

**Федеральное агентство по образованию  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Казанский государственный технологический университет»  
Нижекамский химико-технологический институт**

**НАДЕЖНОСТЬ СТРУКТУРНО РЕЗЕРВИРОВАННЫХ  
ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

**Методические указания**

**Нижекамск  
НХТИ КГТУ  
2009**

Составители: доц. Н.В. Лежнева, доц. В.В. Гетман

Надежность структурно резервированных технических систем: Методические указания / сост.: Н.В. Лежнева, В.В. Гетман. –Казань: Изд-во Казан. гос. технол. ун-та, 2009. - 32 с.

Представлены основные сведения по видам и методам структурного резервирования технических систем, показателям надежности резервированных систем. Показано применение теории при решении практических задач, а также приведены практические задачи для самостоятельного решения.

Предназначены для студентов, специализирующихся в области автоматизированных систем обработки информации и управления, а также в области автоматизации технологических процессов и производств при изучении дисциплин «Надежность, эргономика и качество АСОИУ», «Диагностика и надежность автоматизированных систем».

Подготовлены на кафедре АТП и П НХТИ КГТУ.

Печатается по решению методической комиссии НХТИ (филиал) ГОУ ВПО «КГТУ» по циклу общепрофессиональных дисциплин.

Рецензенты: канд физ.-мат. наук,  
зав. циклом ИТ НХТИ Н.Н.Саримов  
канд.т ех. наук, доц. В.В.Елизаров

## СОДЕРЖАНИЕ

I. Методические указания по теоретической части	4
1.1. Общее нагруженное резервирование с целой кратностью	11
1.2. Общее нагруженное резервирование с дробной кратностью	12
1.3. Раздельное нагруженное резервирование с целой кратностью	13
1.4. Раздельное нагруженное резервирование с дробной кратностью	14
1.5. Общее ненагруженное резервирование с дробной кратностью	15
1.6. Общее комбинированное резервирование с дробной кратностью	16
1.7. Раздельное ненагруженное резервирование	18
1.8. Раздельное комбинированное резервирование	19
II. Методические указания по практической части	19
III. Задачи для самостоятельного решения	23
3.1. Задачи по теме «Скользящее резервирование»	23
3.2. Задачи по теме «Резервирование замещением в режиме облегченного («теплого») резерва и в режиме ненагруженного («холодного») резерва»	25
3.3. Задачи по теме «Нагруженное («горячее») резервирование»	27
3.4. Задачи по теме «Мажоритарные системы»	31
Библиографический список	31

## I. Методические указания по теоретической части

Одним из способов повышения надежности современных технических систем является резервирование. *Резервированием* называется способ обеспечения надежности системы за счет использования дополнительных резервных средств и возможностей, избыточных по отношению к минимально необходимым при выполнении требуемых функций [1]. Виды и методы резервирования классифицируются в зависимости от типа улучшаемых характеристик и класса резервируемых систем. Для повышения надежности систем управления применяют структурное, функциональное, временное, информационное и алгоритмическое резервирования.

*Структурным* резервированием называется способ повышения надежности аппаратуры, состоящий в применении в системе дополнительных (резервных) элементов, которые не являются необходимыми для выполнения возложенных на систему функций, но используются системой после отказа основных элементов [1]. Характерной особенностью структурного резервирования является то, что в идеально надежной системе все резервные элементы могут быть удалены из системы без ухудшения качества ее функционирования. Они необходимы тогда, когда существует принципиальная возможность отказа основных элементов. В системе со структурным резервом в отличие от безызбыточной системы не всегда отказ элемента приводит к отказу системы, т.к. работа системы поддерживается за счет реконфигурации структуры и подключения резервных элементов. Отказ системы со структурным резервом наступает в случае, когда отказ одного из основных элементов невозможно компенсировать своевременным подключением работоспособного резервного элемента (группы элементов).

*Функциональным* резервированием называют способ повышения надежности, использующий свойство систем обеспечивать при отказах элементов безотказное функционирование за счет перераспределения функций и более интенсивной работы элементов, выполняющих до отказа только свои основные функции. Выполнять дополнительные функции они способны только временно, что может сопровождаться некоторым ухудшением качества работы, но в допустимых пределах. При функциональном резервировании в системе нет «лишних» элементов, так как все элементы необходимы для выполнения заданных функций. Характерной особенностью этого вида резервирования является то, что даже из идеально надежной системы нельзя удалить ни одного элемента, не вызвав перераспределения функций элементов и увеличения их функциональной нагрузки, а, возможно, перехода на более тяжелый режим работы. Применение функционального резервирования обычно сопровождается введением информационной и алгоритмической избыточности.

*Временное* резервирование – это способ повышения надежности, при котором системе в процессе функционирования представляется возможность израсходовать некоторое время, называемое резервным, для восстановления технических характеристик. Резервное время можно израсходовать на переключение структурного резерва, обнаружение и устранение отказов, повторение работ, обесцененных отказами, ожидание загрузки в работоспособном состоянии. Резерв времени [2] может создаваться за счет увеличения времени, выделяемого системе для выполнения задания (оперативного времени), запаса производительности всей системы и ее отдельных устройств без увеличения оперативного времени, увеличения быстродействия элементов или комплексирования нескольких устройств (систем) одинаковой или различной производительности для выполнения общего задания, функциональной инерционности протекающих

в системе процессов (например, в АСОИУ допускаются незначительные перерывы в работе, протекающие без потери качества функционирования, которые можно использовать для восстановления ее работоспособности), внутренних запасов выходной продукции (в АСОИУ такой продукцией является информация). Для систем с временным резервированием нарушение работоспособности не обязательно приводит к отказу системы, так как ее можно восстановить за резервное время. Отказ системы с временным резервированием – это событие, заключающееся в нарушении работоспособности, вызывающем недопустимые последствия или не устраненном за допустимое время. Временное резервирование часто используют для повышения эффективности других видов резервирования

*Информационное* резервирование – это способ повышения надежности, достоверности обработки и передачи информации, точности вычислений и производительности путем избыточности внутреннего языка устройств обработки и передачи данных, в виде избыточности помехоустойчивых кодов, массивов данных в составе файла данных, файловой структуры в памяти ЭВМ. Без информационной избыточности невозможно представить ни один информационный процесс в АСОИУ. Часто без информационной избыточности нельзя применять другие виды резервирования.

*Алгоритмическое* резервирование – это способ повышения надежности, при котором в алгоритмах используется дополнительное количество операторов по сравнению с алгоритмом минимальной сложности для преодоления помех и случайных возмущений, вызванных, в частности, отказами элементов аппаратуры. Алгоритмическое резервирование вводится для преодоления помех и случайных возмущений, вызванных, в частности, отказами элементов аппаратуры. Оно применяется совместно с другими видами резервирования и иногда необходимо для их реализации.

В данных методических указаниях рассматривается только структурное резервирование. При структурном резервировании введение в систему резервной аппаратуры увеличивает суммарную интенсивность отказов основных и резервных элементов, но при этом существенно уменьшает интенсивность отказов системы. Как следствие, улучшаются и другие показатели надежности. Структурное резервирование позволяет обеспечить непрерывную работу системы в течении промежутка времени, во много раз превышающего среднюю наработку до отказа нерезервированной системы.

Для эффективного использования структурное резервирование иногда используется совместно с другими видами резервирования, например временным, для того чтобы гарантировать своевременное обнаружение отказов и подключение резервной аппаратуры, а также информационным и алгоритмическим.

Основным параметром структурного резервирования является кратность резервирования. *Кратность резервирования* – это отношение числа резервных и основных элементов:  $m_c = m / k$ , где  $m$  и  $k$  – число резервных и основных подсистем в резервированной группе. В данном случае под подсистемой понимают совокупность основных и резервных элементов, подлежащих замене при отказе хотя бы одного элемента этой совокупности. Следовательно, все элементы одной подсистемы соединены последовательно. В зависимости от способа резервирования подсистемой является вся нерезервированная система, группа элементов или один элемент. При  $k=1$  кратность резервирования целая, при  $k>1$  – дробная. Кратность резервирования в различных резервированных группах одной системы может быть различной. Если же она одинакова, то ее называют кратностью резервирования всей системы. При резервировании с целой кратностью отказ резервированной

группы наступает в том случае, когда число отказавших подсистем превышает число резервных подсистем.

Методы структурного резервирования подразделяются по масштабу резервирования, соотношению количества основных и резервных элементов и способу включения резерва, режиму работы резервных элементов и способам подключения резервной аппаратуры.

Резервирование называется *общим*, если резервируется вся последовательная система, *раздельным (поэлементным)*, если резервируются отдельные элементы последовательной системы, и *групповым*, если резервируется группа элементов системы. Совокупность основных и резервных элементов, замещающих друг друга при отказе одного из элементов, называется *резервированной группой*. При общем резервировании в системе одна резервированная группа, при раздельном – количество резервированных групп равно количеству элементов в последовательной системе. При групповом резервировании число резервированных групп имеет промежуточное значение. Система со структурным резервом отказывает при отказе хотя бы одной ее резервированной группы. В структурной надежностной схеме системы резервированные группы соединены последовательно (рис.1) и

вероятность безотказной работы системы  $P_C(t) = \prod_{i=1}^n P_i(t)$ , где

$P_i(t)$  - вероятность безотказной работы  $i$ -й резервированной

группы. Вероятность отказа системы  $Q_C(t) = 1 - \prod_{i=1}^n P_i(t)$ .

Скольльзящее резервирование (рис.2) применяют в случае, когда все основные элементы системы одинаковы. Резервные элементы не закрепляются за определенными основными элементами и могут заменить любой из них.



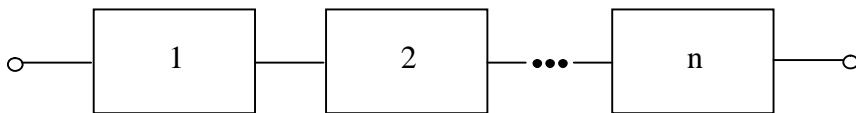


Рис.1 Структурная надежность схема (CHC) системы со структурным резервом: 1,2. .... n – резервированные группы

По способу включения резерва различают резервирование с *постоянно включенным резервом* (рис. 3,5) и с *включением замещением* (рис. 4, 6).

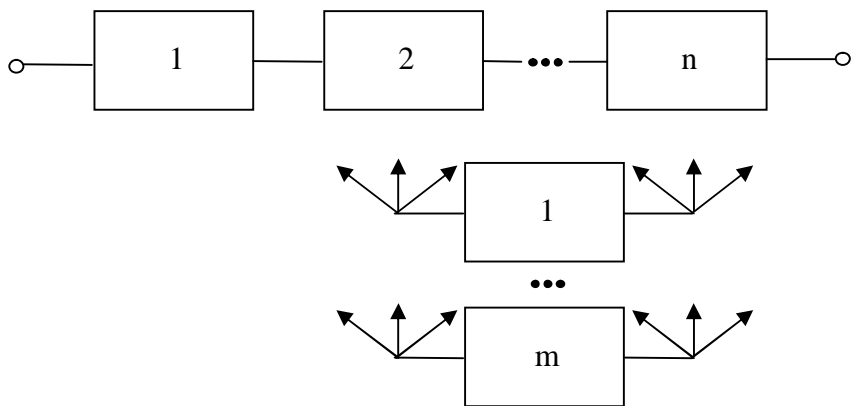


Рис.2 Структурная надежность схема резервированной группы при скользящем резервировании

При постоянном включении основные и резервные подсистемы функционируют одновременно, начиная с момента включения системы. При включении замещением резервные подсистемы включаются в работу только после отказа основных. Для этого они находятся в состоянии хранения (ненагруженный или «холодный» резерв), частично включены (облегченный или

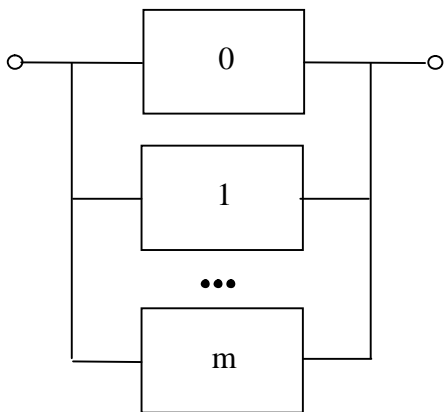


Рис.3 СНС резервированной группы при резервировании с целой кратностью с постоянным включением

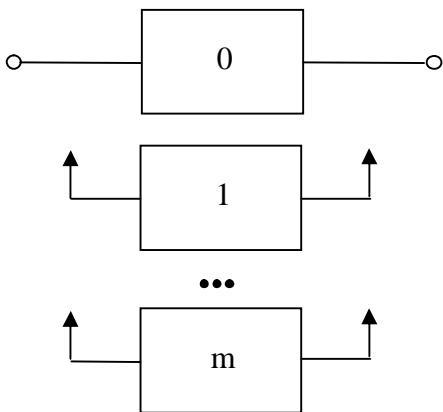


Рис.4 СНС резервированной группы при резервировании с целой кратностью при включении замещением

«теплый» резерв) или полностью включены (нагруженный или «горячий» резерв). При нагруженном резерве интенсивность отказов резервной подсистемы такая же, как и основной:  $\lambda_p = \lambda_o$ . При ненагруженном резерве  $\lambda_p$  во много раз меньше  $\lambda_o$  и при выполнении расчетов допускают  $\lambda_p = 0$ . Облегченный резерв занимает промежуточное положение:  $0 < \lambda_p < \lambda_o$ .

Замещение отказавшего основного элемента резервным осуществляется вручную, полуавтоматически или автоматически. В первом случае не требуется никакой аппаратуры переключения, но время переключения резерва велико. При автоматическом переключении используется специальный автомат переключения резерва, снижающий время переключения до не скольких секунд или долей секунд, но обладающий конечной надежностью. При полуавтоматическом

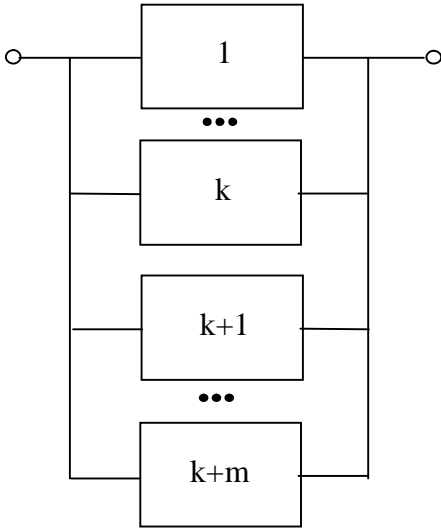


Рис.5 СНС резервированной группы при резервировании с дробной кратностью с постоянным включением

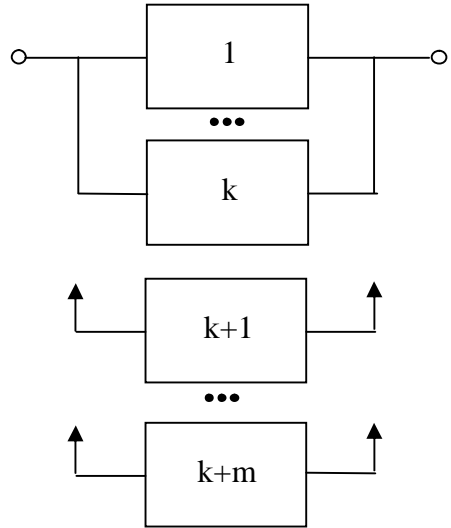


Рис.6 СНС резервированной группы при резервировании с дробной кратностью при включении замещением

переключении часть функций выполняет автомат, другую оператор.

**1.1. Общее нагруженное резервирование с целой кратностью (рис.3)**

Вероятность отказа системы  $Q_c(t) = \prod_{i=0}^m Q_i(t) =$

$= \prod_{i=0}^m (1 - P_i(t))$ , где  $Q_i(t)$  и  $P_i(t)$  - вероятность отказа и безотказной работы основного и резервных элементов.

Вероятность безотказной работы системы  $P_C(t) = 1 - Q_C(t) =$

$$= 1 - \prod_{i=0}^m Q_i(t) = 1 - \prod_{i=0}^m (1 - P_i(t)) = 1 - \prod_{i=0}^m \left( 1 - e^{-\int_0^t \lambda_i(x) dx} \right),$$

где  $\lambda_i(t)$ - интенсивности отказов основного и резервных элементов. В частности, при экспоненциальном распределении

наработок до отказа  $P_C(t) = 1 - \prod_{i=0}^m \left( 1 - e^{-\lambda_i t} \right)$ . При

равнонадежных элементах с интенсивностями отказов  $\lambda_i = \lambda$  вероятность безотказной работы системы

$P_C(t) = 1 - \left( 1 - e^{-\lambda t} \right)^{m+1}$ . Средняя наработка до отказа системы

$t_H^C = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^m \frac{1}{i+1}$ , плотность вероятности отказа системы

$f_C(t) = (m+1)\lambda e^{-\lambda t} \left( 1 - e^{-\lambda t} \right)^m$ , интенсивность отказов системы

$$\lambda_C(t) = \frac{(m+1)\lambda e^{-\lambda t} \left( 1 - e^{-\lambda t} \right)^m}{1 - \left( 1 - e^{-\lambda t} \right)^{m+1}}.$$

### **1.2. Общее нагруженное резервирование с дробной кратностью (рис.4)**

При равнонадежных элементах вероятность безотказной

работы системы  $P_C(t) = \sum_{i=0}^m C_{k+m}^i P^{k+m-i} (1-P)^i$ , где P-

вероятность безотказной работы одного элемента, i- число неработоспособных элементов. В частности, при экспоненциальном распределении наработок до отказа

$$P_C(t) = e^{-k\lambda t} \sum_{i=0}^m C_{k+m}^i e^{-(m-i)\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^i,$$

плотность вероятности отказа системы  $f_C(t) = e^{-k\lambda t} (m+k)e^{-m\lambda t} +$   
 $+ \lambda e^{-k\lambda t} \sum_{i=1}^m C_{k+m}^i e^{-(m-i)\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{i-1} \left( (m+k)(1 - e^{-\lambda t}) - i \right),$

интенсивность отказов системы  $\lambda_C(t) = \frac{\lambda(m+k)e^{-m\lambda t} +$

$$\frac{+ \lambda \sum_{i=1}^m C_{k+m}^i e^{-(m-i)\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{i-1} \left( (m+k)(1 - e^{-\lambda t}) - i \right)}{\sum_{i=0}^m C_{k+m}^i e^{-(m-i)\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^i},$$

средняя наработка до отказа системы  $t_H^C = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^m \frac{1}{k+i}$ .

### ***1.3. Раздельное нагруженное резервирование с целой кратностью***

При резервировании с целой кратностью система представляет собой последовательное соединение n резервированных групп, структура каждой из которых представлена на рис.3. I-я резервированная группа включает один основной и  $m_i$  резервных элементов. Т.к. все элементы

группы равнонадежны, то вероятность безотказной работы  $i$ -й группы:  $P_i(t) = 1 - Q_i^{m_i+1}(t)$ . Следовательно, вероятность

безотказной работы системы  $P_C(t) = \prod_{i=0}^m P_i(t) =$

$$= \prod_{i=0}^m \left(1 - Q_i^{m_i+1}(t)\right). \quad (1) \text{ При экспоненциальном распределении}$$

наработок до отказа (1) примет вид:

$$P_C(t) = \prod_{i=1}^n \left(1 - \left(1 - e^{-\lambda_i t}\right)^{m_i+1}\right). \text{ В частном случае, при}$$

$$m_i = m, \lambda_i = \lambda \text{ получим } P_C(t) = \left(1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{m+1}\right)^n,$$

$$t_H^C = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \sum_{j=0}^m (-1)^j \frac{1}{(m+1)i + j + 1},$$

$$f_C(t) = n\lambda(m+1)e^{-\lambda t} \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^m \left(1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{m+1}\right)^{n-1},$$

$$\lambda_C(t) = \frac{n\lambda(m+1)e^{-\lambda t} \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^m}{1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{m+1}}.$$

#### ***1.4. Раздельное нагруженное резервирование с дробной кратностью***

При резервировании с дробной кратностью система

представляет собой последовательное соединение  $n$  резервированных групп, каждая из которых имеет структуру, приведенную на рис.4. В  $i$ -ю резервированную группу входит  $k_i$  основных и  $m_i$  резервных элементов. Вероятность безотказной работы  $i$ -й группы при равнонадежных элементах и экспоненциальном распределении наработок до отказа

$$P_i(t) = e^{-k_i \lambda_i t} \sum_{l=0}^{m_i} C_{k_i+m_i}^l e^{-(m_i-l)\lambda t} (1 - e^{-\lambda_i t})^l.$$

Следовательно, вероятность безотказной работы системы

$$P_C(t) = \prod_{i=1}^n P_i(t) = \prod_{i=1}^n e^{-k_i \lambda_i t} \sum_{l=0}^{m_i} C_{k_i+m_i}^l e^{-(m_i-l)\lambda t} \times \\ \times (1 - e^{-\lambda_i t}).$$

В частности, при одинаковых элементах во всех резервированных группах получим:

$$P_C(t) = e^{-kn\lambda t} \left( \sum_{l=0}^m C_{k+m}^l e^{-(m-l)\lambda t} (1 - e^{-\lambda t}) \right)^n.$$

### **1.5. Общее ненагруженное резервирование с дробной кратностью**

При общем ненагруженном резервировании с дробной кратностью система имеет структуру, представленную на рис. 7. Вероятность отказа, плотность вероятности отказа, интенсивность отказов и средняя наработка до отказа системы рассчитываются по следующим формулам:

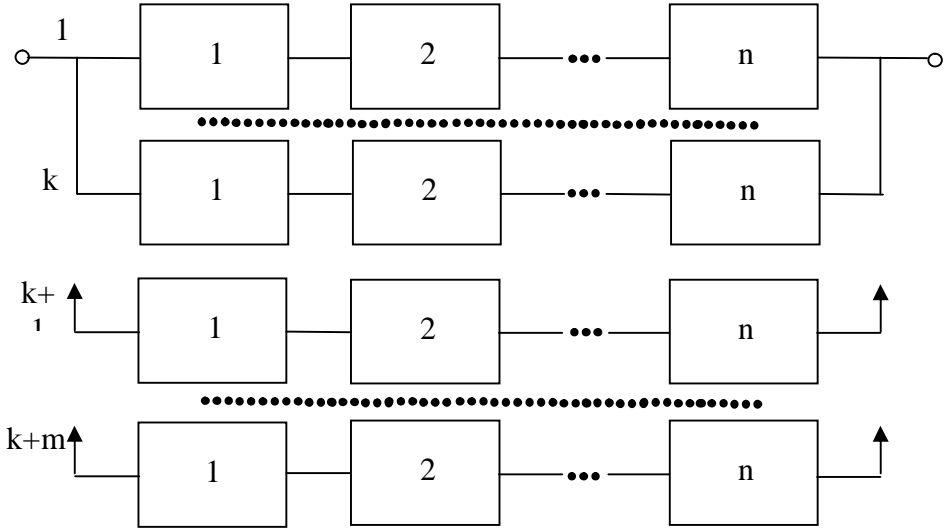


Рис. 7 Структурная надежность схема при общем ненагруженном резервировании с дробной кратностью

$$Q_C(t) = 1 - \sum_{i=0}^m \frac{(k\lambda_0 t)^i}{i!} e^{-k\lambda_0 t}, \quad f_C(t) = k\lambda_0 \frac{(k\lambda_0 t)^{m-1}}{(m-1)!} e^{-k\lambda_0 t},$$

$$\lambda_C(t) = k\lambda_0 \frac{(k\lambda_0 t)^{m-1}}{(m-1)! \left(1 + k\lambda_0 t + \dots + (k\lambda_0 t)^m / m!\right)} e^{-k\lambda_0 t}, \quad t_H^C = \frac{m+1}{k\lambda_0},$$

где  $\lambda_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ .

### ***1.6. Общее комбинированное резервирование с дробной кратностью***

Система с общим комбинированном резервировании с



дробной кратностью (рис.8) состоит из  $k$  основных и  $m$  резервных подсистем, подключаемых автоматически идеальным переключателем, все элементы одинаковы. Каждая подсистема состоит из  $n$  последовательно соединенных элементов с интенсивностями отказов  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ . Из общего количества  $m$  резервных подсистем в нагруженном резерве находятся  $m_1$  подсистем, а остальные  $m_2 = m - m_1$  - в облегченном резерве с коэффициентом облегчения  $k_\lambda$ . При отказе основного элемента его заменяют нагруженным резервным элементом, при этом один из элементов облегченного резерва переводится в нагруженный режим. Аналогично происходит и при отказе нагруженного резервного элемента. Вероятность безотказной работы системы:

$$\begin{aligned}
 P_C(t) = & \sum_{i=0}^{m_2-1} e^{-(k+m_1+(m_2-i)k_\lambda)\lambda_0 t} \prod_{j=0, j \neq i}^{m_2-1} \frac{k+m_1+(m_2-j)k_\lambda}{k_\lambda(i-j)} \prod_{j=0}^{m_1} \frac{k+m_1-j}{k_\lambda(i-m_2)-i} + \\
 & + e^{-(k+m_1+)\lambda_0 t} \prod_{j=0}^{m_2-1} \frac{k+m_1+(m_2-j)k_\lambda}{k_\lambda(m_2-j)} \prod_{j=1}^{m_1} \frac{k+m_1-j}{j} (-1)^{m_1} + \quad (*) \\
 & + \sum_{i=1}^{m_1} e^{-(k+m_1-i)\lambda_0 t} \prod_{j=0}^{m_2-1} \frac{k+m_1+(m_2-j)k_\lambda}{k_\lambda(m_2-j)+i} \prod_{j=0, j \neq i}^{m_1} \frac{k+m_1-j}{i-j},
 \end{aligned}$$

где  $\lambda_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ . Первое слагаемое в приведенной формуле

соответствует тем состояниям системы, в которых расходуются элементы облегченного резерва. Второе слагаемое соответствует состояниям, в которых израсходованы все элементы облегченного резерва ( $i = m_2$ ). Третье слагаемое соответствует состояниям, в которых расходуются элементы нагруженного резерва.

Средняя наработка до отказа системы:

$$t_H^C = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{i=1}^{m_2} \frac{1}{k + m_1 + ik\lambda} + \frac{1}{\lambda_0} \sum_{i=0}^{m_1} \frac{1}{k + i}$$

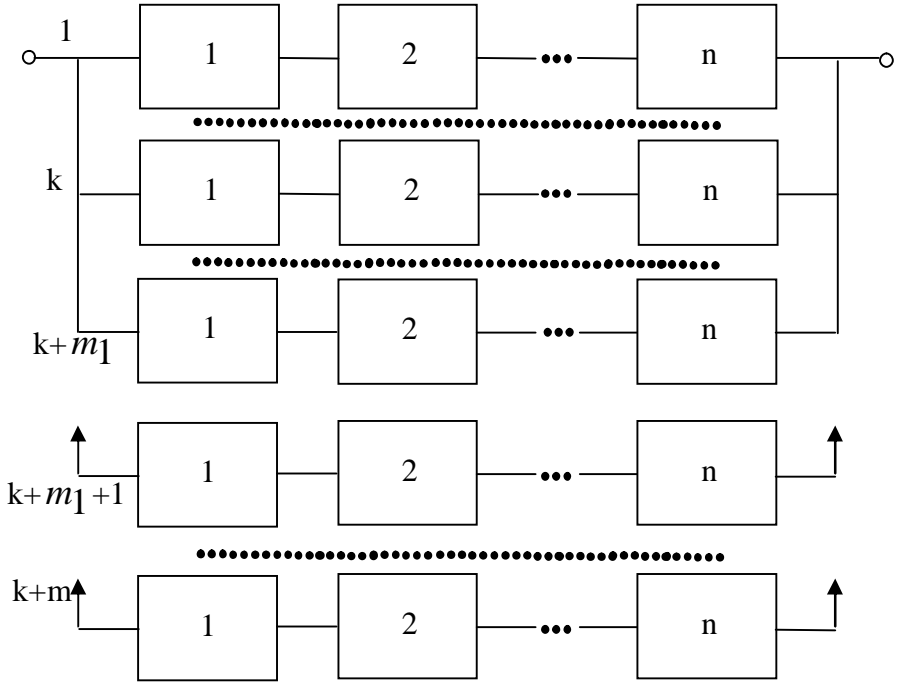


Рис. 8 Структурная надежность схема при общем комбинированном резервировании с дробной кратностью

### *1.7. Раздельное ненагруженное резервирование*

Вероятность безотказной работы системы при ненагруженном раздельном резервировании рассчитывается по

формуле:  $P_C(t) = \prod_{i=1}^n P_{1i}(t) = \prod_{i=1}^n (1 - Q_{1i}(t))$ ,

где  $Q_{1i}(t) = 1 - \sum_{i=0}^m \frac{(k\lambda_i t)^i}{i!} e^{-k\lambda_i t}$ .

### 1.8. Раздельное комбинированное резервирование

Вероятность безотказной работы системы:

$P_C(t) = \prod_{i=1}^n P_{1i}(t)$ , где  $P_{1i}(t)$  находится по формуле (\*) при

$\lambda_0 = \lambda_i$ . В частности, при одинаковых кратностях резервирования во всех резервированных группах  $m_C = m/k$  вероятность безотказной работы системы

$P_C(t) = e^{-k\lambda_0 t} \prod_{i=1}^n \left( \sum_{j=0}^{m_C} \frac{(k\lambda_i t)^j}{j!} \right)$ , где  $\lambda_0 = \sum_{l=1}^n \lambda_l$ .

## II. Методические указания по практической части

*Задача 1.* Техническая система состоит из двух равнонадежных элементов, интенсивность отказов каждого из которых равна  $\lambda$ . Для повышения ее надежности конструктором предложено скольльзящее резервирование при одном резервном элементе, находящемся в ненагруженном состоянии. Необходимо найти вероятность безотказной работы, среднюю наработку до отказа, плотность вероятности отказа и интенсивность отказов резервированной системы.

*Решение:* Интенсивность отказов нерезервированной системы:  
 $\lambda_0 = 2\lambda$ .

Вероятность безотказной работы резервированной системы:  $P_c(t) = e^{-\lambda_0 t} \sum_{j=0}^m \frac{(\lambda_0 t)^j}{j!}$ , где  $m$ - количество резервных ненагруженных элементов. В данном случае  $m=1$ , следовательно,

$$P_c(t) = e^{-\lambda_0 t} \sum_{j=0}^1 \frac{(\lambda_0 t)^j}{j!} = e^{-\lambda_0 t} (1 + \lambda_0 t) = e^{-2\lambda t} (1 + 2\lambda t).$$

Средняя наработка до отказа резервированной системы рассчитывается по формуле:  $t_H^c = \frac{m+1}{\lambda_0}$ . Таким образом,

$$t_H^c = \frac{2}{\lambda_0} = \frac{2}{2\lambda} = \frac{1}{\lambda}.$$

Плотность вероятности отказа системы:

$$f_c(t) = -\frac{dP_c(t)}{dt} = -\left[ -2\lambda e^{-2\lambda t} (1 + 2\lambda t) + 2\lambda e^{-2\lambda t} \right] = 4\lambda^2 t e^{-2\lambda t}.$$

Интенсивность отказов резервированной системы:

$$\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{P_c(t)} = \frac{4\lambda^2 t e^{-2\lambda t}}{e^{-2\lambda t} (1 + 2\lambda t)} = \frac{4\lambda^2 t}{1 + 2\lambda t}.$$

*Задача 2.* В телевизионном канале связи, состоящем из приемника и передатчика, для повышения его надежности применено общее дублирование. Интенсивности отказов передатчика и приемника соответственно равны  $\lambda_n = 2 \cdot 10^{-3}$  1/час,  $\lambda_{np} = 10^{-3}$  1/час. Требуется определить вероятность безотказной работы, среднюю наработку до отказа, плотность

вероятности отказа и интенсивность отказов телевизионного канала.

*Решение:* Интенсивность отказов нерезервированного телевизионного канала связи:

$$\lambda_0 = \lambda_n + \lambda_{np} = 2 \cdot 10^{-3} + 10^{-3} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ 1/час.}$$

Вероятность безотказной работы резервированного канала при общем резервировании с целой кратностью и экспоненциальном законе надежности:

$$P_C(t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda_0 t}\right)^{m+1}, \text{ где } m\text{-количество резервных цепей}$$

или кратность резервирования. В данном случае  $m=1$ , следовательно, вероятность безотказной работы дублированного канала связи:

$$P_C(t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda_0 t}\right)^2 = 1 - \left(1 - 2e^{-\lambda_0 t} + e^{-2\lambda_0 t}\right) = 2e^{-\lambda_0 t} - e^{-2\lambda_0 t} = 2e^{-(\lambda_n + \lambda_{np})t} - e^{-2(\lambda_n + \lambda_{np})t} = 2e^{-0.003t} - e^{-0.006t}.$$

Средняя наработка до отказа резервированного телевизионного канала:  $t_H^C = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{i=0}^m \frac{1}{1+i}$ . Таким образом,

$$t_H^C = \frac{1}{\lambda_0} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2\lambda_0} = \frac{3}{2(\lambda_n + \lambda_{np})} = \frac{3}{2 \cdot 10^{-3}} = 500 \text{ час.}$$

Плотность вероятности отказа системы:

$$f_C(t) = -\frac{dP_C(t)}{dt} = 2\lambda_0 e^{-\lambda_0 t} - 2\lambda_0 e^{-2\lambda_0 t} = 2(\lambda_n + \lambda_{np})e^{-(\lambda_n + \lambda_{np})t} - 2(\lambda_n + \lambda_{np})e^{-2(\lambda_n + \lambda_{np})t} = 0.006e^{-0.003t} - 0.006e^{-0.006t}.$$

Интенсивность отказов резервированного канала связи:

$$\lambda_c(t) = \frac{f_c(t)}{P_c(t)} = \frac{2(\lambda_n + \lambda_{np})e^{-(\lambda_n + \lambda_{np}) \cdot t} - 2(\lambda_n + \lambda_{np}) \times}{2e^{-(\lambda_n + \lambda_{np}) \cdot t} - e^{-2(\lambda_n + \lambda_{np}) \cdot t}} \times e^{-(\lambda_n + \lambda_{np}) \cdot t} - 2(\lambda_n + \lambda_{np})e^{-2(\lambda_n + \lambda_{np}) \cdot t} = \frac{2(\lambda_n + \lambda_{np}) - 2(\lambda_n + \lambda_{np})e^{-(\lambda_n + \lambda_{np}) \cdot t}}{2 - e^{-(\lambda_n + \lambda_{np}) \cdot t}} = \frac{0.006 - 0.006e^{-0.003t}}{2 - e^{-0.003t}}.$$

*Задача 3.* Определить необходимое число питающих насосов, находящихся в нагруженном состоянии, которые необходимо установить на насосной станции, чтобы ее вероятность безотказной работы была не ниже 0.98. При этом вероятность безотказной работы насоса  $P_H(t) = 0.8$ .

*Решение:* Вероятность безотказной работы насосной станции при целой кратности резервирования:  $P_C(t) = 1 - (1 - P_H(t))^x$ , где  $x$  - необходимое число питающих насосов. Решая данное уравнение относительно  $x$ , получим  $x = \left[ \frac{\ln(1 - P_C(t))}{\ln(1 - P_H(t))} \right]$ , где  $[ ]$  - округление до целого значения в большую сторону.

Следовательно,  $x = \left[ \frac{\ln(1 - 0.98)}{\ln(1 - 0.8)} \right] = \left[ \frac{\ln 0.02}{\ln 0.2} \right] = [2.43] = 3$ .

Таким образом, для достижения заданного уровня надежности необходимо на насосной станции иметь три насоса: один основной и два резервных.

### III. Задачи для самостоятельного решения

#### 3.1. Задачи по теме «Скольльзящее резервирование»

**Задача 3.** Электронная вычислительная машина состоит из 1024 однотипных ячеек, интенсивность отказов которых  $0.2 \cdot 10^{-6}$  1/час, и сконструирована так, что есть возможность замены любой из отказавших ячеек. В составе ЗИП имеются три ячейки, каждая из которых может заменить любую отказавшую. Требуется определить вероятность безотказной работы, среднюю наработку до отказа, плотность вероятности отказа и интенсивность отказов ЭВМ, а также  $P_c(t)$  при  $t=10000$  час. При этом под отказом понимают событие, когда ЭВМ не может работать из-за отсутствия ЗИП, т.е. когда весь ЗИП израсходован и отказала еще одна ячейка памяти ЭВМ.

**Задача 4.** Техническая система состоит из  $n$  однотипных элементов, каждый из которых имеет среднюю наработку до отказа  $t_{Hi} = t_H = \frac{1}{\lambda}, i = \overline{1, n}$ . Для повышения ее надежности применено скольльзящее резервирование, при котором  $m_0$  резервных элементов находятся в ненагруженном режиме. Необходимо найти среднюю наработку до отказа резервированной системы. Определить вероятность безотказной работы, плотность вероятности отказа и интенсивность отказов резервированной системы, если  $m_0 = 2$ .

**Задача 5.** Машина состоит из 1024 стандартных ячеек и множества других элементов. В составе ЗИП имеются еще две однотипные ячейки, которые могут заменить любую из отказавших. Известно, что интенсивность отказов ячеек постоянна, а средняя наработка до отказа машины с учетом наличия двух запасных ячеек 6000 час. Предполагается, что машина допускает короткий перерыв в работе на время замены

отказавших ячеек. Требуется определить среднюю наработку до отказа одной ячейки  $t_{Hi} = t_H, i = \overline{1, 1024}$ , вероятность безотказной работы, плотность вероятности отказа и интенсивность отказов резервированной системы.

**Задача 6.** Бортовая аппаратура спутника включает в себя аппаратуру связи, командную и телеметрическую систему, систему питания и систему ориентации. Аппаратура связи состоит из двух работающих ретрансляторов и одного ретранслятора в ненагруженном резерве. Переключающее устройство предполагается абсолютно надежным. Командная система имеет постоянное резервирование. Системы питания, ориентации и телеметрии резерва не имеют. Интенсивности отказов устройств бортовой аппаратуры спутника следующие: каждого ретранслятора  $\lambda_1$ , командной системы  $\lambda_2$ , системы телеметрии  $\lambda_3$ , системы питания  $\lambda_4$ , системы ориентации  $\lambda_5$ . Требуется определить вероятность безотказной работы бортовой аппаратуры спутника.

**Задача 7.** Блок усилителей промышленной частоты включает в себя четыре последовательно соединенных усилителя и один усилитель в ненагруженном резерве. Интенсивность отказов каждого работающего усилителя равна  $6 \cdot 10^{-4}$  1/час. Определить вероятность безотказной работы, среднюю наработку до отказа, плотность вероятности отказа и интенсивность отказов блока усилителей. Определить также  $P_C(t)$  при  $t=1000$  час.

**Задача 8.** Блок телеметрии включает в себя два однотипных приемника, интенсивность отказов каждого из которых  $4 \cdot 10^{-4}$  1/час. Имеется один приемник в ненагруженном скользящем резерве. Определить вероятность безотказной работы, среднюю наработку до отказа, плотность вероятности отказа и



интенсивность отказов резервированной системы. Определить также  $P_C(t)$  при  $t=500$  час при наличии и отсутствии резерва.

### 3.2. Задачи по теме «Резервирование замещением в режиме облегченного («теплого») резерва и в режиме ненагруженного («холодного») резерва»

**Задача 9.** Техническая система состоит из десяти равнонадежных элементов, средняя наработка до отказа которых 1000 час. Предполагается, что справедлив экспоненциальный закон надежности для элементов системы, основная и резервная система равнонадежны. Необходимо найти вероятность безотказной работы, среднюю наработку до отказа, плотность вероятности отказа и интенсивность отказов системы в момент времени 50 час для следующих случаев:

а) нерезервированной системы;

б) дублированной системы при включении резерва по способу замещения (ненагруженный резерв).

**Задача 10.** Радиопередатчик имеет интенсивность отказов  $\lambda_0 = 4 \cdot 10^{-4}$  1/час. Его дублирует такой же передатчик, находящийся до отказа основного передатчика в режиме ожидания (в режиме облегченного резерва). В этом режиме интенсивность отказов передатчика  $\lambda_1 = 6 \cdot 10^{-5}$  1/час. Рассчитать вероятность безотказной работы передающей системы в течении времени 100 час, а также среднюю наработку до отказа, плотность вероятности отказа и интенсивность отказов резервированной системы.

**Задача 11.** Вероятность безотказной работы преобразователя постоянного тока в переменный в течении времени 1000 час равна 0.95. Для повышения надежности системы энергоснабжения на объекте имеется такой же преобразователь, который включается в работу при отказе первого (режим

ненагруженного резерва). Необходимо определить вероятность безотказной работы, среднюю наработку до отказа, плотность вероятности отказа и интенсивность отказов резервированного преобразователя.

**Задача 12.** Техническая система состоит из двух равнонадежных элементов. Для повышения ее надежности конструктором предложено дублирование системы по способу замещения с ненагруженным состоянием резерва. Интенсивность отказов элемента равна  $\lambda$ . Требуется определить вероятность безотказной работы, среднюю наработку до отказа, плотность вероятности отказа и интенсивность отказов резервированной системы.

**Задача 13.** Передающее устройство состоит из одного работающего передатчика с интенсивностью отказов  $8 \cdot 10^{-3}$  1/час и одного передатчика в облегченном резерве с интенсивностью отказов  $8 \cdot 10^{-4}$  1/час. Необходимо найти вероятность безотказной работы и среднюю наработку до отказа передающего устройства. Определить также  $P_c(200)$ .

**Задача 14.** В радиопередающем канале системы связи используется основной передатчик  $П_1$ , два передатчика  $П_2, П_3$ , находящиеся в ненагруженном резерве. Интенсивность отказов основного работающего передатчика равна  $\lambda_0 = 10^{-3}$  1/час. При отказе передатчика  $П_1$  в работу включается  $П_2$ , а после отказа передатчика  $П_2$  включается  $П_3$ . При включении резервного передатчика в работу его интенсивность отказов становится равной  $\lambda_0$ . Считая переключатель резерва абсолютно надежным, определить вероятность безотказной работы радиопередающего канала при  $t=100$  час.

**Задача 15.** Устройство автоматического поиска неисправностей состоит из двух одинаковых логических блоков, средняя

наработка до отказа которых 200 час. Требуется определить среднюю наработку до отказа устройства для двух случаев:

- а) имеется ненагруженный резерв всего устройства;
- б) имеется ненагруженный резерв каждого блока.

### 3.3. Задачи по теме «Нагруженное («горячее») резервирование»

**Задача 16.** Техническая система состоит из четырех основных элементов с интенсивностями отказов  $\lambda_1 = 3 \cdot 10^{-3}$  1/час,  $\lambda_2 = 5 \cdot 10^{-3}$  1/час,  $\lambda_3 = 8 \cdot 10^{-3}$  1/час,  $\lambda_4 = 4 \cdot 10^{-3}$  1/час. В наличии имеется еще один элемент со средней наработкой до отказа 50 час, которым можно зарезервировать любой из основных. Определить наибольшую среднюю наработку до отказа резервированной системы и вероятность ее отказа в момент времени 1000 час.

**Задача 17.** Техническая система сконструирована из трех равнонадежных элементов с интенсивностью отказов  $4 \cdot 10^{-3}$  1/час, два из которых основные, а третий резервный. Определить наибольшую среднюю наработку до отказа резервированной системы и интенсивность ее отказа в момент времени 100 час.

**Задача 18.** Техническая система состоит из трех основных элементов с интенсивностями отказов  $\lambda_1 = 9 \cdot 10^{-3}$  1/час,  $\lambda_2 = 13.5 \cdot 10^{-3}$  1/час,  $\lambda_3 = 4.5 \cdot 10^{-3}$  1/час, два из которых основные, а третий резервный. Определить наибольшую среднюю наработку до отказа резервированной системы и вероятность ее отказа в момент времени 500 час.

**Задача 19.** Техническая система состоит из трех основных элементов с интенсивностями отказов  $\lambda_1 = 2 \cdot 10^{-3}$  1/час,

$\lambda_2 = 3 \cdot 10^{-3}$  1/час,  $\lambda_3 = 10^{-3}$  1/час, два из которых основные, а третий резервный. В наличии имеется еще один элемент со средней наработкой до отказа 500 час, которым можно зарезервировать любой из основных. Определить наибольшую среднюю наработку до отказа резервированной системы и плотность вероятности отказа в момент времени 1000 час.

**Задача 20.** Сравнить приведенные надежностные схемы (рис. 9), в которых применяются одни и те же элементы с интенсивностями отказов  $\lambda_1 = 2 \cdot 10^{-3}$  1/час,  $\lambda_2 = 3 \cdot 10^{-3}$  1/час,  $\lambda_3 = 10^{-3}$  1/час. Определить количественную эффективность второй схемы относительно первой по показателям  $t_H^C$ ,  $Q_C(500)$ .

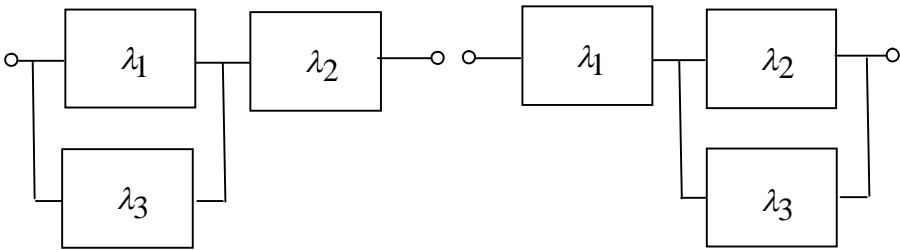


Рис.9. Структурные схемы надежности.

**Задача 21.** Техническая система состоит из десяти равнонадежных элементов, средняя наработка до отказа которых 1000 часов. Предполагается, что для элементов системы справедлив экспоненциальный закон надежности, основная и резервная система равнонадежны. Необходимо найти среднюю наработку до отказа, плотность вероятности отказа системы и интенсивность ее отказов в момент времени 50 час в следующих случаях:

а) нерезервированной системы;

б) дублированной системы при постоянно включенном резерве.

**Задача 22.** В системе телеуправления применено дублирование канала управления. Интенсивность отказов канала равна  $10^{-2}$  1/час. Рассчитать вероятность безотказной работы, плотность вероятности отказа и интенсивность отказов системы.

**Задача 23.** Нерезервированная система управления состоит из пяти тысяч элементов. Для повышения ее надежности предлагается провести общее дублирование элементов. Чтобы приблизительно оценить возможность достижения заданной вероятности безотказной работы системы  $P_C(100) = 0.98$  необходимо рассчитать среднюю интенсивность отказов одного элемента при допущении об отсутствии последствия отказов.

**Задача 24.** Приемник состоит из трех блоков: УВЧ, УПЧ, УНЧ. Интенсивности блоков соответственно равны:  $\lambda_1 = 4 \cdot 10^{-4}$  1/час,  $\lambda_2 = 2.5 \cdot 10^{-4}$  1/час,  $\lambda_3 = 3 \cdot 10^{-3}$  1/час. Требуется рассчитать вероятность безотказной работы приемника при  $t=100$  час для следующих случаев:

а) резерв отсутствует;

б) имеет место общее дублирование приемника в целом.

**Задача 25.** В радиопередатчике, состоящем из трех равнонадежных каскадов, применено общее постоянное дублирование всего радиопередатчика. Интенсивность отказов каскада  $5 \cdot 10^{-4}$  1/час. Определить вероятность безотказной работы, среднюю наработку до отказа, плотность вероятности отказа и интенсивность отказов резервированного радиопередатчика.

**Задача 26.** Радиоэлектронная аппаратура состоит из трех блоков, интенсивности которых соответственно равны:  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ . Требуется рассчитать вероятность безотказной работы аппаратуры для следующих случаев:

а) резерв отсутствует;

б) имеет место дублирование радиоэлектронной аппаратуры в целом.

**Задача 27.** Резервированная система управления состоит из четырех тысяч элементов. Требуемая вероятность безотказной работы системы при  $t=200$  час равна 0.99. Необходимо определить допустимую среднюю интенсивность отказов одного элемента, считая элементы равнонадежными, для того чтобы приблизительно оценить достижение заданной вероятности безотказной работы при отсутствии профилактических осмотров в следующих случаях:

а) резерв отсутствует;

б) применено общее дублирование.

**Задача 28.** Устройство обработки состоит из трех одинаковых блоков. Вероятность безотказной работы устройства в течении интервала времени  $(0,t)$  должно быть не менее 0.9. Необходимо определить какова должна быть вероятность безотказной работы каждого блока в течении интервала  $(0,t)$  в следующих случаях:

а) резерв отсутствует;

б) имеется пассивное общее резервирование с неизменной нагрузкой всего устройства в целом,

в) имеется пассивное раздельное резервирование с неизменной нагрузкой по блокам.

**Задача 29.** Вычислитель состоит из двух блоков, интенсивности отказов которых соответственно равны:

$\lambda_1 = 1.2 \cdot 10^{-4}$  1/час,  $\lambda_2 = 1.9 \cdot 10^{-4}$  1/час. Выполнено пассивное общее резервирование с неизменной нагрузкой всей системы (блока 1 и 2). Необходимо определить вероятность безотказной работы, среднюю наработку до отказа, плотность вероятности отказа и интенсивность отказов резервированного вычислителя. Определить  $P_C(1000)$ .

### 3.4. Задачи по теме «Мажоритарные системы»

**Задача 30.** Мажоритарная система состоит из трех равнонадежных элементов с вероятностями  $p=0.21$  и абсолютно надежного кворум-реле. Определить вероятность безотказной работы системы и эффективность резервирования по вероятности  $p$ .

**Задача 31.** Мажоритарная система состоит из трех равнонадежных элементов с интенсивностью отказов  $\lambda = 4 \cdot 10^{-3}$  1/час. Найти среднюю наработку до отказа системы и интенсивность ее отказов  $\lambda_c(t_H)$ , где  $t_H = 1/\lambda$ . На сколько (в %) изменится средняя наработка до отказа системы, если использовать пять «голосующих» элементов.

**Задача 32.** Мажоритарная система состоит из пяти «голосующих» элементов и кворум-реле, интенсивности отказов которых соответственно равны  $\lambda$  и  $\lambda_{кр}$ . Найти среднюю наработку до отказа, вероятность безотказной работы, вероятность отказа, плотность вероятности отказа и интенсивность отказов системы  $\lambda_c(t_H)$ , где  $t_H = 1/\lambda$ .

**Задача 33.** Мажоритарная система состоит из семи «голосующих» элементов и кворум-реле, интенсивности отказов которых соответственно равны  $\lambda = 4 \cdot 10^{-4}$  1/час и  $\lambda_{кр} = 2 \cdot 10^{-4}$  1/час. Найти среднюю наработку до отказа, вероятность безотказной работы, вероятность отказа, плотность вероятности отказа и интенсивность отказов системы  $\lambda_c(1000)$ .

### Библиографический список

1. Черкесов. Г.Н. Надежность аппаратно-программных комплексов/ Учебное пособие. – СПб.: Питер, 2005. –479 с.

2. *Черкесов. Г.Н., Сухарев М.Г., Морозов В.Н.* Надежность систем энергетики и их оборудования: Справ.: В 4 т. Т.3. Надежность систем газо- и нефтеснабжения. Кн.1. –М.: Недра, 1994. -416 с.