

Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Казанский государственный технологический университет»  
Нижекамский химико-технологический институт

Э.Р.Галеев, В.В.Елизаров, В.И.Елизаров

## МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Лабораторный практикум

Казань  
КГТУ  
2006

**Галеев, Э.Р.**

Методы оптимизации : лабораторный практикум /  
Э. Р. Галеев, В. В. Елизаров, В. И. Елизаров. – Казань : Изд-во  
Казан. гос. технол. ун-та, 2006. – 64 с.

Приведены лабораторные работы по разделам дисциплины  
«Методы оптимизации»: линейное программирование,  
нелинейное программирование, принцип максимума.

Предназначен для студентов, обучающихся по направлениям  
«Информатика и вычислительная техника», «Автоматизированные  
технологии и производства».

Подготовлен на кафедре АТПП Нижнекамского химико-  
технологического института КГТУ.

Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Казанского государственного технологического университета.

Рецензенты: канд. техн. наук, доц. *А.В.Садыкова*  
канд. физ.-мат. наук *О.В.Шемелова*

© Галеев Э.Р., Елизаров В.В.,  
Елизаров В.И., 2006.

© Казанский государственный  
технологический университет, 2006.

Казань  
КГТУ  
2006

## СОДЕРЖАНИЕ

|   |           |
|---|-----------|
| Введение  | 4         |
| <b>Работа 1. Решение транспортной задачи симплексным методом линейного программирования</b>     | <b>5</b>  |
| 1.1. Сведение задачи с ограничениями типа неравенств к задаче с ограничениями типа равенств     | 7         |
| 1.2. Симплексный метод решения задач линейного программирования                                 | 8         |
| 1.3. Постановка транспортной задачи   | 11        |
| 1.4. Порядок выполнения работы  | 18        |
| <b>Работа 2. Оптимизация реактора идеального смешения методами нелинейного программирования</b> | <b>20</b> |
| 2.1. Градиентные методы   | 22        |
| 2.2. Безградиентные методы детерминированного поиска  | 29        |
| 2.3. Методы случайного поиска   | 34        |
| 2.4. Поиск при наличии «оврагов» целевой функции  | 39        |
| 2.5. Постановка задачи оптимизации реактора идеального смешения                                 | 42        |
| 2.6. Порядок выполнения работы  | 43        |
| <b>Работа 3. Оптимизация реактора идеального вытеснения на основе принципа максимума</b>        | <b>46</b> |
| 3.1. Формулировка принципа максимума в задаче со свободным правым концом                        | 48        |
| 3.2. Постановка задачи оптимизации реактора идеального вытеснения                               | 56        |
| 3.3. Порядок выполнения работы  | 61        |
| Библиографический список  | 64        |

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бояринов А.И., Кафаров В.В.* Методы оптимизации в химической технологии. М.: Химия, 1975.
2. *Моисеев Н.Н., Иванюков Ю.П., Столярова Е.М.* Методы оптимизации. М.: Наука, 1978.
3. *Гумеров Аз.М., Гумеров Ас.М.* Табличный процессор Excel: Учеб. пособие по лаб. практикуму. Казан. гос. технол. ун-т. Казань, 1998.
4. *Заславский Ю.Л.* Сборник задач по линейному программированию. М.: Наука, 1969.
5. *Черноруцкий И.Г.* Методы оптимизации в теории управления. СПб.: Питер, 2004.
6. *Понтрягин Л.С. и др.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
7. *Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З.* Численные методы анализа. М.: Физматгиз, 1963.

Корректор Ю.Е.Стрыхарь

Лицензия № 020404 от 6.03.97 г.

Подписано в печать 29.11.06. Формат 60x84 1/16.  
Бумага писчая. Печать Riso. 3,72 ус.печ.л.  
4,0 уч.-изд.л. Тираж 150 экз. Заказ 487 «С» 267.

Издательство Казанского государственного технологического университета

Офсетная лаборатория Казанского государственного  
технологического университета

420015, Казань, К.Маркса,68

**Федеральное агентство по образованию  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Казанский государственный технологический университет»  
Нижекамский химико-технологический институт**

***МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ***

***Лабораторный практикум***

**2006**

**Федеральное агентство по образованию  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Казанский государственный технологический университет»  
Нижекамский химико-технологический институт**

***МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ***

***Лабораторный практикум***

**Казань 2006**

**Методы оптимизации:** лабораторный практикум/  
Э.Р. Галеев, В.В. Елизаров, В.И. Елизаров; Казан. гос. технол.  
ун-т. Казань, 2006. 64с.

Приведены лабораторные работы по разделам курса  
«Методы оптимизации»: линейное программирование,  
нелинейное программирование, принцип максимума.

Предназначено для студентов, обучающихся по  
направлениям «Информатика и вычислительная техника»,  
«Автоматизированные технологии и производства».

Подготовлено на кафедре АТПП Нижнекамского химико-  
технологического института КГТУ.

Печатается по решению методической комиссии по циклу  
дисциплин систем автоматизации, электротехники и  
электропривода Нижнекамского химико-технологического  
института КГТУ.

Рецензенты: к.т.н., доц. А.В. Садыков  
к.ф.-м.н. О.В. Шемелова

## СОДЕРЖАНИЕ

|   |    |
|---|----|
| Введение  | 4  |
| <b>Работа 1. Решение транспортной задачи симплексным методом линейного программирования</b>     | 5  |
| 1.1. Сведение задачи с ограничениями типа неравенств к задаче с ограничениями типа равенств     | 7  |
| 1.2. Симплексный метод решения задач линейного программирования                                 | 8  |
| 1.3. Постановка транспортной задачи   | 11 |
| 1.4. Порядок выполнения работы  | 18 |
| <b>Работа 2. Оптимизация реактора идеального смешения методами нелинейного программирования</b> | 20 |
| 2.1. Градиентные методы   | 22 |
| 2.2. Безградиентные методы детерминированного поиска  | 29 |
| 2.3. Методы случайного поиска   | 34 |
| 2.4. Поиск при наличии «оврагов» целевой функции  | 39 |
| 2.5. Постановка задачи оптимизации реактора идеального смешения                                 | 42 |
| 2.6. Порядок выполнения работы  | 43 |
| <b>Работа 3. Оптимизация реактора идеального вытеснения на основе принципа максимума</b>        | 46 |
| 3.1. Формулировка принципа максимума в задаче со свободным правым концом                        | 48 |
| 3.2. Постановка задачи оптимизации реактора идеального вытеснения                               | 56 |
| 3.3. Порядок выполнения работы  | 61 |
| Библиографический список  | 64 |



## ВВЕДЕНИЕ

Оптимизацией в самом широком смысле этого слова называется получение наилучших результатов в тех или иных условиях. Оптимальное управление является одной из наиболее активно разрабатываемых областей техники и нашло большое число применений в космонавтике, химии, энергетике и других отраслях промышленности.

Современная теория управления решает задачи исследования многомерных систем, систем с ограничениями на фазовые переменные и управления, стохастических и больших систем с запаздыванием.

Исходным положением современной теории управления является система уравнений состояния, описывающих поведение системы.

При решении конкретной задачи оптимизации исследователь прежде всего должен выбрать метод, который приводил бы к конечным результатам, обеспечивающим получение оптимального значения критерия оптимальности. Выбор того или иного метода определяется постановкой задачи и используемой математической моделью объекта оптимизации.

Для решения задачи оптимизации применяют в основном следующие методы: методы исследования функций классического анализа; линейное, нелинейное программирование; методы, основанные на использовании неопределенных множителей Лагранжа; вариационное исчисление; динамическое программирование; принцип максимума.

Предлагаемый лабораторный практикум направлен на освоение некоторых методов линейного и нелинейного программирования и принципа максимума.

## РАБОТА 1. РЕШЕНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ СИМПЛЕКСНЫМ МЕТОДОМ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

**Цель работы:** ознакомиться с симплексным методом линейного программирования.

**Задание:** используя симплексный метод научиться решать задачи линейного программирования, освоить методику решения одно- и многопродуктовой транспортной задачи в среде Microsoft Office Excel.

Значительное число планово-производственных задач имеет выражение критерия оптимальности в виде линейной функции от входящих в него переменных. При этом на указанные переменные могут быть также наложены некоторые ограничения в форме линейных равенств или неравенств.

Примером подобных задач является задача отыскания такого распределения ограниченного количества сырья между различными производствами, когда общая стоимость получаемой продукции максимальна.

Другим примером служит транспортная задача, когда необходимо так организовать доставку товаров из различных складов к нескольким пунктам назначения, чтобы затраты на перевозку были минимальными.

Решение этих задач, математическая формулировка которых сводится к требованию максимизации или минимизации критерия оптимальности, заданного в виде линейной функции независимых переменных с линейными ограничениями на них составляет задачу **линейного программирования** [1,2].

В задачах линейного программирования критерий оптимальности представляется в виде

$$R = \sum_{j=1}^n c_j x_j, \quad (1.1)$$

где  $c_j$  ( $j=1,2,\dots,n$ ) – заданные постоянные коэффициенты, среди которых могут быть и равные нулю.

На значения переменных  $x_j$  ( $j=1,2,\dots,n$ ) налагаются дополнительные условия, заданные в виде равенств и неравенств

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j \leq b_i, \quad i=1,2,\dots,m_1; \quad (1.2a)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j \geq b_i, \quad i=m_1+1,m_1+2,\dots,m_2; \quad (1.2б)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j = b_i, \quad i=m_2+1,m_2+2,\dots,m. \quad (1.2в)$$

При этом предполагается  $x_j \geq 0$  ( $j=1,2,\dots,n$ ), т.к. в большинстве экономических задач независимые переменные, имеющие конкретный физический смысл (единицу продукции, цены и т.д.), не могут быть отрицательными величинами.

Будем также считать, что все величины  $b_i$  в ограничениях (1.2) отличны от нуля и положительны.

Число ограничений типа равенств ( $m-m_2$ ) не должно превышать число переменных  $x_j$  ( $j=1,2,\dots,n$ ). Общее же число неравенств может быть произвольным. Коэффициенты  $a_{i,j}$  в соотношениях (1.2) принимаются действительными числами, положительными или отрицательными, среди которых могут быть и равные нулю.

Оптимальным решением задачи линейного программирования, или как еще называют, оптимальным планом является совокупность неотрицательных значений переменных  $x_j$  ( $j=1,2,\dots,n$ ), которая удовлетворяет соотношениям (1.2) и обеспечивает в зависимости от постановки задачи максимальное или минимальное значение линейной функции (1.1).

### 1.1. Сведение задачи с ограничениями типа неравенств к задаче с ограничениями типа равенств

В задачах линейного программирования ограничения типа неравенств могут быть представлены в виде равенств введением новых переменных, называемых дополнительными. Для этого в каждом соотношении (1.2а) прибавим к левой части дополнительную переменную  $x_{n+i}$ , которая превращает неравенство в равенство

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j + x_{n+i} = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m_1.$$

При этом все дополнительные переменные положительны. Для неравенств (1.2б), можно также записать, учитывая положительность дополнительных переменных

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j - x_{n+i} = b_i, \quad i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2.$$

Тогда система ограничений (1.2) может быть записана в виде

$$\sum_{j=1}^{n+m} a_{i,j}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (1.3)$$

Любое решение системы уравнений (1.3), состоящее из  $n + m$  неотрицательных значений переменных  $x_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n + m$ ) называется допустимым решением.

Допустимое решение, в котором  $m$  составляющих отличны от нуля называется допустимым базисным решением или планом.

Задача отыскания оптимального решения заключается в переборе только базисных решений системы (1.3).

Процедурой последовательного улучшения плана или построения базисного решения является **симплексный метод** [1,2].

## 1.2. Симплексный метод решения задачи линейного программирования

Симплексный метод позволяет по известному базисному решению построить другое базисное решение, для которого значение линейной формы больше, чем для исходного.

Для вывода основных соотношений симплексного метода запишем систему уравнений (1.3) в векторной форме

$$\sum_{j=1}^{n+m} A_j x_j = B, \text{ где } A_j \text{ и } B \text{ – векторы.}$$

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, n + m.$$

Предположим, что известно какое-нибудь базисное решение системы, в котором  $m$  значений  $x_j$  отличны от нуля

$$x_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

$$x_j = \lambda_j^{(0)} \neq 0, \quad j = n + 1, n + 2, \dots, n + m.$$

Ненулевые значения  $x_j$  удовлетворяют векторному уравнению

$$\sum_{j=1}^{n+m} A_j \lambda_j^{(0)} = B. \quad (1.4)$$

Векторы  $A_j$  ( $j = n + 1, n + 2, \dots, n + m$ ) могут быть приняты в качестве базиса  $m$ -мерного пространства, поэтому любой небазисный вектор  $A_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) можно разложить по векторам базиса

$$A_k = \sum_{j=n+1}^{n+m} A_j x_{j,k}. \quad (1.5)$$

Умножим уравнение (1.5) на произвольную положительную константу  $\theta$  и вычтем это уравнение из (1.4).

$$\theta A_k = \theta \sum_{j=n+1}^{n+m} A_j x_{j,k} .$$

$$\sum_{j=n+1}^{n+m} A_j \lambda_j^{(0)} - \theta \sum_{j=n+1}^{n+m} A_j x_{j,k} = B - \theta A_k$$

или

$$\theta A_k - \sum_{j=n+1}^{n+m} A_j (\lambda_j^{(0)} - \theta x_{j,k}) = B . \quad (1.6)$$

Величина  $\theta$  – произвольная, поэтому ее выберем настолько малой, что независимо от знака  $x_{j,k}$  выражение в скобках будет всегда положительно

$$y_j = \lambda_j^{(0)} - \theta x_{j,k} > 0, \text{ т.к. } \lambda_j^{(0)} > 0, j=n+1, \dots, n+m; k = 1, 2, \dots, n .$$

$$\text{Обозначим } y_k = \theta, k = 1, 2, \dots, n .$$

При  $\theta = 0$  имеем исходное базисное решение. Поэтому для получения другого базисного решения, отличного от исходного, необходимо взять  $\theta > 0$ .

Если коэффициенты  $x_{j,k}$  вектора  $A_k$  отрицательны, то получить новое базисное решение невозможно. В этом случае вместо вектора  $A_k$  следует взять любой другой вектор и разложить его по векторам базиса и т.д. до тех пор пока не будет найдено разложение какого-либо вектора, содержащего хотя бы один положительный коэффициент  $x_{j,s}$ .

Пусть не все  $x_{j,k}$  ( $j = n+1, n+2, \dots, n+m$ ) в разложении вектора  $A_k$  отрицательны. Тогда при непрерывном возрастании величины  $\theta$  от  $\theta = 0$  первой обратится в нуль та переменная  $y_{n+\ell}$  ( $1 < \ell < m$ ), для которой отношение  $\lambda_{n+1}^{(0)} / x_{n+1,k}$  будет минимально среди всех других отношений. Значение  $\theta$  нужно выбрать равным этому минимальному отношению

$$\theta_{n+\ell,k} = \min_{n+1 \leq j \leq n+m} \frac{\lambda_j^{(0)}}{x_{j,k}} > 0.$$

Допустим, что минимальное значение  $\lambda_j^{(0)}/x_{j,k}$  получается при  $\ell = 1$ , т.е.

$$\theta = \theta_{n+1,k} = \frac{\lambda_{n+1}^{(0)}}{x_{n+1,k}} > 0.$$

Тогда при данном  $\theta$  значение переменной  $y_{n+1} = 0$ , другие  $y_j > 0$  ( $j = k, n+2, \dots, n+m$ ).

Поэтому вместо исходного базисного решения получим новое

$$\left. \begin{aligned} \lambda_j^{(1)} &= 0, j = 1, 2, \dots, n; \\ \lambda_k^{(1)} &= \theta, k = 1, 2, \dots, n. \\ \lambda_{n+1}^{(1)} &= \lambda_{n+1}^{(0)} - \theta x_{n+1,k} = 0. \\ \lambda_j^{(1)} &= \lambda_j^{(0)} - \theta x_{j,k} > 0, j = n+2, n+3, \dots, n+m. \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

На основе нового базисного решения (1.7) уравнение (1.6) будет записано в виде

$$A_k \lambda_k^{(1)} + \sum_{j=n+2}^{n+m} A_j \lambda_j^{(1)} = B. \quad (1.8)$$

Сравнивая полученное уравнение (1.8) с (1.6), получим, что вектор  $A_{n+1}$  заменен на вектор  $A_k$  и новое базисное решение (1.7) удовлетворяет уравнению (1.8).

Таким образом, изложенная процедура позволяет находить при известном базисном решении другое базисное решение, отличающееся от исходного одним базисным вектором.

Как же меняется значение критерия оптимальности при переходе от одного базисного решения к другому? Подставим исходное базисное решение в выражение критерия

$$R^{(0)} = \sum_{j=n+1}^{n+m} c_j \lambda_j^{(0)}.$$

Число членов под знаком суммы сократилось за счет того, что в исходном базисном решении  $n$  членов равно нулю.

Для первого базисного решения значение критерия равно

$$R^{(1)} = c_k \theta + \sum_{j=n+1}^{n+m} c_j (\lambda_j^{(0)} - \theta x_{j,k}).$$

Найдем приращение критерия  $\Delta R$

$$\Delta R = R^{(1)} - R^{(0)} = \theta \left( c_k - \sum_{j=n+1}^m c_j x_{j,k} \right).$$

Величина  $\Delta R > 0$ , если выполняется условие

$$c_k > \sum_{j=n+1}^m c_j x_{j,k}. \quad (1.9)$$

Если же  $\Delta R < 0$ , то значение критерия уменьшается при переходе к новому базисному решению.

Вопрос о целесообразности перехода к новому базисному решению следует решать проверкой условия (1.9) еще до выбора  $\theta$ , для чего необходимо знать лишь коэффициенты  $x_{j,k}$  ( $1 \leq k \leq n$ ) в разложении вектора  $A_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) по векторам базиса  $A_j$  ( $j = n + 1, n + 2, \dots, n + m$ ).

### 1.3. Постановка транспортной задачи

Транспортная модель используется при разработке плана перевозок одного вида продукции из нескольких пунктов отправления в пункты назначения [3]. При построении модели используются:

- 1) величины, характеризующие объем производства в каждом исходном пункте и спрос в каждом пункте назначения;
- 2) стоимость перевозки единицы продукции из каждого исходного пункта в каждый пункт назначения.



Поскольку рассматривается только один вид продукции, потребности пунктов назначения могут удовлетворяться за счет нескольких исходных пунктов. Цель построения модели состоит в определении количества продукции, которое следует перевезти из каждого исходного пункта в каждый пункт назначения с тем, чтобы суммарные транспортные расходы были минимальными.

Обозначим количество продукции, производимой в пункте  $i$ , через  $a_i$ ; количество продукции, потребляемой в пункте  $j$ , – через  $b_j$ ; стоимость перевозки единицы продукции из  $i$  в  $j$  – через  $c_{i,j}$ ; через  $x_{i,j}$  – количество продукции, перевозимой из исходного пункта в пункт назначения. Тогда задача линейного программирования в общем виде формулируется следующим образом: минимизировать

$$z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{i,j} x_{i,j} \quad (1.10)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n x_{i,j} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (1.11)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{i,j} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.12)$$

Из представленной модели видно, что суммарный объем производства равен суммарному спросу. Такая модель называется сбалансированной транспортной моделью.

*Задача 1.* Заводы автомобильной фирмы расположены в трех городах: Г1, Г2 и Г3. Основные центры распределения (магазины) расположены в городах Р1 и Р2. Объемы производства указанных трех заводов равняются 1000, 1500 и 1200 автомобилей ежеквартально.

Величины квартального спроса в центрах распределения составляют соответственно 2300 и 1400 автомобилей. Стоимости перевозки одного автомобиля между заводами и центрами

распределения приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

|    |     |     |
|----|-----|-----|
|    | P1  | P2  |
| Г1 | 80  | 215 |
| Г2 | 100 | 108 |
| Г3 | 102 | 68  |

Поскольку суммарный объем производства автомобилей (1000+1500+1200=3700) равен суммарному спросу (2300+1400=3700), данная модель является сбалансированной транспортной моделью, и соответствующая задача линейного программирования с ограничениями в виде равенств формулируется следующим образом: минимизировать

$$z = 80x_{11} + 215x_{12} + 100x_{21} + 108x_{22} + 102x_{31} + 68x_{32}$$

при ограничениях

$$x_{11} + x_{12} = 1000;$$

$$x_{21} + x_{22} = 1500;$$

$$x_{31} + x_{32} = 1200;$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 2300;$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1400;$$

$$x_{i,j} \geq 0; i = 1,2,\dots, m; j = 1,2,\dots, n.$$

Таблица 1.2

|         | Магазин 1       | Магазин 2       | Объем<br>производства |
|---------|-----------------|-----------------|-----------------------|
| Завод 1 | 80<br>$x_{11}$  | 215<br>$x_{12}$ | 1000                  |
| Завод 2 | 100<br>$x_{21}$ | 108<br>$x_{22}$ | 1500                  |
| Завод 3 | 102<br>$x_{31}$ | 68<br>$x_{32}$  | 1200                  |
| Спрос   | 2300            | 1400            |                       |

Более компактный способ представления транспортной модели связан с использованием транспортной таблицы. Транспортная таблица (табл. 1.2) имеет вид матрицы, в которой строки соответствуют исходным пунктам, а столбцы – пунктам назначения. В правом верхнем углу каждой ячейки транспортной таблицы  $(i, j)$  расположены коэффициенты стоимости  $c_{i,j}$ .

*Задача 2.* Изменим условия задачи 1, предположив, что завод 2 производит не 1500, а 1300 автомобилей (табл. 1.3). Это приведет к дисбалансу, поскольку суммарный объем производства (3500) не равен суммарному спросу (3700).

Таблица 1.3

|                 | Магазин 1 | Магазин 2 | Объем производства |
|-----------------|-----------|-----------|--------------------|
| Завод 1         | 80        | 215       | 1000               |
| Завод 2         | 100       | 108       | 1300               |
| Завод 3         | 102       | 68        | 1200               |
| Фиктивный завод | 0         | 0         | 200                |
| Спрос           | 2300      | 1400      |                    |

В этом случае необходимо видоизменить транспортную модель таким образом, чтобы недостаток автомобилей  $(3700 - 3500=200)$  оптимально распределялся между центрами распределения. Поскольку спрос превышает объем производства, можно ввести дополнительный фиктивный завод ФЗ с производительностью 200 автомобилей.

Т. к. на самом деле фиктивного завода не существует, т.е. никакие перевозки из него не производятся, то соответствующая стоимость перевозки равна нулю. Эту ситуацию можно рассмотреть и по-другому, считая, что каждая единица недопоставленной продукции облагается штрафом. В этом случае транспортные расходы на единицу продукции равны штрафу за единицу продукции, недополученную в том или ином центре распределения.

*Задача 3.* Вновь изменим условия задачи 1, предположив, что объем производства превышает спрос из-за падения спроса на автомобили в магазине 1 до 1900 штук. В табл. 1.4 представлена модель с фиктивным центром распределения:

Таблица 1.4

|         | Магазин 1 | Магазин 2 | Фиктивный магазин ФМ | Объем производства |
|---------|-----------|-----------|----------------------|--------------------|
| Завод 1 | 80        | 215       | 0                    | 1000               |
| Завод 2 | 100       | 108       | 0                    | 1500               |
| Завод 3 | 102       | 68        | 0                    | 1200               |
| Спрос   | 1900      | 1400      | 400                  |                    |

Автомобили, поступающие с некоторого завода в фиктивный центр распределения, представляют избыток производства на этом заводе. Соответствующая стоимость перевозки одного автомобиля равна нулю. Однако можно назначить штраф за хранение автомобиля на складе, тогда стоимость перевозки одного автомобиля станет равной стоимости его хранения.

*Задача 4.* Теперь рассмотрим пример, когда нужно перевезти несколько видов продукции, т.е. многопродуктовую транспортную модель. Пусть фирма производит автомобили четырех различных марок, которые для простоты будем обозначать как М1, М2, М3 и М4. Завод 1 производит автомобили марок М3 и М4; завод 2 – автомобили М1, М2 и М4; завод 3 – автомобили М1 и М2.

Таблица 1.5

|                    | М1  | М2  | М3  | М4  | Всего |
|--------------------|-----|-----|-----|-----|-------|
| Объем производства |     |     |     |     |       |
| Завод 1            | 0   | 0   | 700 | 300 | 1000  |
| Завод 2            | 500 | 600 | 0   | 400 | 1500  |
| Завод 3            | 800 | 400 | 0   | 0   | 1200  |
| Спрос              |     |     |     |     |       |
| Магазин 1          | 700 | 500 | 500 | 600 | 2300  |
| Магазин 2          | 600 | 500 | 200 | 100 | 1400  |

В табл. 1.5. приведены данные по объемам выпуска разных заводов и по величине спроса в центрах распределения для автомобилей каждой марки.

Для того, чтобы учесть многопродуктовый характер задачи, изменим транспортную модель (табл. 1.6).

Таблица 1.6

|         |    | Магазин 1 |     |     |     | Магазин 2 |     |     |     | Объем |
|---------|----|-----------|-----|-----|-----|-----------|-----|-----|-----|-------|
|         |    | M1        | M2  | M3  | M4  | M1        | M2  | M3  | M4  |       |
| Завод 1 | M3 | M         | M   | 80  | M   | M         | M   | 215 | M   | 700   |
| Завод 1 | M4 | M         | M   | M   | 80  | M         | M   | M   | 215 | 300   |
| Завод 2 | M1 | 100       | M   | M   | M   | 108       | M   | M   | M   | 500   |
| Завод 2 | M2 | M         | 100 | M   | M   | M         | 108 | M   | M   | 600   |
| Завод 2 | M4 | M         | M   | M   | 100 | M         | M   | M   | 108 | 400   |
| Завод 3 | M1 | 102       | M   | M   | M   | 68        | M   | M   | M   | 800   |
| Завод 3 | M2 | M         | 102 | M   | M   | M         | 68  | M   | M   | 400   |
| Спрос   |    | 700       | 500 | 500 | 600 | 600       | 500 | 200 | 100 |       |

Вместо того, чтобы рассматривать каждый завод как один исходный пункт, разобьем его на несколько пунктов в соответствии с числом марок автомобилей, выпускаемых этим заводом. Аналогично поступим и с пунктами назначения, т.е. будем считать, что каждый из них состоит из четырех отделов, соответствующих четырем маркам автомобилей. В результате получим семь исходных пунктов и восемь пунктов назначения.

Заметим, что некоторые маршруты в таблице недопустимы, поскольку автомобили различных марок не могут заменять друг друга. Этим маршрутам в таблице соответствует очень высокая стоимость перевозки M (например, 999).

#### Алгоритм решения транспортной задачи

1. Выполнить проектирование таблицы, т. е. ввести в рабочий лист исходные данные согласно образцу (табл. 1.7), [3].

2. В ячейке F3 необходимо записать выражение для целевой функции как результат вычисления с использованием функции СУММПРОИЗВ(B\$4:C\$6;D4:E6) с помощью *Мастера*

функций.

3. В ячейку A10 ввести выражение для левой части ограничения по условию вывоза всей продукции из первого пункта: =B4+C4 и скопировать эту формулу в ячейки A11:A12. В ячейку A13 записать выражение для левой части ограничения по условию удовлетворения спроса в первом пункте: =B4+B5+B6, в ячейку A14 – выражение для левой части ограничения по условию удовлетворения спроса во втором пункте: =C4+C5+C6. В ячейку F10 ввести число 0, которое будет использовано для ввода условий неотрицательности переменных  $x_{i,j}$ .

Таблица 1.7

|    | A                   | B         | C           | D                      | E         | F               |
|----|---------------------|-----------|-------------|------------------------|-----------|-----------------|
| 1  | Транспортная задача |           |             |                        |           |                 |
| 2  | Предложения и спрос |           |             | Коэффициенты стоимости |           | Целевая функция |
| 3  |                     | Магазин 1 | Магазин 2   | Магазин 1              | Магазин 2 |                 |
| 4  | Завод 1             | 0         | 0           | 80                     | 215       |                 |
| 5  | Завод 2             | 0         | 0           | 100                    | 108       |                 |
| 6  | Завод 3             | 0         | 0           | 102                    | 68        |                 |
| 7  |                     |           |             |                        |           |                 |
| 8  | Ограничения         |           |             |                        |           |                 |
| 9  | Лев. часть          | Знак      | Прав. часть | Лев. часть             | Знак      | Прав. часть     |
| 10 | 0                   | =         | 1000        | $x_{i,j}$              | >=        | 0               |
| 11 | 0                   | =         | 1500        | $x_{i,j}$              | цел       |                 |
| 12 | 0                   | =         | 1200        |                        |           |                 |
| 13 | 0                   | =         | 2300        |                        |           |                 |
| 14 | 0                   | =         | 1400        |                        |           |                 |

4. Воспользуемся командами *Сервис, Поиск решения* для решения задачи оптимизации, предварительно установив курсор в ячейку F3, предназначенную для целевой функции. Появляется диалоговое окно *Поиск решения*, в котором надо установить значения в следующие окна ввода:

- Установить целевую ячейку – щелкнуть по ячейке F3 (если

курсор предварительно уже был установлен на этой ячейке, адрес F3 здесь появится автоматически).

- *Равной минимальному значению* – нажать соответствующую кнопку.
- *Изменяя ячейки* – протащить мышь по ячейкам B4:C6, предназначенным для хранения результата вычислений, т.е. неизвестных значений переменных  $x_{i,j}$ .
- *Ограничения* – нажать кнопку *Добавить* и в появившемся диалоговом окне ввести ограничения, используя сформированные ранее выражения и числа в ячейках A10:C14. Кроме этих ограничений требуется ввести условия неотрицательности и целочисленности независимых переменных  $x_{i,j}$ , используя адреса ячеек B4:C6, отведенных для записи вычисляемых значений  $x_{i,j}$ . После ввода последнего ограничения нажать кнопку *OK*.

5. Нажать кнопку *Параметры*, появится новое диалоговое окно *Параметры поиска решения*. Здесь надо установить флажок *Линейная модель*, что обеспечит применение симплекс-метода. При решении большинства задач значения остальных параметров можно использовать по умолчанию.

6. Нажать кнопку *OK*, вновь появится окно *Поиск решения*, здесь нажать кнопку *Выполнить*. Появится диалоговое окно *Результаты поиска решения*, нажать кнопку *OK* и проанализировать полученные результаты.

#### **1.4. Порядок выполнения работы**

1. Изучить симплексный метод.
2. Получить задание у преподавателя.
3. Разработать математическую модель задачи, т. е. записать выражения для функции цели и ограничений на независимые переменные.
4. Решить транспортную задачу в среде Microsoft Office Excel.

5. Подготовить ответы на контрольные вопросы.

#### Работа в лаборатории

1. Выполнение работы в среде Microsoft Office Excel.
2. Обработка и анализ результатов выполненной задачи.

#### Содержание отчета о работе

1. Постановка задачи. Задание.
2. Рабочий лист в среде Microsoft Office Excel с исходными данными и результатами выполненной задачи.
3. Основные выводы и заключения

#### Контрольные вопросы

1. Сформулируйте задачу линейного программирования в общем виде.
2. Что такое оптимальный план?
3. Как осуществляется сведение задачи с ограничениями типа неравенств к задаче с ограничениями типа равенств?
4. Расскажите основные идеи симплексного метода.
5. Сформулируйте транспортную задачу.
6. В каком случае транспортная модель является сбалансированной, а в каком нет?
7. Расскажите, каким образом решается транспортная задача в среде Microsoft Office Excel.
8. Решите задачу симплексным методом, рассматривая в качестве исходного плана план  $\lambda^{(0)}$  [4].

*Задача 1.*

$$R = x_1 - 2x_2 + x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 5; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -1; \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3; \\ \lambda^{(0)} = (1, 1, 0). \end{cases}$$

*Задача 2.*

$$R = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 4; \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1; \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4; \\ \lambda^{(0)} = (0, 0, 1, 1). \end{cases}$$



*Задача 3.*

$$R = 6x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4; \\ 5x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4; \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4; \\ \lambda^{(0)} = (1, 0, 0, 1). \end{cases}$$

*Задача 4.*

$$R = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = -4; \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0; \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4; \\ \lambda^{(0)} = (0, 0, 1, 1). \end{cases}$$

*Задача 5.*

$$R = x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 5; \\ x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 1; \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4; \\ \lambda^{(0)} = (1, 0, 1, 0). \end{cases}$$

*Задача 6.*

$$R = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5; \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 1; \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4; \\ \lambda^{(0)} = (0, 1, 0, 1). \end{cases}$$

## РАБОТА 2. ОПТИМИЗАЦИЯ РЕАКТОРА ИДЕАЛЬНОГО СМЕШЕНИЯ МЕТОДАМИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

**Цель работы:** ознакомиться с методами нелинейного программирования. Научиться применять методы нелинейного программирования для решения задач оптимизации химико-технологических процессов.

**Задание:** решить задачу оптимизации реактора идеального смешения различными методами нелинейного программирования. Задача решается с помощью ЭВМ. При разработке программы использовать языки программирования Бэйсик, Паскаль по выбору студента. Для решения задачи использовать 4 метода:

- 1) метод наискорейшего спуска;
- 2) метод сканирования;
- 3) метод случайных направлений с обратным шагом;

4) метод “шагов по оврагу”.

Математическая формулировка задачи оптимизации часто может быть представлена как задача отыскания наибольшего или наименьшего значения функции нескольких переменных

$$R = R(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.1)$$

где функция  $R$  является количественной оценкой представляющего интерес качества объекта оптимизации.

На независимые переменные  $x_j$  ( $j=1,2,\dots,n$ ) в общем случае можно наложить ограничения в виде равенств:

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.2a)$$

или неравенств:

$$\phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (2.2b)$$

или же тех и других одновременно.

Для случая, когда аналитический вид соотношений (2.1) и (2.2) известен и не слишком сложен и если, в особенности, число независимых переменных  $n$  невелико, всегда можно с большим или меньшим успехом использовать для решения оптимальной задачи аналитические методы, по крайней мере для того, чтобы свести ее решение к решению системы конечных уравнений.

Особые трудности возникают тогда, когда соотношение (2.1), определяющее значение критерия оптимальности для заданной совокупности значений независимых переменных  $x_j$ , не может быть записано в явном виде. Наличие ограничений (2.2), которые могут быть заданы как трудновычислимые функции независимых переменных, еще более затрудняют отыскание оптимального решения и требует использования специальных приемов решения.

Задачи такого типа, т.е. с нелинейными и трудновычислимыми соотношениями, определяющими критерий оптимальности (2.1) и ограничения (2.2), являются предметом рассмотрения специального раздела математики –

**нелинейного программирования** [1,2,5].

Как правило, решение задач нелинейного программирования могут быть найдены только численными методами, поэтому возникает необходимость применения вычислительной техники.

В большинстве своем методы нелинейного программирования могут быть охарактеризованы как многошаговые методы или методы последовательного улучшения начального решения.

Большинство методов нелинейного программирования используют идею движения в  $n$ -мерном пространстве в направлении оптимума. При этом из некоторого исходного или промежуточного состояния  $x^{(k)}$  осуществляется переход в следующее состояние  $x^{(k+1)}$  изменением состояния  $x^{(k)}$  на величину  $\Delta x^{(k)}$ , называемую шагом

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}. \quad (2.3)$$

Очевидно, что для случая поиска минимума целевой функции  $R(x)$  должно выполняться условие

$$R(x^{(k+1)}) < R(x^{(k)}),$$

иначе перевод в состояние  $x^{(k+1)}$  нецелесообразен.

Значительное число методов нелинейного программирования в соответствии со способом определения шага  $\Delta x^{(k)}$  можно отнести к одному из трех основных классов:

- 1) градиентные методы;**
- 2) безградиентные методы детерминированного поиска;**
- 3) методы случайного поиска.**

### **2.1. Градиентные методы**

Градиентные методы поиска оптимума целевой функции основаны на использовании двух основных свойств градиента функции.

1. Градиент функции  $\nabla R(x)$  – это вектор, который в

каждой точке области определения функции  $R(x)$  направлен по нормали к поверхности уровня, проведенной через эту точку.

Проекции градиента  $\nabla R(x)$  на оси координат равны частным производным функции  $R(x)$  по соответствующим переменным, т.е.

$$\nabla R(x) = \left( \frac{\partial R}{\partial x_1}, \frac{\partial R}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial R}{\partial x_n} \right). \quad (2.4)$$

2. Направление градиента характеризует направление наибольшего возрастания функции.

К градиентным методам относятся: метод релаксации, градиента, наискорейшего спуска и ряд других [1,2,5].

Рассмотрим некоторые из градиентных методов.

### Метод градиента

В этом методе спуск производится в направлении наибыстрейшего изменения целевой функции, что, естественно, ускоряет процесс поиска оптимума.

Поиск оптимума производится в два этапа. На первом этапе находят значения частных производных по всем независимым переменным, которые определяют направление градиента в рассматриваемой точке. На втором этапе осуществляется шаг в направлении, обратном направлению градиента (при поиске минимума целевой функции).

При выполнении шага одновременно изменяются значения всех независимых переменных. Каждая из них получает приращение пропорциональное соответствующей составляющей градиента по данной оси.

Формульная запись алгоритма может иметь вид:

$$x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} - h \frac{\partial R(x^{(k)})}{\partial x_j}, \quad j=1,2,\dots,n. \quad (2.5)$$

В этом случае величина шага  $\Delta x_j^{(k)}$  при постоянном

значении параметра  $h$  изменяется автоматически с изменением величины градиента и при приближении к оптимуму уменьшается.

Другая формульная запись алгоритма имеет вид:

$$x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} - h^{(k)} \frac{\frac{\partial R(x^{(k)})}{\partial x_j}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial R(x^{(k)})}{\partial x_i} \right)^2}}, \quad j=1,2,\dots,n. \quad (2.6)$$

В этом алгоритме используется нормализованный вектор градиента, указывающий лишь направление наискорейшего изменения целевой функции, но не указывает скорости изменения по этому направлению.

В стратегии изменения шага  $h^{(k)}$  в этом случае используется то, что градиенты  $\nabla R(x^{(k-1)})$  и  $\nabla R(x^{(k)})$  отличаются по направлению. Изменение шага поиска производится в соответствии с правилом:

$$h^{(k+1)} = \begin{cases} 2h^{(k)}, & \alpha^{(k)} < \alpha_{\min}; \\ h^{(k)}, & \alpha_{\min} < \alpha^{(k)} < \alpha_{\max}; \\ \frac{1}{3}h^{(k)}, & \alpha^{(k)} > \alpha_{\max}. \end{cases} \quad (2.7)$$

где  $\alpha^{(k)}$  – угол поворота градиента на  $k$ -ом шаге, определяемый выражением

$$\cos \alpha^{(k)} = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{\partial R(x^{(k)})}{\partial x_j} \frac{\partial R(x^{(k-1)})}{\partial x_j}}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial R(x^{(k)})}{\partial x_j} \right)^2 \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial R(x^{(k-1)})}{\partial x_j} \right)^2}},$$

$\alpha_{\min}, \alpha_{\max}$  – допустимые пределы угла поворота градиента.

Характер поиска оптимума в методе градиента показан на рис. 2.1.

Момент окончания поиска можно найти проверкой на каждом шаге соотношения

$$\sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial R}{\partial x_j} \right)^2 \leq \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  – заданная погрешность расчета.

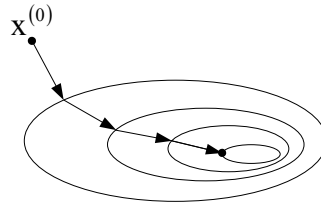


Рис. 2.1. Характер движения к оптимуму в методе градиента с большой величиной шага

Недостатком градиентного метода является то, что при его использовании можно обнаружить только локальный минимум целевой функции. Для того, чтобы найти у функции другие локальные минимумы, необходимо производить поиск из других начальных точек.

Другим недостатком этого метода является значительный объем вычислений, т.к. на каждом шаге определяются значения всех частных производных оптимизируемой функции по всем независимым переменным.

### Метод наискорейшего спуска

При применении метода градиента на каждом шаге нужно определять значения частных производных оптимизируемой функции по всем независимым переменным. Если число независимых переменных значительно, тогда объем вычислений существенно возрастает и время поиска оптимума увеличивается.

Сокращения объема вычислений можно добиться используя метод наискорейшего спуска.

Сущность метода заключается в следующем. После того как в начальной точке будет найден градиент оптимизируемой функции и тем самым определено направление ее наибоыстрейшего убывания в указанной точке, в данном направлении делается шаг спуска (рис. 2.2).

Если значение функции в результате этого шага уменьшилось, производится очередной шаг в том же направлении, и так до тех пор, пока в этом направлении не будет найден минимум, после чего вычисляется градиент и определяется новое направление наибоыстрейшего убывания целевой функции.

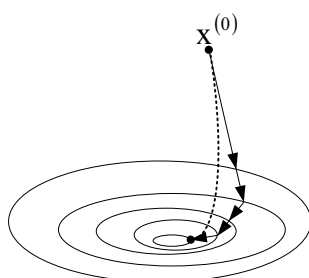


Рис. 2.2. Характер движения к оптимуму в методе наискорейшего спуска (—) и методе градиента (⋯)

В сравнении с методом градиента метод наискорейшего спуска оказывается более выгодным из-за сокращения объема вычислений.

Важной особенностью метода наискорейшего спуска является то, что при его применении каждое новое направление движения к оптимуму ортогонально предшествующему. Это объясняется тем, что движение в одном направлении производится до тех пор, пока направление движения не окажется касательным к какой-либо линии постоянного уровня.

В качестве критерия окончания поиска может

использоваться то же условие, что и в рассмотренном выше методе.

Кроме того, можно также принять условие окончания поиска в форме соотношения

$$\sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j^{(A)} - x_j^{(B)})^2} \leq \varepsilon,$$

где  $x_j^{(A)}$  и  $x_j^{(B)}$  – координаты начальной и конечной точек последнего отрезка спуска. Этот же критерий может использоваться в сочетании с контролем значений целевой функции в точках  $x^{(A)}$  и  $x^{(B)}$

$$|R(x^{(A)}) - R(x^{(B)})| \leq \varepsilon.$$

Совместное применение условий окончания поиска оправдано в тех случаях, когда оптимизируемая функция имеет резко выраженный минимум.

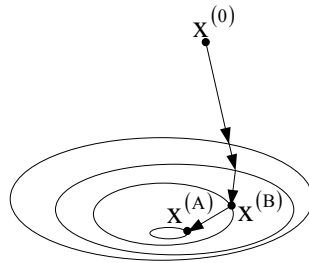


Рис. 2.3. К определению окончания поиска в методе наискорейшего спуска

В качестве стратегии изменения шага спуска можно использовать методы изложенные выше (2.7).

### Алгоритм решения задачи методом наискорейшего спуска

Пусть требуется найти минимум целевой функции

$$R = R(x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x \in X.$$

1. Выбирается начальная точка поиска  $x^{(0)} \in X$ .



2. Определяется значение целевой функции в начальной точке  $R(x^{(0)})$ .

3. В исходной точке  $x^{(0)}$  вычисляется градиент целевой функции (2.4).

Находится направление наискорейшего возрастания функции.

4. В направлении антиградиента делается шаг спуска

$$x^{(1)} = x^{(0)} - h \frac{\partial R(x^{(0)})}{\partial x} .$$

5. Рассчитывается значение целевой функции в точке  $x^{(1)}$

$$R^{(1)} = R(x^{(1)}) .$$

6. Сравниваются значения целевой функции в точке  $x^{(1)}$  и начальной точке поиска  $x^{(0)}$ .

Если  $R^{(1)} < R^{(0)}$ , то выполненный шаг считается удовлетворительным и новое значение  $R^{(1)}$  запоминается совместно с координатами точки  $x^{(1)}$ .

Если же  $R^{(1)} > R^{(0)}$ , то необходимо изменить начальную точку поиска  $x^{(0)}$ , либо уменьшить величину рабочего шага  $h$ .

7. Затем делается новый шаг в том же направлении и так до тех пор, пока не будет найден минимум в этом направлении.

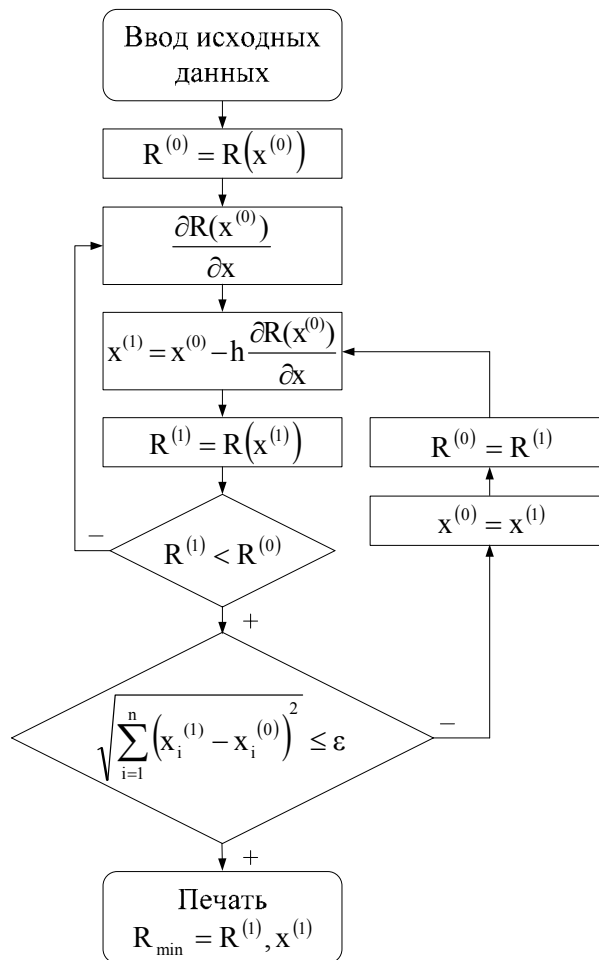
Если в некоторой точке  $x^{(k)}$   $R^{(k)} > R^{(k-1)}$ , то в точке  $x^{(k-1)}$  вычисляется градиент целевой функции и определяется новое направление наибо́льшего убывания функции.

8. Критерием окончания поиска является выполнение условия

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)})^2} \leq \varepsilon ,$$

которое проверяется после каждого удачного шага.

**Блок-схема алгоритма решения задачи методом  
наискорейшего спуска**



**2.2. Безградиентные методы детерминированного поиска**

Нахождение производных при наличии трудновычисляемого критерия оптимальности в случае градиентных методов связано с необходимостью выполнения

значительного объема вычислений, что приводит к существенному увеличению времени поиска, особенно при большом числе независимых переменных.

Безградиентные методы используют в процессе поиска информацию, получаемую не при анализе производных, а от сравнительной оценки критерия оптимальности в результате выполнения очередного шага. Некоторые из этих методов целесообразно применять в сочетании с градиентными методами, что позволяет иногда построить довольно эффективные алгоритмы для решения задач нелинейного программирования.

Кроме того, безградиентные методы наиболее пригодны для оптимизации действующих промышленных и лабораторных установок в условиях отсутствия математического описания объекта оптимизации.

К безградиентным методам детерминированного поиска относятся: метод локализации экстремума функции, метод «золотого сечения», метод поиска с использованием чисел Фибоначчи, метод Гаусса-Зейделя, метод сканирования [1]. Рассмотрим один из этих методов – метод сканирования.

### **Метод сканирования**

Метод сканирования заключается в последовательном просмотре значений критерия оптимальности в ряде точек, принадлежащих области изменения независимых переменных, и нахождении среди этих точек такой, в которой критерий оптимальности имеет минимальное (максимальное) значение. Точность метода определяется тем, насколько «густо» располагаются выбранные точки в допустимой области изменения независимых переменных.

Основным достоинством этого метода является то, что при его использовании с достаточно малым шагом изменения, по каждой из переменных гарантируется отыскание глобального оптимума.

Другое достоинство – независимость от вида оптимизируемой функции.

К недостаткам метода относится необходимость вычисления критерия для большого числа точек. Последнее обстоятельство существенно ограничивает возможности использования метода сканирования.

Практически этим методом могут решаться задачи, для которых число независимых переменных не превышает 2-3, кроме того, расчет одного значения критерия не требует большого объема вычислений.

Для сокращения объема вычислений используется алгоритм с переменным шагом сканирования.

#### **Алгоритм метода сканирования с переменным шагом**

Рассмотрим случай, когда число независимых переменных равно двум, задана область изменения независимых переменных:

$$a_1 \leq x_1 \leq b_1, \quad a_2 \leq x_2 \leq b_2.$$

1. В качестве первого приближения минимального значения целевой функции примем  $R^{(0)} = 100000$ .

2. Определяем начальный шаг сетки переменных

$$\Delta x_1^{(0)} = k^r \Delta x_1,$$

$$\Delta x_2^{(0)} = k^r \Delta x_2,$$

где  $\Delta x_1, \Delta x_2$  – точность определения оптимума,  $r$  – число этапов уточнения поиска, на которых шаг поиска уменьшается в  $k$  раз.

3. Разбиваем область изменения независимых переменных с шагом  $\Delta x_1^{(0)}, \Delta x_2^{(0)}$  на совокупность точек, значение целевой функции в которых вполне определяют ее поведение.

4. Определяем значение целевой функции в узлах сетки переменных. Пусть  $x_1 = a_1$ . Для каждого значения  $x_2$  из интервала  $[a_2, b_2]$  при  $x_1 = a_1$  определяем значение целевой

функции.

Изменяем значение переменной  $x_1$  на шаг  $\Delta x_1^{(0)}$  и при новом значении  $x_1 = x_1 + \Delta x_1^{(0)}$  для каждого значения  $x_2$  из интервала  $[a_2, b_2]$  вычисляем значение целевой функции. Аналогичным образом исследуем весь диапазон изменения переменных.

Находим значение целевой функции в узлах сетки переменных.

5. В результате грубого поиска определяем узел  $(c_1, c_2)$ , в котором значение целевой функции наименьшее (наибольшее).

6. Определяем область изменения независимых переменных, в пределах которой будем уточнять значение оптимума целевой функции.

$$a_1 = c_1 - \Delta x_1^{(0)}, \quad a_2 = c_2 - \Delta x_2^{(0)}, \\ b_1 = c_1 + \Delta x_1^{(0)}, \quad b_2 = c_2 + \Delta x_2^{(0)}.$$

7. Производим сканирование новой области с меньшим шагом

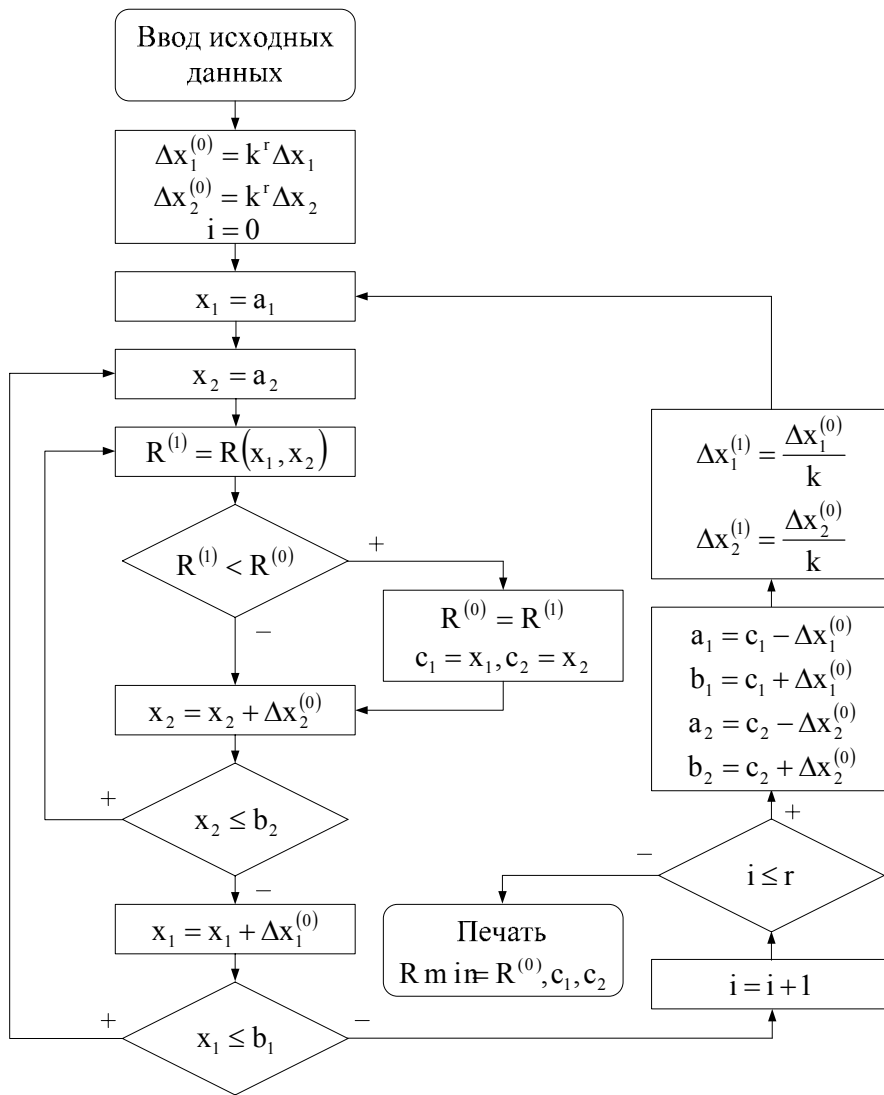
$$\Delta x_1^{(1)} = \frac{\Delta x_1^{(0)}}{k}, \\ \Delta x_2^{(1)} = \frac{\Delta x_2^{(0)}}{k},$$

где  $\Delta x_1^{(1)}, \Delta x_2^{(1)}$  – шаг уточнения, с которым исследуется новая область.

8. Определяем значения целевой функции в узлах новой сетки переменных вышеизложенным способом.

Находим узел, в котором значение целевой функции наименьшее (наибольшее). Если более не предусмотрено этапов уточнения, то найденное значение целевой функции будет оптимальным.

**Блок – схема алгоритма решения задачи методом сканирования**



### 2.3. Методы случайного поиска

Основная идея методов случайного поиска [1] заключается в том, чтобы перебором случайных совокупностей значений независимых переменных найти оптимум целевой функции или направление движения к нему. Общим для всех методов случайного поиска является применение случайных чисел в процессе поиска. Введем понятие случайного вектора

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

определенного в  $n$ -мерном пространстве. Относительно вектора  $\alpha$  предположим, что он с равной вероятностью может принимать любое направление в  $n$ -мерном пространстве и имеет длину равную 1. Такой вектор может быть получен из последовательности случайных чисел  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), равномерно распределенных на числовом интервале.

Для нахождения случайного вектора  $\alpha$  с помощью последовательности случайных чисел  $\beta_j$ , выразим компоненты случайного вектора  $\alpha$  соотношениями:

$$\alpha_j = \frac{\beta_j}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \beta_i^2}}; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

При таком способе определения случайного вектора  $\alpha$  его длина будет равна 1, т.к. очевидно равенство:

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j^2 = 1.$$

Таким образом, вектор  $\alpha$  характеризует случайное направление в  $n$ -мерном пространстве.

#### Метод случайных направлений

Основная идея метода заключается в том, что из точки  $n$ -мерного пространства, для которой значение  $R(x^{(k)})$  функции

цели уже рассчитано, производится шаг в случайном направлении, определяемом случайным вектором  $\alpha^{(k)}$ .

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + h\alpha^{(k)},$$

в которой вычисляется значение функции цели. Если при выполнении случайного шага  $h\alpha^{(k)}$ , приводящего в точку  $x^{(k+1)}$ , получается меньшее значение функции цели, то он считается удовлетворительным (удачным) и новое значение  $R(x^{(k+1)})$  запоминается совместно с координатами точки  $x^{(k+1)}$ . Затем делается новый шаг  $h\alpha^{(k+1)}$  в случайном направлении и т.д.

Если же случайный шаг  $h\alpha^{(k)}$  оказывается неудачным, то производится выборка следующего случайного вектора  $\alpha$  и из точки  $x^{(k)}$  снова выполняется шаг. Пробные шаги из точки  $x^{(k)}$  делаются до тех пор, пока не будет найдена точка  $x^{(k+1)}$ , в которой функция цели имеет меньшее значение, после чего пробные шаги выполняются уже из точки  $x^{(k+1)}$ .

Поиск заканчивается, если после выполнения серии из  $s$  шагов меньшего значения функции цели найти не удастся. Для практических расчетов число шагов в серии часто применяется равным размерности решаемой задачи  $n$ .

Эффективность поиска может несколько возрасти при применении шага переменной величины  $h^{(k)}$ . В данном случае после выполнения серии из  $s$  неудачных шагов поиск не заканчивается, а уменьшается только величина шага  $h^{(k)}$ , вслед за чем отсчет шагов в серии возобновляется. Критерием окончания поиска служит минимальный размер шага  $h^{\min}$ , которым и задается точность определения оптимума.

### **Метод случайных направлений с обратным шагом**

Этот метод случайного поиска по существу представляет собой улучшение алгоритма, рассмотренного выше. Отличительной особенностью этого метода является то, что при



неудачном шаге  $h^{(k)}\alpha^{(k)}$  из точки  $x^{(k)}$  сразу производится шаг в обратном направлении  $-h^{(k)}\alpha^{(k)}$ . При достаточном удалении от оптимума такая стратегия поиска оказывается весьма эффективной. Если и обратный шаг оказывается неудачным, то можно сделать новый случайный шаг из точки  $x^{(k)}$  или, что более целесообразно, перейти к поиску с уменьшенным размером шага. В последнем случае, однако, существует опасность замедления поиска вдали от оптимума, особенно, когда оптимизируемая функция имеет «овраги».

#### Получение случайных чисел из последовательности иррациональных чисел

Этот способ основан на свойстве иррациональных чисел образовывать неупорядоченную последовательность цифр дробной части при вычислении иррационального числа с достаточно высокой степенью точности. В наиболее простой форме данный способ реализуется при расчете дробной части произведения иррационального числа  $z$  на последовательность натуральных чисел. При этом алгоритм может быть записан в следующем виде:

$$\beta_j^{(k)} = \{kz_j\}; \quad j=1,2,\dots,n; \quad k=1,2,3,\dots$$

Фигурные скобки в выражении означают, что из произведения  $kz_j$  берется только дробная часть, которая должна вычисляться с необходимой степенью точности, характеризующей разрядность находимых псевдослучайных чисел.

#### Алгоритм метода случайных направлений с обратным шагом

1. Определяется значение критерия оптимальности в начальной точке поиска  $R^{(0)} = R(x^{(0)})$ .
2. Производится выборка случайных чисел на основе

последовательности иррациональных чисел.

$$\beta_1^{(k)} = \{kz_1\}; \beta_2^{(k)} = \{kz_2\} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

3. Находится значение целевой функции в следующей точке поиска

$$x^{(1)} = x^{(0)} + h^{(0)}\alpha^{(0)},$$

где

$$\alpha_j^{(0)} = \frac{\beta_j^{(1)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (\beta_i^{(1)})^2}}.$$

4. Сравниваются значения целевой функции в точке  $x^{(1)}$  и начальной точке  $x^{(0)}$ . Если  $R^{(1)} < R^{(0)}$ , то выполненный шаг удачный и новое значение  $R^{(1)}$  запоминается совместно с координатами точки  $x^{(1)}$ .

5. Затем производится новый шаг в случайном направлении из точки  $x^{(1)}$ : определяется  $\beta^{(2)}$ , считается  $\alpha^{(1)}$ , вычисляются  $x^{(2)}$  и  $R^{(2)}$  и т.д. При этом каждое новое удачное значение  $R^{(k)}$  запоминается совместно с координатами точки  $x^{(k)}$ . Если же  $R^{(k)} > R^{(k-1)}$ , то производится шаг в обратном направлении  $-h^{(k-1)}\alpha^{(k-1)}$ . При удачном шаге также запоминается значение целевой функции и координаты точки. Если обратный шаг неудачный, то можно либо сделать шаг в новом направлении из предыдущей точки  $x^{(k-1)}$ , либо перейти к поиску с уменьшенным размером шага.

Критерием окончания поиска является минимальная величина рабочего шага  $h_j^{\min}$ , которая задается по каждой из переменных.

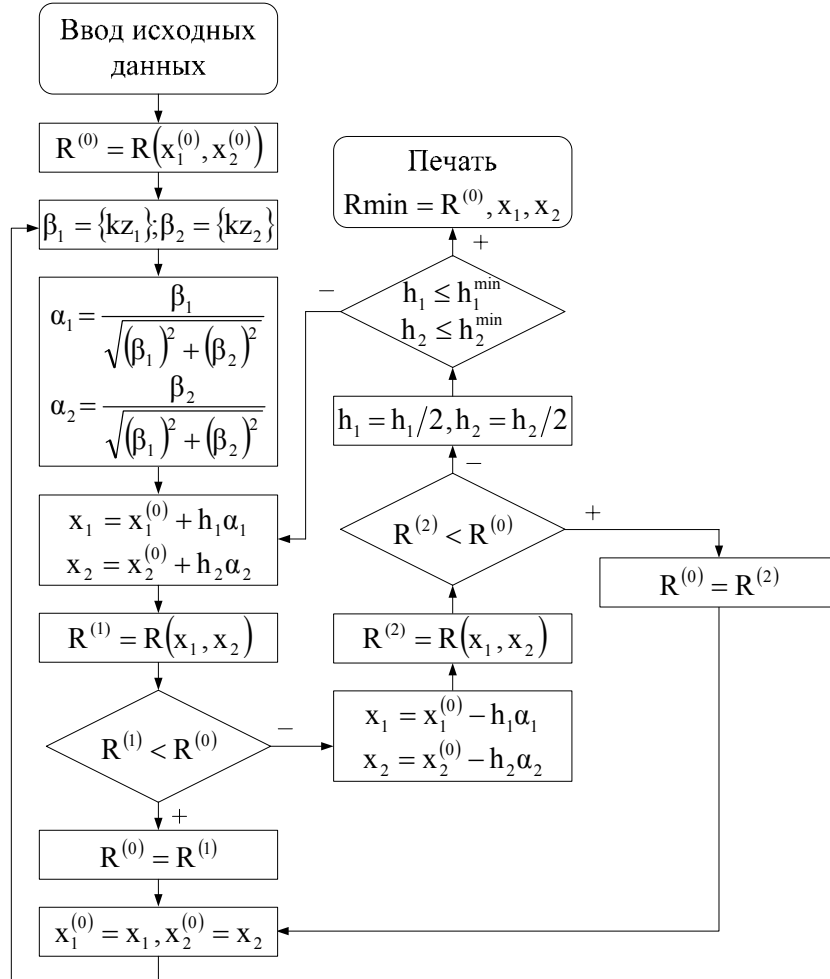
Для получения псевдослучайных последовательностей из иррациональных чисел по каждой переменной необходимо задать иррациональные числа  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , например,

$$z_1 = \sqrt{3}, z_2 = \sqrt{5}, \dots$$

и рассчитать дробную часть из произведения

$$\beta_1^{(k)} = \{k\sqrt{3}\}; \beta_2^{(k)} = \{k\sqrt{5}\}; k = 1, 2, 3, \dots$$

**Блок – схема алгоритма решения задачи методом случайных направлений с обратным шагом**



## 2.4. Поиск при наличии «оврагов» целевой функции

Приведенные выше методы оказываются малоэффективными при наличии «оврагов» у целевой функции. Поэтому при решении оптимизационных задач, целевые функции которых имеют особенность типа «оврагов» разработаны специальные методы. Один из таких методов называется методом шагов по «оврагу» [1].

### Алгоритм решения задачи методом шагов по «оврагу»

1. Переменные, входящие в целевую функцию  $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$  разбиваются на две группы:

- а) переменные, изменение которых существенно влияет на значение целевой функции;
- б) переменные, при изменении которых значение целевой функции изменяется не столь значительно.

Разбиение переменных на группы по характеру их влияния на величину оптимизируемой функции производится либо перед началом поиска, либо во время его выполнения.

Например, для функции от двух переменных  $R(x_1, x_2)$  вычисляются частные производные по каждой из них в начальной точке поиска. Если  $\frac{\partial R}{\partial x_1} > \frac{\partial R}{\partial x_2}$ , то  $x_1$  относят к первой, а  $x_2$  ко второй группе.

2. Рассчитывается значение целевой функции в начальной точке поиска  $x^{(0)}$

$$R^{(0)} = R(x^{(0)}).$$

3. Производится шаг в направлении изменения переменной первой группы, например для  $x_1$

$$x_1^{(1)} = x_1^{(0)} - h_1 \frac{\partial R(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})}{\partial x_1}.$$

4. Любым методом поиска, в данном случае методом

релаксации, осуществляется поиск минимума целевой функции. В результате поиска приходим на «дно оврага»

$$x^D = (x_1^D, x_2^D).$$

5. Из начальной точки  $x^{(0)}$  производится шаг в направлении изменения переменных второй группы, в результате которого приходим в новое состояние, например для  $x_2$  в случае функции двух переменных

$$x_2^{(1)} = x_2^{(0)} + h_2 \frac{\partial R(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})}{\partial x_2}.$$

Вычисляется значение целевой функции в этой точке.

6. Из полученного состояния  $(x_1^{(0)}, x_2^{(1)})$  производится поиск минимума целевой функции, следуя п. 3-4. В результате поиска приходим на новое «дно оврага»

$$x^{HD} = (x_1^{HD}, x_2^{HD})$$

7. Выполняется шаг по «оврагу», например для функции двух переменных, шаг по «оврагу» можно произвести следующим образом. Если  $R(x_1^{HD}, x_2^{HD}) < R(x_1^D, x_2^D)$ , то

$$x_1^* = 2x_1^{HD} - x_1^D, \quad x_2^* = 2x_2^{HD} - x_2^D.$$

Если  $R(x_1^{HD}, x_2^{HD}) > R(x_1^D, x_2^D)$ , то

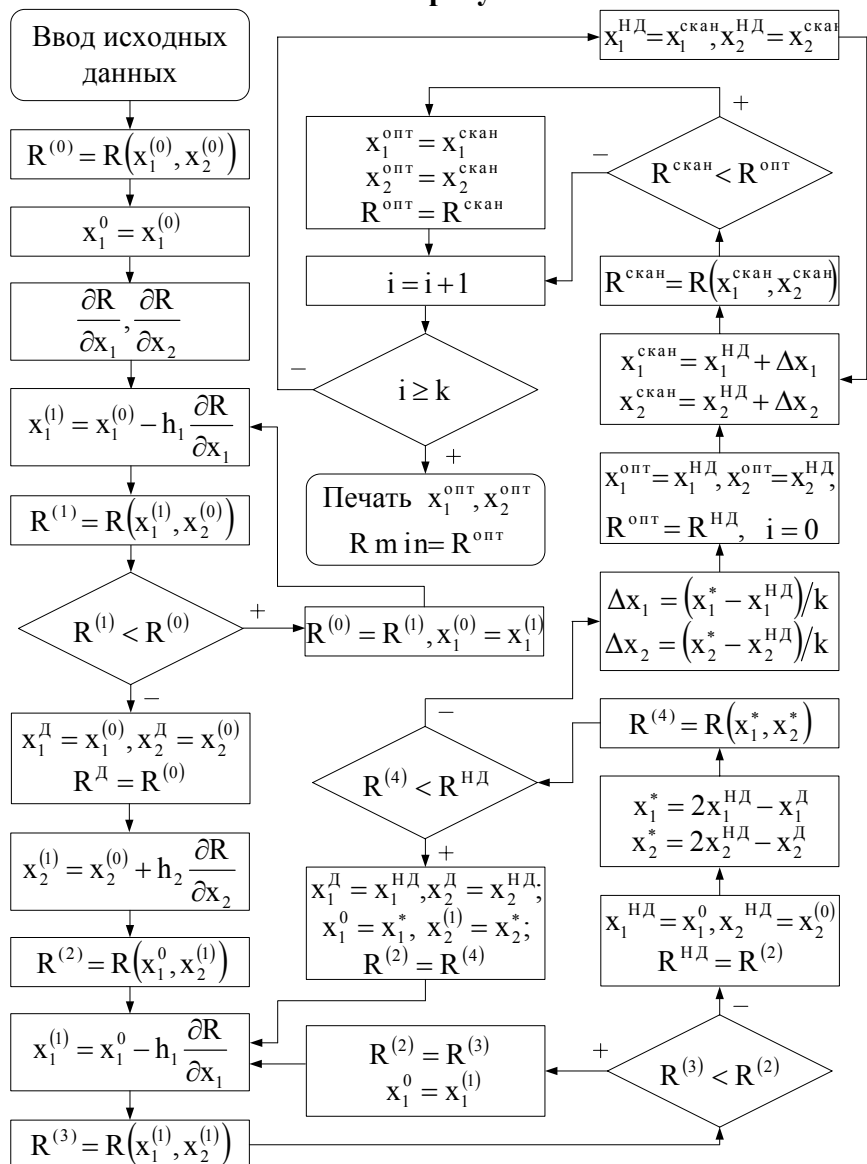
$$x_1^* = 2x_1^D - x_1^{HD}, \quad x_2^* = 2x_2^D - x_2^{HD}$$

Далее вычисляется значение целевой функции в точке  $(x_1^*, x_2^*)$ .

8. Если значение целевой функции в точке  $(x_1^*, x_2^*)$  меньше, чем в предыдущей точке, то поиск продолжается, начиная с п.6., при этом движение к новому дну «оврага» осуществляется из точки  $(x_1^*, x_2^*)$ . Если же оно больше, то предполагается, что оптимум находится между новой точкой  $(x_1^*, x_2^*)$  и предыдущей точкой.

9. Любым методом поиска находится минимум целевой функции между предыдущей точкой и точкой  $(x_1^*, x_2^*)$ .

**Блок – схема алгоритма решения задачи методом шагов по «оврагу»**



## 2.5. Постановка задачи оптимизации реактора идеального смешения

Рассмотрим задачу минимизации себестоимости продукта реакции в реакторе идеального смешения.

Для реакции первого порядка найти оптимальные условия, минимизирующие себестоимость получаемого продукта Р из исходного продукта А, определяемую с учетом затрат на сырье и амортизацию реактора.

Скорости образования компонентов А и Р имеют вид:

$$w_A = -(k_1(T) + k_2(T))x_A,$$

$$w_P = k_1(T)x_A.$$

где  $k_1(T)$ ,  $k_2(T)$  – константы скорости реакций, связаны с температурой реакции уравнением Аррениуса

$$k_1(T) = k_{1\infty} \exp\left(-\frac{E_1}{R_g T}\right), \quad k_2(T) = k_{2\infty} \exp\left(-\frac{E_2}{R_g T}\right),$$

Критерий оптимальности, минимальное значение которого определяется, в данном случае имеет вид:

$$R = S_{\text{пр}} = \frac{1}{\nu x_P} (S_A \nu x_A^{(0)} + S_V V),$$

где  $x_A^{(0)}$  – концентрация сырья в реакционной смеси, подаваемой в реактор;  $x_P$  – концентрация продукта на выходе реактора;  $S_A$  – стоимость исходного сырья;  $S_V$  – стоимость единицы объема реактора, исчисляемая с учетом его амортизации;  $V$  – объем реактора;  $\nu$  – скорость потока сырья, поступающего в зону идеального смешения;  $k_{1\infty}$ ,  $k_{2\infty}$  – предэкспоненциальные множители;  $R_g$  – универсальная газовая постоянная;  $T$  – температура в реакционной зоне;  $E_1$ ,  $E_2$  – энергия активации компонентов.

Стационарный режим характеризуется системой

уравнений:

$$\begin{cases} x_A^{(0)} - x_A - \tau(k_1(T) + k_2(T))x_A = 0, \\ x_P^{(0)} - x_P + \tau k_1(T)x_A = 0, \end{cases}$$

решая которую можно найти

$$x_A = \frac{x_A^{(0)}}{1 + \tau(k_1(T) + k_2(T))},$$
$$x_P = x_P^{(0)} + x_A^{(0)} \frac{\tau k_1(T)}{1 + \tau(k_1(T) + k_2(T))},$$

где  $x_P^{(0)}$  – концентрация продукта реакции на входе реактора.

В частном случае, когда продукт реакции Р отсутствует в исходной смеси, получим выражение для концентрации продукта на выходе реактора:

$$x_P = x_A^{(0)} \frac{\tau k_1(T)}{1 + \tau(k_1(T) + k_2(T))}.$$

Подставив это соотношение в выражение для критерия оптимальности, получим зависимость

$$R = \frac{1}{k_1(T)} [1 + \tau(k_1(T) + k_2(T))] \left( \frac{S_A}{\tau} + \frac{S_V}{x_A^{(0)}} \right).$$

Минимизация этого выражения производится выбором оптимальных значений температуры в реакторе Т и времени пребывания реагентов в реакторе  $\tau$ .

## 2.6. Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с методами нелинейного программирования.
2. Получить задание и исходные данные к задаче у преподавателя согласно табл. 2.1.
3. В соответствии с заданным методом поиска разработать алгоритм решения задачи оптимизации реактора идеального смешения. Составить блок-схему алгоритма.
4. Написать программу решения задачи на ЭВМ.



5. Исследовать влияние величины рабочего шага на искомое значение целевой функции.
6. Подготовить ответы на контрольные вопросы.
7. Реализовав различные методы решения задачи нелинейного программирования, провести сравнительный анализ методов.

#### Работа в лаборатории

1. Ввод и отладка программы на ЭВМ.
2. Анализ результатов решения задачи.

#### Содержание отчета о работе

1. Постановка задачи. Задание.
2. Алгоритм решения задачи.
3. Блок-схема алгоритма решения задачи.
4. Листинг программы и результаты выполненной задачи.
5. Основные выводы и заключения.

#### Контрольные вопросы

1. Сформулируйте задачу нелинейного программирования в общем виде.
2. Назовите основные методы решения задачи нелинейного программирования.
3. Основные достоинства и недостатки градиентных, безградиентных методов и методов случайного поиска.
4. Алгоритмы решения задачи методами наискорейшего спуска, сканирования, случайных направлений, шагов по «оврагу».
5. Достоинства, недостатки метода сканирования.
6. В чем состоит отличие метода наискорейшего спуска от метода градиента?
7. Объясните основные особенности методов случайного поиска и способы получения случайных чисел.
8. Назовите методы решения задач с ограничениями типа равенств и неравенств.

Таблица 2.1

Варианты заданий к задаче оптимизации  
реактора идеального смешения

| №  | $E_1/R_g$ | $E_2/R_g$ | $z_1$      | $z_2$      | $T_{\min}$ | $\tau_{\min}$ | $T_{\max}$ | $\tau_{\max}$ |
|----|-----------|-----------|------------|------------|------------|---------------|------------|---------------|
| 1  | 2500      | 5000      | $\sqrt{3}$ | $\sqrt{5}$ | 390        | 0.2           | 425        | 0.8           |
| 2  | 3000      | 6000      | $\sqrt{5}$ | $\sqrt{7}$ | 350        | 0.1           | 400        | 0.9           |
| 3  | 2750      | 5200      | $\sqrt{7}$ | $\sqrt{5}$ | 360        | 0.15          | 410        | 0.85          |
| 4  | 2100      | 4900      | $\sqrt{3}$ | $\sqrt{7}$ | 300        | 0.05          | 400        | 0.7           |
| 5  | 2250      | 4150      | $\sqrt{5}$ | $\sqrt{7}$ | 325        | 0.15          | 450        | 0.9           |
| 6  | 2450      | 5200      | $\sqrt{3}$ | $\sqrt{7}$ | 350        | 0.3           | 440        | 0.95          |
| 7  | 2800      | 5400      | $\sqrt{7}$ | $\sqrt{3}$ | 325        | 0.25          | 450        | 0.75          |
| 8  | 3000      | 6000      | $\sqrt{7}$ | $\sqrt{5}$ | 400        | 0.1           | 475        | 0.9           |
| 9  | 2500      | 5100      | $\sqrt{3}$ | $\sqrt{5}$ | 380        | 0.15          | 430        | 0.7           |
| 10 | 1900      | 5000      | $\sqrt{5}$ | $\sqrt{7}$ | 350        | 0.1           | 390        | 0.8           |
| 11 | 1800      | 4800      | $\sqrt{5}$ | $\sqrt{7}$ | 325        | 0.2           | 375        | 0.7           |
| 12 | 2000      | 5000      | $\sqrt{3}$ | $\sqrt{5}$ | 350        | 0.1           | 450        | 0.9           |
| 13 | 2500      | 5000      | $\sqrt{7}$ | $\sqrt{5}$ | 390        | 0.2           | 425        | 0.8           |
| 14 | 2200      | 5200      | $\sqrt{3}$ | $\sqrt{5}$ | 380        | 0.1           | 420        | 0.9           |
| 15 | 2500      | 5000      | $\sqrt{3}$ | $\sqrt{7}$ | 380        | 0.2           | 425        | 0.8           |
| 16 | 3100      | 5800      | $\sqrt{3}$ | $\sqrt{5}$ | 390        | 0.2           | 420        | 0.9           |
| 17 | 2750      | 5500      | $\sqrt{7}$ | $\sqrt{5}$ | 360        | 0.15          | 410        | 0.85          |
| 18 | 2100      | 4900      | $\sqrt{3}$ | $\sqrt{7}$ | 300        | 0.05          | 400        | 0.7           |
| 19 | 2250      | 4100      | $\sqrt{5}$ | $\sqrt{7}$ | 325        | 0.15          | 450        | 0.9           |
| 20 | 2400      | 5200      | $\sqrt{3}$ | $\sqrt{7}$ | 350        | 0.3           | 440        | 0.95          |

$$x_A^{(0)} = 1, S_A = 100, S_V = 200, h_{\min}^T = 0.1, h_{\min}^r = 0.001,$$

$$k_{1\infty} = 853.13, k_{2\infty} = 735169.71, \varepsilon = 0.01.$$

### РАБОТА 3. ОПТИМИЗАЦИЯ РЕАКТОРА ИДЕАЛЬНОГО ВЫТЕСНЕНИЯ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

**Цель работы:** освоить принцип максимума, научиться использовать принцип максимума для решения задач оптимизации химико-технологических процессов.

**Задание:** на основе принципа максимума разработать алгоритм решения задачи оптимизации реактора идеального вытеснения, составить блок-схему алгоритма, написать программу используя языки программирования.

Задачи определения оптимальных процессов характеризуются двумя наиболее важными особенностями:

1) минимизируемый функционал зависит не только от фазовых координат  $x_j$  ( $j=1,2,\dots,n$ ), изменяющихся непрерывно, но и от управляющих воздействий  $u_i$  ( $i=1,2,\dots,r$ ) которые могут быть кусочно-непрерывными функциями с конечным числом точек разрыва первого рода (рис. 3.1);

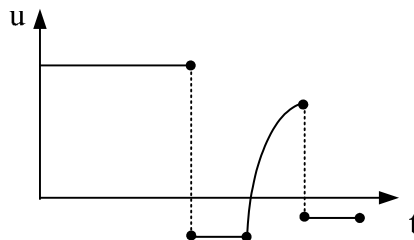


Рис. 3.1. Управляющее воздействие

2) ограничения на фазовые координаты и управляющие воздействия выражаются в виде неравенств

$$|x_j| \leq x_j^*, |u_i| \leq u_i^*.$$

Это значит, что фазовые траектории и управления могут частично или полностью проходить по границе допустимой области. Физический смысл рассмотрения замкнутой и ограниченной области управления  $u$  ясен: управляющими

параметрами  $u_1, u_2, \dots, u_r$  могут служить количество подаваемого в печь топлива, температура реактора, количество подаваемого в колонну пара или флегмы и т.п., которые не могут принимать сколь угодно больших или малых значений.

Каждую функцию  $u(t)$ , определенную на некотором отрезке времени  $t_0 \leq t \leq t_1$  и принимающую значения в области управления  $U$ , будем называть управлением. Так как  $u$  представляет собой множество в пространстве управляющих параметров  $u(t) = u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$ , то каждое управление является вектор-функцией, значения которой лежат в допустимой области  $u \in U$ .

Допустимым управлением условимся называть всякую кусочно-непрерывную функцию  $u(t)$  со значениями в области управления  $u \in U$ , имеющую в каждой точке разрыва  $\tau$  значение равное пределу слева

$$u(t) = u(\tau - 0)$$

и непрерывную на концах отрезка  $t_0 \leq t \leq t_1$ .

Классическое необходимое условие экстремума функционала в общем случае неприменимо для задач оптимального управления при наличии ограничений.

Задача с ограничениями, наложенными на координаты и управления методами классического вариационного исчисления решаются лишь в частных случаях. В реальных системах, где управление и фазовые переменные удовлетворяют ограничениям, мощным инструментом решения задачи оптимизации является метод, предложенный в 1956 г. Понтрягиным Л.С., Болтянским Б.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф., называемый **принципом максимума** [1,6].

Принцип максимума является необходимым условием оптимальности для нелинейных систем, а для линейных – необходимым и достаточным. Из многих задач оптимального управления имеют существенное значение три задачи: задача

максимального быстродействия, задача управления конечным состоянием и задача управления по минимуму интеграла.

Задачи по минимуму времени, по минимуму интеграла и управления конечным состоянием являются частным случаем задачи минимизации по отношению к одной координате.

Рассмотрим управление процессом  $n$ -го порядка

$$\dot{x}_j = f_j(x, u, t), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.1)$$

Необходимо определить управление, обеспечивающее минимум функционала

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(x, u, t) dt. \quad (3.2)$$

Введем новую переменную  $x_{n+1}$  уравнением  $\dot{x}_{n+1} = F(x, u, t)$  с начальным условием  $x_{n+1}(t_0) = 0$ . Интегрируя уравнение, получим

$$x_{n+1}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} F(x, u, t) dt.$$

Тогда задача отыскания минимума функционала (3.2) сводится к задаче отыскания минимума  $(n+1)$ -ой координаты  $x_{n+1}(t_1)$  в конечной точке траектории, т.е. при  $t = t_1$ .

Задачи оптимального управления можно рассматривать как частные случаи более общей задачи отыскания максимума или минимума функционала

$$J = \sum_{j=1}^n c_j x_j(t_1). \quad (3.3)$$

### 3.1. Формулировка принципа максимума в задаче со свободным правым концом

Рассмотрим задачу со свободным правым концом (рис. 3.2).

Пусть процесс описывается системой уравнений

$$\dot{x}_j = f_j(x, u, t), \quad j=1,2,\dots,n, \quad (3.4)$$

где  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  –  $n$ -мерный вектор состояния  
 $u = (u_1, u_2, \dots, u_r)$  –  $r$ -мерный вектор управляющих  
 воздействий. Заданы начальные условия  $x_j(t_0) = x_{j,0}$ . Правый  
 конец траектории  $x_j(t_1)$  свободен.

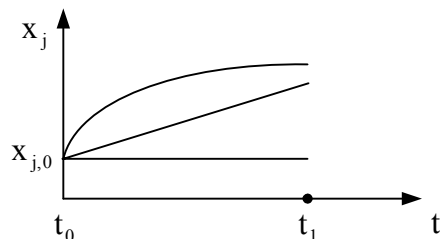


Рис. 3.2. Графическая иллюстрация задачи со свободным правым концом

Управление  $u$  определено в допустимой области,  $u \in U$ .

Необходимо определить вектор управления  $u(t) \in U$ , обеспечивающий минимум функционала

$$J = \sum_{j=1}^n c_j x_j(t_1), \quad (3.5)$$

где  $c_j = \text{const}$ .

Решение задачи можно построить просто, если найти некоторую функцию, тесно связанную с функционалом  $J$  и динамикой процесса. Условия минимума функционала  $J$  следуют из условия максимума функции Гамильтона  $H$ , характеризующей сумму кинетической и потенциальной энергии и выражающейся в виде скалярного произведения вектора количества движения на вектор координат системы

$$H(x, u, \lambda, t) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(x, u, t), \quad (3.6)$$

где  $\lambda_j$  – вектор количества движения.

Вектор количества движения  $\lambda_j$  определяется как решение дифференциального уравнения.

$$\dot{\lambda}_j = -\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i(x, u, t)}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.7)$$

при конечном условии

$$\lambda_j(t_1) = -c_j,$$

где  $c_j$  – постоянные, входящие в функционал  $J$ .

Дифференцирование гамильтониана  $H$  по  $\lambda_j$  дает

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_j} = f_j(x, u, t),$$

а по  $x_j$

$$\frac{\partial H}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial f_i(x, u, t)}{\partial x_j}. \quad (3.8)$$

Из уравнений (3.4), (3.7), (3.8) можно получить уравнения в канонической форме Гамильтона

$$\dot{x}_j = \frac{\partial H}{\partial \lambda_j}, \quad (3.9)$$

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.10)$$

которые должны интегрироваться при условиях:

$$x_j(t_0) = x_{j,0}, \quad \lambda_j(t_1) = -c_j.$$

Принцип максимума: если управление  $u_{\text{opt}}(t)$  доставляет минимум функционалу  $J$ , то необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции  $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t))$ , что управление  $u_{\text{opt}}(t)$  удовлетворяет условию

$$H(x_{\text{opt}}, u_{\text{opt}}, \lambda, t) = \max_{u \in U} H(x, u, \lambda, t).$$

Таким образом,  $2n$  уравнений (3.4) и (3.10) с  $2n$  неизвестными  $x_j$  и  $\lambda_j$  и условие  $\max_{u \in U} H$  дают решение задачи.

Для решения задачи о минимуме функционала (3.5) при дифференциальных связях (3.4) необходимо:

1. Составить функцию  $H = \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(x, u, t)$ .
2. Определить сопряженную систему уравнений  $\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j}$  с конечными условиями  $\lambda_j(t_1) = -c_j$ .
3. Проинтегрировать исходную (3.4) и сопряженную (3.10) системы уравнений.
4. Составить условие максимума функции  $H$ , из которого определить оптимальное управление

$$H(x_{opt}, u_{opt}, \lambda, t) = \max_{u \in U} H(x, u, \lambda, t)$$

Заметим, что для исходной системы уравнений (3.4) заданы начальные условия при  $t = t_0$ ,  $x_j(t_0) = x_{j,0}$ , а для сопряженной системы (3.10) заданы конечные условия в конце интервала  $t = t_1$ ,  $\lambda_j(t_1) = -c_j$ . Поэтому процесс вычисления оптимального управления можно вести от начала интервала к концу или же, наоборот, от конца к началу. В первом случае, зная переменные состояния  $x_j(t_0)$  в начале интервала, задаются произвольно значениями переменных  $\lambda_j(t_0)$  при  $t = t_0$ .

При вычислении от конца интервала к началу, где известны  $\lambda_j(t_1) = -c_j$  задаются значения переменных  $x_j(t_1)$ . Если при расчете значения переменных  $\lambda_j$  (в первом случае) не совпадут с заданными в конце интервала  $\lambda_j(t_1) = -c_j$ , то процесс вычисления повторяют уже при других значениях  $\lambda_j(t_0)$  до тех



пор, пока расчетные значения  $\lambda_j(t_1)$  в конце интервала не совпадут с заданными с требуемой точностью вычислений. Аналогично поступает при расчете управления от конца к началу.

Решение задачи оптимального управления с использованием принципа максимума проводится численно с помощью ЭВМ.

### **Алгоритм численного решения задачи со свободным правым концом**

Пусть требуется найти управление  $u(t)$ , обеспечивающее минимум функционалу

$$J = \sum_{j=1}^n c_j x_j(t_1) \quad (3.11)$$

и удовлетворяющее системе дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_j = f_j(x, u, t), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.12)$$

с начальными условиями

$$x_j(t_0) = x_{j,0}. \quad (3.13)$$

Кроме того управление должно удовлетворять ограничениям

$$u_1 \leq u(t) \leq u_2, \quad (3.14)$$

где  $u_1 = \text{const}$ ,  $u_2 = \text{const}$ ,  $t \in (t_0, t_1)$ .

Алгоритм решения задачи следующий.

1. Составляется функция  $H$

$$H = \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(x, u, t), \quad (3.15)$$

где  $f_j$  – правая часть  $j$ -го дифференциального уравнения (3.12), разрешенного относительно первой производной  $\dot{x}_j$ ,  $\lambda_j$  – сопряженные функции,  $\lambda_j = \lambda_j(t)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

2. Определяется система сопряженных уравнений

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.16)$$

с конечными условиями  $\lambda_j(t_1) = -c_j$ .

3. Заданный интервал времени  $t \in (t_0, t_1)$  разбивается на  $S$  частей с шагом  $\Delta t = \frac{t_1 - t_0}{S}$ .

4. Область изменения управления разбивается на  $L$  частей с шагом  $\Delta u = \frac{u_2 - u_1}{L}$ .

5. Решение задачи условимся вести от начала интервала  $t = t_0$ . Поэтому в начале интервала задаются начальные условия для интегрирования сопряженных систем уравнений (3.16), полученных в п. 2,  $\lambda_j(t_0) = \lambda_{j,0}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

6. В начале интервала интегрирования  $t = t_0$  по известным  $x_{j,0}$ ,  $\lambda_{j,0}$  вычисляется значение функции  $H$  при каждом значении управления  $u$  из области  $u_1 \leq u \leq u_2$ , начиная с  $u = u_1$  до  $u = u_2$  с шагом  $\Delta u$ .

7. Из рассчитанного массива значений функции  $H$  выбирается максимальное и определяется соответствующее оптимальное управление  $u = u_{\text{opt}}(t)$ .

8. На основе  $u = u_{\text{opt}}(t)$  и  $x_j(t)$ ,  $\lambda_j(t)$  рассчитывается для следующего момента времени  $t = t + \Delta t$  оптимальная фазовая траектория  $x_{j,\text{opt}}(t + \Delta t, u_{\text{opt}}(t))$  и значения сопряженных функций  $\lambda_{j,\text{opt}}(t + \Delta t, u_{\text{opt}}(t))$ .

9. Используя рассчитанные  $x_{j,\text{opt}}(t + \Delta t)$ ,  $\lambda_{j,\text{opt}}(t + \Delta t)$  в исходной (3.12) и сопряженной (3.16) системах уравнений для момента времени  $t = t + \Delta t$  вычисляется функция  $H(t + \Delta t)$  для

каждого управления  $u$  из области  $(u_1, u_2)$  также, как это описано в п. 6 для точки  $t = t_0$ .

10. Процедура расчета повторяется, начиная с п. 6 при каждом новом значении  $t = t + \Delta t$  до тех пор, пока не будет рассчитано управление на всем интервале времени от  $t_0$  до  $t_1$ .

11. В конце интервала интегрирования необходимо проверить выполнение конечных условий для функций  $\lambda_j$ :  $\lambda_j(t_1) = -c_j$ . Если расчетное значение  $\lambda_j(t_1) \neq -c_j$ , то начальные значения  $\lambda_j(t_0) = \lambda_{j,0}$  заданы неверно. Требуется изменить начальные значения так, чтобы конечные  $\lambda_j(t_1)$  были равны заданным с допустимой погрешностью  $\varepsilon$ . При каждом новом значении  $\lambda_{j,0}$  процедура расчета повторяется, начиная с п. 5.

Для определения начальных значений  $\lambda_{j,0}$  предлагается использовать метод сканирования.

При использовании данного метода необходимо задать область значений начальных условий для интегрирования сопряженных систем уравнений  $(\lambda_{j,0}^{\min}, \lambda_{j,0}^{\max})$  и определить величину рабочего шага поиска

$$\Delta\lambda_{j,0} = \frac{\lambda_{j,0}^{\max} - \lambda_{j,0}^{\min}}{Z}.$$

Критерием окончания поиска может служить условие

$$\sum_{j=1}^m |\lambda_j(t_1) - c_j| \leq \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  – заданная погрешность расчета. Если в результате поиска не найдено значение  $\lambda_{j,0}$ , обеспечивающее выполнение условия окончания поиска, то следует пересмотреть границы области  $(\lambda_{j,0}^{\min}, \lambda_{j,0}^{\max})$  либо изменить величину рабочего шага  $\Delta\lambda_{j,0}$ .



### 3.2. Постановка задачи оптимизации реактора идеального вытеснения

На основе принципа максимума построить оптимальный температурный профиль в реакторе идеального вытеснения.

В реакторе идеального вытеснения протекает реакция первого порядка превращения исходного реагента А в продукт реакции Р.

Скорости химической реакций:

$$w_A = -k_1(T)x_A,$$

$$w_P = k_1(T)x_A - k_2(T)x_P,$$

где  $k_1(T)$ ,  $k_2(T)$  – константы скорости реакций, связаны с температурой реакции уравнением Аррениуса

$$k_1(T) = k_{1\infty} \exp\left(-\frac{E_1}{R_g T}\right), \quad k_2(T) = k_{2\infty} \exp\left(-\frac{E_2}{R_g T}\right),$$

$x_A$ ,  $x_P$  – концентрации компонентов А и Р соответственно.

Обозначим  $x_A = x_1$ ,  $x_P = x_2$ .

Процесс реакции в реакторе описывается системой уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = -k_1(T)x_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = k_1(T)x_1 - k_2(T)x_2$$

с начальными условиями  $x_1(0) = x_{1,0}$ ,  $x_2(0) = x_{2,0}$ ;  $x_{1,0} = 1$ ,  $x_{2,0} = 0$ .

Управлением процесса является распределение температуры реактора  $T(t)$ ,  $^{\circ}\text{C}$ , которое удовлетворяет ограничениям  $T_1 \leq T \leq T_2$ , где  $T_1 = \text{const}$ ,  $T_2 = \text{const}$ .

Время реакции  $t \in [0, \tau_k]$ , где  $\tau_k$  – время окончания реакции,  $\tau_k = 2$  мин.

Требуется найти такой закон изменения температуры

реактора  $T_{\text{opt}}(t)$ , при котором концентрация продукта реакции на выходе реактора максимальна, что эквивалентно минимуму функционала  $J = -x_2(\tau_k)$ .

Шаг разбиения времени реакции  $\tau_k$  следует выбрать равным

$$\Delta t = \frac{\tau_k}{S} = (0,1 \div 0,2) \text{ мин.}$$

Шаг разбиения области изменения управления  $T_1 \leq T \leq T_2$  принять равным

$$\Delta T = \frac{T_2 - T_1}{L} = 5 \div 10 \text{ } ^\circ\text{C.}$$

Область значений начальных условий для интегрирования сопряженных систем уравнений  $(\lambda_{j,0}^{\min}, \lambda_{j,0}^{\max})$  составляет  $[0.5;1]$ , величина рабочего шага поиска

$$\Delta \lambda_{j,0} = \frac{\lambda_{j,0}^{\max} - \lambda_{j,0}^{\min}}{Z} = 0.01 \div 0.05.$$

После расчете функции  $H$  по каждому  $T_1 \leq T \leq T_2$  в фиксированный момент времени  $t$  выбирается максимальное значение функции  $H_{\max}(t) = \max_{T_1 \leq T \leq T_2} H(t)$ , при этом величина  $H_{\max}(t)$  неотрицательна. Соответствующее этому значению управление есть оптимальное управление  $T_{\text{opt}}(t)$ . Далее на основе  $T_{\text{opt}}(t)$  рассчитываются оптимальные значения концентраций  $x_{1\text{opt}}(t + \Delta t, T_{\text{opt}}(t))$  и  $x_{2\text{opt}}(t + \Delta t, T_{\text{opt}}(t))$ , а также сопряженных функций  $\lambda_{1\text{opt}}(t + \Delta t, T_{\text{opt}}(t))$ ,  $\lambda_{2\text{opt}}(t + \Delta t, T_{\text{opt}}(t))$ .

Расчет  $x_{1\text{opt}}$ ,  $x_{2\text{opt}}$ ,  $\lambda_{1\text{opt}}$  и  $\lambda_{2\text{opt}}$  в пределах от  $t$  до  $t + \Delta t$  осуществляется одним из приближенных методов интегрирования дифференциальных уравнений [7].

## Приближенные методы численного интегрирования дифференциальных уравнений

Существует несколько методов численного интегрирования дифференциальных уравнений (метод Эйлера, Рунге-Кутта, Милна, Адамса и др.) [7]. Рассмотрим методы Эйлера и Рунга-Кутта.

### Метод Эйлера

Пусть дано уравнение  $\dot{x} = f(x, t)$ , удовлетворяющее начальному условию  $x(t_0) = x_0$ . Решением этого уравнения будет искомая интегральная кривая

$$x = x(t).$$

Выберем достаточно малый шаг и построим систему равноотстоящих точек:

$$t_i = t_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, q, \quad \text{где } h \text{ – величина шага.}$$

Интегрирование дифференциального уравнения проводится на основе соотношения:

$$x_{i+1} = x_i + hf(x_i, t_i).$$

Интегрирование по методу Эйлера заключается в последовательном применении этого соотношения к уравнению  $\dot{x} = f(x, t)$ . В результате вычислений определяется некоторая ломаная линия, линейные отрезки которой имеют угол наклона, вычисляемый с помощью производной в соответствующей точке интегральной кривой. Недостатками метода являются малая точность и систематическое накопление ошибок.

### Метод Рунге-Кутта

Наиболее распространенным в практике интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнения является метод Рунге-Кутта. При его использовании решение уравнений представляется в виде итерационных формул Рунге-Кутта.

Пусть дано уравнение

$$\dot{x} = f(x, t),$$

удовлетворяющее начальному условию  $x(t_0) = x_0$ .

Выберем достаточно малый шаг и построим систему равноотстоящих точек:

$$t_i = t_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, q.$$

Рассмотрим метод Рунге-Кутты четвертого порядка:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}(g_1^{(i)} + 2g_2^{(i)} + 2g_3^{(i)} + g_4^{(i)}),$$

где

$$g_1^{(i)} = hf(x_i, t_i),$$

$$g_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{g_1^{(i)}}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right),$$

$$g_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{g_2^{(i)}}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right),$$

$$g_4^{(i)} = hf(x_i + g_3^{(i)}, t_i + h).$$

Достоинством метода Рунге-Кутты является то, что при его использовании нет необходимости вычислять производные выше первого порядка, а основные недостатки – громоздкость и значительный объем вычислений на каждом шаге.

Алгоритм численного интегрирования дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты

В данной задаче исходная система уравнений имеет вид:

$$\dot{x}_1 = -k_1(T)x_1, \quad \dot{x}_2 = k_1(T)x_1 - k_2(T)x_2$$

с начальными условиями  $x_1(0) = x_{1,0}$ ,  $x_2(0) = x_{2,0}$ .

Сопряженная система уравнений:

$$\dot{\lambda}_1 = k_1(T)(\lambda_1 - \lambda_2), \quad \dot{\lambda}_2 = k_2(T)\lambda_2$$

с граничными условиями  $\lambda_1(\tau_k) = -c_1$ ,  $\lambda_2(\tau_k) = -c_2$ .

Зададим начальные условия  $\lambda_1(0) = \lambda_{1,0}$ ,  $\lambda_2(0) = \lambda_{2,0}$ .



1. Для интегрирования уравнений в интервале времени от  $t$  до  $t + \Delta t$  разобьем интервал на  $P$  частей с шагом  $\Delta t_{\text{RK}} = \frac{\Delta t}{P}$ .

2. Пусть  $i = 0$ . Определяем значение  $t_i = t_{i-1} + i\Delta t_{\text{RK}}$ .

3. Для уравнений исходной и сопряженной систем определяем величины:  $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)}, a_4^{(i)}; b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, b_3^{(i)}, b_4^{(i)}; c_1^{(i)}, c_2^{(i)}, c_3^{(i)}, c_4^{(i)}; d_1^{(i)}, d_2^{(i)}, d_3^{(i)}, d_4^{(i)}$ .

Для уравнения  $\dot{x}_1 = -k_1(T) x_1$ :

$$a_1^{(i)} = \Delta t_{\text{RK}} f(T_{\text{opt}}(t), x_{1,i}),$$

$$a_2^{(i)} = \Delta t_{\text{RK}} f\left(T_{\text{opt}}(t), x_{1,i} + \frac{a_1^{(i)}}{2}\right),$$

$$a_3^{(i)} = \Delta t_{\text{RK}} f\left(T_{\text{opt}}(t), x_{1,i} + \frac{a_2^{(i)}}{2}\right),$$

$$a_4^{(i)} = \Delta t_{\text{RK}} f(T_{\text{opt}}(t), x_{1,i} + a_3^{(i)}).$$

Для уравнения  $\dot{\lambda}_2 = k_2(T) \lambda_2$ :

$$b_1^{(i)} = \Delta t_{\text{RK}} f(T_{\text{opt}}(t), \lambda_{2,i}),$$

$$b_2^{(i)} = \Delta t_{\text{RK}} f\left(T_{\text{opt}}(t), \lambda_{2,i} + \frac{b_1^{(i)}}{2}\right),$$

$$b_3^{(i)} = \Delta t_{\text{RK}} f\left(T_{\text{opt}}(t), \lambda_{2,i} + \frac{b_2^{(i)}}{2}\right),$$

$$b_4^{(i)} = \Delta t_{\text{RK}} f(T_{\text{opt}}(t), \lambda_{2,i} + b_3^{(i)}).$$

Для уравнения  $\dot{x}_2 = k_1(T) x_1 - k_2(T) x_2$ :

$$c_1^{(i)} = \Delta t_{\text{RK}} f(T_{\text{opt}}(t), x_{1,i}, x_{2,i}),$$

$$c_2^{(i)} = \Delta t_{\text{RK}} f\left(T_{\text{opt}}(t), x_{1,i} + \frac{a_1^{(i)}}{2}, x_{2,i} + \frac{c_1^{(i)}}{2}\right),$$

$$c_3^{(i)} = \Delta t_{\text{RK}} f\left(T_{\text{opt}}(t), x_{1,i} + \frac{a_2^{(i)}}{2}, x_{2,i} + \frac{c_2^{(i)}}{2}\right),$$

$$c_4^{(i)} = \Delta t_{\text{RK}} f\left(T_{\text{opt}}(t), x_{1,i} + a_3^{(i)}, x_{2,i} + c_3^{(i)}\right).$$

Для уравнения  $\dot{\lambda}_1 = k_1(T)(\lambda_1 - \lambda_2)$ :

$$d_1^{(i)} = \Delta t_{\text{RK}} f\left(T_{\text{opt}}(t), \lambda_{1,i}, \lambda_{2,i}\right),$$

$$d_2^{(i)} = \Delta t_{\text{RK}} f\left(T_{\text{opt}}(t), \lambda_{1,i} + \frac{d_1^{(i)}}{2}, \lambda_{2,i} + \frac{b_1^{(i)}}{2}\right),$$

$$d_3^{(i)} = \Delta t_{\text{RK}} f\left(T_{\text{opt}}(t), \lambda_{1,i} + \frac{d_2^{(i)}}{2}, \lambda_{2,i} + \frac{b_2^{(i)}}{2}\right),$$

$$d_4^{(i)} = \Delta t_{\text{RK}} f\left(T_{\text{opt}}(t), \lambda_{1,i} + d_3^{(i)}, \lambda_{2,i} + b_3^{(i)}\right).$$

4. Далее вычисляем:

$$x_{1,i+1} = x_{1,i} + \frac{1}{6}(a_1^{(i)} + 2a_2^{(i)} + 2a_3^{(i)} + a_4^{(i)}),$$

$$\lambda_{2,i+1} = \lambda_{2,i} + \frac{1}{6}(b_1^{(i)} + 2b_2^{(i)} + 2b_3^{(i)} + b_4^{(i)}),$$

$$x_{2,i+1} = x_{2,i} + \frac{1}{6}(c_1^{(i)} + 2c_2^{(i)} + 2c_3^{(i)} + c_4^{(i)}),$$

$$\lambda_{1,i+1} = \lambda_{1,i} + \frac{1}{6}(d_1^{(i)} + 2d_2^{(i)} + 2d_3^{(i)} + d_4^{(i)}).$$

5. Процедуру вычисления значений  $x_{1,i+1}$ ,  $x_{2,i+1}$ ,  $\lambda_{1,i+1}$ ,  $\lambda_{2,i+1}$  повторяем при последующих значениях  $i = 1, 2, \dots, P - 1$ .

### 3.3. Порядок выполнения работы

1. Изучить принцип максимума.
2. Получить задание и исходные данные у преподавателя согласно табл. 3.1.
3. Разработать алгоритм решения задачи оптимизации реактора идеального вытеснения и составить блок-схему.

4. Написать программу решения задачи на ЭВМ.
5. Исследовать влияние величины рабочего шага поиска начальных условий для интегрирования сопряженных систем уравнений на погрешность расчета.
6. Проанализировать влияние величины шага интегрирования в методе Рунге-Кутты на оптимальные фазовые траектории концентраций и температурный профиль по длине реактора.
7. Подготовить ответы на контрольные вопросы.

#### Работа в лаборатории

1. Ввод и отладка программы на ЭВМ.
2. Обработка и анализ результатов расчета.
3. Построение оптимального температурного профиля  $T_{opt}(t)$ ; оптимальных фазовых траекторий  $x_{1opt}(t)$ ,  $x_{2opt}(t)$ ; графика зависимости максимальных значений функции Гамильтона от времени  $H_{max}(t)$ ; графиков зависимостей  $\lambda_1(t)$ ,  $\lambda_2(t)$ .

#### Содержание отчета о работе

1. Постановка задачи. Задание.
2. Алгоритм решения задачи и блок-схема алгоритма.
3. Листинг программы решения задачи.
4. Результаты расчета.
5. Графическое представление функций:  $T_{opt}(t)$ ,  $x_{1opt}(t)$ ,  $x_{2opt}(t)$ ,  $\lambda_1(t)$ ,  $\lambda_2(t)$ ,  $H_{max}(t)$ .
6. Основные выводы и заключения.

#### Контрольные вопросы

1. Привести формулировку принципа максимума.
2. Расскажите о свойствах функции  $H$ .
3. В чем состоит простота и трудность решения задачи с использованием принципа максимума?
4. Для решения каких задач следует применять принцип

максимума?

5. Сформулируйте задачу со свободным правым концом.
6. Для каких систем принцип максимума является необходимым и достаточным условием оптимальности.
7. Расскажите алгоритм численного решения задачи на основе принципа максимума.
8. Как записываются условия максимума функции Гамильтона в задаче без ограничений?

Таблица 3.1

Варианты заданий к задаче оптимизации  
реактора идеального вытеснения

| №  | $E_1/R_g$ | $E_2/R_g$ | $T_1$ | $T_2$ | $K_{1\infty}$ | $K_{2\infty}$ |
|----|-----------|-----------|-------|-------|---------------|---------------|
| 1  | 2000      | 5000      | 600   | 900   | 3.5           | 0.5           |
| 2  | 2000      | 5000      | 700   | 1000  | 6             | 0.3           |
| 3  | 1000      | 6000      | 600   | 900   | 5             | 0.9           |
| 4  | 2000      | 5000      | 600   | 900   | 6             | 0.6           |
| 5  | 2000      | 6000      | 600   | 900   | 5             | 0.8           |
| 6  | 2200      | 5700      | 600   | 900   | 3.6           | 0.6           |
| 7  | 1000      | 5500      | 600   | 900   | 5             | 0.6           |
| 8  | 3000      | 8000      | 600   | 900   | 4             | 0.9           |
| 9  | 2100      | 5500      | 600   | 900   | 3.5           | 0.5           |
| 10 | 2300      | 5700      | 600   | 900   | 3.8           | 0.55          |
| 11 | 2000      | 7000      | 600   | 900   | 8             | 0.7           |
| 12 | 2000      | 7000      | 600   | 900   | 7             | 1             |
| 13 | 2000      | 5000      | 700   | 1000  | 6             | 0.3           |
| 14 | 2300      | 5500      | 600   | 900   | 3.8           | 0.55          |
| 15 | 2000      | 5000      | 600   | 900   | 3.5           | 0.5           |
| 16 | 1500      | 4500      | 600   | 900   | 4             | 0.6           |
| 17 | 2100      | 6500      | 600   | 900   | 6             | 0.65          |
| 18 | 1500      | 6000      | 600   | 900   | 6             | 0.7           |
| 19 | 1900      | 5000      | 600   | 900   | 6             | 0.65          |
| 20 | 2000      | 5000      | 600   | 900   | 4             | 0.6           |

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бояринов А.И., Кафаров В.В.* Методы оптимизации в химической технологии. М., «Химия», 1975.
2. *Моисеев Н.Н., Иванюков Ю.П., Столярова Е.М.* Методы оптимизации. М., «Наука», 1978.
3. *Гумеров Аз.М., Гумеров Ас.М.* Табличный процессор Excel. Учеб. пособие по лаб. практикуму. Казан. гос. технол. ун-т. Казань. 1998.
4. *Заславский Ю.Л.* Сборник задач по линейному программированию. М., «Наука», 1969.
5. *Черноруцкий И.Г.* Методы оптимизации в теории управления. СПб., «Питер», 2004.
6. *Понтрягин Л.С. и др.* Математическая теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1969.
7. *Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З.* Численные методы анализа. М., «Физматгиз», 1963.