$	$X \leftrightarrow У$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

6) *Штрих Шеффера* (антиконъюнкция), по определению $Õ|Ó = \overline{Õ \wedge Ó}$.

X	$У$	$X|У$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

7) *Стрелка Пирса* (антидизъюнкция), по определению $Õ \downarrow Ó = \overline{Õ \vee Ó}$.

X	$У$	$X \downarrow У$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

8) *Сумма по модулю два* (антиэквивалентность), по определению $X \oplus У = \overline{X \leftrightarrow У}$.

X	$У$	$X \oplus У$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

С помощью введенных операций можно строить различные булевы функции. Порядок выполнения операций указывается скобками. Для упрощения записи принят ряд соглашений:

1) для отрицания скобки опускаются;

2) $\wedge$ имеет приоритет перед $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$;

3) $\vee$ имеет приоритет перед $\to$, $\leftrightarrow$.

Пример 2. Определить таблицу истинности булевой функции $f = \tilde{O} \wedge \overline{O} \to (\overline{X} \vee \acute{O})$.

Решение.

X	$У$	$\overline{X}$	$\overline{O} \vee \acute{O}$	$\overline{У}$	$\tilde{O} \wedge \overline{O}$	$f = \tilde{O} \wedge \overline{O} \to (\overline{X} \vee \acute{O})$
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0
1	1	0	1	0	0	1

Пример 3. Составьте таблицу истинности формулы: $\tilde{O} \oplus \acute{O} \to \overline{Z} \vee X \left| \overline{O} \wedge \overline{\tilde{O}} \right.$.

Решение. Расставим скобки: $f = (\tilde{O} \oplus \acute{O}) \to (\overline{Z} \vee (X \left| (\overline{O} \wedge \overline{\tilde{O}}))) \right.$

X	$У$	Z	$\overline{X}$	$\overline{У}$	$\overline{Z}$	$X \oplus У$	$\overline{O} \wedge \overline{X}$	$X \left\| (\overline{O} \wedge \overline{\tilde{O}}) \right.$	$\overline{Z} \vee (X \left\| (\overline{O} \wedge \overline{\tilde{O}})) \right.$	f
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1

Формула называется *тождественно истинной*, или *тавтологией*, если она обращается в истинное высказывание при всех наборах значений переменных.

Последний столбец в примере 3 состоит из 1, следовательно, доказана тождественная истинность формулы.

Пример 4. Докажите эквивалентность $\tilde{O} \wedge (\tilde{O} \vee Z) \wedge (\acute{O} \vee Z) \leftrightarrow (X \wedge \acute{O}) \vee (\tilde{O} \wedge Z)$.

Решение. Пусть $f_1 = \tilde{O} \wedge (\tilde{O} \vee Z) \wedge (\acute{O} \vee Z)$. Составим таблицу истинности:

X	$У$	Z	$\tilde{O} \vee Z$	$\acute{O} \vee Z$	$\tilde{O} \wedge (\tilde{O} \vee Z)$	$f_1 = \tilde{O} \wedge (\tilde{O} \vee Z) \wedge (\acute{O} \vee Z)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Пусть $f_2 = (X \wedge \acute{O}) \vee (\tilde{O} \wedge Z)$

X	$У$	Z	$\tilde{O} \wedge \acute{O}$	$\tilde{O} \wedge Z$	$f_2 = (X \wedge \acute{O}) \vee (\tilde{O} \wedge Z)$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Заметим, что таблица истинности для f_1 и f_2 совпадают, следовательно, эквивалентность доказана.

Пример 5. Для каждого из следующих высказываний: 1) Найдите символическую форму; 2) постройте таблицу истинности. Воспользуйтесь буквенными обозначениями:

X - Джо умен;

$У$ - Джим глуп;

Z - Джо получит приз.

(a) Если Джо умен, а Джим глуп, то Джо получит приз.

(b) Джо получит приз в том и только в том случае, если он умен или если Джим глуп.

(c) Если Джим глуп, а Джо не удастся получить приз, то Джо не умен.

Решение.

(a): $(\tilde{O} \wedge \acute{O}) \to Z$;

(b): $Z \leftrightarrow (\tilde{O} \vee \acute{O})$;

(c): $(\acute{O} \wedge \overline{Z}) \to \overline{\tilde{O}}$.

X	$У$	Z	$\overline{X}$	$\overline{Z}$	$\tilde{O} \wedge \acute{O}$	$(\tilde{O} \wedge \acute{O}) \to Z$	$\tilde{O} \vee \acute{O}$	$Z \leftrightarrow (\tilde{O} \vee \acute{O})$	$\acute{O} \wedge \overline{Z}$	$(\acute{O} \wedge \overline{Z}) \to \overline{\tilde{O}}$
0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1
						(a)		(b)		(c)

1.2 Равносильные функции

Две функции называются *равносильными*, если они принимают одинаковые значения на любом наборе значений, входящих в эти функции переменных, то есть у этих функций одинаковы таблицы истинности. Перепишем основные равносильности:

1) Идемпотентность дизъюнкции и конъюнкции:

$\tilde{O} \vee \tilde{O} = \tilde{O}$	$\tilde{O} \wedge \tilde{O} = \tilde{O}$

2) Коммутативность дизъюнкции и конъюнкции:

$\tilde{O} \vee \acute{O} = \acute{O} \vee \tilde{O}$	$\tilde{O} \wedge \acute{O} = \acute{O} \wedge \tilde{O}$

3) Ассоциативность дизъюнкции и конъюнкции:

$\tilde{O} \vee (\acute{O} \vee Z) = (\tilde{O} \vee \acute{O}) \vee Z$	$\tilde{O} \wedge (\acute{O} \wedge Z) = (\tilde{O} \wedge \acute{O}) \wedge Z$

4) Дистрибутивность операций дизъюнкции и конъюнкции относительно друг друга:

$\tilde{O} \vee (\acute{O} \wedge Z) = (\tilde{O} \vee \acute{O}) \wedge (\tilde{O} \vee Z)$	$\tilde{O} \wedge (\acute{O} \vee Z) = (\tilde{O} \wedge \acute{O}) \vee (\tilde{O} \wedge Z)$

5) Двойное отрицание:

$$\overline{\overline{X}} = X$$

6) Закон де Моргана:

$\overline{\tilde{O}} \vee \overline{\acute{O}} = \overline{\tilde{O} \wedge \acute{O}}$	$\overline{\tilde{O}} \wedge \overline{\acute{O}} = \overline{\tilde{O} \vee \acute{O}}$

7) Склеивание:

$(\tilde{O} \vee \acute{O}) \wedge (\tilde{O} \vee \overline{\acute{O}}) = \tilde{O}$	$(\tilde{O} \wedge \acute{O}) \vee (\tilde{O} \wedge \overline{\acute{O}}) = \tilde{O}$

8) Поглощение:

$\tilde{O} \vee (\tilde{O} \wedge \acute{O}) = \tilde{O}$	$\tilde{O} \wedge (\tilde{O} \vee \acute{O}) = \tilde{O}$

9) Действие с логическими константами 0 и 1:

$\tilde{O} \vee 0 = \tilde{O}$	$\tilde{O} \vee 1 = 1$	$\tilde{O} \wedge \overline{\tilde{O}} = 0$	$\tilde{O} \wedge \tilde{O} = \tilde{O}$	$\tilde{O} \oplus \tilde{O} = 0$	$\tilde{O} \oplus 0 = \tilde{O}$
$\tilde{O} \wedge 0 = 0$	$\tilde{O} \wedge 1 = \tilde{O}$	$\tilde{O} \vee \overline{\tilde{O}} = 1$	$\tilde{O} \vee \tilde{O} = \tilde{O}$	$\tilde{O} \oplus \overline{\tilde{O}} = 1$	$\tilde{O} \oplus 1 = \overline{\tilde{O}}$

10) Закон исключенного третьего:

$$\tilde{O} \vee \overline{\tilde{O}} = 1$$

11) Тождество:

$$X = X$$

12) Отрицание противоречия:

$$\overline{\overline{\tilde{O}} \wedge \tilde{O}} = 1$$

13) Контрапозиция:

$$\boxed{\tilde{O} \to \acute{O} = \overline{\acute{O}} \to \overline{\tilde{O}}}$$

14)

$$\boxed{\tilde{O} \to \acute{O} = \overline{\tilde{O}} \vee \acute{O}}$$

15)

$$\boxed{\tilde{O} \leftrightarrow \acute{O} = (\tilde{O} \to \acute{O}) \wedge (\acute{O} \to \tilde{O}) = (\overline{\tilde{O}} \vee \acute{O}) \wedge (\overline{\acute{O}} \vee \tilde{O}) = (\tilde{O} \wedge \acute{O}) \vee (\overline{\tilde{O}} \wedge \overline{\acute{O}})}$$

16) Цепное заключение:

$$\boxed{((\tilde{O} \to \acute{O}) \wedge (\acute{O} \to Z)) = (\tilde{O} \to Z)}$$

17) Противоположность:

$$\boxed{(X \leftrightarrow Y) = (\overline{X} \leftrightarrow \overline{Y})}$$

18) Модус поненс:

$$\boxed{(\tilde{O} \wedge (\tilde{O} \to \acute{O})) \to \acute{O} = 1}$$

19)

$$\boxed{X | Y = \overline{X \wedge Y} = \overline{X} \vee \overline{Y}}$$

20)

$$\boxed{X \downarrow Y = \overline{X \vee Y} = \overline{X} \wedge \overline{Y}}$$

21)

$$\boxed{X \oplus Y = \overline{X \leftrightarrow Y} = \overline{(X \to Y) \wedge (Y \to X)} = \overline{(\overline{X} \vee Y) \wedge (\overline{Y} \vee X)} = (X \wedge \overline{Y}) \vee (Y \wedge \overline{X})}$$

Пример 6. Доказать равносильность, используя основные законы логических операций: $\overline{(\tilde{O} \wedge \overline{\acute{O}}) \vee (\acute{O} \wedge \overline{Z})} = (\overline{\tilde{O}} \wedge \overline{\acute{O}}) \vee (\overline{\tilde{O}} \wedge Z) \vee (\acute{O} \wedge Z)$.

Решение. $\overline{(\tilde{O} \wedge \overline{\acute{O}}) \vee (\acute{O} \wedge \overline{Z})} = \left| \begin{array}{l} \text{Èñïîëüçóÿ} \\ \text{6), íàõîäèì} \end{array} \right| = \overline{(\tilde{O} \wedge \overline{\acute{O}})} \wedge \overline{(\acute{O} \wedge \overline{Z})} = (\overline{\tilde{O}} \vee \overline{\overline{\acute{O}}}) \wedge (\overline{\acute{O}} \vee \overline{\overline{Z}}) =$

$= \left| \begin{array}{l} \text{Используя} \\ \text{5)} \end{array} \right| = (\overline{\tilde{O}} \vee \acute{O}) \wedge (\overline{\acute{O}} \wedge Z) = \left| \begin{array}{l} \text{Èñïîëüçóÿ} \\ \text{4), ïîëó÷èì} \end{array} \right| = ((\overline{\tilde{O}} \vee \acute{O}) \wedge \overline{\acute{O}}) \vee ((\overline{\tilde{O}} \vee \acute{O}) \wedge Z) =$

$= ((\overline{\tilde{O}} \wedge \overline{\acute{O}}) \vee (\acute{O} \wedge \overline{\acute{O}}) \vee ((\overline{\tilde{O}} \wedge Z) \vee (\acute{O} \wedge Z)) = \left| \begin{array}{l} \text{Èñïîëüçóÿ} \\ \text{3), íàõîäèì} \end{array} \right| = (\overline{\tilde{O}} \wedge \overline{\acute{O}}) \vee (\acute{O} \wedge \overline{\acute{O}}) \vee (\overline{\tilde{O}} \wedge Z) \vee (\acute{O} \wedge Z) =$

$= (\overline{\tilde{O}} \wedge \overline{\acute{O}}) \vee (\overline{\tilde{O}} \wedge Z) \vee (\acute{O} \wedge Z)$.

Пример 7. Преобразуйте формулу так, чтобы она содержала только логические связки $-$и $\wedge$: $(\overline{X}\leftrightarrow \acute{O})\to Z$.

Решение. $(\overline{X}\leftrightarrow \acute{O})\to Z=\overline{(\overline{X}\leftrightarrow \acute{O})}\vee Z=\overline{(\overline{\tilde{O}}\to \acute{O})\wedge(\acute{O}\to\overline{\tilde{O}})}\vee Z=\overline{(\overline{\overline{\tilde{O}}}\vee\acute{O})\wedge(\overline{\acute{O}}\vee\overline{\tilde{O}})}\vee Z=$

$=\overline{(\tilde{O}\vee\acute{O})\wedge(\overline{\acute{O}}\vee\overline{\tilde{O}})}\vee Z=\overline{(\tilde{O}\vee\acute{O})}\vee\overline{(\overline{\acute{O}}\vee\overline{\tilde{O}})}\vee Z=(\overline{\tilde{O}}\wedge\overline{\acute{O}})\vee(\overline{\overline{\acute{O}}}\wedge\overline{\overline{\tilde{O}}})\vee Z=(\overline{\tilde{O}}\wedge\overline{\acute{O}})\vee(\acute{O}\wedge\tilde{O})\vee Z=$

$\overline{(\overline{\overline{\overline{\tilde{O}}\wedge\overline{\acute{O}}}})\wedge(\overline{\acute{O}\wedge\tilde{O}})}\vee Z=\overline{(\overline{\overline{\overline{\tilde{O}}\wedge\overline{\acute{O}}}})\wedge(\overline{\acute{O}\wedge\tilde{O}})}\wedge Z.$

Пример 8. Применяя равносильные преобразования, приведите формулу к возможно более простой форме: $(\tilde{O}\leftrightarrow\acute{O})\wedge(\tilde{O}\vee\acute{O})$.

Решение. $(\tilde{O}\leftrightarrow\acute{O})\wedge(\tilde{O}\vee\acute{O})=(\tilde{O}\to\acute{O})\wedge(\acute{O}\to\tilde{O})\wedge(\tilde{O}\vee\acute{O})=(\overline{\tilde{O}}\vee\acute{O})\wedge(\overline{\acute{O}}\vee\tilde{O})\wedge(\tilde{O}\vee\acute{O})=$

$=(\overline{\tilde{O}}\vee\acute{O})\wedge((\tilde{O}\vee\overline{\acute{O}})\wedge(\tilde{O}\vee\acute{O}))=(\overline{\tilde{O}}\vee\acute{O})\wedge(\tilde{O}\vee(\overline{\acute{O}}\wedge\acute{O}))=(\overline{\tilde{O}}\vee\acute{O})\wedge(\tilde{O}\vee 0)=(\overline{\tilde{O}}\vee\acute{O})\wedge\tilde{O}=$

$=(\overline{\tilde{O}}\wedge\tilde{O})\vee(\acute{O}\wedge\tilde{O})=0\vee(\tilde{O}\wedge\acute{O})=\tilde{O}\wedge\acute{O}$.

1.3. Нормальные формы

Формула, являющаяся дизъюнкцией элементарных конъюнктивных одночленов, называется *дизъюнкцией нормальной формы* (ДНФ).

Например. $(\tilde{O}_1\wedge\tilde{O}_2\wedge\tilde{O}_3)\vee(\tilde{O}_1\wedge\overline{\tilde{O}_2})\vee(\tilde{O}_3\wedge\tilde{O}_2)\vee\overline{\tilde{O}_3}$

Формула, являющаяся конъюнкцией элементарных одночленов, называется *конъюнктивной нормальной формой* (КНФ).

Например. $(\overline{\tilde{O}_1}\vee\tilde{O}_2\vee\tilde{O}_3)\wedge(\tilde{O}_1\vee\overline{\tilde{O}_3})\wedge\tilde{O}_2$

Для каждой формулы можно найти множество дизъюнктивных и конъюнктивных нормальных форм.

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) – это ДНФ, в которой, в каждый конъюнктивный одночлен, каждая переменная входит ровно один раз, причем входит сама переменная либо ее отрицание.

Алгоритм построения СДНФ по таблице истинности:

1) Выбираются наборы переменных, на которых функция равна 1. Если значение переменной в этом наборе равно 0, то эта переменная берется с отрицанием. Если значение переменной в этом наборе равно 1, то эта переменная берется без отрицания.

2) Соответствующие наборы, соединим знаком конъюнкции $\wedge$.

3) Полученные элементарные конъюнкции, соединим знаком дизъюнкции $\vee$.

Пример 9. Построим СДНФ для функции, таблица истинности которой имеет следующий вид:

X	У	Z	$f(\tilde{O},\acute{O},Z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Функция принимает значение 1 на наборах: 001, 010, 101. Набору 001 соответствует элементарная конъюнкция $\overline{\tilde{O}} \wedge \overline{O} \wedge Z = \overline{\tilde{O}}\overline{O}Z$. Набору 010 соответствует элементарная конъюнкция $\overline{\tilde{O}} \wedge \acute{O} \wedge \overline{Z} = \overline{\tilde{O}}\acute{O}\overline{Z}$. Набору 101 соответствует элементарная конъюнкция $\tilde{O} \wedge \overline{O} \wedge Z = \tilde{O}\overline{O}Z$. Получаем СДНФ: $f = \overline{\tilde{O}}\overline{O}Z \vee \overline{\tilde{O}}\acute{O}\overline{Z} \vee \tilde{O}\overline{O}Z$.

Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) данной формулы называет такую ее КНФ, которая удовлетворяет следующим свойствам:

1) КНФ не содержит двух одинаковых дизъюнкций;
2) ни одна из дизъюнкций не содержит одновременно двух одинаковых переменных;
3) ни одна из дизъюнкций не содержит одновременно некоторую переменную и ее отрицание;

Алгоритм построения СКНФ по таблице истинности

1) выбираются наборы переменных, на которых функция равна 0. Если значение переменной в этом наборе равно 0, то эта переменная берется без отрицания, если значение переменной в этом наборе равно 1, то эта переменная берется с отрицанием.
2) соединяем все переменные, соответствующие набору, знаком $\vee$, получаем элементарную дизъюнкцию.

3) конъюнкция всех элементарных дизъюнкций дает СКНФ

Пример 10. Построим СКНФ для функции $f(\tilde{O},\acute{O},Z)$ из примера 9.

Решение. Функция принимает значение 0 на наборах 000, 011, 100, 110, 111. Набору 000 соответствует элементарная дизъюнкция $\tilde{O}\vee\acute{O}\vee Z$. Набору 011 соответствует дизъюнкция $\tilde{O}\vee\overline{\acute{O}}\vee\overline{Z}$ и т.д. Получаем СКНФ

$$f=(\tilde{O}\vee\acute{O}\vee Z)\wedge(\tilde{O}\vee\overline{\acute{O}}\vee\overline{Z})\wedge(\overline{\tilde{O}}\vee\acute{O}\vee Z)\wedge(\overline{\tilde{O}}\vee\overline{\acute{O}}\vee Z)\wedge$$
$$\wedge(\overline{\tilde{O}}\vee\overline{\acute{O}}\vee\overline{Z}).$$

Задача. Для заданной булевой функции трех переменных:

а) построить таблицу истинности и привести функцию к СДНФ и СКНФ;

б) с помощью эквивалентных преобразований привести функцию к ДНФ и СДНФ.

Пример 11. $f(\tilde{O},\acute{O},Z)=(\tilde{O}\to\overline{\acute{O}})\,\big|\,(Z\oplus\overline{\tilde{O}\vee\acute{O}})$

а) Составим таблицу истинности

X	У	Z	$\overline{\acute{O}}$	$\tilde{O}\to\overline{\acute{O}}$	$\overline{\tilde{O}\vee\acute{O}}$	$Z\oplus\overline{\tilde{O}\vee\acute{O}}$	$f(\tilde{O},\acute{O},Z)$
0	0	0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	1	0
1	1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1	1

Построим СДНФ:

Функция принимает значение 1 на наборах 001, 010, 100, 110, 111 .

$$f(\tilde{O},\acute{O},Z)=\overline{\tilde{O}}\,\overline{\acute{O}}Z\vee\overline{\tilde{O}}\acute{O}\overline{Z}\vee\tilde{O}\overline{\acute{O}}\,\overline{Z}\vee\tilde{O}\acute{O}\overline{Z}\vee\tilde{O}\acute{O}Z.$$

Построим СКНФ:

Функция принимает значение 0 на наборах 000, 011, 101.

$$f(\tilde{O},\acute{O},Z)=(\tilde{O}\vee\acute{O}\vee Z)(\tilde{O}\vee\overline{\acute{O}}\vee\overline{Z})(\overline{\tilde{O}}\vee\acute{O}\vee\overline{Z}).$$

б) С помощью элементарных преобразований приведем функцию к ДНФ:

Выразим $\to,|,\oplus$ через $\wedge,\vee,-$, используя формулы из пункта 1.2.

$$f(\tilde{O},\acute{O},Z)=(\tilde{O}\to\overline{\acute{O}})\,|\,(Z\oplus\overline{\tilde{O}\vee\acute{O}})=\left|\begin{matrix}\text{Èñï î ëüçóÿ}\\ 14)\ \text{è}\ 21)\end{matrix}\right|=(\overline{\tilde{O}}\vee\overline{\acute{O}})\,|\,((Z\wedge\overline{\overline{\tilde{O}\vee\acute{O}}})\vee(\overline{\tilde{O}\vee\acute{O}}\wedge\overline{Z}))=$$

$$=\left|\begin{matrix}\text{Èñî ëüçóÿ}\\ 5)\ \text{è}\ 6)\end{matrix}\right|=(\overline{\tilde{O}}\vee\overline{\acute{O}})\,|\,((Z\wedge(\tilde{O}\vee\acute{O}))\vee(\overline{\tilde{O}}\wedge\overline{\acute{O}}\wedge\overline{Z}))=\left|\begin{matrix}\text{Èñï î ëüçóÿ}\\ 19)\end{matrix}\right|=$$

$$=(\overline{\overline{\tilde{O}}\vee\overline{\acute{O}}})\vee(\overline{(Z\wedge(\tilde{O}\vee\acute{O}))\vee(\overline{\tilde{O}}\wedge\overline{\acute{O}}\wedge\overline{Z})})=(\tilde{O}\wedge\acute{O})\vee\left[(\overline{Z\wedge(\tilde{O}\vee\acute{O})})\wedge(\overline{\overline{\tilde{O}}\wedge\overline{\acute{O}}\wedge\overline{Z}})\right]=$$

$$=(\tilde{O}\acute{O})\vee\left[(\overline{Z}\vee(\overline{\tilde{O}\vee\acute{O}}))\wedge(\tilde{O}\vee\acute{O}\vee Z)\right]=\tilde{O}\acute{O}\vee\left[(\overline{Z}\vee(\overline{\tilde{O}}\wedge\overline{\acute{O}}))\wedge(\tilde{O}\vee\acute{O}\vee Z\right]=$$

$$=\tilde{O}\acute{O}\vee\overline{Z}(\tilde{O}\vee\acute{O}\vee Z)\vee(\overline{\tilde{O}}\wedge\overline{\acute{O}})(\tilde{O}\vee\acute{O}\vee Z)=\tilde{O}\acute{O}\vee\overline{Z}\tilde{O}\vee\overline{Z}\acute{O}\vee 0\vee\overline{\tilde{O}}\,\overline{\acute{O}}\tilde{O}\vee\overline{\tilde{O}}\,\overline{\acute{O}}\acute{O}\vee\overline{\tilde{O}}\,\overline{\acute{O}}Z=$$

$$=\tilde{O}\acute{O}\vee\overline{Z}\tilde{O}\vee\overline{Z}\acute{O}\vee 0\vee 0\vee 0\vee\overline{\tilde{O}}\,\overline{\acute{O}}Z=\tilde{O}\acute{O}\vee\overline{Z}\tilde{O}\vee\overline{Z}\acute{O}\vee\overline{\tilde{O}}\,\overline{\acute{O}}Z$$. Это ДНФ.

Алгоритм нахождения СДНФ по найденной ДНФ

1) если в конъюнкцию входит некоторая переменная со своим отрицанием, то мы удаляем эту конъюнкцию из ДНФ;
2) если в конъюнкцию одна и та же переменная входит несколько раз, то все они удаляются кроме одной;
3) если в конъюнкцию не входят некоторые переменные, то для каждой из них к конъюнкции добавляется соответствующая формула вида $(\tilde{O}\vee\overline{\tilde{O}})$;
4) если в полученной ДНФ имеется несколько одинаковых конъюнкций, то оставляем только одну из них.

В результате получаем СДНФ.

Вернемся к рассматриваемому примеру. Найдем СДНФ для ДНФ:

$$f(\tilde{O},\acute{O},Z)=\tilde{O}\acute{O}\vee\overline{Z}\tilde{O}\vee\overline{Z}\acute{O}\vee\overline{\tilde{O}}\,\overline{\acute{O}}Z=\left|\begin{matrix}\text{Â ï åðâî é êî í úþ í êöèè í åò ï åðåì åí í î é } Z,\\ \text{ï î ýòî ì ó ê í åé äî áàâëÿåò ñÿ ô î ðì óëà } (Z\vee\overline{Z}),\\ \text{âî âòî ðî é êî í úþ í êöèè äî áàâëÿåò ñÿ } (\acute{O}\vee\overline{\acute{O}}),\\ \text{â ò ðåò üåé} -(\tilde{O}\vee\overline{\tilde{O}})\end{matrix}\right|=$$

$$=\tilde{O}\acute{O}(Z\vee\overline{Z})\vee\overline{Z}\times(\acute{O}\vee\overline{\acute{O}})\vee\overline{Z}\acute{O}(\tilde{O}\vee\overline{\tilde{O}})\vee\overline{\tilde{O}}\,\overline{\acute{O}}Z=\tilde{O}\acute{O}Z\vee\underline{\tilde{O}\acute{O}\overline{Z}}\vee\underline{\overline{Z}\tilde{O}}\acute{O}\vee$$

$$\vee\overline{Z}\tilde{O}\overline{\acute{O}}\vee\overline{Z}\acute{O}\tilde{O}\vee\overline{Z}\acute{O}\overline{\tilde{O}}\vee\overline{\tilde{O}}\,\overline{\acute{O}}Z=$$

$$=\left|\begin{matrix}\text{Â ï î ëó÷åí í î é ô î ðì óëå åñò ü}\\ \text{î äèí àêî âû å êî í úþ í êöèè } \tilde{O}\acute{O}\overline{Z},\tilde{O}\acute{O}\overline{Z}\end{matrix}\right|=\tilde{O}\acute{O}Z\vee\tilde{O}\acute{O}\overline{Z}\vee\tilde{O}\overline{\acute{O}}\,\overline{Z}\vee\overline{\tilde{O}}\acute{O}\overline{Z}\vee\overline{\tilde{O}}\,\overline{\acute{O}}Z\,.$$

В итоге получили СДНФ.

Задание 1. Для заданной булевой функции трех переменных:

а) построить таблицу истинности и привести функцию к СДНФ и СКНФ;

б) с помощью эквивалентных преобразований привести функцию к ДНФ и СДНФ.

1) $(\tilde{O}\vee\overline{O})\to(\overline{Z}\oplus\overline{\tilde{O}})$

2) $\overline{(\tilde{O}\vee\overline{O})\to(Z\oplus\overline{\tilde{O}})}$

3) $(\overline{\tilde{O}}\vee\overline{O})\to\overline{(Z\oplus\tilde{O})}$

4) $(\tilde{O}\vee\overline{O})\to\overline{(Z\leftrightarrow\overline{\tilde{O}})}$

5) $\overline{(\tilde{O}\vee\overline{O})\to(Z\leftrightarrow\overline{\tilde{O}})}$

6) $\overline{(\tilde{O}|\overline{O})\oplus(Z\leftrightarrow\overline{\tilde{O}})}$

7) $\overline{(Z\to\tilde{O})\leftrightarrow(\acute{O}|\tilde{O})}$

8) $(\tilde{O}|\overline{O})\oplus\overline{(Z\to\tilde{O})}$

9) $(\overline{Z}\to\tilde{O})\leftrightarrow(\overline{\tilde{O}}|\acute{O})$

10) $(Z\to\tilde{O})\oplus(\overline{\tilde{O}}|\acute{O})$

11) $((\tilde{O}\downarrow\acute{O})\to Z)\oplus\acute{O}$

12) $\overline{((\tilde{O}|\acute{O})\to Z)}\oplus\acute{O}$

13) $\overline{((\tilde{O}\downarrow\acute{O})\to\overline{Z})}\oplus\acute{O}$

14) $\overline{((\tilde{O}\downarrow\acute{O})}\to\overline{Z}\leftrightarrow\acute{O}$

15) $\overline{((\tilde{O}\downarrow\acute{O})\to\overline{Z})\leftrightarrow\acute{O}}$

16) $(\overline{(\tilde{O}\downarrow\acute{O})}\to\overline{Z})\oplus\acute{O}$

17) $\overline{(\tilde{O}\vee\acute{O})\to(\overline{Z}\leftrightarrow\acute{O})}$

18) $\overline{(\tilde{O}|\acute{O})\oplus(\overline{Z}\to\acute{O})}$

19) $\overline{((\tilde{O}\downarrow\acute{O})\to Z)\leftrightarrow\tilde{O}}$

20) $((\overline{\tilde{O}}\vee\acute{O})\to\overline{(\overline{Z}\leftrightarrow\acute{O})}$

21) $(\overline{(\tilde{O}\downarrow\acute{O})}\to\overline{Z})\oplus\acute{O}$

22) $\overline{((\tilde{O}\downarrow\acute{O})\to\overline{Z})\leftrightarrow\acute{O}}$

23) $(\overline{(\tilde{O}\downarrow\acute{O})}\to\overline{Z})\leftrightarrow\acute{O}$

24) $\overline{((\tilde{O}\downarrow\acute{O})\to\overline{Z})\oplus\acute{O}}$

25) $\overline{((\tilde{O}|\acute{O})\to Z)}\oplus\acute{O}$

Задание 2. Проверьте двумя способами, будут ли эквивалентны следующие формулы…

а) составлением таблиц истинности; по таблице СДНФ и СКНФ;

б) приведением формул с СДНФ или СКНФ с помощью эквивалентных преобразований.

1) $x\to(y\oplus z)u(x\to y)\oplus(x\to z)$

2) $x|(y\to z)u(x|y)\to(x|z)|$

3) $x\wedge(y\oplus z)u(x\wedge y)\oplus(x\wedge z)$

4) $x\wedge(y\oplus z)u(x\wedge y)\oplus(x\wedge z)$

5) $x\wedge(y\to z)u(x\wedge y)\to(x\wedge z)$

6) $x\wedge(y\leftrightarrow z)u(x\wedge y)\leftrightarrow(x\wedge z)$

7) $x\wedge(y|z)u(x\wedge y)|(x\wedge z)$

8) $x\vee(y\to z)u(x\vee y)\to(x\wedge z)$

9) $x\vee(y|z)u(x\vee y)|(x\vee z)$

10) $x\vee(y\leftrightarrow z)u(x\vee y)\leftrightarrow(x\vee z)$

11) $x\oplus(y\leftrightarrow z)u(x\oplus y)\leftrightarrow(x\oplus z)$

12) $x\oplus(y\to z)u(x\oplus y)\to(x\oplus z)$

13) $x\oplus(y|z)u(x\oplus y)|(x\oplus z)$

14) $x\downarrow(y\leftrightarrow z)u(x\downarrow y)\leftrightarrow(x\downarrow z)$

15) $x|(y\oplus z)u(x|y)\oplus(x|z)$

16) $x\to(y\leftrightarrow z)u(x\to y)\leftrightarrow(x\to z)$

17) $x\to(y\leftrightarrow z)u(x\to y)\leftrightarrow(x\to z)$

18) $x\vee(y\oplus z)u(x\vee y)\oplus(x\vee z)$

19) $x\downarrow(y\oplus z)u(x\downarrow y)\oplus(x\downarrow z)$

20) $x\leftrightarrow(y\oplus z)u(x\leftrightarrow y)\oplus(x\leftrightarrow z)$.

2. Элементы теории графов

2.1. Основные понятия

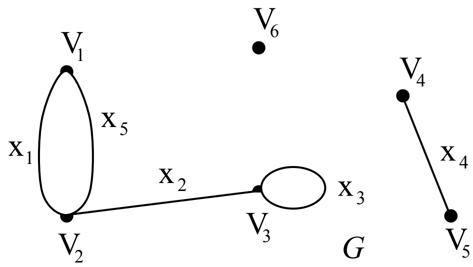
Множество точек назовем *множеством вершин* V, а соединяющие линии – *множеством ребер* X. Совокупность двух множеств (вершин и ребер) называется *графом* $G(V,X)$.

Пример. V - населенные пункты; X - автодороги, тогда граф $G(V,X)$ - схемы автодорог.

На некоторых участках допускается только одностороннее движение. Тогда соответствующее ребро называется *дугой* и изображается стрелкой, направленной от начальной вершины к конечной вершине. Граф, состоящий из дуг, называется *ориентированным* (или *орграфом*), а образованный ребрами – *неориентированным.*

Один и тот же граф можно изобразить по-разному. Вершины можно располагать по своему усмотрению и произвольно выбирать форму соединяющих линий.

Ребро, концевые вершины которого совпадают, называется *петлей*. Ребра с одинаковыми концевыми вершинами называются *кратными*. Граф называется *полным*, если каждые две различные вершины его соединены одним и только одним ребром.



Пример 1. Для графа G указать вершины, ребра, дуги, изолированные вершины, кратные ребра, петли.

Решение.

Вершины $V=\{V_1,V_2,V_3,V_4,V_5,V_6\}$;

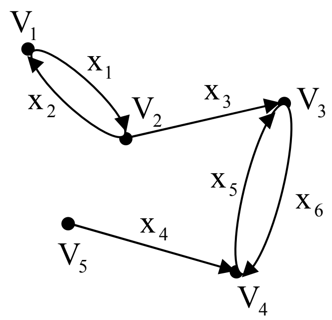
ребра $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$;

V_6 - изолированная вершина;

x_1 и x_5 - кратные ребра;

x_3 - петля;

V_1 и V_2 - концевые вершины ребра x_1.



б) G - орграф

Вершины $V=\{V_1,V_2,V_3,V_4,V_5\}$; дуги $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$;

Вершины в графе могут отличаться друг от друга тем, скольким ребрам они принадлежат.

Степенью вершины называется число ребер графа, которым принадлежит эта вершина. Степень графа еще называют его *валентностью* и обозначают $d(\delta)$. Вершина графа, для которой $d(\delta)=0$, является *изолированной*, для которой $d(\delta)=1$ - *висячей*.

Степень каждой вершины полного графа на единицу меньше числа его вершин.

В графе $G(V,X)$ сумма степеней всех его вершин – число четное, равное удвоенному числу ребер графа $\sum_{i=1}^{n} d(\delta_i) = 2 \cdot m$, где m – число ребер.

Часто на графе требуется выделить различные маршруты, обладающие определенными свойствами.

Маршрутом в графе называется чередующаяся последовательность вершин и ребер, в которой любые два соседних элемента *инцидентны*: $V_1, x_1, V_2, x_2, ..., x_n, V_n$

Пусть V_1, V_2 - вершины, x_1 - соединяющее их ребро. Тогда вершина V_1 и ребро x_1 *инцидентны*. Вершина V_2 и ребро x_1 также инцидентны.

Замкнутый маршрут приводит в ту же вершину, из которой он начался, то есть $V_1 = V_n$.

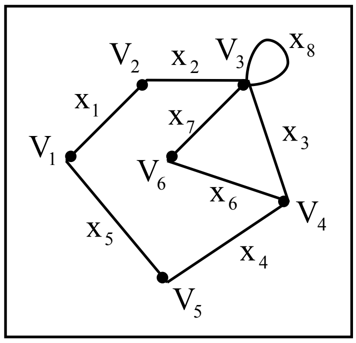
Цепь – это маршрут, все ребра которого различны.

Простая цепь – это цепь без повторяющихся вершин.

Замкнутая цепь называется циклом. Простой цикл – это простая замкнутая цепь.

Длиной маршрута называется количество ребер в нем (с повторениями).

Если маршрут $M=V_1, x_1, V_2, x_2, ..., x_n, V_n$, то длина маршрута M равна k, обозначается $|M| = k$.



Пример 3. Дан граф $G(V,X)$:

$M_1=V_1, x_1, V_2, x_2, V_3, x_3, V_4, x_6, V_6, x_7, V_3, x_2, V_2$;

Длина маршрута $|M_1| = 6$.

$M_2=V_1, x_1, V_2, x_2, V_3, x_3, V_4, x_6, V_6, x_7, V_3, x_2, V_2, x_1, V_1$ - это замкнутый маршрут; $|M_2| = 7$. Цепь: $V_1, x_1, V_2, x_2, V_3, x_3, V_4, x_6, V_6, x_7, V_3$ - все ребра различны.

Длина равна 5.

Эта цепь не является простой, так как при обходе вершину V_3 мы посетили два раза;

$V_1, x_1, V_2, x_2, V_3, x_3, V_4$ - пример простой цепи (все вершины на нашем пути были различны);

$V_4, x_6, V_6, x_7, V_3, x_8, V_3, x_3, V_4$ - цикл; $V_4, x_6, V_6, x_7, V_3, x_3, V_4$ - простой цикл;

В случае орграфа вместо слова «цепь» говорят «путь», а слово «цикл» заменяют на слово «контур».

Одна и та же вершина ориентированного графа может служить началом для одних ребер и концом для других, поэтому различают две степени вершины: степень выхода и степень входа.

Степенью выхода вершины орграфа называется число выходящих из вершины ребер.

Степенью входа вершины орграфа называется число входящих в вершину ребер.

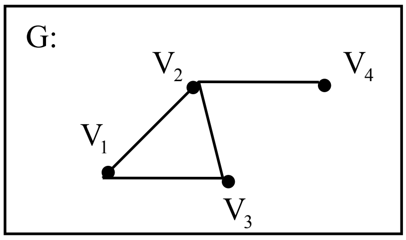
Изолированной вершиной называется вершина, у которой и степень входа, и степень выхода равны нулю.

Источником называется вершина, степень выхода которой положительна, а степень входа равна нулю.

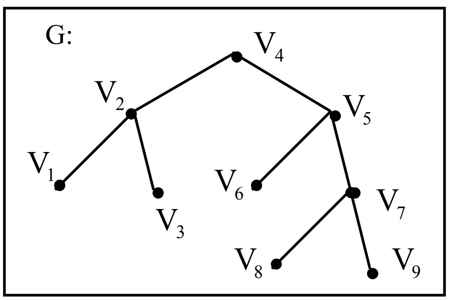
Стоком называется вершина, степень входа которой положительна, а степень выхода равна нулю.

Граф $G(V, X)$ называется *связным*, если для любых двух его вершин существует маршрут, их соединяющий. Связный граф, не содержащий циклов, называется деревом. Пример деревьев: генеалогический граф (родословное дерево), совокупность всех файлов на дискете.

Пример 4. Граф G не является деревом, так как содержит цикл V_1, V_2, V_3:

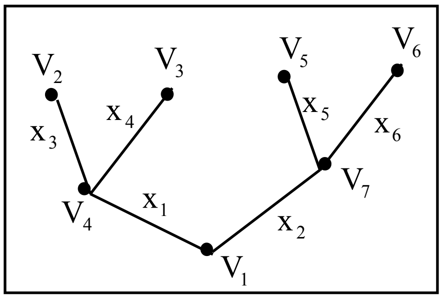


Пример 5. Граф G является деревом:



Очень часто на ребрах графа пишут числа. Такие графы называются *структурными* (или *сетями*). Вершины сети называются *узлами*, а ребра – *дугами.*

Каждому дереву с m ребрами можно взаимно однозначно сопоставить вектор длины 2m из нулей и единиц, называемый *кодом дерева*. Обходим дерево начиная с корня дерева. По каждому ребру нужно пройти дважды. Первый проход по ребру отмечается нулем, повторному проходу по ребру соответствует единица. Из всех возможных вариантов продолжения обхода выбирается продолжение обхода по крайнему левому ребру. Заканчивается обход в конце дерева. Количество единиц в конце равно количеству единиц.



Пример 6. Определить код, соответствующий следующему дереву.

Решение. Обход дерева задается следующей последовательностью: $x_1, x_3, x_3, x_4, x_4, x_1, x_2, x_5, x_5, x_6, x_6, x_2$.

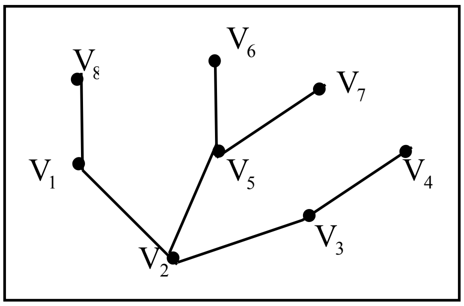
По этой последовательности построим код дерева.

Двигаемся по последовательности слева направо. Если буква в последовательности встречается первый раз, то вместо нее пишем 0. Буквам, которые повторяются в последовательности, соответствует 1. Тогда код дерева равен: 001011001011.

По коду дерева можно восстановить само дерево. Двигаемся по последовательности из нулей и единиц слева направо. Если очередной символ равен нулю, то рисуем новое ребро. Если очередной символ – это единица, то очередной шаг делаем в обратном направлении по последнему нарисованному ребру.

Пример 7. Определить, какое дерево соответствует коду: 00011001011101.

Решение.



Эйлеровым путем в графе называется путь, содержащий все ребра графа.

Эйлеровым циклом или *Эйлеровой цепью* называется цикл, содержащий все ребра графа и притом по одному разу. Если граф $G(V,X)$ обладает Эйлеровым циклом, то он связный, и все его вершины четны.

Гамильтоновым циклом, или путем в графе называется цикл, или путь, проходящий через каждую вершину графа в точности по одному разу, Гамильтоновы пути содержат все вершины по одному разу.

2.2. Способы задания графов

Для задания графа необходимо задать два множества V (множество вершин) и X (множество ребер или дуг). Но при большом числе элементов рисунок графа становится громоздким. В этом случае используют *матричный* способ.

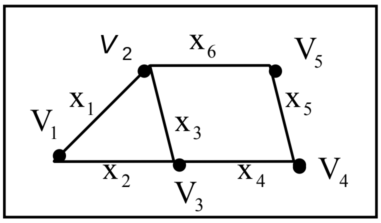
Матрица смежности графа G – это квадратная матрица A(G) размера nxn (n число вершин) с элементами

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если в графе G вершины } V_i,\ V_j \text{ соединены ребром,} \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Матрица инцидентности графа G – это матрица B(G) размера nxm (n - число вершин, m - число ребер) с элементами

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } V_i \text{ - концевая вершина ребра } x_j, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пример 8. Для графа G построить матрицу смежности A(G) и матрицу инцидентности B(G).



***Решение*.** У графа 5 вершин и 6 ребер, тогда размер матрицы A(G) будет 5x5, а матрицы B(G) – 5x6.

$$A(G)= \begin{array}{c|ccccc} & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 \\ \hline V_1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ V_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ V_3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ V_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ V_5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$a_{12}=1 \Leftrightarrow$ в графе G есть ребро, соединяющее вершины V_1 и V_2,

$a_{13}=1 \Leftrightarrow$ в графе G есть ребро, соединяющее вершины V_1 и V_3,

$a_{14}=1 \Leftrightarrow$ в графе G нет ребра, соединяющего вершины V_1 и V_4,

и так далее.

$$B(G)=\begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ V_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ V_3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ V_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ V_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$b_{11}=1 \Leftrightarrow$ вершина V_1 - концевая вершина ребра x_1,

$b_{12}=1 \Leftrightarrow$ вершина V_1 - концевая вершина ребра x_2,

$b_{13}=0 \Leftrightarrow$ вершина V_1 - не является концевой вершиной ребра x_3,

и так далее.

Дан орграф D с вершинами $V_1, V_2, ..., V_n$ и дугами $x_1, x_2, ..., x_m$.

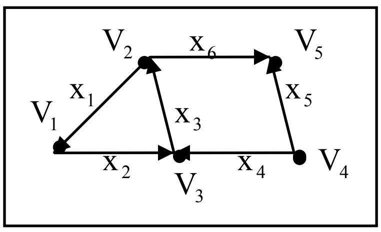
Матрица смежности - орграфа D – это квадратная матрица A(D) размера nxn (n число вершин) с элементами

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если в орграфе D есть дуга из вершины } V_i \text{ в вершину } V_j, \\ 0 & \text{иначе.}\end{cases}$$

Матрица инцидентности орграфа D – это матрица B(D) размера nxm (n - число вершин, m - число дуг) с элементами

$$b_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если } x_j \text{ исходит из } V_i, \\ -1, & \text{если } x_j \text{ заходит в } V_i, \\ 0, & \text{если } x_j \text{ не инцидентна } V_i.\end{cases}$$

Пример 9. Для орграфа D построить матрицу смежности A(D) и матрицу инцидентности B(D).



Решение. Так как у орграфа 5 вершин и 6 дуг, тогда размер матрицы A(D) будет 5x5, а матрицы B(D) – 5x6.

$$\grave{A}(G)= \begin{array}{c|ccccc} & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 \\ \hline V_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ V_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ V_3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ V_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ V_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$a_{12}=0 \Leftrightarrow$ орграф D не содержит дуг из V_1 в V_2,

$a_{13}=1 \Leftrightarrow$ орграф D содержит дугу из V_1 в V_3, и так далее.

$$B(G)= \begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline V_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ V_3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ V_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ V_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$b_{11}=-1 \Leftrightarrow$ в вершине V_1 заканчивается дуга x_1,

$b_{12}=1 \Leftrightarrow$ в вершине V_1 начинается дуга x_2,

$b_{13}=0 \Leftrightarrow$ вершина V_1 - не является концевой вершиной ребра x_3,

и так далее.

Задание 3. Дана матрица А. Построить соответствующий ей орграф, имеющий матрицу А своей матрицей смежности. Найдите матрицу инцидентности для построенного орграфа.

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 4) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$,

5) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 6) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 7) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 8) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$,

9) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 10) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, 11) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 12) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

13) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 14) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, 15) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 16) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

17) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 18) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 19) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, 20) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Образец выполнения задания 3. Дана матрица A=$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Построить соответствующий ей орграф, имеющий матрицу A своей матрицей смежности. Найдите матрицу инцидентности для построенного орграфа.

Решение. Для построения орграфа его вершине однозначно сопоставим точку на плоскости. Данная матрица смежности имеет четыре строки и четыре столбца, следовательно, в орграфе четыре вершины: v_1, v_2, v_3, v_4.

Проанализируем элементы матрицы:

$\grave{a}_{11} = 0$ - при вершине 1 нет петель;

$\grave{a}_{12} = 2$ - из v_1 выходит две дуги к v_2;

$\grave{a}_{13} = 0$ - из v_1 не выходит ни одной дуги к v_3;

$\grave{a}_{14} = 1$ - при v_1 выходит одна дуга к v_4;

$\grave{a}_{21} = 0$ - из v_2 не выходит ни одной дуги к v_1;

$\grave{a}_{22} = 0$ - при v_2 нет петель;

$\grave{a}_{23} = 1$ - из v_2 выходит одна дуга к v_3 ;

$\grave{a}_{24} = 0$ - из v_2 не выходит ни одной дуги v_4 ;

$\grave{a}_{31} = 1$ - из v_3 выходит одна дуга к v_1 ;

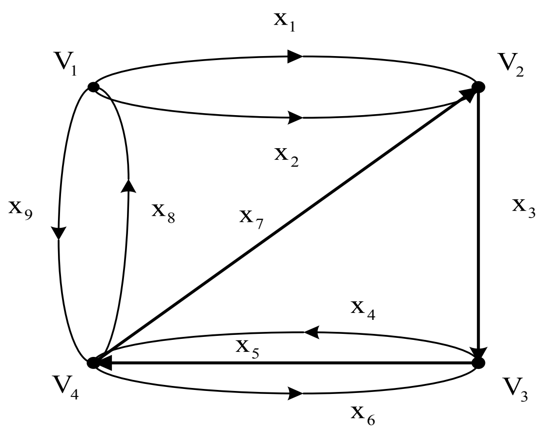
$\grave{a}_{32} = 0$ - из v_3 не выходит ни одной дуги к v_2 ;

$\grave{a}_{33} = 0$ - при v_3 нет петель;

$\grave{a}_{34} = 2$ - из v_3 выходит две дуги к v_4 ;

$\grave{a}_{41} = 1$ - из v_4 выходит одна дуга к v_1 и так далее.

Строим орграф



Для построенного орграфа запишем матрицу инцидентности: орграф имеет четыре вершины, следовательно, в матрице будет четыре строки; имеет 9 дуг, поэтому, в матрице будет девять столбцов.

$$\hat{A} = \begin{array}{c|ccccccccc} & \tilde{o}_1 & \tilde{o}_2 & \tilde{o}_3 & \tilde{o}_4 & \tilde{o}_5 & \tilde{o}_6 & \tilde{o}_7 & \tilde{o}_8 & \tilde{o}_9 \\ v_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ v_2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ v_2 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}$$

$\hat{a}_{11} = 1 \Leftrightarrow$ орграф содержит дугу из v_1 , в v_2 .

$\hat{a}_{13} = 0 \Leftrightarrow$ орграф не содержит дуг из v_1 , в v_3 .

$\hat{a}_{18} = -1 \Leftrightarrow$ в вершине v_1 заканчивается дуга $\tilde{o}_8$ и т.д.

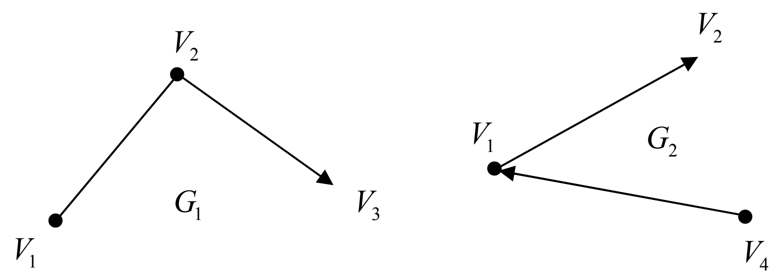
2.3. Операции над графами

Рассмотрим графы $G_1(V_1, \tilde{O}_1)$ и $G_2(V_2, \tilde{O}_2)$.

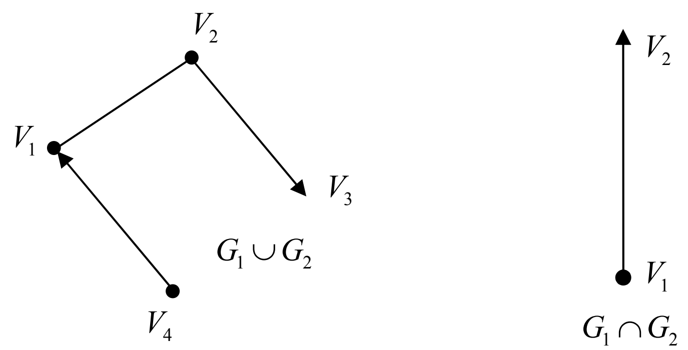
1. Объединением графов $G_1 \cup G_2$ называется граф $G_3(V_1 \cup V_2, \overline{\tilde{O}_1} \cup \tilde{O}_2)$.

2. Пересечением $G_1 \cap G_2$ графов G_1 è G_2 называется граф $G_4(V_1 \cap V_2, \tilde{O}_1 \cap \overline{\tilde{O}_2})$.

Пример 10. Для графов G_1 è G_2, показанных на рисунке, найти $G_3 = G_1 \cup G_2$ è $G_4 = G_1 \cap G_2$.



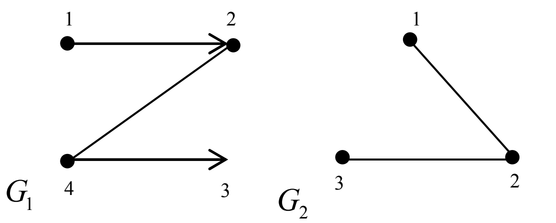
Решение.



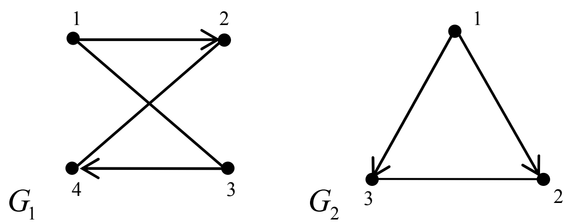
Задание 4. Пусть заданы два графа G_1 è G_2.

а) Изобразите геометрически объединение графов $G_1 \cup G_2$; пересечение графов $G_1 \cap G_2$; б) Найдите матрицу смежности для графа $G_1 \cup G_2$.

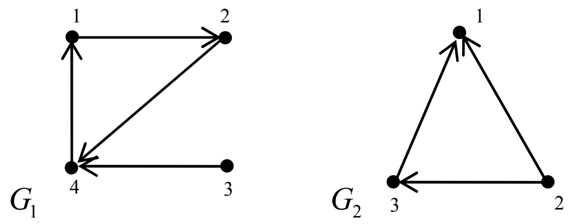
1.



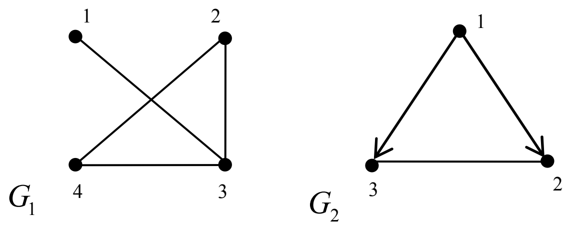
2.



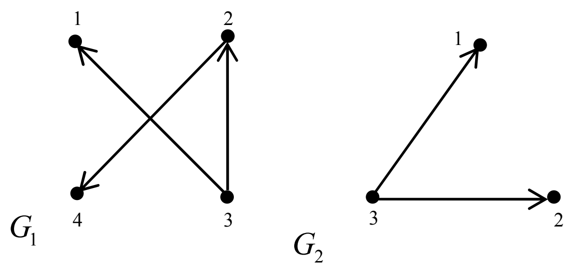
3.



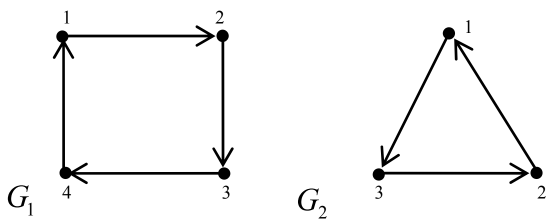
4.



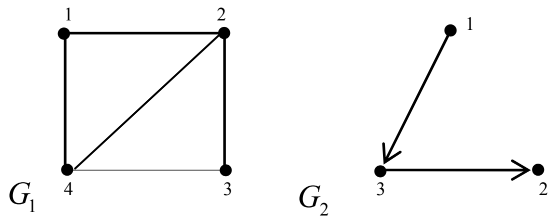
5.



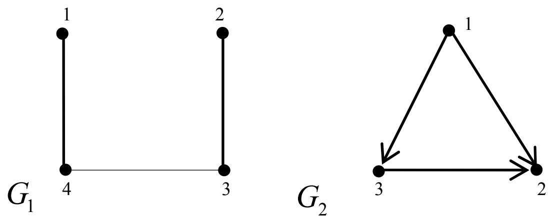
6.



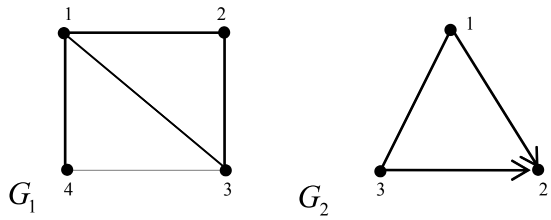
7.



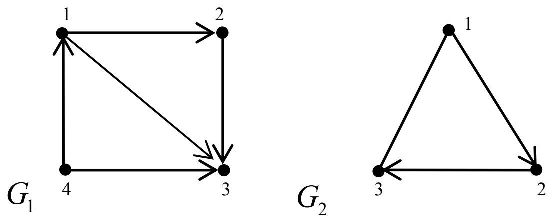
8.



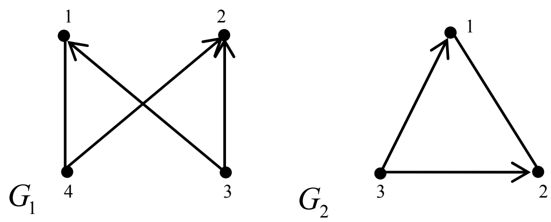
9.



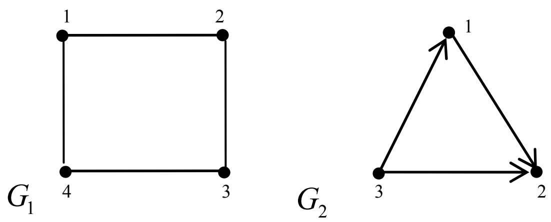
10.



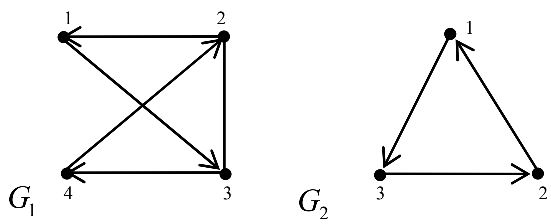
11.



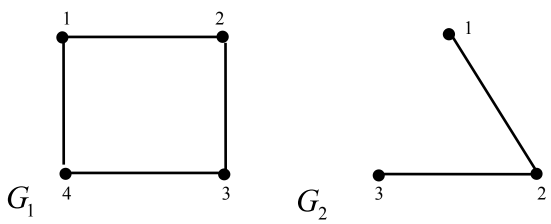
12.



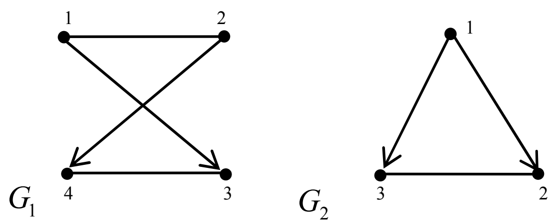
13.



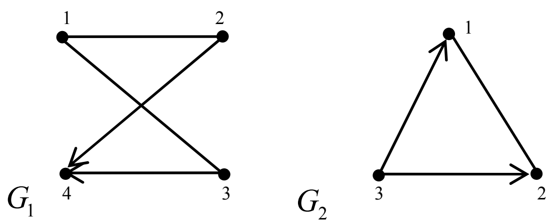
14.



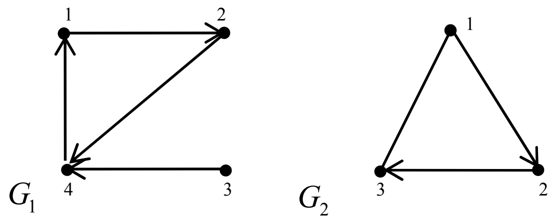
15.



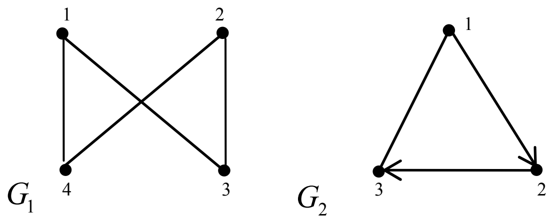
16.



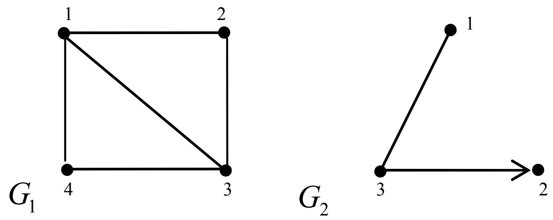
17.



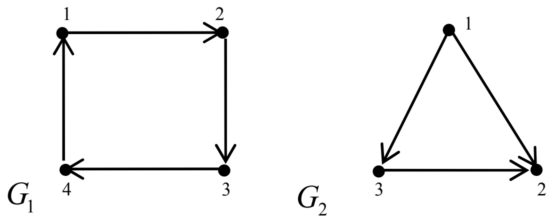
18.



19.



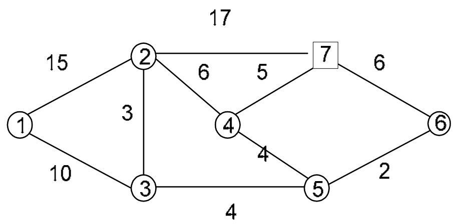
20.



2.4. Задача определения кратчайшего пути

Задача состоит в том, чтобы найти кратчайший путь на графе от какой то выделенной вершины до любой другой вершины.

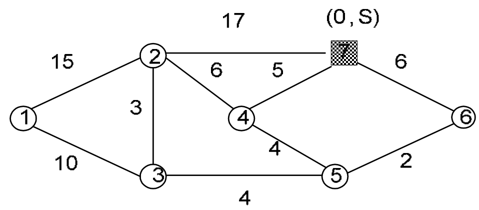
Пример 11. Узел 7 – склад, остальные узлы – строительные площадки компании. Показатели на двух дугах – расстояния в километрах.



Надо найти кратчайшие расстояния от склада до каждой строительной площадки.

Решим эту задачу методом присвоения меток. Каждому узлу присваиваем метку из двух чисел. Первое число – это минимальное расстояние от узла 7 до данного узла, второе – номер предыдущего узла на пути от узла 7 до данного узла. Узел, для которого мы определили путь от узла 7. назовем помеченным. Узел, для которого такой путь еще не определен, назовем непомеченным. Если мы определили кратчайшее расстояние от узла 7 до данного узла, то соответствующую метку назовем постоянной и будем обозначать в круглых скобках. Все остальные метки назовем временными и будем обозначать в квадратных скобках. Узлы с постоянными метками будем закрашивать.

Итак, узлу 7 присваиваем метку (0, S), где 0 – это расстояние от узла 7, S – обозначение стартового узла.



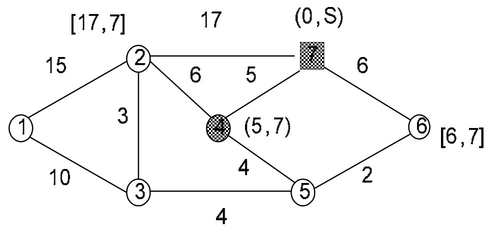
Узел 7 связан с узлами 2, 4, 6. Длины соответствующих ребер – 17, 5, 6. Поэтому узлам 2, 4, 6 присваиваем временные метки – [17, 7], [5, 7], [6, 7] соответственно (первое число – длина пути от узла 7 до данного узла, второе – это предшествующий узел).

После выполнения этой операции можно сделать два следующих шага:

- найти участок (участки) минимальной длины и соответствующую временную метку сделать постоянно;

-узел (узлы), которому соответствует появившаяся постоянная метка, становится новым стартом.

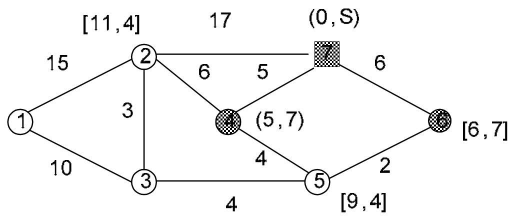
После выполнения этой операции временная метка с наименьшим расстоянием до узла 7 становится постоянной. Это метка (5, 7) узла 4. Поэтому следующий шаг начнем с узла 4.



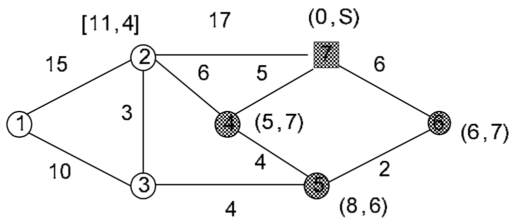
Узел 4 непосредственно связан с узлами 2 и 5 без постоянных меток. Длина ребра 4 – 5 равна 4, метка узла 4 – (5, 7) $\Rightarrow$ временная метка узла 5 равна [5 + 4, 4] = [9, 4]. Длина ребра 4 – 2 равна 6, метка узла 4 – (5, 7) $\Rightarrow$ временная метка узла 2 равна [5 + 6, 4] = [11, 4]. Таким образом, мы нашли путь от узла 7 до узла 2 длины 11.

Узел 2 помечен меткой [17, 7], но 11<17 $\Rightarrow$ старую метку [17, 7] узла 2 мы меняем на новую временную метку [11, 4], где 11 – длина пути от узла 2, а 4 – номер предшествующего узла.

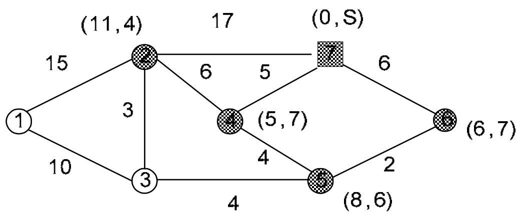
После этого из всех временных меток [11, 4], [9, 4], [6, 7] выбираем метку с наименьшим первым числом. Это [6, 7]. Эта метка становится постоянной, а очередной шаг мы начнем с узла соответствующего этой метке, - узла 6.



Этот узел связан с узлом 5 без постоянной метки. Длина ребра 6 – 5 равна 2, метка узла 6 – (6, 7) $\Rightarrow$ временная метка узла 5 равна [6 + 2, 6] = [8, 6]. Но узел 5 уже помечен меткой [9, 4]. Так как 8<9, то узлу 5 припишем новую метку [8, 6]. После этого из всех временных меток [11, 4] и [8, 6] метку с наименьшим первым числом (8, 6) объявляем постоянной, а следующий шаг начнем с соответствующего ей узла 5.

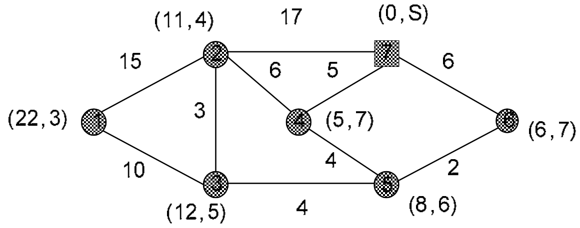


Узел 5 связан только с одним узлом без постоянной метки – узлом 3. Длина ребра 5 – 3 равна 4, метка узла 5 – (8, 6) $\Rightarrow$ временная метка узла 3 равна [8 + 4, 5] = [12, 5]. Теперь из временных меток [11, 4] и [12, 5] метку с наименьшим первым числом (11, 4) объявляем постоянной, а следующий шаг начнем с соответствующего ей узла 2.



Узел 2 связан с узлами 1 и 3 без постоянных меток. Длина ребра 2 – 1 равна 15, метка узла 2 – 1 равна 15, метка узла 2 – (11, 4) $\Rightarrow$ узлу 1 припишем временную метку [11 + 15, 2] = [26, 2]. Длина ребра 2 – 3 равна 3, метка узла 2 – (11, 4) $\Rightarrow$ мы могли бы пометить узел 3 временной меткой [11 + 3, 2] = [14, 2], но узел 3 уже помечен меткой [12, 5] с меньшим первым числом. Так что метку узла 3 не меняем. Теперь из временных меток [26, 2] и [12, 5] метка с наименьшим первым числом становится постоянной (12, 5), а соответствующего ей узла 3 начнем следующий шаг. Метку узла

1 меняем на (12 + 10, 3) = (22, 3). Всем узлам приписаны постоянные метки. Действие алгоритма прекращается.



Первое число метки у каждой вершины – это длина кратчайшего пути от узла 7 до данной вершины. Чтобы восстановить кратчайший путь от узла 7 до какой-то вершины, мы должны из этой вершины перейти в соседнюю (ее номер – это второе число метки). И так до вершины 7.

Теперь мы можем ответить на вопросы задачи. Метка узла 1 – (22, 3) $\Rightarrow$ длина кратчайшего пути от узла 7 до узла 1 равна 22. Из узла 1 мы идем в узел 3. Метка узла 3 – (12, 5) $\Rightarrow$ идем в узел 5. Метка узла 5 – (8, 6) $\Rightarrow$ идем в узел 6. Метка узла 6 – (6, 7) $\Rightarrow$ идем в узел 7, т.е. кратчайший путь 1 – 3 – 5 – 6 – 7. Он не проходит через узел 2.

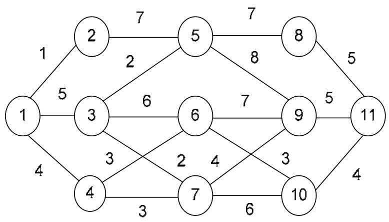
2.5. Задача о кратчайшем пути между двумя пунктами

Известна схема дорог. Требуется перевезти груз из одного пункта в другой по маршруту минимальной длины.

Двигаясь от конечного пункта к начальному пункту, каждой вершине припишем число по определенным правилам. Конечной вершине присвоим число 0. Если i-я вершина в направлении от начального пункта к конечному пункту непосредственно соединена с вершинами $j_1 ..., j_k$, которым приписаны числа $r(j_1),...,r(j_k)$, то вершине i приписывается число $r(i)\min_s(r(j_s)+t(i,j_s))$, где $t(i,j_s)$ - длина ребра (i,j_s).

Пусть этот минимум достигается для вершины j_m.Тогда ребро (i,j_m) покажем двумя чертами со стрелкой от i к j_m. Если таких вершин j_m несколько, то на этом шаге будет несколько двойных ребер. Число, приписанное начальному пункту, равно минимальной длине искомого маршрута. Двигаться от начального пункта к конечному пункту нужно по двойным ребрам со стрелками.

Пример 12. Найдем маршрут минимальной длины от пункта 1 к пункту 11.



Припишем вершинам числа вместо номеров. Для 11-й вершины это 0.

11-я вершина соединена с 8-й, 9-й и 10-й вершинами, которым припишем числа 0+5=5, 0+5=5, 0+4=4 соответственно. Все эти ребра покажем двумя чертами со стрелками.

По числам 8-й и 9-й вершин найдем число 5-й вершины: $\min(5+7, 5+8) = 12$. Ребро (5, 8) изобразим двумя чертами со стрелкой.

По числам 9-й и 10-й вершин найдем число 6-й вершины: $\min(5+7, 4+3) = 7$. Ребро (6, 10) изобразим двумя чертами со стрелкой.

По числам 9-й и 10-й вершин найдем число 7-й вершины: $\min(5+4, 4+6) = 9$. Ребро (7, 9) изобразим двумя чертами со стрелкой.

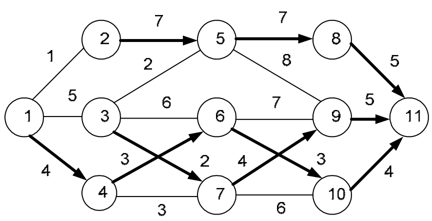
По числу 5-й вершины определим число 2-й вершины: 12 + 7 = 19. Ребро (2, 5) изобразим двумя чертами со стрелкой.

По числам 5-й, 6-й и 7-й вершин определим число 3-й вершины: $\min(12+2, 9+2, 7+6) = 11$. Ребро (3, 7) изобразим двумя чертами со стрелкой.

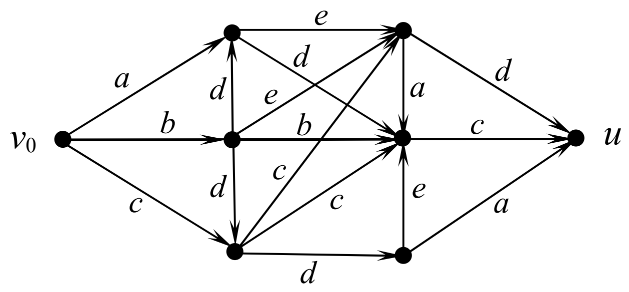
По числам 6-й и 7-й вершин найдем число 4-й вершины: $\min(7+3, 9+8) = 10$. Ребро (4, 6) изобразим двумя чертами со стрелкой.

По числам 2-й, 3-й и 7-й вершин определим число 1-й вершины: $\min(19+1, 11+5, 10+4) = 14$. Ребро (1, 4) изобразим двумя чертами со стрелкой. Длина кратчайшего пути равна 11.

Двигаемся из начальной вершины 1 в конечную вершину 11 по ребрам со стрелкой. Получаем кратчайший путь 1 – 4 – 6 – 10 – 11. Его длина равна 14.



Задание 5. Для транспортной сети T найти маршрут минимальной длины от вершины v_0 к вершине u .



вариант	a	b	c	d	e
1.	3	3	2	5	4
2.	3	3	4	4	3
3.	4	3	2	5	4
4.	2	3	4	4	3
5.	3	3	2	3	4
6.	3	3	4	5	3
7.	4	3	2	5	4
8.	2	4	4	4	3
9.	3	4	2	5	4
10.	3	3	4	4	4
11.	3	3	2	5	5
12.	4	3	4	4	3
13.	3	5	2	5	4
14.	5	3	4	2	3
15.	4	3	4	4	2
16.	3	2	5	4	3
17.	4	4	2	3	2
18.	3	3	2	5	4
19.	2	3	4	4	3
20.	3	4	2	5	4
21.	2	3	5	4	3
22.	3	3	2	2	4
23.	4	3	4	4	3
24.	3	3	2	5	4
25.	5	2	4	4	3
26.	3	3	2	3	4
27.	3	3	4	4	3
28.	5	4	4	2	4
29.	3	3	3	4	3
30.	4	4	4	4	2

Литература

1. Игошин, В.И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов : учебное пособие для студентов высших учебных заведений / В.И. Игошин – 2-ое изд., стер. – М. : Академия, 2006. - 304 с.
2. Судоплатов, С.В. Элементы дискретной математики : учебник / С.В. Судоплатов, Е.В. Овчинникова. – М. : ННФА – М; Новосибирск: НГТУ, 2003. - 280 с.
3. Просветов, Г.И. Дискретная математика: задачи и решения : учебное пособие / Г.И. Просветов. – М. :БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 222 с.

Содержание

Учебное издание

Шувалова Л.Е.
старший преподаватель

Апайчева Л.А.
кандидат физико-математических наук, доцент

Багоутдинова А.Г.
кандидат технических наук, доцент

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ
Элементы математической логики. Графы

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Корректор Габдурахимова Т.М.
Худ. редактор Федорова Л.Г.

Сдано в набор 06.06.2012.
Подписано в печать 19.09.2012.
Бумага писчая. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 2,2. Тираж 100.
Заказ №43.

НХТИ (филиал) ФГБОУ ВПО «КНИТУ»,
г. Нижнекамск, 423570, ул. 30 лет Победы, д. 5а.