Т.Г. Макусева, О.В. Шемелова, Л.В. Бакеева

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Рекомендовано УМО РАЕ по классическому университетскому и техническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки: 13.03.01 – «Теплоэнергетика и теплотехника», 13.03.02 – «Электроэнергетика и электротехника», 14.03.01 – «Ядерная энергетика и теплофизика», 38.03.01 – «Экономика предприятий и организаций», 18.03.01 – «Химическая технология»

Санкт-Петербург, 2017

УДК 517.2
М15

Печатается по решению редакционно-издательского совета Нижнекамского химико-технологического института (филиала) ФГБОУ ВО «КНИТУ»

Рецензенты:
Яковлева Е.В., доктор педагогических наук,
профессор кафедры физики НХТИ (филиал) ФГБОУ ВО «КНИТУ»
Еремина И.И., кандидат педагогических наук наук,
доцент кафедры бизнес-информатики и математических методов в экономике Набережночелнинского института (филиал) КФУ

ISBN 978-5-4386-1308-4

Макусева, Т.Г., Шемелова, О.В., Бакеева Л.В.
М 15 Дифференциальное исчисление функции одной переменной: учебное пособие / Т.Г. Макусева, О.В. Шемелова, Л.В. Бакеева. – Санкт-Петербург, 2017. – 150 с.

Предназначены для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы студентов, обучающихся по программам высшего образования и среднего профессионального образования, при изучении раздела «Дифференциальное исчисление функции одной переменной». По каждой теме раздела предложен необходимый справочный материал на основе решения типовых задач, приведен набор заданий различной сложности для решения на практических занятиях, а также индивидуальные задания для домашней и контрольной работы.

УДК 517.2

ISBN 978-5-4386-1308-4

ВВЕДЕНИЕ

Тематический раздел «Дифференциальное исчисление функций одной переменной» обеспечивает подготовку бакалавров и обучающихся СПО по различным направлениям к решению ряда профессиональных задач и вносит важный вклад в формирование модели бакалавра.

Цели и задачи раздела: накопление необходимого запаса сведений по математике (основные определения, теоремы, правила), а также освоение математического аппарата, помогающего моделировать, анализировать и решать управленческие задачи, помощь в усвоении математических методов, дающих возможность изучать и прогнозировать процессы и явления из области будущей деятельности студентов; развитие логического и алгоритмического мышления, способствование формированию умений и навыков самостоятельного анализа исследования управленческих проблем, развитию стремления к научному поиску путей совершенствования своей работы.

В результате изучения дисциплины студент **должен:**

Знать:

–определения числовой функции, числовой последовательности;

–понятия дифференцируемости функции в точке, производной и дифференциала, их геометрический и физический смысл.

Уметь:

–оперировать с рациональными и иррациональными числами;

– составлять уравнение касательной и нормали к графику функции;

– вычислять производные и дифференциалы первого и высших порядков;

– исследовать функцию на монотонность, экстремумы, выпуклость;

– применять методы дифференциального исчисления для решения текстовых задач на оптимизацию;

– исследовать функции с помощью производной и строить их графики;

– вычислять пределы функций с помощью производной.

Владеть:

–различными приемами вычисления пределов с помощью производной;

–техникой дифференцирования функций.

Зачем тебе изучать математику?

Математику уже затем учить следует, что она ум в порядок приводит.
М. Ломоносов

Математическое образование является средством активного интеллектуального развития человека, его мыслительных способностей.

Человек, изучающий математические термины, утверждения, доказательства, умеющий решать задачи, вырабатывает стиль мышления, характеризующийся краткостью, лаконичностью, логикой суждений. Человек, знающий математику, и в своей профессиональной деятельности стремится строго следовать тому предписанию и набору правил, которые приводят к получению правильного результата. Поэтому одной из задач математики является высокоинтеллектуальное развитие человека, способного творчески решать поставленные задачи и адаптироваться к динамически развивающемуся обществу. С этой точки зрения, конкретные математические знания рассматриваются как основы для дальнейшей профессиональной деятельности, а сам процесс изучения математики – как развивающая функция, способствующая повышению интеллектуального уровня обучающегося.

СОДЕРЖАНИЕ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

<u>Производная</u> – одно из самых важных понятий математического анализа. Знание производной позволяет решать многочисленные задачи по экономической теории, физике, алгебре и геометрии.

<u>Определение</u>. ***Производной*** функции $y = f(x)$ по аргументу x называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует).

$$\boxed{y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

Приведём таблицу 1 правил дифференцирования и формул производных основных элементарных функций.

Табл. 1. Таблица производных

Правила дифференцирования

1. $(x)' = 1$

2. $(c)' = 0$

3. $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$

4. $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

4⁰. $(c \cdot u(x))' = c \cdot (u(x))'$

5. $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2}$

6. $\left(\dfrac{u}{c}\right)' = \dfrac{u'}{c}$

6^0. $\left(\dfrac{x}{c}\right)' = \dfrac{1}{c}$

7. $\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{c \cdot v'}{v^2}$

7^0. $\left(\dfrac{c}{x}\right)' = -\dfrac{c}{x^2}$

Формулы дифференцирования

Название функции	Простые функции	№ п/п	Сложные функции $u = u(x)$
Степенная (n – число)	$\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$	1	$\left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
	$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	1^0	$(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
Показательная (a – число)	$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	2	$\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
Экспоненциальная	$\left(e^x\right)' = e^x$	2^0	$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$
Логарифмическая	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	3	$(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$
	$\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$	3^0	$\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$
Тригонометрические:			
Синус	$\left(\sin x\right)' = \cos x$	4	$\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$
Косинус	$\left(\cos x\right)' = -\sin x$	5	$\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$

Тангенс	$(\mathrm{tg}\,x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	6	$\left(\mathrm{tg}\,u\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$
Котангенс	$(\mathrm{ctg}\,x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	7	$\left(\mathrm{ctg}\,u\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$
Обратные тригонометрические:		8	$(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
		9	$(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
		10	$(\mathrm{arctg}\,u)' = \dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$
		11	$(\mathrm{arcctg}\,u)' = -\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$

Пример 1. Применяя формулы и правила дифференцирования, найти производные следующих функций:

а) $y = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 3$;

б) $y = \sqrt[3]{x}\cdot e^{5x} = x^{\frac{1}{3}}\cdot e^{5x}$;

в) $y = \dfrac{\sin^3 7x}{\ln(4x+5)}$;

г) $f(x) = \arcsin 5x \cdot \mathrm{tg}\dfrac{4}{x} - \dfrac{6^{\sqrt{x}} + x^6}{\ln\cos 3x}$.

Решение.

а) Применяя правила дифференцирования суммы (3), а так же формулы дифференцирования степенной функции (1), независимой переменной *x*, постоянного числа получаем *c*, получаем:

$$y' = 2\cdot\left(x^3\right)' - 5\cdot\left(x^2\right)' + 7\cdot(x)' - (3)' =$$
$$= 2\cdot 3x^2 - 5\cdot 2x + 7\cdot 1 - 0 = 6x^2 - 10x + 7.$$

б) Используя правило дифференцирования произведения (4), а затем формулы дифференцирования степенной функции (1) и экспоненты (2^0), имеем:

$$y' = \left(x^{1/3}\right)' \cdot e^{5x} + x^{1/3} \cdot \left(e^{5x}\right)' = \frac{1}{3} \cdot x^{-2/3} \cdot e^{5x} + x^{1/3} \cdot e^{5x} \cdot (5x)' =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot x^{-2/3} \cdot e^{5x} + x^{1/3} \cdot e^{5x} \cdot 5 = \frac{1}{3} x^{-2/3} \cdot e^{5x} \cdot (1+15x) =$$

$$= \frac{e^{5x} \cdot (1+15x)}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}.$$

в) Применяя правило дифференцирования частного (5), формулы дифференцирования степенной (1), логарифмической (3) функций и синуса (4), получим:

$$y = \frac{\sin^3 7x}{\ln(4x+5)}$$

$$y' = \frac{\left(\sin^3 7x\right)' \cdot \ln(4x+5) - \sin^3 7x \cdot (\ln(4x+5))'}{(\ln(4x+5))^2} =$$

$$= \frac{3\sin^2 7x \cdot (\sin 7x)' \cdot \ln(4x+5) - \sin^3 7x \cdot \frac{1}{4x+5}(4x+5)'}{\ln^2(4x+5)} =$$

$$= \frac{3\sin^2 7x \cdot \cos 7x \cdot (7x)' \cdot \ln(4x+5) - \sin^3 7x \cdot \frac{1}{4x+5} \cdot 4}{\ln^2(4x+5)} =$$

$$= \frac{21\sin^2 7x \cdot \cos 7x \cdot \ln(4x+5) - \sin^3 7x \cdot \frac{4}{4x+5}}{\ln^2(4x+5)} =$$

$$= \frac{\dfrac{\sin^2 7x \cdot (21 \cdot (4x+5) \cdot \cos 7x \cdot \ln(4x+5) - 4\sin 7x)}{4x+5}}{\ln^2(4x+5)} =$$

$$=\frac{\sin^2 7x\cdot\left(21\cdot(4x+5)\cdot\cos 7x\cdot\ln(4x+5)-4\sin 7x\right)}{(4x+5)\ln^2(4x+5)}.$$

г) $$f'(x)=(\arcsin 5x)'\cdot\operatorname{tg}\frac{4}{x}+\arcsin 5x\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{4}{x}\right)'-$$

$$-\frac{\left(6^{\sqrt{x}}+x^6\right)'\cdot\ln\cos 3x-\left(6^{\sqrt{x}}+x^6\right)\cdot(\ln\cos 3x)'}{(\ln\cos 3x)^2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}\cdot(5x)'\cdot\operatorname{tg}\frac{4}{x}+\arcsin 5x\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{4}{x}}\cdot\left(\frac{4}{x}\right)'-$$

$$-\frac{\left(6^{\sqrt{x}}\cdot\ln 6\cdot\left(\sqrt{x}\right)'+6x^5\right)\cdot\ln\cos 3x-\left(6^{\sqrt{x}}+x^6\right)\cdot\frac{1}{\cos 3x}(\cos 3x)'}{\ln^2\cos 3x}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}\cdot 5\cdot\operatorname{tg}\frac{4}{x}+\arcsin 5x\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{4}{x}}\cdot\left(-\frac{4}{x^2}\right)-$$

$$-\frac{\left(6^{\sqrt{x}}\cdot\ln 6\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+6x^5\right)\cdot\ln\cos 3x-\left(6^{\sqrt{x}}+x^6\right)\cdot\frac{1}{\cos 3x}\cdot(-\sin 3x)\cdot(3x)'}{\ln^2\cos 3x}=$$

$$=\frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}\cdot\operatorname{tg}\frac{4}{x}-\frac{4}{x^2}\cdot\frac{\arcsin 5x}{\cos^2\frac{4}{x}}-$$

$$-\frac{\left(\frac{6^{\sqrt{x}}\cdot\ln 6}{2\sqrt{x}}+6x^5\right)\cdot\ln\cos 3x+\left(6^{\sqrt{x}}+x^6\right)\cdot\operatorname{tg}3x\cdot 3}{\ln^2\cos 3x}=$$

$$=\frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}\cdot\operatorname{tg}\frac{4}{x}-\frac{4}{x^2}\cdot\frac{\arcsin 5x}{\cos^2\frac{4}{x}}-$$

$$-\frac{\left(\frac{6^{\sqrt{x}}\cdot\ln 6+12x^5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right)\cdot\ln\cos 3x+3\left(6^{\sqrt{x}}+x^6\right)\cdot\operatorname{tg}3x}{\ln^2\cos 3x}=$$

$$=\frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}\cdot\operatorname{tg}\frac{4}{x}-\frac{4}{x^2}\cdot\frac{\arcsin 5x}{\cos^2\frac{4}{x}}-$$

$$-\frac{\left(6^{\sqrt{x}}\cdot\ln 6+12x^5\sqrt{x}\right)\cdot\ln\cos 3x+6\sqrt{x}\left(6^{\sqrt{x}}+x^6\right)\cdot\operatorname{tg}3x}{2\sqrt{x}\cdot\ln^2\cos 3x}.$$

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНО-ЗАДАННЫХ ФУНКЦИЙ

Если функция $y=y(x)$ задана уравнением, не разрешённым относительно y, то для нахождения производной y' надо продифференцировать по *x* обе части этого уравнения, учитывая, что *y* есть функция от *x*, и затем разрешить полученное уравнение относительно y'.

Пример 2. Найти $y'(x)$, если $\cos(xy)-\frac{x}{y}=\ln 3$.

Решение. Дифференцируя по *x* обе части данного равенства и считая при этом *y* функцией от *x,* находим:

$$-\sin(xy)\cdot(xy)'-\frac{x'\cdot y-x\cdot y'}{y^2}=0;$$

$$-\sin(xy)\cdot(x'\cdot y+x\cdot y')-\frac{1\cdot y-x\cdot y'}{y^2}=0;$$

$$-\sin(xy)\cdot(1\cdot y+x\cdot y')-\frac{y-x\cdot y'}{y^2}=0;$$

$$-\sin(xy)\cdot(y+x\cdot y')-\frac{y-x\cdot y'}{y^2}=0.$$

Раскроем скобки в последнем равенстве:

$$-y\sin(xy)-x\cdot\sin(xy)\cdot y'-\frac{1}{y}+\frac{x}{y^2}\cdot y'=0.$$

Разрешим полученное равенство относительно y':

$$y'\cdot\left(-x\cdot\sin(xy)+\frac{x}{y^2}\right)=y\cdot\sin(xy)+\frac{1}{y};$$

$$y'\cdot\frac{x-xy\sin(xy)}{y^2}=\frac{1+y^2\sin(xy)}{y};$$

$$y'=\frac{\dfrac{1+y^2\sin(xy)}{y}}{\dfrac{x-xy\sin(xy)}{y^2}}=\frac{1+y^2\sin(xy)}{y}\cdot\frac{y^2}{x-xy\sin(xy)};$$

$$y'=\frac{y+y^3\sin(xy)}{x-xy\sin(xy)}.$$

Пример 3. Найти значение $\dfrac{dy}{dx}$ в точке $M(1;-1)$ для функции, заданной неявно уравнением $x^3-2x^2y^2+5x+y-3=0$.

Решение. Дифференцируя по x обе части данного уравнения и считая при этом y функцией от x, получаем:

$$3x^2-4xy^2-2x^2\cdot 2yy'+5+y'=0;$$

$$y'\cdot(1-4x^2y)=4xy^2-3x^2-5;$$

$$y'=\frac{4xy^2-3x^2-5}{1-4x^2y}.$$

Учитывая координаты точки M: $x=1$, $y=-1$, находим

$$y'(M) = y'(1;-1) = \frac{4\cdot 1\cdot(-1)^2 - 3\cdot 1^2 - 5}{1 - 4\cdot 1^2\cdot(-1)} = \frac{4-3-5}{1+4} = -\frac{4}{5}.$$

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

Если зависимость функции y от независимой переменной x задана с помощью вспомогательной переменной (***параметра***) t:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

то

$$\boxed{y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}} \tag{1}$$

Пример 4. Найти y'_x, если функция задана в виде

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$$

Решение. Дифференцируем x и y по параметру t:

$$\begin{cases} x'_t = a\cdot 3\cos^2 t\cdot(-\sin t), \\ y'_t = a\cdot 3\sin^2 t\cdot\cos t. \end{cases}$$

Следовательно,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a\cdot 3\sin^2 t\cdot\cos t}{a\cdot 3\cos^2 t\cdot(-\sin t)} = -\operatorname{tg} t.$$

ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Производные порядка выше первого называют ***производными высших порядков***.

Производная второго порядка (вторая производная) от функции $y = f(x)$ есть производная от её первой производной:

$$y'' = \left[f'(x)\right]'. \tag{2}$$

Производная третьего порядка (третья производная) от функции $y = f(x)$ есть производная от её второй производной:

$$y''' = \left[f''(x)\right]'$$

и т. д.

Производная n-го порядка (n-я производная) от функции $y = f(x)$ есть производная от её ($n - 1$)-й производной:

$$y^{(n)} = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'. \tag{3}$$

Пример 5. Найти значение второй производной от функции

$$y = x \cdot \ln(2x+1) \text{ в точке } x = 2.$$

Решение. Дифференцируя данную функцию, получим:

$$y' = (x)' \cdot \ln(2x+1) + x \cdot (\ln(2x+1))' = 1 \cdot \ln(2x+1) +$$

$$+ x \cdot \frac{1}{2x+1} \cdot (2x+1)' = \ln(2x+1) + x \cdot \frac{1}{2x+1} \cdot 2 =$$

$$= \ln(2x+1) + \frac{2x}{2x+1}.$$

Дифференцируя производную y', тем самым найдём y'':

$$y'' = (y')' = \left(\ln(2x+1) + \frac{2x}{2x+1}\right)' = (\ln(2x+1))' + \left(\frac{2x}{2x+1}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2x+1} \cdot (2x+1)' + \frac{(2x)' \cdot (2x+1) - 2x \cdot (2x+1)'}{(2x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2x+1} \cdot 2 + \frac{2 \cdot (2x+1) - 2x \cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{2}{2x+1} + \frac{4x+2-4x}{(2x+1)^2} =$$

$$= \frac{2}{2x+1} + \frac{2}{(2x+1)^2} = \frac{2(2x+1)+2}{(2x+1)^2} = \frac{4x+2+2}{(2x+1)^2} = \frac{4x+4}{(2x+1)^2}.$$

При $x = 2$ получим $y''(2) = \dfrac{4 \cdot 2 + 4}{(2 \cdot 2 + 1)^2} = \dfrac{12}{25}$.

Пример 6. Найти вторую производную функции

$$\begin{cases} x = a(t - \cos t); \\ y = a(1 - \sin t). \end{cases}$$

Решение. Производную второго порядка для функции, заданной параметрически, можно вычислить по формуле:

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - x''_{tt} \cdot y'_t}{(x'_t)^3}.$$

Вычислим все производные по отдельности, а потом подставим в формулу.

$$x'_t = \left(a(t - \cos t)\right)'_t = a(1 + \sin t);$$

$$x''_{tt} = \left(a(1 + \sin t)\right)'_t = a \cos t;$$

$$y'_t = \left(a(1 - \sin t)\right)'_t = a \cdot (-\cos t) = -a \cos t;$$

$$y''_{tt} = (-a \cos t)'_t = a \sin t.$$

Теперь все производные подставим в формулу:

$$y''_{xx} = \frac{a \sin t \cdot a(1 + \sin t) - a \cos t \cdot (-a \cos t)}{\left(a(1 + \sin t)\right)^3} = \frac{a^2 \left(\sin t + \sin^2 t + \cos^2 t\right)}{a^3 (1 + \sin t)^3} =$$

$$= \frac{1+\sin t}{a(1+\sin t)^3} = \frac{1}{a(1+\sin t)^2}.$$

ПРОИЗВОДНАЯ СТЕПЕННО-ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Выведем формулу для производной степенно-показательной функции $y = u^v$, считая что $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемые функции и $u > 0$.

Решение. Логарифмируя равенство $y = u^v$ и дифференцируя обе части полученного равенства $\ln y = v \ln u$, находим: $\frac{y'}{y} = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u}$. Следовательно,

$$y' = y \cdot \left(v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right) = u^v \left(v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right) = u^v v' \cdot \ln u + v \cdot u^{v-1} u'.$$

Таким образом, получили $\boxed{(u^v)' = v \cdot u^{v-1} u' + u^v \ln u \cdot v'}$.

Замечание. Степенно-показательная функция дифференцируется как степенная плюс как показательная.

Например, производная функции $y = (7x)^{\cos x}$, где $x > 0$, равна

$$y' = \cos x \cdot (7x)^{\cos x - 1} \cdot (7x)' + (7x)^{\cos x} \cdot \ln(7x) \cdot (\cos x)' =$$
$$= 7 \cos x \cdot (7x)^{\cos x - 1} - (7x)^{\cos x} \cdot \ln(7x) \cdot \sin x.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЯХ

Задачи 1–80. Найти производные $y'(x)$ функций:

1. $y = -x^2 + 4x - 3$;

2. $y = 3\operatorname{ctg} 2x$;

3. $y = (x+1) \cdot e^x$;

4. $y = 5^{8/x^4}$;

5. $y=\left(\frac{1}{5}x^5+\sqrt[9]{x^4}+32\right)^{12}$; **6.** $y=\frac{\arcsin 4x}{\sqrt{1-16x^2}}$;

7. $y=\ln \operatorname{tg}\sqrt{x^3+5}$; **8.** $y=4^x\operatorname{tg}x$;

9. $y=\ln(5x^3-x)$; **10.** $y=x\cdot\operatorname{tg}(3x)+2^{x-2}$;

11. $y=\left(3x^4-4x^{-\frac{1}{4}}-3\right)^5$; **12.** $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}$;

13. $y=(e^{\cos x}+3)^2$; **14.** $y=e^{\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt[3]{x}}}$;

15. $y=\frac{3\sqrt{x}-4x}{\sin x}$; **16.** $y=\frac{\arcsin 3x}{1-8x^2}$;

17. $y=\sqrt{x^2-5x+1}$; **18.** $y=2^{3x}\cdot\operatorname{tg}2x$;

19. $y=\cos(\ln 5x)$; **20.** $y=x\cos x+\operatorname{tg}3x$;

21. $y=\frac{x^3+2x}{x+5}$; **22.** $y=\frac{\cos 6x}{4x^3+6\sqrt{x}}$;

23. $y=x^4\log_5(6-3x)$; **24.** $y=\sqrt[3]{x}\sin 3x+3^{x^3}$;

25. $y=\frac{5^{2x}+1}{5^x}$; **26.** $y=\ln\sqrt{\frac{2-x^2}{x^3-6x}}$;

27. $y=e^{\sin(4x-5)}-\sqrt[3]{x^7}+1$; **28.** $y=7x^2+\frac{3}{x}-\sqrt[5]{x^4}+\frac{8}{x^3}$;

29. $y=\frac{\sqrt[3]{2x^2-3x+1}}{e^{-x}}$; **30.** $y=\ln\sqrt[4]{\left(\frac{1+3x}{x^5-1}\right)^3}$;

31. $y=(x+5)^2\cdot\arccos^3 5x$; **32.** $y=\left(x^6-\sqrt[4]{x}+2\right)^6$;

33. $y=\frac{\sin x+ctgx}{\sqrt{2x^2+1}}$; **34.** $y=\frac{x^8}{10}+\sqrt{7x^2+1}-7\sin x$;

35. $y=5^{\cos 2x}\cdot\arccos 2x$; **36.** $y=2^{8x}\operatorname{tg}x$;

37. $y=\operatorname{tg}(7x^2+7-x)$; **38.** $y=\cos\ln 5x$;

39. $y=\left(3x^3-2\cdot\sqrt[3]{x^2}-1\right)^2$;

40. $y=2^{3x}\cdot\operatorname{tg}2x$;

41. $y=\dfrac{\arcsin 3x}{1-8x^2}$;

42. $y=\dfrac{x^3}{4-x}$;

43. $y=4x^2-3x+7$;

44. $y=x^3\left(x-\sqrt{x}\right)$;

45. $y=\sqrt[9]{\operatorname{ctg}x^6}-\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}9x}}$;

46. $y=\dfrac{\arcsin\left(2x^3+4x\right)}{x^9+e^{\sqrt{\operatorname{arctg}x}}}$;

47. $y=\sin x^5\cos x^7$;

48. $y=\operatorname{tg}^4 3x\cdot\arcsin 2x^3$;

49. $y=\dfrac{\log_5(3x-7)}{\operatorname{ctg}7x^3}$;

50. $y=\dfrac{e^{\arccos^3 x}}{\sqrt{x+5}}$;

51. $y=\sqrt[3]{3x^4+2x-5}+\dfrac{4}{(x-2)^5}$;

52. $y=\sqrt{x^3}+\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{x^5}-5x^3$;

53. $y=\dfrac{e^{3x}}{\sqrt{3x^2-4x-7}}$;

54. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{3-x}{x-2}}$;

55. $y=-\dfrac{5}{6x^6}+\dfrac{11}{x}+\dfrac{3\cdot\sqrt[5]{x}}{2}$;

56. $y=\arccos\ x^2\cdot\operatorname{ctg}\ 7x^3$;

57. $y=-7^{2\cos^2 5x}$;

58. $y=\dfrac{\sqrt[4]{x^3}+5\cdot\sqrt[6]{x}-4}{\sqrt[7]{x^5}}$;

59. $y=\dfrac{3\ln^2 x}{4\sin\frac{1}{x}}$;

60. $y=\dfrac{(x-3)^4\cdot\sqrt{x+7}}{(x+2)^5}$;

61. $y=\dfrac{\sqrt[3]{2^x}}{\sin^2 3x}$;

62. $y=\operatorname{arctg}^2\left(\sqrt{x^2+x}\right)$;

63. $y=\cos^6 4x\cdot\sqrt[4]{5x^2+1}$;

65. $y=\ln\dfrac{\sin 2x}{\operatorname{ctg}3x}$;

66. $y=\ln\left(\sqrt{\arccos\left(\dfrac{1}{x}\right)}\right)$;

67. $y=e^x(\sin 3x-3\cos 3x)$;

68. $y=\operatorname{arcctg}\sqrt{3x^2-1}$;

69. $y=\left(\dfrac{4}{x^3}-\dfrac{x^3\cdot\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}-4x^2\cdot\sqrt[4]{x^3}\right)^3$

70. $y=16^{\frac{1}{x-2}}+\dfrac{1}{5}x^2\cdot\operatorname{ctg}2x$;

71. $y=\dfrac{e^{\arccos^2 x}}{\sqrt{x+5}}$;

72. $y=\dfrac{x^3\cos 5x}{\sin^2 x}$;

73. $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$;

74. $y=\dfrac{3}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}}-2\sqrt{6x+5}$;

75. $y=(x+5)^2\cdot\arccos^3 5x$;

76. $y=\cos 2x\sin^2 x$;

77. $y=\ln\operatorname{arctg}x$;

78. $y=\sqrt[3]{\arcsin 5x}$

79. $y=\operatorname{arctg}x\cdot\sin^2 x$;

80. $y=\ln(5x+\operatorname{ctg}x)$.

Задача 81. Показать, что функция y удовлетворяет уравнению F.

$$y=x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad F:\ xy'=(1-x^2)y.$$

Задачи 82–94. Найти производные данных функций, используя приём логарифмического дифференцирования.

82. $y=\dfrac{(x-3)^4\cdot\sqrt{x+7}}{(x+2)^5}$;

83. $y=(8x+7)^{\sin 3x}$;

84. $y=(11x^4+2)^6\cdot\sqrt{\dfrac{5x^3+7x+1}{(9+2x)^3}}$;

85. $y=(4x)^{\sin 8x}$;

86. $y=[\ln(x+1)]^{x^3}$;

87. $y=(arctgx)^{\ln x}$;

88. $y=(\cos x)^{8x^2+7}$;

89. $y=x^{1/\ln\ln x}$;

90. $y=(\cos(x+2))^{\ln x}$;

91. $y=\dfrac{(x-3)^4\cdot\sqrt{x+7}}{(x+2)^5}$;

92. $y=(\sin x)^{\sin x}$;

93. $y=\left(\sqrt{1-x}\right)^{\ln x}$;

94. $y=\left(\operatorname{arctg} 7x\right)^{\ln(x+1)}$.

Задачи 95–98. Найдите значения производных $f'(x_0)$ или $f''(x_0)$ в заданной точке x_0 функции $f(x)$.

95. $f(x)=2x^3-\dfrac{5}{\sqrt{x}}+7$; найти $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $x_0=4$

96. $f(x)=\dfrac{3+2\sin 2x}{1-2\cos x}$; найти $f'(x_0)$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$

97. $f(x)=\left(2^x+3\right)tg\,\dfrac{x}{5}$; найти $f'(x_0)$, $x_0=\pi$

98. $f(x)=\ln\left(3x^2-1\right)$; найти $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $x_0=1$

Задачи 99–106. Найти производную функции, заданной неявно.

99. $e^{xy}-(x+3y)=0$;

100. $(x+y)^2=\sin(xy)$;

101. $e^{8x+4y}-\dfrac{4x}{8y}=32$;

102. $y^2\cos x=4\sin 3y$;

103. $\dfrac{5}{\sqrt[3]{y}}-y^2x=1$;

104. $x^5y+y^3=\sin(3x-2y)$;

105. $xy=\sin\dfrac{x+y}{x-y}$;

106. $y=x+\operatorname{arctg} y$.

Задачи 107–115. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ функций, заданных параметрически.

107. $\begin{cases} x=\ln\sin\dfrac{t}{2}, \\ y=2^{\sqrt{3t+2\,\mathrm{tg}\,5t}} \end{cases};$

108. $\begin{cases} x=\ln t, \\ y=\dfrac{1}{t}. \end{cases}$

109. $\begin{cases} x=-\cos 2t, \\ y=-\sin^2 3t. \end{cases}$

110. $\begin{cases} x=\cos\dfrac{t}{2}; \\ y=t-\sin t. \end{cases}$

111. $\begin{cases} x=\mathrm{tg}\,t; \\ y=\dfrac{1}{\sin^2 t} \end{cases}$

112. $\begin{cases} x=\cos 2t, \\ y=2\sin^2 t; \end{cases}$

113. $\begin{cases} y(t)=3t-\ln\sin(3t+2), \\ x(t)=3t+\ln\cos(3t+2) \end{cases}$

114. $\begin{cases} x=(2t+3)\cos t; \\ y=3t^3. \end{cases}$

115. $\begin{cases} x=\ln 8t+4t+8; \\ y=4t^2+2t+32. \end{cases}$

Задачи 116–117. Найти вторые производные заданных функций.

116. $y=\ln\dfrac{1+x}{2+x}$

117. $y=\dfrac{5}{x^3-3}+2\ln\sqrt{3x}$

Задача 118. Найдите значения производных y', y'' в заданной точке $x_0=-1$ функции $y=x^5-x^4+2x^3-x^2-34$.

ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Основным аппаратом для раскрытия неопределённостей $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ является теорема, известная под названием ***правила Лопиталя.***

Теорема. Если выполнены условия:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$ или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$;

2) функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки $x=x_0$ (за исключением, быть может, её самой), причём $\varphi'(x_0)\neq 0$;

3) существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, тогда

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}}.$$

Это правило применимо и в том случае, когда $x\to\infty$. Кроме того, при решении примера его можно применять неоднократно, если указанные выше неопределённости сохраняются.

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{\sin 3x}$.

Решение. Если в заданное отношение подставить $x=0$, то получим неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Воспользуемся правилом Лопиталя, т.е. заменим отношение функций отношением их производных:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{\sin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(1+5x))'}{(\sin 3x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{5}{1+5x}}{3\cos 3x}=\frac{5}{3}.$$

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$.

Решение. В данном случае правило Лопиталя применяется дважды:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x+e^{-x}-2)'}{(1-\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})}{(\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{2}{1}=2.$$

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot\ln x)$.

Решение. Здесь имеет место неопределённость вида $(0\cdot\infty)$, которую раскроем, предварительно сводя её к неопределённости $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, а далее воспользуемся правилом Лопиталя.

$$\lim_{x\to 0}(x\cdot\ln x)=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{-\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x}=-\lim_{x\to 0}x=0.$$

Пример 10. Применяя правило Лопиталя, найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x^3}$; **в)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}$.

Решение. Убедившись, что имеет место случай $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, применяем правило Лопиталя.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^x-1\right)'}{(\sin x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{\cos x}=\dfrac{1}{1}=1.$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x^3}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x - x)'}{\left(x^3\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1}{3x^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x - 1)'}{\left(3x^2\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(-\sin x)'}{(6x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{6}=\frac{-1}{6}=-\frac{1}{6}.$$

Здесь мы трижды применили правило Лопиталя.

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

При раскрытии неопределенностей $(0\cdot\infty)$, $(\infty-\infty)$ для применения правила Лопиталя, данное выражение надо преобразовать к неопределенностям $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ путем алгебраических преобразований.

<u>Пример 11.</u> Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x$; **б)** $\lim\limits_{x\to0}\left(\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{x}\right)$.

Решение.

а) Имеем неопределенность $(0\cdot\infty)$. Приведем эту неопределенность к неопределенности $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, а затем применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x=(\infty\cdot0)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}=\left(\frac{-\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x)'}{\left(e^{-x}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=-\lim_{x\to-\infty}e^x=0.$$

б) Имеем неопределенность $(\infty-\infty)$. Преобразуем к неопределенности $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, после чего применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to0}\left(\operatorname{ctg}x-\frac{1}{x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{(x\cos x-\sin x)'}{(x\sin x)'}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1\cdot\cos x+x\cdot(-\sin x)-\cos x}{1\cdot\sin x+x\cdot\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{-x\sin x}{\sin x+x\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(-x\sin x)'}{(\sin x+x\cos x)'}=\lim_{x\to0}\frac{-1\cdot\sin x-x\cdot\cos x}{\cos x+1\cdot\cos x+x\cdot(-\sin x)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x-x\cos x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0.$$

При раскрытии неопределенностей $\left(0^0\right)$, $\left(\infty^0\right)$, $\left(1^\infty\right)$ рекомендуется найти предварительно предел логарифма искомой функции.

Пример 12. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+2^x\right)^{1/x}$.

Решение. Имеем неопределенность $\left(\infty^0\right)$. Введем обозначение $y=\left(x+2^x\right)^{1/x}$, тогда $\ln y=\frac{1}{x}\cdot\ln\left(x+2^x\right)$ и

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x+2^x\right)}{x}.$$

Получили неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x+2^x\right)}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\left(x+2^x\right)\right)'}{\left(x\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+2^x}\cdot\left(1+2^x\ln 2\right)}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+2^x\ln 2}{x+2^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+2^x\ln 2\right)'}{\left(x+2^x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\cdot\ln^2 2}{1+2^x\ln 2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2^x\cdot\ln^2 2\right)'}{\left(1+2^x\ln 2\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\cdot\ln^3 2}{2^x\cdot\ln^2 2}=\ln 2.$$

Так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln y=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x+2^x\right)}{x}=\ln 2$, то справедливо записать $\ln\lim\limits_{x\to+\infty}y=\ln 2$; $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to+\infty}y=2$.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+2^x\right)^{1/x}=2$.

Задачи для решения на практических занятиях

Задачи 119–125. Вычислить предел с помощью правила Лопиталя.

119. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$

120. $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{\ln(x-7)}{\ln\left(e^x-e^7\right)}$

121. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 4x}{5-5e^{-3x}}$;

122. $\lim\limits_{x\to0}(1-\sin 2x)^{\operatorname{ctg} x}$;

123. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\cos 2x-1}$

124. $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{x^2-x-30}{2x^2-11x-6}$

125. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$

ТЕСТЫ

Производная показательной и логарифмической функций

Вариант 1

А1. Найдите производную функции $y = e^x - x^7$.

1) $y' = e^x - 7x^6$ **2)** $y' = e^x - \frac{x^8}{8}$

3) $y' = e^x - x^6$ **4)** $y' = x \cdot e^{x-1} - 7x^6$

А2. Найдите производную функции $y = e^x - \sin x$.

1) $y' = e^x + \cos x$ **2)** $y' = e^x - \cos x$

3) $y' = \frac{1}{2}e^{2x} - \cos x$ **4)** $y' = e^{2x} - \cos x$

А3. Вычислите значение производной функции $y = 3e^x - \cos 2x$ в точке $x_0 = 0$.

1) 3 **2)** – 1

3) 1 **4)** 2

А4. Найдите производную функции $y = \frac{x^5}{8} - \frac{x^3}{4} + x^2 - \ln\frac{x}{2}$ в точке $x_0 = 2$.

1) 11,2 **2)** 10,5

3) 11 **4)** 9,5

А5. Вычислите значение производной функции $y = \frac{x^3}{2} - \ln 2x$ в точке $x_0 = 2$.

1) 3 **2)** 4

3) 2 **4)** 1

А6. Найдите производную функции $y = \ln(2x+11) + 5x$ в точке $x_0 = -5$.

1) 7 **2)** – 25

3) 6 **4)** 1

А7. Вычислите значение производной функции $y = \frac{1}{2}\mathrm{tg}(4x - \pi) - 3e^2 + \pi$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

1) 2 **2)** 4

3) – 2 **4)** 0,5

А8. Вычислите значение производной функции $y = \frac{\sin x}{\ln x}$ в точке $x_0 = e$.

1) $\sin e$ **2)** $\cos e$

3) $\frac{e\cos e - \sin e}{e}$ **4)** $\frac{\sin e - e\cos x}{e}$

А9. Найдите производную функции $y = x^3 \ln x + \ln 4$.

1) $3x^2 \ln x + x^2 + \frac{1}{4}$ **2)** $3x^2 \ln x + x^2$

3) $3x$ **4)** $3x^2 \ln x + x^3$

А10. Вычислите значение производной функции $y = 5^x - x^5$ в точке $x_0 = 1$.

1) 0 **2)** 4

3) $\ln 5 - 1$ **4)** $5(\ln 5 - 1)$

Вариант 2

А1. Вычислите значение производной функции $y = e^x \sin x + x^2$ в точке $x_0 = 0$.

1) 0 **2)** 1
3) 2 **4)** 3

А2. Вычислить значение производной функции $y = \frac{x^4}{8} - \ln \frac{x}{4}$ в точке $x_0 = 2$.

1) 4,5 **2)** 5,5
3) 4 **4)** 3,5

А3. Вычислите значение производной функции $y = \frac{5}{x} + 4e^x$ в точке $x_0 = 1$.

1) 9 **2)** $-5+4e$
3) 5 **4)** $5+4e$

А4. Найдите производную функции $y = \ln(3x-1) - 2x$ в точке $x_0 = \frac{2}{3}$.

1) 1 **2)** – 1
3) 3 **4)** 5

А5. Вычислите значение производной функции $y = 4\sin\left(2x + \frac{3\pi}{2} - 2e^2 + \pi^3\right)$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

1) 1 **2)** 2
3) 0 **4)** 4

А6. Найдите производную функции $y = e^{-x} - 2x^7$.

1) $y' = -e^{-x} - 14x^6$

2) $y' = -e^{-x} - \dfrac{x^8}{4}$

3) $y' = -e^{-x} - 2x^6$

4) $y' = e^{-x} - 14x^6$

A7. Найдите производную функции $y = 4x^3 + e^{-x}$.

1) $y' = 12x^2 + e^{-x}$

2) $y' = 12x^2 - e^{-x}$

3) $y' = x^4 - e^{-x}$

4) $y' = 12x^2 - xe^{-x-1}$

A8. Найдите производную функции $y = x^4 \ln x - \ln 3$.

1) $x^3 + 4x^3 \ln x - \dfrac{1}{3}$

2) $4x^3 \ln x - x^3$

3) $4x^3 \ln x + x^3$

4) $x^4 \ln x + \dfrac{1}{x}$

A9. Найдите производную функции $y = \dfrac{1}{x} - xe^x$.

1) $-e^x - xe^x + \dfrac{1}{x^2}$

2) $xe^x - e^x - \dfrac{1}{x^2}$

3) $-xe^x - \dfrac{1}{x^2}$

4) $-xe^x - e^x - \dfrac{1}{x^2}$

A10. Вычислите значение производной функции $y = 3^x + x^3 - 1$ в точке $x_0 = 0$.

1) $\ln 3$

2) 0

3) $\ln 3 + 1$

4) $3(\ln 3 - 1)$

Ответы:

Вариант	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**	**A7**	**A8**	**A9**	**A10**
1	1	2	1	2	2	1	1	3	2	4
2	2	4	2	1	3	1	2	3	4	1

ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ПЕРВОГО И ВЫСШЕГО ПОРЯДКОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Дифференциалом первого порядка функции $y = f(x)$ называется главная часть ее приращения, линейно зависящая от приращения $\Delta x = dx$ независимой переменной x. Дифференциал dy функции равен произведению ее производной и дифференциала независимой переменной:

$$dy = y'\,dx = f'(x)dx,$$

поэтому справедливо равенство

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

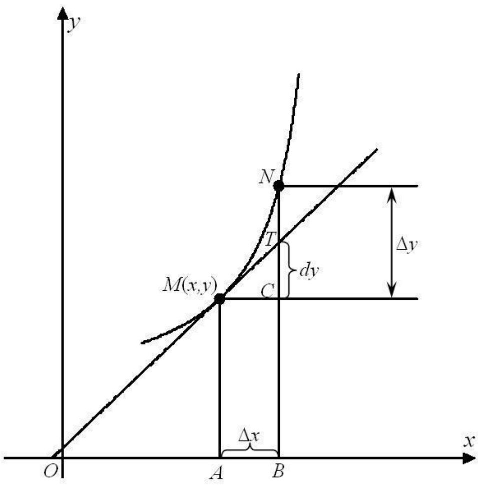


Рис. 1

На рис. 1 видно, что если MN – дуга графика функции $y = f(x)$, MT – касательная, проведенная к нему в точке

$M(x, y)$, и $AB = \Delta x = dx$, то $CT = dy$, а отрезок $CN = \Delta y$. Дифференциал функции dy отличается от ее приращения Δy на бесконечно малую высшего порядка по сравнению с Δx. Непосредственно из определения дифференциала и правил нахождения производных имеем $(u = u(x), v = v(x))$:

1) $dC = 0 \; (C = \text{const})$;
2) $dx = \Delta x$, если x – независимая переменная;
3) $d(u \pm v) = du \pm dv$;
4) $d(uv) = v\,du \pm u\,dv$;
5) $d(Cu) = C\,du$;
6) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2} \; (v \neq 0)$;
7) $d\,f(u) = f'_u(u)u'\,dx = f'(u)du$.

П р и м е р 1 3 . Найти дифференциал функции $y = \sin^5 3x$.

Р е ш е н и е . Находим производную данной функции:

$$y' = 5 \cdot \sin^4 3x \cdot \cos 3x \cdot 3,$$

тогда дифференциал

$$dy = 15 \sin^4 3x \cdot \cos 3x\, dx.$$

П р и м е р 1 4 . Найти дифференциал заданной функции $y = \dfrac{a}{x} + \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a}$.

Р е ш е н и е . Дифференциал функции определяется по формуле:

$$dy = y'dx.$$

Найдем производную заданной функции, учитывая, что $a = \text{const}$.

$$y' = \left(\frac{a}{x} + \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right)' = a \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) + \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a} \right)^2} \cdot \frac{1}{a} = -\frac{a}{x^2} + \frac{a}{a^2 + x^2}.$$

Тогда искомый дифференциал:

$$dy = \left(\frac{a}{a^2 + x^2} - \frac{a}{x^2} \right) dx.$$

Дифференциалом n*-го порядка функции* $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка этой функции, т.е.

$$d^n y = d\left(d^{n-1} y\right).$$

Если дана функция $y = f(x)$, где x – независимая переменная, то

$$d^2 y = y'' \, dx^2, \; d^3 y = y''' \, dx^3, \; \ldots, \; d^n y = y^{(n)} \, dx^n.$$

Если $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, то

$$d^2 y = y''(du)^2 + y' \, d^2 u,$$

где дифференцирование функции y выполняется по переменной u. Это справедливо также и для дифференциалов более высоких порядков.

Пример 15. Найти дифференциал второго порядка функции $y = \ln\left(1 + x^2\right)$.

Решение. Находим производную данной функции:

$$y' = \frac{2x}{1 + x^2},$$

вторую производную

$$y'' = (y')' = \left(\frac{2x}{1 + x^2} \right)' = \frac{(2x)' \cdot \left(1 + x^2\right) - 2x \cdot \left(1 + x^2\right)'}{\left(1 + x^2\right)^2} =$$

$$=\frac{2\cdot\left(1+x^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2+2x^2-4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

Тогда дифференциал второго порядка

$$d^2y=\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}dx^2.$$

Так как дифференциал функции отличается от ее приращения на бесконечно малую высшего порядка по сравнению с величиной dx, то $\Delta y\approx dy$, или $f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)\approx f'\left(x\right)dx$, откуда

$$f\left(x+\Delta x\right)\approx f\left(x\right)+f'\left(x\right)dx.$$

Полученная формула часто применяется для приближенного вычисления значений функции при малом приращении Δx независимой переменной x.

<u>**Пример 16.**</u> Вычислить приращение стороны куба, если известно, что его объем увеличился от 27 до 27,1 м^3.

Решение. Если x – объем куба, то его сторона $y=\sqrt[3]{x}$. По условию задачи $x=27$, $\Delta x=0{,}1$. Производная функции $y'=\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\frac{1}{3}\cdot x^{-2/3}=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$. Тогда приращение стороны куба

$$\Delta y\approx dy=y'\left(x\right)\Delta x=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{27^2}}\cdot 0{,}1=\frac{0{,}1}{27}\approx 0{,}0037 \text{ м}.$$

<u>**Пример 17.**</u> Найти приближенно $\sin 31^\circ$.

Решение. Полагаем $x=30^\circ=\frac{\pi}{6}$, тогда

$$\Delta x=1^\circ\cdot\frac{\pi}{180^\circ}\approx 0{,}017,$$

$$\sin 31^\circ \approx \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}\cdot 0{,}017 = 0{,}5 + 0{,}017\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}515\,.$$

С помощью дифференциала функции вычисляют абсолютную погрешность функции ε_y, если известна абсолютная погрешность ε_x аргумента. В практических задачах значения аргумента находятся с помощью измерений, и его абсолютная погрешность считается известной.

Пусть требуется вычислить значение функции $y = f(x)$ при некотором значении аргумента x, истинная величина которого нам неизвестна, но дано его приближенное значение x_0 с абсолютной погрешностью ε_x: $x = x_0 + dx$, $|dx| \le \varepsilon_x$. Тогда

$$|f(x) - f(x_0)| \approx |f'(x_0)||dx| < |f'(x_0)|\,\varepsilon_x\,.$$

Отсюда видно, что $\varepsilon_y = |f'(x_0)|\,\varepsilon_x$.

Относительная погрешность функции δ_y выражается формулой

$$\delta_y = \frac{\varepsilon_y}{|f(x_0)|} = \left|\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\right|\varepsilon_x = \left|\left(\ln f(x_0)\right)'\right|\varepsilon_x\,.$$

Пример 18. Найти абсолютную и относительную погрешности функции $\sin 31^\circ$ (см. пример 16).

Решение. Примем за абсолютную погрешность аргумента значение $\varepsilon_ч = \Delta x = 1^\circ\cdot\dfrac{\pi}{180^\circ} \approx 0{,}017$. Тогда

$$\varepsilon_y = \left|\cos\frac{\pi}{6}\right|\cdot 0{,}017 = 0{,}015\,,$$

$$\delta_y = \frac{0{,}015}{0{,}5}\cdot 100\% = 3\%\,.$$

<u>Пример 19.</u> Вычислить с помощью дифференциала $(1{,}02)^4$.

Решение. Воспользуемся приближенной формулой

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x.$$

В данном случае $f(x)=x^4$, $x=1{,}02$, $x_0=1$, $\Delta x=0{,}02$.

Тогда получим

$$f(x_0)=f(1)=1^4=1;$$

$$f'(x)=4x^3;$$

$$f'(x_0)=f'(1)=4\cdot1^3=4.$$

Подставляем в формулу и находим

$$(1{,}02)^4\approx1+4\cdot0{,}02=1+0{,}08=1{,}08.$$

<u>Пример 20.</u> Вычислить с помощью дифференциала $\cos3^\circ$.

Решение. Воспользуемся приближенной формулой

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x.$$

В данном случае $f(x)=\cos x$, $x=3^\circ$, $x_0=0$, $\Delta x=3^\circ=\dfrac{\pi}{60}$.

Тогда получим

$$f(x_0)=f(0)=\cos0=1;$$

$$f'(x)=-\sin x;$$

$$f'(x_0)=f'(0)=-\sin0=0.$$

Подставляем в формулу и находим

$$\cos3^\circ\approx1+0\cdot\frac{\pi}{60}=1.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЯХ

Задачи 126–128. Найти дифференциалы первого порядка следующих функций:

126. $y = x\,\mathrm{tg}^3 x$;

127. $y = \sqrt{\mathrm{arctg}\, x} + (\arcsin x)^2$;

128. $y = \ln\left(x + \sqrt{4 + x^2}\right)$.

Задачи 129–130. Найти дифференциалы первого и второго порядка функции:

129. $y = e^{-x^3}$;

130. $y = \left(1 + x^2\right) \cdot \mathrm{arctg}\, x$.

Задачи 131–132. Найти дифференциалы третьего порядка функций:

131. $y = \sin^2 2x$;

132. $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

Задача 133. Найти приближенное значение функции $y = x^3 - 4x^2 + 5x + 3$ при $x = 1{,}03$ с точностью до двух знаков после запятой.

Задача 134. Найти приближенное значение $\sqrt[4]{17}$ с точностью до двух знаков после запятой.

Задачи 135–136. Найти дифференциалы первого, второго и третьего порядков функции:

135. $y = x^3 \ln x$;

136. $y = e^{-3x} \cos 2x$

Задача 137. Найти приближенное значение функции $y = \sqrt[3]{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$ при $x = 0{,}1$ с точностью до двух знаков после запятой.

Задача 138. Найти приближенное значение функции $y=\sqrt{x^2-7x+10}$ при $x=0{,}98$ с точностью до двух знаков после запятой.

Задача 139. Найти приближенное значение функции $y=\sqrt[3]{x^2-5x+12}$ при $x=1{,}3$ с точностью до двух знаков после запятой.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

Теорема. Если кривая задана уравнением $y=f(x)$, то значение $f'(x_0)$ производной $f'(x)$ в точке x_0 равно угловому коэффициенту k касательной к кривой в точке $M_0(x_0;y_0)$: $f'(x_0)=k=\operatorname{tg}\varphi$, где $y_0=f(x_0)$ (рис. 2).

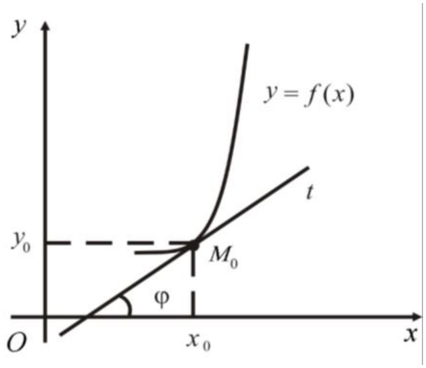


Рис. 2.

Уравнение касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ имеет вид: $y-y_0=k(x-x_0)$, или

$$\boxed{y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)}$$

Определение. *Углом между двумя кривыми* в точке их пересечения называется угол между касательными к кривым в этой точке.

Угол θ между двумя прямыми с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 находится по формуле:

$$\operatorname{tg}\theta=\pm\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|,$$

причем знак “плюс” соответствует острому углу θ, а знак “минус” – тупому.

Если $k_1k_2=-1$, то касательные — *взаимно перпендикулярны*, а кривые называются *ортогональными.*

Нормалью к кривой в данной точке называется прямая, проходящая через данную точку, перпендикулярную к касательной в этой точке.

Уравнение нормали к данной кривой в точке $M(x_0, y_0)$ имеет вид:

$$\boxed{y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)}.$$

П р и м е р 21. Написать уравнение касательной прямой к графику функции $y=\dfrac{3x^2-2x}{x^2-1}$ при $x_0=2$.

Р е ш е н и е. Уравнение касательной к кривой в точке $M(x_0; y_0)$ имеет вид:

$$y-y_0=y'(x_0)\cdot(x-x_0).$$

Определим производную функции $y=\dfrac{3x^2-2x}{x^2-1}$:

$$y'=\frac{\left(3x^2-2x\right)'\cdot\left(x^2-1\right)-\left(3x^2-2x\right)\cdot\left(x^2-1\right)'}{\left(x^2-1\right)^2}=$$

$$=\frac{(6x-2)\cdot\left(x^2-1\right)-\left(3x^2-2x\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=$$

$$=\frac{6x^3-6x-2x^2+2-6x^3+4x^2}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{2x^2-6x+2}{\left(x^2-1\right)^2},$$

значение функции при $x_0=2$:

$$y_0=y(2)=\frac{3\cdot 2^2-2\cdot 2}{2^2-1}=\frac{12-4}{4-1}=\frac{8}{3}$$

и значение производной при $x_0=2$:

$$y'(x_0)=y'(2)=\frac{2\cdot 2^2-6\cdot 2+2}{(2^2-1)^2}=\frac{8-12+2}{(4-1)^2}=\frac{-2}{9}=-\frac{2}{9}.$$

Тогда уравнение касательной имеет вид:

$$y-\frac{8}{3}=-\frac{2}{9}\cdot(x-2);$$

$$y=-\frac{2}{9}x+\frac{4}{9}+\frac{8}{3} \qquad \text{или} \qquad y=-\frac{2}{9}x+\frac{28}{9}.$$

В общем виде уравнение касательной можно записать

$$2x+9y-28=0.$$

Построим схематичный график функции (рис. 3), расположенный в первой четверти, и касательную к графику в точке $x_0=2$.

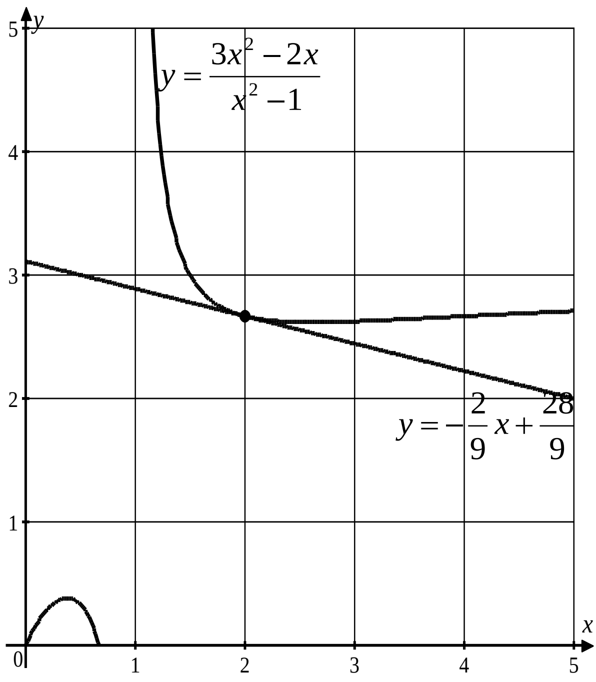


Рис. 3

П р и м е р 2 2. Найти уравнение касательной к графику функции $y = x^2 - 4x + 3$, которая параллельна прямой $y = 2x + 4$. Сделать чертеж.

Р е ш е н и е . График функции $y = x^2 - 4x + 3$ — парабола. Так как $y = 0$ при $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, то вершиной параболы является точка (2; –1). По условию, касательная t к параболе и данная прямая m с уравнением $y = 2x + 4$ параллельны; значит их угловые коэффициенты равны:

$$k_1 = y_1' = \left(x^2 - 4x + 3\right)' = 2x - 4, \qquad k_2 = y_2' = \left(2x + 4\right)' = 2,$$

$$k_1 = k_2 \Rightarrow 2x - 4 = 2 \Rightarrow x = 3.$$

Следовательно, $x_0 = 3$ – абсцисса точки касания M_0 параболы и прямой t, $y_0 = x_0^2 - 4x_0 + 3 = 0$ – ее ордината. Составим уравнение касательной к кривой $y = x^2 - 4x + 3$ в точке $x_0 = 3$.

$$\boxed{y - y_0 = y_0' \cdot (x - x_0)}$$

$$y_0 = 0; \qquad y' = \left(x^2 - 4x + 3\right)' = 2x - 4; \quad y_0' = 2 \cdot 3 - 4 = 2.$$

Таким образом, уравнение касательной (рис. 4) t имеет вид:

$$y - 0 = 2 \cdot (x - 3) \qquad \text{или} \qquad y = 2x - 6.$$

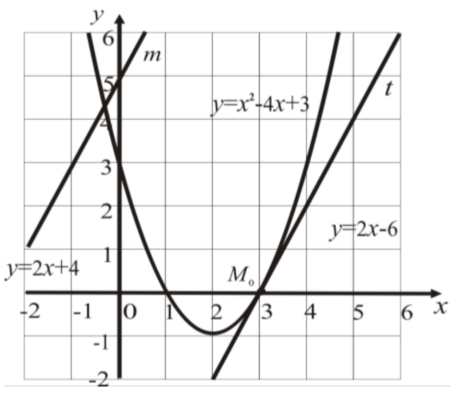


Рис. 4

Пример 23. Найти величину угла между касательными, проведенными в точках пересечения кривой $x^2+y^2-4x+4y+3=0$ с осью Ox. Сделать чертеж.

Решение. Определим точки пересечения заданной кривой с прямой, как решение системы:

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x+4y+3=0, \\ y=0. \end{cases}$$

$$x^2+0^2-4x+4\cdot 0+3=0;$$

$$x^2-4x+3=0;$$

$$D=4^2-4\cdot 1\cdot 3=16-12=4>0;$$

$$x_1=\frac{4+\sqrt{4}}{2}=\frac{4+2}{2}=3; \qquad x_2=\frac{4-\sqrt{4}}{2}=\frac{4-2}{2}=1.$$

Таким образом, кривая $x^2+y^2-4x+4y+3=0$ пересекается с осью Ox в точках $A(1;0)$ и $B(3;0)$.

Найдем производную функции, описывающую заданную кривую $x^2+y^2-4x+4y+3=0$.

Функция задана неявно, поэтому:

$$2x+2y\cdot y'-4+4\cdot y'+0=0;$$

$$2y\cdot y'+4\cdot y'=4-2x;$$

$$y'\cdot(2y+4)=4-2x;$$

$$y'=\frac{4-2x}{2y+4}=\frac{2\cdot(2-x)}{2\cdot(2+y)}=\frac{2-x}{2+y}.$$

Таким образом, $y'=\dfrac{2-x}{2+y}$.

Составим уравнение касательной к кривой $\boxed{y-y_0=y_0'\cdot(x-x_0)}$ в точке $A(1;0)$. Полагая $x=1$, $y=0$, находим $y_0' = \dfrac{2-1}{2+0} = \dfrac{1}{2}$. Тогда угловой коэффициент касательной в точке $A(1;0)$ будет $k_1 = \dfrac{1}{2}$. А уравнение касательной

$$y - 0 = \frac{1}{2}\cdot(x-1) \qquad \text{или} \qquad y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Аналогично запишем уравнение касательной к кривой $\boxed{y - y_0 = y_0' \cdot (x - x_0)}$ в точке $B(3;0)$. Полагая $x = 3$, $y = 0$, находим $y_0' = \dfrac{2-3}{2+0} = -\dfrac{1}{2}$. Тогда угловой коэффициент касательной в точке $B(3;0)$ будет $k_2 = -\dfrac{1}{2}$. А уравнение касательной

$$y - 0 = -\frac{1}{2}\cdot(x-1) \qquad \text{или} \qquad y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Угол между касательными θ определяем как угол между прямыми по формуле $\operatorname{tg}\theta = \pm\left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$, значит

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{-1}{\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3},$$

откуда $\theta = \operatorname{arctg}\left(-\dfrac{4}{3}\right) \approx 126^\circ 55'$.

Прежде чем сделать чертеж, преобразуем заданное уравнение кривой

$$x^2 + y^2 - 4x + 4y + 3 = 0;$$
$$\left(x^2 - 4x + 4\right) - 4 + \left(y^2 + 4y + 4\right) - 4 + 3 = 0;$$
$$(x-2)^2 + (y+2)^2 = 5.$$

Полученное уравнение является каноническим уравнением окружности с центром $O'(2;2)$ и радиусом $R=\sqrt{5}$ (рис. 5).

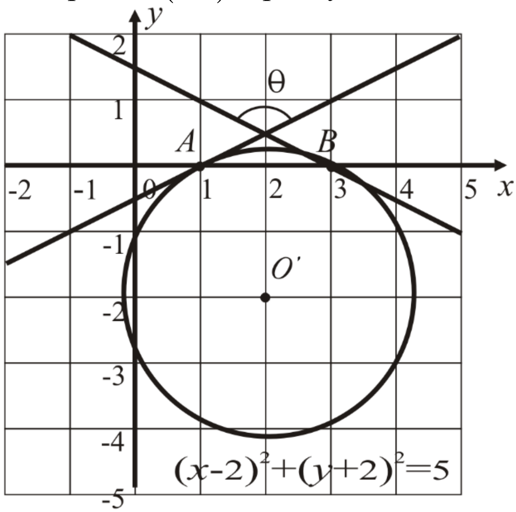


Рис. 5

Задачи для решения на практических занятиях

Задача 140. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=\dfrac{64}{x}+8x-3$ в точке $x_0=-8$.

Задача 141. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y=4x^2$ в точке $x=1$.

Задача 142. Написать уравнение касательной к графику функции $y=x^2-5x+4$ в точке $x_0=-1$.

Задача 143. Написать уравнение касательной и нормали к графику функции $y=\sin^3 3x$ в точке с абсциссой $x_0=\dfrac{\pi}{12}$.

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Физический смысл производной функции $f(x)$ в точке x_0 состоит в том, что она выражает скорость роста функции в этой точке. Действительно, отношение приращения значения функции приращению аргумента можно уподобить отношению пройденного расстояния к промежутку времени, за которое это было сделано, то есть – скорости. Заметим, однако, что при рассмотрении движения некоторого материального тела, путем деления расстояния на время можно найти лишь «среднюю» скорость за этот промежуток времени. В то время как производная дает «мгновенную» скорость, то есть скорость в каждой точке. Например, для линейной функции $f(x)=ax+b$, где a – некоторая постоянная, скорость роста которой очевидна постоянна; с помощью определения производной несложно установить, что $f'(x)=a$.

Применение производной для решения задач по физике

"Все сведения о природных телах и их свойствах должны содержать точные указания на число, вес, объем, размеры… Практика рождается только из тесного соединения физики и математики."

Ф. Бекон

Производная функции используется всюду, где есть неравномерное протекание процесса: это и неравномерное механическое движение, и переменный ток, и химические реакции и радиоактивный распад вещества и т.д., так как **механический смысл производной – это мгновенная скорость**.

Слова "производная" и "произошло" имеют похожие части слова, да и смысл похож: производная происходит от исходной функции (переложив на отношение человека: исходная функция – "мама", ее производная "дочь").

Рассмотрим применение производных при решении различных физических задач.

Физические производные величины:

$v(t) = x'(t)$ *– скорость*

$a(t) = v'(t)$ *– ускорение*

$J(t) = q'(t)$ *– сила тока*

$C(t) = Q'(t)$ *– теплоемкость*

$d(l) = m'(l)$ *– линейная плотность*

$K(t) = l'(t)$ *– коэффициент линейного расширения*

$\omega(t) = \varphi'(t)$ *– угловая скорость*

$a(t) = \omega'(t)$ *– угловое ускорение*

$N(t) = A'(t)$ *– мощность*

Пример 24. Тело массой 4 кг движется прямолинейно по закону $x(t) = t^2 + t + 1$. Какова кинетическая энергия тела в конце третьей секунды движения после начала движения и сила, действующая на тело?

Решение. Скорость $v(t)$ есть функция времени, поэтому $v(t) = x'(t) = \left(t^2 + t + 1\right)' = 2t + 1$. Скорость тела в конце третьей секунды $v(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$ м/с.

В физике скорость изменения скорости называется ускорением. Тогда $a(t) = v'(\mathrm{t}) = (2t + 1)' = 2$ м/с^2.

Операция нахождения производной функции называется ***дифференцированием***. С физической точки зрения дифференцирование – определение скорости изменения переменной величины. Производная, таким образом, играет роль скорости изменения зависимой переменной y по отношению к изменению независимой переменной x. Последняя не обязана иметь физический смысл времени.

Кинетическая энергия: $W_{\text{к}} = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{4 \cdot 7^2}{2} = 98$ Дж.

Сила, действующая на тело: $F = ma = 4 \cdot 2 = 8$ Н.

Пример 25. Зависимость между массой вещества M, получаемого в химической реакции и временем t выражается уравнением: $M(t) = At^2 + Bt$, где A и B – постоянные. Какова скорость реакции?

Решение. Скорость химической реакции определяется: $v(t) = M'(t) = \left(At^2 + Bt\right)' = 2At + B$.

Пример 26. Конденсатор ёмкостью C и зарядом q_0 разряжается через резистор R по закону: $q = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$. Найти скорость изменения заряда конденсатора. Какова скорость в начале разряда $(t = 0)$?

Решение. Скорость изменения заряда конденсатора:

$$q'(t) = \left(q_0 e^{-\frac{t}{RC}}\right)' = q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \cdot \left(-\frac{t}{RC}\right)' = q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \cdot \left(-\frac{1}{RC}\right) =$$

$$= -\frac{q_0}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Скорость при $t = 0$:

$$q'(0) = -\frac{q_0}{RC} \cdot e^{-\frac{0}{RC}} = -\frac{q_0}{RC}.$$

П р и м е р 27. Концентрация некоторого вещества в крови человека вследствие его выведения из организма изменяется по закону: $n(t) = 2e^{-0,05t}$. Как изменяется скорость выведения вещества из организма с течением времени? Какой смысл имеет знак скорости?

Р е ш е н и е. Скорость выведения вещества с течением времени

$$n'(t) = \left(2e^{-0,05t}\right)' = 2 \cdot e^{-0,05t} \cdot (-0,05t)' = 2 \cdot e^{-0,05t} \cdot (-0,05) =$$
$$= -0,1e^{-0,05t},$$

где знак "–" означает убывание концентрации вещества с течением времени.

П р и м е р 28. В двухэлектродной лампе сила анодного тока зависит от анодного напряжения по закону: $I(U) = \beta U^{3/2}$, где β – постоянная, зависящая от формы, размеров, расположения электродов. Получить формулу прироста тока на каждую единицу изменения напряжения.

Р е ш е н и е. Изменение тока на каждую единицу изменения напряжения: $I'(U) = \left(\beta U^{3/2}\right)' = \dfrac{3\beta}{2} \cdot U^{1/2}$.

П р и м е р 29. Каково изменение периода колебаний математического маятника при изменении его длины?

Р е ш е н и е. Период колебаний математического маятника определяется по формуле $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.

Тогда изменение периода колебаний:

$$T'(l) = \left(2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\right)' = \left(2\pi \cdot \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{g}}\right)' = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \cdot \left(\sqrt{l}\right)' = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{l}} = \frac{\pi}{\sqrt{gl}}.$$

Пример 30. Заряд на пластинах конденсатора колебательного контура с течением времени изменяется по закону $q = 10^{-6} \cdot \sin(10^4 \pi t)$. Записать уравнение зависимости силы тока от времени.

Решение. Запишем искомое уравнение:

$$I(t) = q'(t) = \left(10^{-6} \cdot \sin(10^4 \pi t)\right)' = 10^{-6} \cdot \cos(10^4 \pi t) \cdot (10^4 \pi t)' =$$
$$= 10^{-6} \cdot \cos(10^4 \pi t) \cdot 10^4 \pi = 10^{-2} \pi \cos(10^4 \pi t).$$

Пример 31. Дано уравнение прямолинейного движения тела: $S = 3t^2 + 2$, где S – путь, пройденный телом, м; t – время, с. Найти скорость тела в момент времени $t = 1$ с.

Решение. Скорость это производная пути по времени. Значит $v = S' = (3t^2 + 2)' = 6t$. Подставив значение времени получим: $v(1) = 6 \cdot 1 = 6$ м/с.

Пример 32. Точка движется по закону $S = \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 2$. Найти скорость и ускорение через 2 с после начала движения (движение считать прямолинейным).

Решение. Скорость это производная пути по времени. Значит

$$v = S' = \left(\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 2\right)' = \frac{1}{4} \cdot 4t^3 + \frac{1}{3} \cdot 3t^2 + \frac{1}{2} \cdot 2t + 0 = t^3 + t^2 + t.$$

Подставив значение времени получим

$$v(2) = 2^3 + 2^2 + 2 = 8 + 4 + 2 = 14 \text{ м/с.}$$

Ускорение это производная скорости по времени, поэтому

$$a = v' = (t^3 + t^2 + t)' = 3t^2 + 2t + 1.$$

Подставляем значение времени:

$$a(2) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 1 = 12 + 4 + 1 = 17 \text{ м/с.}$$

ЭКОНОМИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Дифференциальное исчисление получило широкое применение как математический аппарат для экономического анализа и его развития в экономике.

Базовой задачей экономического анализа является изучение связей экономических величин, записанных в виде функций. В каком направлении изменится доход государства при увеличении налогов или при введении импортных пошлин? Увеличится или уменьшится выручка фирмы при повышении цены на ее продукцию? Для решения подобных задач должны быть построены функции связи входящих в них переменных, которые затем изучаются с помощью методов дифференциального исчисления.

Производная в экономических формулах:

$\Pi(t)=v'(t)$ *– производительность труда,*

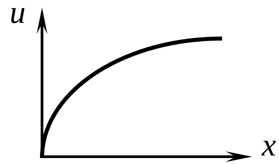
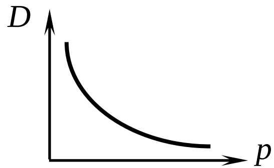
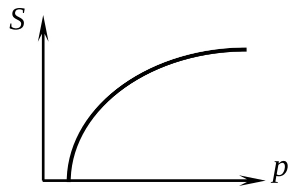
где $v(t)$ *– объем продукции*

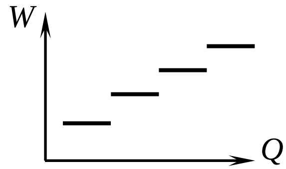
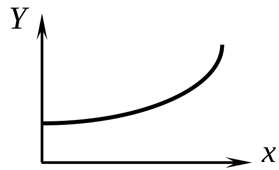
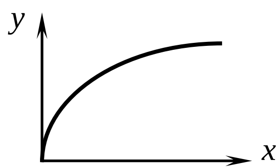
$J(x)=y'(x)$ *– предельные издержки производства,*

где $y(x)$ *– издержки производства* в зависимости от объема выпускаемой продукции *x*.

В экономике часто требуется найти наилучшее или оптимальное значение показателей: наивысшую производительность труда, максимальную прибыль, минимальные издержки и т.д. Каждый показатель представляет собой функцию от одного или нескольких аргументов. Таким образом, нахождение оптимального значения показателя сводится к нахождению экстремума функции.

Применение ПРОИЗВОДНОЙ в ЭКОНОМИКЕ позволяет получать так называемые ***предельные характеристики экономических процессов.*** Рассмотрим наиболее часто используемые в экономике функции и определим экономический смысл их производных (их весьма трудно выразить аналитически).

Функция	**Определение**	**График**	**Производная функции**
Полезности $U = u(x)$	Зависимость полезности, т.е. результата некоторого действия от интенсивности этого действия		$u'(x)$ дает приближенную оценку дополнительной полезности от приобретения еще одной единицы товара
Спроса $D = D(p)$	Зависимость объема спроса на отдельные товары или услуги от цены на них		$D'(p)$ дает приближенное уменьшение спроса при увеличении цены на одну единицу
Предложения $S = S(p)$	Зависимость предложения некоторого товара от цены на него		$S'(p)$ дает приближенное увеличение предложения товара со стороны продавцов при увеличении цены на одну единицу

Налоговая ставка	Зависимость налоговой ставки N в % от величины годового дохода Q		Если p – само значение налога с годового дохода Q, то p' и есть налоговая ставка W
Издержек $Y = Y(p)$	Зависимость издержек производства от объема продукции		$y'(x)$ характеризует приближенные дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции
Производственная функция $y = F(x)$	Зависимость результата производственной деятельности от обусловивших его факторов (зависимость объема выпускаемого товара от объема затраченного ресурса)		Увеличение объема перерабатываемого ресурса не приводит к уменьшению выпуска

Пример 33. Выбрать оптимальный объем производства фирмой, функция прибыли которой может быть смоделирована зависимостью: $\pi(q) = R(q) - C(q) = q^2 - 8q + 10$.

Решение. Вычислим производную от заданной функции прибыли:

$$\pi'(q) = R'(q) - C'(q) = \left(q^2 - 8q + 10\right)' = 2q - 8.$$

Найдем экстремальное значение, приравнивая производную нулю:

$$\pi'(q) = 0; \qquad \Rightarrow \qquad 2q - 8 = 0; \qquad \Rightarrow \qquad q_{extr} = 4.$$

При $q < q_{extr} = 4 \Rightarrow \pi'(q) < 0$ и прибыль убывает.

При $q > q_{extr} = 4 \Rightarrow \pi'(q) > 0$ и прибыль возрастает.

При $q = 4$ прибыль принимает минимальное значение.

Каким же будет оптимальный объем выпуска для фирмы? Если фирма не может производить за рассматриваемый период больше 8 единиц продукции $\left(\pi(q=8) = \pi(q=0) = 10\right)$, то оптимальным решением будет вообще ничего не производить, а получать доход от сдачи в аренду помещений и (или) или оборудования. Если же фирма способна производить больше 8 единиц, то оптимальным для фирмы будет выпуск на пределе своих производственных мощностей.

Пример 34. Кривая спроса задана выражением $P = 20 - 0{,}001D - 0{,}01\sqrt{D}$, где D – объем продаж; P – цена товара в условных единицах. Объем продаж составляет 10000. Определите, каким должно быть изменение цены товара, чтобы объем продаж возрос на 1 %.

Решение. Определим цену P_0, соответствующую объему продаж $D = 10000$:

$$P_0 = 20 - 0{,}001 \cdot 10000 - 0{,}01 \cdot \sqrt{10000} = 9 \text{ у.е.}$$

Для оценки изменения цены товара воспользуемся формулой приближенных вычислений $P \approx P_0 + P'\Delta D$. По условию задачи ΔD составляет 1 % от 10000 или $\frac{10000}{100} = 100$. Найдем значение $P'(10000)$:

$$P'(D) = \left(20 - 0{,}001D - 0{,}01\sqrt{D}\right)' = -0{,}001 - \frac{0{,}01}{2\sqrt{D}};$$

$$P'(10000) = -0{,}001 - \frac{0{,}01}{2 \cdot \sqrt{10000}} = -0{,}00105.$$

Тогда $P \approx 9 - 0{,}00105 \cdot 100 = 8{,}895$ у.е. Таким образом, для увеличения объема продаж на 1 % цена товара должна быть снижена приблизительно на 0,105 у.е.

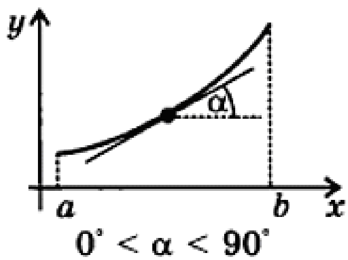
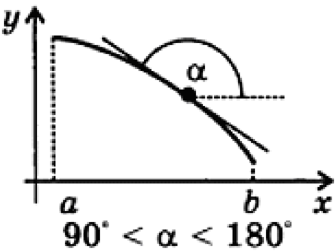
ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПЕРВОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Схема исследования основных свойств функции

	Словесное определение	*Графическое определение*
1.	*Область определения*, т.е. множество значений аргумента, при которых задана функция.	Проекция графика на ось *Ox*.
2.	*Область значений*, т.е. множество чисел, состоящее из всех значений функции.	Проекция графика на ось *Oy*.
3.	*Корни*, т.е. точки, в которых функция обращается в нуль, или иначе решения уравнения $f(x)=0$.	Точки пересечения графика с осью *Ox*.
4.	*Промежутки постоянного знака,* т.е. промежутки, на которых функция положительна (отрицательна), или иначе решения неравенства $f(x)>0, (f(x)<0)$.	Участки оси *Ox*, соответствующие точкам графика, лежащим выше (ниже) оси *Ox*.
5.	*Точки экстремума*, т.е. точки, лежащие внутри области определения, в которых функция принимает самое большое (максимум) или самое маленькое (минимум) значение по сравнению со значениями в близких точках.	«Вершины» на графике функции.
6.	*Промежутки монотонности*, т.е. промежутки, на которых функция или возрастает, или убывает.	Участки оси *Ox*, где график идет вверх или вниз.

7.	*Наибольшее или наименьшее значение функции* (по сравнению со всеми возможными в отличие от экстремумов, где сравнение ведется только с близкими точками).	Ординаты самой высокой и самой низкой точек графика.

Монотонность

 **Рис. 6**	***Достаточное условие возрастания функции*** Если в каждой точке интервала $(a;b)$ $f'(x)>0$, то функция монотонно возрастает на этом интервале.
 **Рис. 7**	***Достаточное условие убывания функции*** Если в каждой точке интервала $(a;b)$ $f'(x)<0$, то функция монотонно убывает на этом интервале.

Замечание. Приведенные условия являются только ***достаточными*** условиями монотонности, но не являются необходимыми. Например, функция $y=x^3$ возрастает во всей области определения, хотя ее производная обращается в нуль при $x=0$.

П р и м е р   3 5 . Исследовать функцию $y = x^3 - 3x$ на монотонность.

Р е ш е н и е . Для того, чтобы исследовать функцию на монотонность, необходимо найти первую производную заданной функции и выяснить знаки производной на различных интервалах.

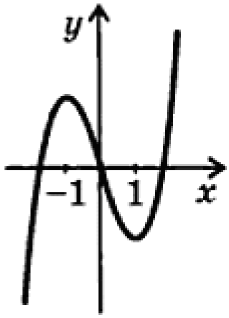


Рис. 8

$$y = x^3 - 3x,$$

$$y' = 3x^2 - 3 = 3 \cdot \left(x^2 - 1\right),$$

$y' > 0$ при $x \in (-\infty; -1)$ и при $x \in (1; +\infty)$, следовательно, при $x \in (-\infty; -1)$ и при $x \in (1; +\infty)$ функция возрастает;

$y' < 0$ при $x \in (-1; 1)$, следовательно, при $x \in (-1; 1)$ функция убывает (рис. 8).

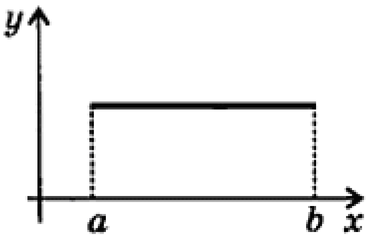


Рис. 9

Необходимое и достаточное условие постоянства функции

Функция $y = f(x)$ постоянная на интервале $(a; b)$ тогда и только тогда, когда $f'(x) = 0$ в каждой точке этого интервала.

Экстремумы

Необходимое условие экстремума

Если x_0 – точка экстремума функции $y = f(x)$, то эта точка является критической точкой данной функции, т.е. в этой точке производная либо равна нулю, либо она не существует.

З а м е ч а н и е. Приведенное условие являются только необходимым условием экстремума, но не является достаточным: критическая точка не обязательно является точкой экстремума.

Примеры отсутствия экстремума в критической точке $x = 0$ **(рис. 10):**

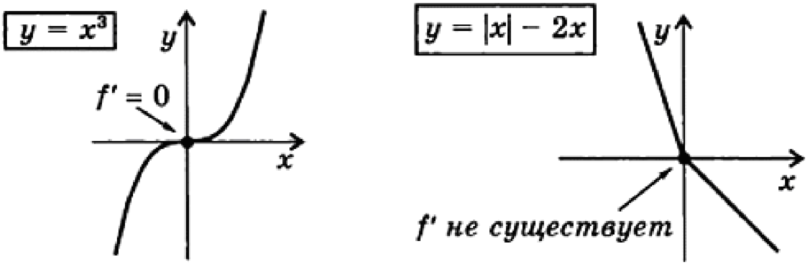


Рис. 10

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА

<table>
<tr><td colspan="2">Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и производная $f'(x)$ меняет знак в этой точке, то x_0 – точка экстремума функции $y = f(x)$.</td></tr>
<tr><td>Если $f'(x) > 0$ при $x < x_0$,
$f'(x) < 0$ при $x > x_0$,
то x_0 – точка максимума.</td><td>Если $f'(x) < 0$ при $x < x_0$,
$f'(x) > 0$ при $x > x_0$,
то x_0 – точка минимума.</td></tr>
</table>

З а м е ч а н и е. В самой точке x_0 производной у функции $y = f(x)$ может не существовать.

Примеры экстремумов:

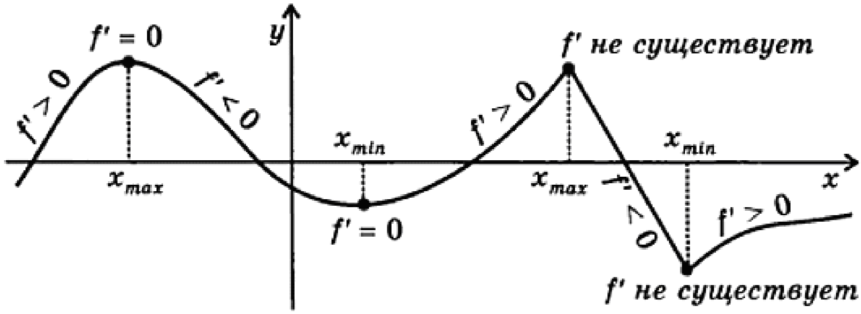


Рис. 11

На рис. точки x_1, x_3 – точки минимума, x_2, x_4 – точки максимума. В точках гладкого экстремума (точки x_1, x_4) $f'(x)=0$. В «угловых» точках (точки x_2, x_3) $f'(x)$ не существует. Точки, в которых $f'(x)=0$ или не существует, называются ***критическими*** (точками возможного экстремума). Не всякая критическая точка является точкой экстремума (на рис. 12 $y'(x_5)=0$, но точка x_5 не является точкой экстремума).

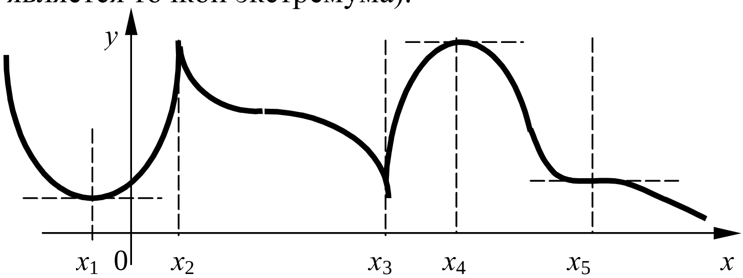
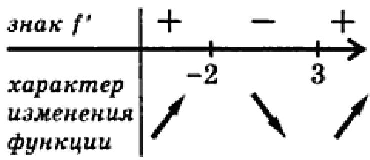


Рис. 12

Схема применения производной для нахождения интервалов монотонности и экстремумов

Этапы	**Пример для функции** $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 5$
1. Найти область определения функции и интервалы, на которых функция непрерывна.	Область определения: R Функция непрерывна во всей своей области определения.
2. Найти производную $y' = f'(x)$	$y' = 6x^2 - 6x - 36$
3. Найти критические точки, т.е. точки, в которых производная функции равна нулю или не существует.	$y' = 0$ при $x = -2$, $x = 3$
4. В каждом из интервалов, на которые область определения разбивается критическими точками, определить знак производной и характер изменения функции (с помощью достаточных условий монотонности)	
5. Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума, минимума или не является точкой экстремума.	Точка максимума $x = -2$; Точка минимума $x = 3$.
6. Записать результат исследования функции: промежутки монотонности и экстремумы.	$f(x)$ возрастает при $x \in (-\infty; -2)$ и при $x \in (3; +\infty)$; $f(x)$ убывает при $x \in (-2; 3)$; $y_{\max} = f(-2) = 49$; $y_{\min} = f(3) = -76$.

7. Схематичное построение графика заданной функции.

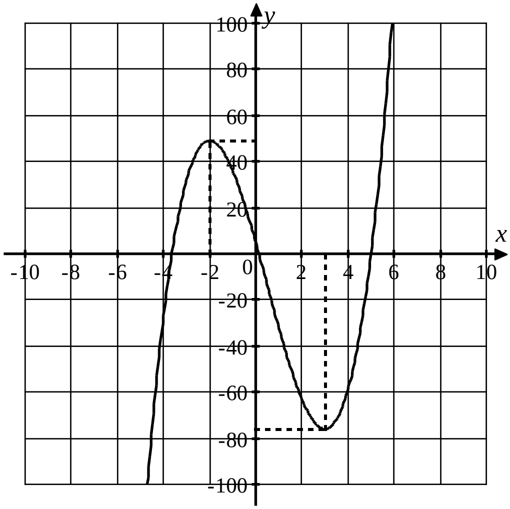


Рис. 13

НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ, НЕПРЕРЫВНОЙ НА ОТРЕЗКЕ

Функция, непрерывная на отрезке, достигает своего наибольшего и наименьшего значений на этом отрезке либо в критических точках, принадлежащих отрезку, либо на его концах.

Примеры:

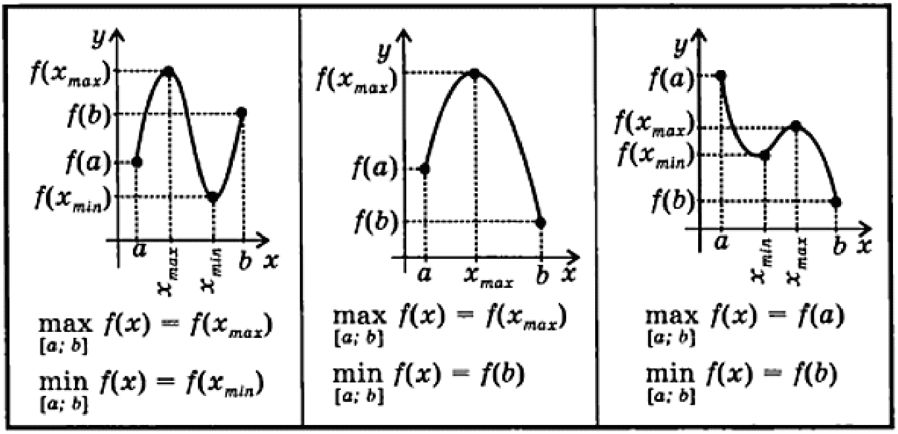


Схема нахождения наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке

Этапы	**Пример для функции** $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 5$ **на отрезке** $[0;4]$
1. Найти производную $y' = f'(x)$.	$y' = 6x^2 - 6x - 36$
2. Найти на данном отрезке критические точки, т.е. точки, в которых $f'(x) = 0$ или не существует.	$y' = 0$ при $x = -2$, $x = 3$. Отрезку $[0;4]$ принадлежит только одна точка: $x = 3$
3. Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка.	$y(0) = 5$; $y(3) = -76$; $y(4) = -59$
4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее и наибольшее.	$\max\limits_{[0;4]} y(x) = y(0) = 5$; $\min\limits_{[0;4]} y(x) = y(3) = -76$

П р и м е р 3 6 . Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)$ на заданном отрезке:

$$f(x)=x^3-12x-1; \qquad [-3;5].$$

Р е ш е н и е . Для нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на заданном отрезке следует найти критические точки функции на этом отрезке, т.е. точки, где производная равна нулю или не существует (бесконечна), вычислить значения функции в этих точках, а также на концах отрезка и выбрать среди них наибольшее и наименьшее.

Для данной функции имеем:

$$f'(x)=\left(x^3-12x-1\right)'=3x^2-12.$$

Найдем критические точки из условия $f'(x)=0$:

$$3x^2-12=0;$$
$$3\cdot\left(x^2-4\right)=0;$$
$$3\cdot(x-2)\cdot(x+2)=0$$
$$x-2=0; \qquad x+2=0;$$
$$x_1=2; \qquad x_2=-2.$$

Вычисляем значения функции в критических точках и на концах отрезка:

$$f(-2)=(-2)^3-12\cdot(-2)-1=15;$$
$$f(2)=2^3-12\cdot 2-1=-17;$$
$$f(-3)=(-3)^3-12\cdot(-3)-1=8;$$
$$f(5)=5^3-12\cdot 5-1=64.$$

Получили наибольшее значение функции $f(5)=64$, наименьшее $f(2)=-17$.

П р и м е р 3 7 . Найти высоту прямого кругового конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса 90 см.

Р е ш е н и е . Построим схематично рисунок (рис. 14).

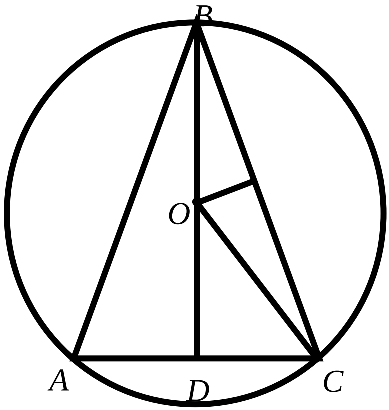


Рис. 14

Обозначим: ΔABC – равнобедренный, $BD = h$ – высота конуса, вписанного в шар, $OB = OC = 90$ см – радиус шара.

Объем конуса находится по формуле $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, где r – радиус основания конуса. Необходимо выразить величину радиуса r через высоту конуса. На рисунке радиус $r = CD$.

Рассмотрим ΔOCD – прямоугольный, $OC = 90$, $OD = BD - OB = h - 90$, тогда по теореме Пифагора:

$$DC^2 = OC^2 - OD^2$$

или

$$r^2 = 90^2 - (h - 90)^2 .$$

Преобразуем

$$r^2 = 90^2 - h^2 + 180h - 90^2 = 180h - h^2 .$$

Подставим полученное выражение для r^2 в формулу объема конуса:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(180h - h^2\right) \cdot h .$$

Для определения экстремума, найдем производную:

$$V' = \frac{1}{3}\pi\cdot\left(180h^2 - h^3\right)' = \frac{1}{3}\pi\cdot\left(360h - 3h^2\right) = \pi\cdot h\cdot\left(120 - h\right)$$

и критические точки из условия $V' = 0$:

$$\pi\cdot h\cdot\left(120 - h\right) = 0;$$

$$h = 0 \qquad\qquad 120 - h = 0;$$

$$h = 120.$$

Значение $h = 0$ не удовлетворяет условиям задачи.

Следовательно, высота прямого кругового конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса 90 см – $h = 120$ см.

Пример 38. Какое положительное число, просуммированное с обратным ему числом, дает наименьшую сумму?

Решение. Пусть x – искомое число. Составим функцию $S = x + \frac{1}{x}$ и найдем ее минимальное значение. Областью определения данной функции является интервал $x \in \left(0; +\infty\right)$, так как по условию задачи следует найти положительное число.

Найдем производную функции:

$$S' = \left(x + \frac{1}{x}\right)' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}.$$

Найдем стационарные точки:

$$S' = 0;$$

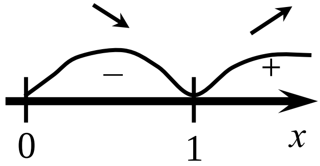
$$\frac{x^2 - 1}{x^2} = 0;$$

$$x^2 - 1 = 0;$$

$x_1 = 1$; $\qquad x_2 = -1$ – не подходит.

Кроме того, S' не существует при $x = 0$. Полученные точки откладываем на числовой прямой и определяем знаки производной:

Знаки S':



Таким образом, функция $S = x + \dfrac{1}{x}$ монотонно убывает на интервале $x \in (0;1)$ и возрастает при $x \in (1;+\infty)$. В точке $x = 1$ функция имеет точку локального экстремума – точку минимума $y_{\max}(1) = 2$.

Следовательно, искомым положительным числом является число $x = 1$.

Задачи для решения на практических занятиях

Задача 144. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^3 + 3x^2 - 48x + 1$ на отрезке $[1;15]$.

Задача 145. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = 3 + 9x + 6x^2 + x^3$ на отрезке $[-1;4]$.

Задача 146. Найти наибольшее и наименьшее значения функции на указанном промежутке.

$$f(x) = x + \cos x,\ [-\pi;\pi].$$

Задача 147. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \sin x$ на отрезке $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Задача 148. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \ln\left(x^2 - 2x + 2\right)$ на отрезке $[0;3]$.

Задача 149. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5$ на отрезке $[-3;2]$.

Задача 150. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = \dfrac{x-1}{x^2+3}$ на отрезке $[-2, 2]$.

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $(a;b)$. Кривая $y = f(x)$ называется ***выпуклой*** в интервале $(a;b)$, если она находится ниже любой своей касательной, и называется ***вогнутой***, если находится выше касательной. Рассмотрим подробнее функцию $y = f(x)$ на ее интервале выпуклости $(a;x_0)$ (рис. 15) и на ее интервале вогнутости $(x_0;b)$ (рис. 16).

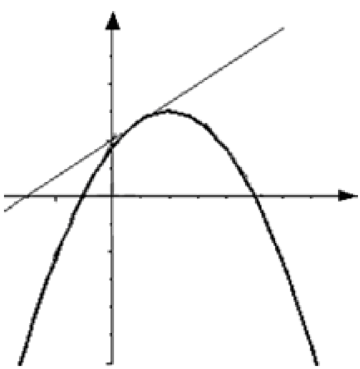


Рис. 15

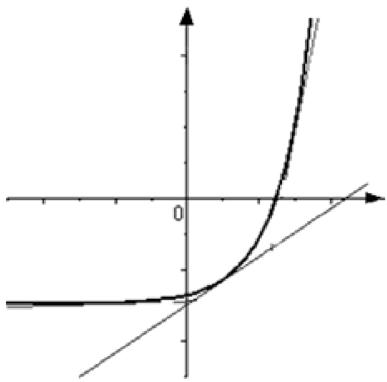


Рис. 16

На рисунке изображен график функции, выпуклой на интервале $(a;x_0)$, вогнутой на интервале $(x_0;b)$, и у которой точка x_0, разделяющая интервалы выпуклости и вогнутости, есть ***точка перегиба функции***.

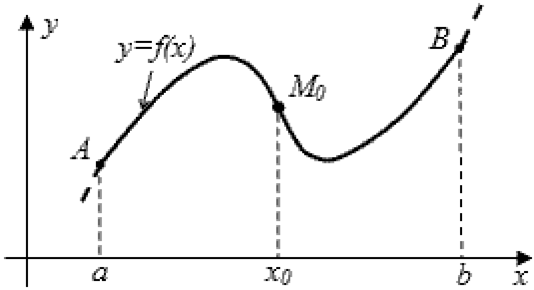


Рис. 17

Исследование на выпуклость, вогнутость и нахождение точек перегиба кривой проводятся с помощью второй производной.

Если $f''(x) < 0$ для каждого $x \in (a, b)$, то кривая $y = f(x)$ выпукла на $(a; b)$; если $f''(x) > 0$, то – вогнута. В точках перегиба $f''(x) = 0$ или не существует и при переходе через точку перегиба меняет знак (рис. 18).

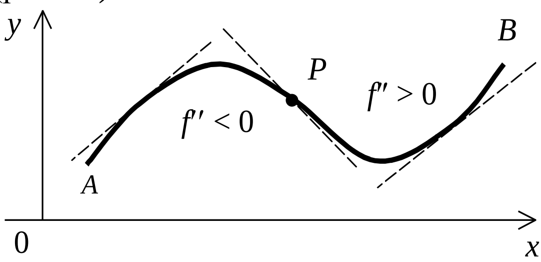


Рис. 18

Пример 39. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и построить её график:

$$y=\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{2}x^2-3x+10.$$

Решение. Будем придерживаться общей схемы исследования функции:

1) Найти область определения функции.

2) Исследовать функцию на чётность и нечётность, периодичность и сделать вывод об элементах симметрии графика функции.

3) Найти точки пересечения графика функции с осями координат. Определить промежутки знакопостоянства функции.

4) Исследовать функцию на непрерывность: найти точки разрыва функции и её односторонние пределы в точках разрыва; указать, какого рода разрыв.

5) Найти точки экстремума функции и определить интервалы её возрастания и убывания.

6) Найти точки перегиба функции и определить интервалы выпуклости и вогнутости графика.

7) Найти асимптоты графика функции.

8) Построить график функции по результатам исследования.

1) $D(y)=(-\infty;+\infty)$.

2) $f(-x)=\frac{1}{12}\cdot(-x)^3-\frac{1}{2}\cdot(-x)^2-3\cdot(-x)+10=$

$$-\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{2}x^2+6x+10$$

$$f(-x)\neq f(x); \qquad f(-x)\neq -f(x).$$

Функция ни четная, ни нечетная, не периодическая, следовательно, элементов симметрии нет.

3) Точек разрыва нет, так как функция непрерывна на всей своей области определения.

4) Чтобы найти точку экстремума, находим первую производную, приравниваем ее к нулю и решаем полученное уравнение: $y'(x)=\frac{1}{4}x^2-x-3$;

$$\frac{1}{4}x^2-x-3=0; \qquad \Big|\times 4$$

$$x^2-4x-12=0$$

$x_1=-2$ и $x_2=6$ – критические точки

Результаты исследования на экстремум заносим в таблицу:

x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;6)$	6	$(6;\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	max $13\frac{1}{3}$	$\searrow$	min -8	$\nearrow$

Итак, имеем: $M\left(-2;13\frac{1}{3}\right)$ – точка максимума, так как в критической точке $x_1=-2$ первая производная меняет свой знак с «+» на «–»; $N(6;-8)$ – точка минимума, так как в критической точке $x_2=6$ первая производная меняет свой знак с «–» на «+».

5) Чтобы найти точки перегиба графика функции и интервалы выпуклой и вогнутой, находим вторую производную $y''(x)$, приравниваем ее к нулю и решаем полученное уравнение:

$$y''(x)=\frac{1}{2}x-1; \qquad \frac{1}{2}x-1=0;$$

$x=2$ – критическая точка II рода.

Результат исследования на перегиб заносим в таблицу:

x	$(-\infty;2)$	2	$(2;\infty)$
$f''(x)$	–	0	+
$f(x)$	$\cap$	перегиб $2\frac{2}{3}$	$\cup$

Итак, $K\left(2;2\frac{2}{3}\right)$ – точка перегиба, так как при переходе через критическую точку второго рода $x=2$ вторая производная меняет свой знак.

6) Найдем наклонную асимптоту: $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x};\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right];$$

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{2}x-3+\frac{10}{x}\right]=\infty$$

Так как $k=\infty$, то наклонных асимптот нет. Горизонтальных и вертикальных асимптот нет.

7) Построим график функции, для чего возьмем дополнительные точки:

x	-6	-5	-4	-3	-1	1
y	-8	$2\frac{1}{12}$	$8\frac{2}{3}$	$12\frac{1}{4}$	$12\frac{5}{12}$	$6\frac{7}{12}$

x	3	4	5	7	8	9	10
y	$-1\frac{1}{4}$	$-4\frac{2}{3}$	$-7\frac{1}{12}$	$-6\frac{11}{12}$	$-3\frac{1}{3}$	$3\frac{1}{4}$	$13\frac{1}{3}$

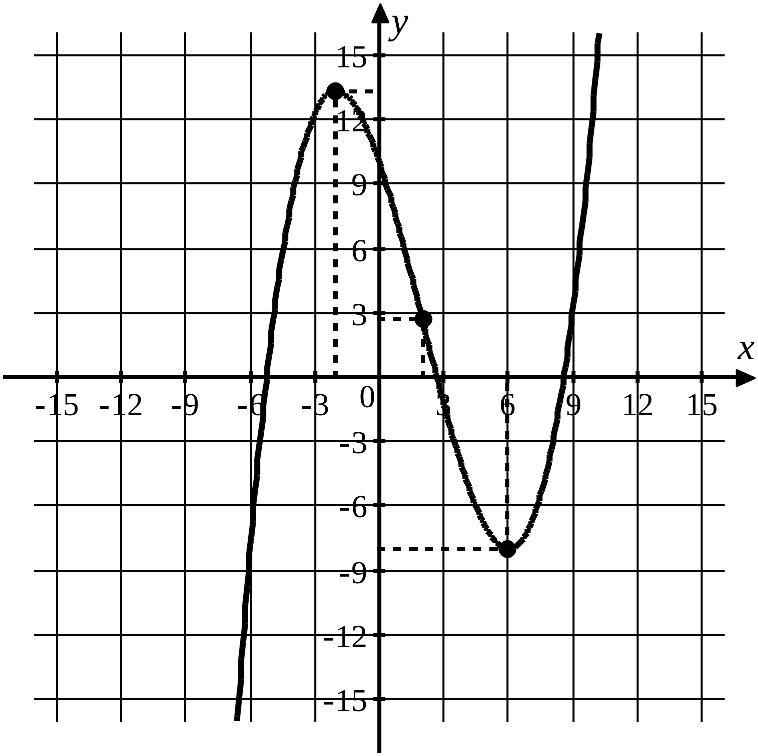


Рис. 19

<u>**П р и м е р 4 0 .**</u> Исследовать функцию и построить ее график

$$y = \frac{x^2 + 5}{x + 2}.$$

Р е ш е н и е . 1) Найдем область определения функции, исходя из условия $x + 2 \neq 0$. Решая уравнение, получаем область определения функции:

$$x \in (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty), \text{ т.е. } x \neq -2.$$

2) Вертикальные асимптоты.

Вычислим пределы:

$$\lim_{x\to -2-0}\frac{x^2+5}{x+2}=-\infty; \qquad \lim_{x\to -2+0}\frac{x^2+5}{x+2}=+\infty.$$

Следовательно, график имеет вертикальную асимптоту $x=-2$.

3) Наклонные асимптоты $y=kx+b$.

Вычислим коэффициенты k и b.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2+5}{x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+5}{x(x+2)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1+\frac{5}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+5}{x+2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+5-x^2-2x}{x+2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5-2x}{x+2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(\frac{5}{x}-2\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}=-2.$$

Следовательно, наклонная асимптота существует и имеет уравнение $y=x-2$.

4) Свойство четности.

$$y(x)=\frac{x^2+5}{x+2};$$

$$y(-x)=\frac{(-x)^2+5}{(-x)+2}=\frac{x^2+5}{2-x}\neq y(x)\neq -y(x).$$

Не выполнились ни условие четной функции $y(-x)=y(x)$, ни условие нечетной функции $y(-x)=-y(x)$, т.е. данная функция не является ни четной, ни нечетной. Перед нами функция общего вида.

5) Точки пересечения с осями координат.

С осью Ox: $y = \dfrac{x^2+5}{x+2} = 0$; $\Rightarrow$ $x^2+5=0$; $\Rightarrow$ Так как $x^2+5>0$, это уравнение действительных корней не имеет, поэтому с осью Ox пересечений нет.

С осью Oy: $y(0) = \dfrac{0^2+5}{0+2} = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$; $\Rightarrow$ $M(0;2{,}5)$.

6) Интервалы монотонности и точки локального экстремума.

Найдем производную заданной функции:

$$y' = \left(\frac{x^2+5}{x+2}\right)' = \frac{(x^2+5)'(x+2)-(x^2+5)(x+2)'}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{2x(x+2)-(x^2+5)}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+4x-x^2-5}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x-5}{(x+2)^2}.$$

Критические точки находим из условий $y'=0$ и y' не существует. Решая уравнение $y' = \dfrac{x^2+4x-5}{(x+2)^2} = 0$, $\Rightarrow$ $x^2+4x-5=0$,

$x^2+4x-5=0$;

$D = 4^2-4\cdot1\cdot(-5) = 36 > 0$;

$x_1 = \dfrac{-4+6}{2} = 1$; $\qquad\qquad x_2 = \dfrac{-4-6}{2} = -5$

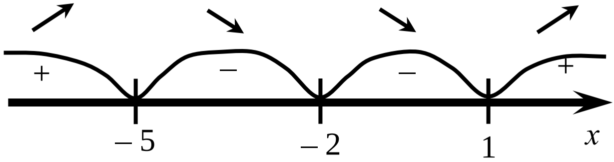
y' имеет точки разрыва при $x+2=0$, т.е. в точке $x=-2$. Итак,

корни y': $\qquad x_1 = 1$; $x_2 = -5$

точки разрыва y': $\qquad x = -2$.

Определим знаки производной на полученных интервалах. Построим числовую прямую, отложим критические точки и, подставляя в производную точки из интервалов, вычислим знаки:

Знаки y':



Таким образом, график функции $y=\dfrac{x^2+5}{x+2}$ возрастает на интервалах $x\in(-\infty;-5)\cup(1;+\infty)$ и убывает при $x\in(-5;-2)\cup(-2;1)$. В точке $x=-5$ функция имеет точку локального экстремума – точку максимума $y_{\max}(-5)=-10$. В точке $x=1$ функция имеет точку локального экстремума – точку минимума $y_{\min}(1)=2$.

7) Промежутки выпуклости и точки перегиба.

Вторая производная функции имеет вид:

$$y''=\left(\frac{x^2+4x-5}{(x+2)^2}\right)'=\frac{(x^2+4x-5)'(x+2)^2-(x^2+4x-5)\left((x+2)^2\right)'}{(x+2)^4}=$$

$$=\frac{(2x+4)(x+2)^2-(x^2+4x-5)2(x+2)}{(x+2)^4}=$$

$$=\frac{2(x+2)\cdot\left((x+2)(x+2)-x^3-4x+5\right)}{(x+2)^4}=$$

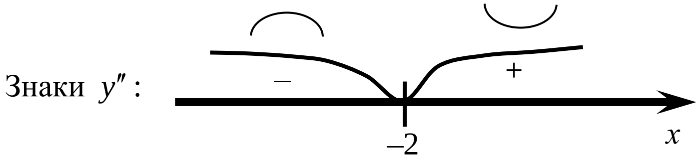
$$=\frac{2(x^2+4x+4-x^2-4x+5)}{(x+2)^3}=\frac{18}{(x+2)^3}.$$

Решая уравнение $y''=0$, получаем, что $\dfrac{18}{(x+2)^3}\neq 0$. Имеем

корни y'': корней нет;

точки разрыва y'': $x=-2$.

Определим знаки второй производной на полученных интервалах. Построим числовую прямую, отложим точки разрыва и, подставляя во вторую производную точки из интервалов, вычислим знаки:



Итак, график функции является выпуклым на интервале $x \in (-\infty; -2)$ и вогнутым при $x \in (-2; +\infty)$. Точек перегиба функция не имеет.

8) Построение таблицы.

Сведем результаты проведенного исследования в таблицу:

	$(-\infty;-5)$	-5	$(-5;-2)$	-2	$(-2;1)$	1	$(1;+\infty)$
y'	+	0	–	×	–	0	+
y''	–	–	–	×	+	+	+
y	$\nearrow$	$y_{\max}(-5) = -10$	$\searrow$	×	$\searrow$	$y_{\min}(1) = 2$	$\nearrow$

9) Построение графика.

Используя результаты исследования функции, строим график.

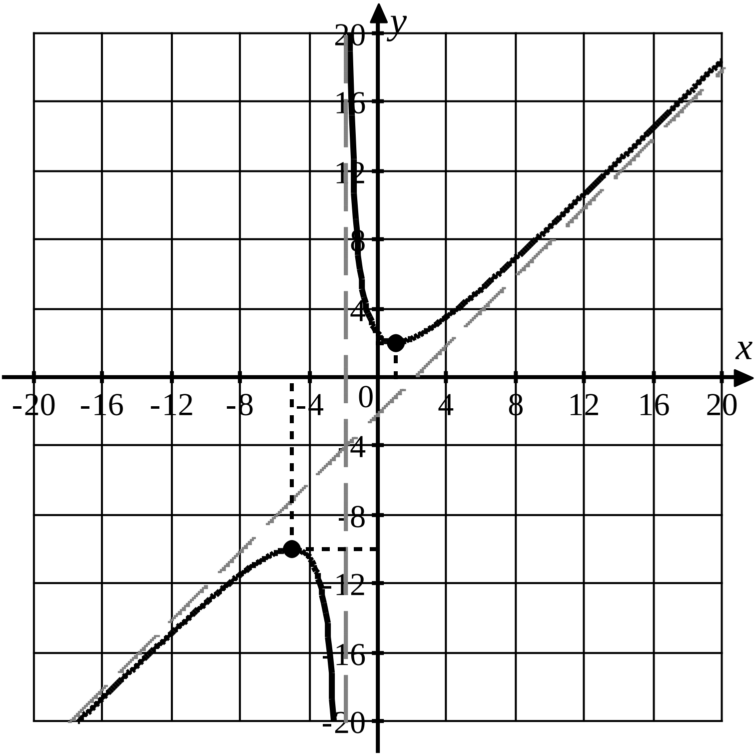


Рис. 20

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задание 1. В задачах функция задана явно (пункты **a**, **b**), неявно (пункт **c**) и параметрически (пункт **d**). Найдите производную y' каждой из данных функций.

1.1.

a) $y = \arccos\left(\dfrac{5}{x}\right)\cdot \operatorname{tg}\sqrt{3x}$; **b)** $y = \dfrac{\sqrt{e^{4x+2}}}{7^{2x-3}}$;

c) $x^4y^4 + 5xy - 7 = 0$; **d)** $\begin{cases} x = \arcsin 2t, \\ y = \dfrac{1}{1-4t^2} \end{cases}$

1.2.

a) $y = \dfrac{\cos(3x^5)}{\sqrt{\operatorname{arctg} 4x}}$; **b)** $y = \operatorname{tg}\sqrt{x}\cdot \ln\dfrac{2}{x}$;

c) $x^2y - y^2x + (x-y)^2 = 0$; **d)** $\begin{cases} x = (1-t)^2 \\ y = \cos(t-1)^2 \end{cases}$

1.3.

a) $y = e^{\sqrt{x}}\cdot \operatorname{tg}\ln 5x$; **b)** $y = \dfrac{\sqrt{\arcsin\dfrac{x}{3}}}{\operatorname{tg} 4x}$;

c) $y\sin x - \cos y = 0$; **d)** $\begin{cases} x = (t-1)^2, \\ y = \sin(t-1)^2 \end{cases}$

1.4.

a) $y = \dfrac{\operatorname{ctg}\sqrt{x}}{\arcsin\dfrac{x}{5}}$; **b)** $y = \ln(\arcsin 2x)\cdot \cos\sqrt{3x-1}$;

c) $x^3 + xy^2 + y^3 = a^3$; **d)** $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t^2, \\ y = t^2 - 5 \end{cases}$

1.5.	**a)** $y=\dfrac{5^{\cos 2x}}{\operatorname{tg}\sqrt{2x-1}}$; **c)** $x^4-2xy^3+\cos 3x=0$;	**b)** $y=\arccos e^{4x}\cdot\sqrt{\operatorname{arctg}\dfrac{3}{x}}$ **d)** $\begin{cases} x=7+t^2, \\ y=\operatorname{ctg}3t^2 \end{cases}$
1.6.	**a)** $y=\sqrt{\arcsin 5x}\cdot\ln\dfrac{4}{x}$; **c)** $xe^y+2^x-y=0$;	**b)** $y=\dfrac{e^{\sqrt{x+2}}}{\operatorname{arctg}(4x-1)}$; **d)** $\begin{cases} x=\ln\left(1+t^4\right), \\ y=\operatorname{arctg}t^2 \end{cases}$
1.7.	**a)** $y=\dfrac{\ln\operatorname{tg}\dfrac{2}{x}}{e^{\arcsin 3x}}$; **c)** $y\ln x-x\ln y=0$;	**b)** $y=\sqrt{\operatorname{arctg}4x}\cdot\operatorname{tg}\sqrt{x}$; **d)** $\begin{cases} x=\dfrac{3}{1+t^2}, \\ y=\operatorname{arcctg}t \end{cases}$
1.8.	**a)** $y=\dfrac{\sqrt{e^{2x-1}}}{\arcsin\dfrac{2}{x}}$; **c)** $(x-y)^3+(2x-5y)^2=0$;	**b)** $y=\sqrt{\ln\sin x}\cdot 5^{\operatorname{tg}2x}$; **d)** $\begin{cases} x=\operatorname{arctg}t^3, \\ y=\ln\left(1+t^6\right) \end{cases}$
1.9.	**a)** $y=\cos\ln\dfrac{5}{x}\cdot\sqrt{\arcsin\left(e^{2x}\right)}$; **c)** $2xy+\ln x+\sqrt{5+3y}=0$;	**b)** $y=\dfrac{\sin(2x-1)}{\ln\sqrt{3x+2}}$; **d)** $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t-1}, \\ y=\dfrac{t}{t-1} \end{cases}$

1.10.	**a)** $y=\dfrac{\sin\frac{2}{x}}{\sqrt{\ln(3x-1)}}$;	**b)** $y=\arcsin\sqrt{2x-1}\cdot \operatorname{tg}\left(e^{4/x}\right)$;
	c) $x^3y^2-x\ln y=0$;	**d)** $\begin{cases} x=3\cos t, \\ y=4\sin^2 t \end{cases}$
1.11.	**a)** $y=\dfrac{5^{3x^2-1}}{e^{\operatorname{tg}4x}}$;	**b)** $y=\arccos(4x-1)\cdot\sqrt{\ln\dfrac{2}{x}}$;
	c) $e^x+e^y-e^{xy}-1=0$;	**d)** $\begin{cases} x=\dfrac{1-t}{1+t}, \\ y=\dfrac{2t}{1+t} \end{cases}$
1.12.	**a)** $y=\sqrt{4x^4-5}\cdot \operatorname{tg}\ln\dfrac{5}{x}$;	**b)** $y=\dfrac{6^{\cos 3x}}{\arccos 2x}$;
	c) $2x\cos y-y\sin x=0$;	**d)** $\begin{cases} x=\operatorname{arctg}4t, \\ y=\ln\left(1+16t^2\right) \end{cases}$
1.13.	**a)** $y=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{2}{x}}{\sqrt{e^{4x-1}}}$;	**b)** $y=\arcsin e^{2x}\cdot\ln\dfrac{3}{x}$;
	c) $x^3y-3x^2y^2+5y^3-3x+4=0$;	**d)** $\begin{cases} x=\operatorname{arctg}3t, \\ y=\ln\left(1+9t^2\right) \end{cases}$
1.14.	**a)** $y=e^{\arccos 4x}\cdot \operatorname{tg}\sqrt{3x}$;	**b)** $y=\dfrac{\ln\sqrt{2x-1}}{\operatorname{arctg}\frac{5}{x}}$;
	c) $\sin xy-x^2-y^2=0$;	**d)** $\begin{cases} x=\dfrac{5}{1+t^2}, \\ y=\operatorname{arctg}t \end{cases}$

1.15.	**a)** $y=\dfrac{\operatorname{arctg}\frac{5}{x}}{\ln\sqrt{3x-1}}$;	**b)** $y=\sin e^{2-3x}\cdot\sqrt{\operatorname{tg}\frac{7}{x}}$;
	c) $xy-y^2=\arcsin 3x$;	**d)** $\begin{cases} x=\operatorname{arctg} t^2, \\ y=\dfrac{3}{1+t^4} \end{cases}$
1.16.	**a)** $y=\sqrt{\sin 4x}\cdot e^{3/x}$;	**b)** $y=\dfrac{\cos\ln\frac{2}{x}}{\operatorname{arctg} 3x}$;
	c) $x^3y^2+\sqrt{xy}=\cos\dfrac{2}{x}$;	**d)** $\begin{cases} x=3\operatorname{tg} t, \\ y=\dfrac{2}{\sin t} \end{cases}$
1.17.	**a)** $y=5^{\sin 2x}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{7}{x}$;	**b)** $y=\dfrac{\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{\ln\frac{3}{x}}$;
	c) $\operatorname{ctg} x^2-\ln y=x^2y$;	**d)** $\begin{cases} x=t-\ln\sin t, \\ y=t+\ln\cos t \end{cases}$
1.18.	**a)** $y=\dfrac{\cos\frac{3}{x^2}}{\sqrt{\sin(3x-1)}}$;	**b)** $y=\arccos\sqrt{3x-1}\cdot\operatorname{ctg} e^{2/x}$;
	c) $x^4y-y^2\ln 3x=0$;	**d)** $\begin{cases} x=3\operatorname{arctg} t, \\ y=\dfrac{4}{1-t^4} \end{cases}$
1.19.	**a)** $y=\dfrac{\sin^6\left(3x^2-5\right)}{\arcsin\frac{5}{x}}$;	**b)** $y=\sqrt{\operatorname{arctg}(3x+1)}\cdot\operatorname{tg} e^{5x}$;
	c) $\operatorname{arctg} x^2-\ln y+x^3y^2=0$;	**d)** $\begin{cases} x=\dfrac{2}{1+t^2}, \\ y=4\operatorname{arcctg} t \end{cases}$

1.20.	**a)** $y=\operatorname{tg} e^{4x}\cdot\arccos\dfrac{2}{x}$;	**b)** $y=\dfrac{\ln\sqrt{3x-1}}{\cos 5x+2}$;
	c) $x^3e^y+y^3e^{2x}=0$;	**d)** $\begin{cases} x=\sin 2t+\cos 2t, \\ y=e^{2t}\cdot\cos 2t \end{cases}$
1.21.	**a)** $y=\arcsin\left(\dfrac{4}{3x}\right)\cdot\log_2\sqrt{5x^3}$;	**b)** $y=\dfrac{\sqrt{\sin 5x^2}}{e^{\sqrt{2x-3}}}$;
	c) $2x^5y^3-7xy^2+12=0$;	**d)** $\begin{cases} x=\cos^2 2t^2, \\ y=t-\sin^2 2t^2 \end{cases}$
1.22.	**a)** $y=\dfrac{\arccos 3x^5}{\sqrt{\operatorname{tg} 2x^2}}$;	**b)** $y=\cos 4\sqrt{x}\cdot\log_5\dfrac{4}{x^2}$;
	c) $3x^3y-5y^3x+(2x-3y)^5=0$;	**d)** $\begin{cases} x=\sin(1-t)^2 \\ y=(2t-1)^2 \end{cases}$
1.23.	**a)** $y=e^{\operatorname{arctg} 5x^2}\cdot\cos\sqrt{5x^3}$;	**b)** $y=\dfrac{\ln\sqrt{5-7x}}{\operatorname{arcctg}\dfrac{7}{x^3}}$;
	c) $\operatorname{tg} 2xy-3x^3+5y^2-6=0$;	**d)** $\begin{cases} x=t\sqrt{1-4t^2}, \\ y=\arcsin 2t \end{cases}$
1.24.	**a)** $y=\dfrac{\arccos\dfrac{6}{x^2}}{e^{\sqrt[3]{5x+7}}}$;	**b)** $y=\log_5 e^{4+3x}\cdot\sqrt{\operatorname{ctg} 5x^2}$;
	c) $4x^2y+7y^2=\log_3 5x^2$;	**d)** $\begin{cases} x=\arcsin t^2, \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{1-t^4}}. \end{cases}$

1.25.	**a)** $y=\dfrac{\ln\sqrt{4-7x}}{\arcsin\dfrac{8}{x^3}}$;	**b)** $y=\ln\left(\arccos\dfrac{2}{x}\right)\cdot\cos^3 5x$;
	c) $2y^3+5xy^2-3x^2=b^3$;	**d)** $\begin{cases} x=\operatorname{ctg}\dfrac{1}{2t}, \\ y=\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{1}{2t}}. \end{cases}$
1.26.	**a)** $y=\dfrac{4^{\arccos 2x^2}}{\operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}}$;	**b)** $y=\ln\left(3e^{-4x^2}\right)\cdot\sqrt{\arcsin 5x^5}$;
	c) $3x^3-2x^3y+\sin^2 3x=0$;	**d)** $\begin{cases} x=\operatorname{ctg}^2 2t, \\ y=\dfrac{1}{\sin^2 2t} \end{cases}$
1.27.	**a)** $y=\sqrt{7-2x^5}\cdot\cos\ln\dfrac{3}{\sqrt{x}}$;	**b)** $y=\dfrac{10^{\sin^2 3x}}{\ln\left(\sqrt[5]{5x-9}\right)}$;
	c) $2x^3\sin 2y+5y\operatorname{tg}2x=0$;	**d)** $\begin{cases} x=\operatorname{arcctg}2t, \\ y=\log_7\left(1+4t^2\right) \end{cases}$
1.28.	**a)** $y=\dfrac{\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{4}}{\sqrt{5^{4x^2-1}}}$;	**b)** $y=\arcsin e^{2x}\cdot\ln\dfrac{3}{x^3}$;
	c) $x^3\cos 2y-3x^2y^3+3\sqrt{x}-4=0$;	**d)** $\begin{cases} x=\ln\sqrt{1+7t^2}, \\ y=\operatorname{arctg}t\sqrt{7} \end{cases}$
1.29.	**a)** $y=\dfrac{\sqrt{5^{4x^2-1}}}{\arcsin\dfrac{5x}{4}}$;	**b)** $y=\sqrt{\log_3\ln x}\cdot 4^{\operatorname{tg}3x}$;
	c) $(2y+3x)^2+(y-2x)^3=0$;	**d)** $\begin{cases} x=\operatorname{arctg}2t^4, \\ y=\ln\left(1+4t^8\right) \end{cases}$

1.30.	**a)** $y=3\sin\ln\frac{\sqrt{5}}{x^2}\cdot\sqrt{\operatorname{tg}2x^2}$;	**b)** $y=\frac{\operatorname{ctg}(4x+1)}{7\ln\sqrt{2-3x^2}}$;
	c) $\sqrt{2xy+1}+\ln\frac{1}{x}+x\sin 2y=0$;	**d)** $\begin{cases} x=\frac{t^2}{2t-1}, \\ y=\frac{7}{t^2-1} \end{cases}$

<u>Задание 2.</u> Найти первые производные функций. В заданиях **а)** и **б)** дополнительно найти вторые производные.

2.1.	**а)** $y=3x^5+\frac{1}{x}+\sqrt[4]{x}$;	**б)** $y=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$;
	в) $y=(x+1)^2\cos 5x$;	**г)** $y=\operatorname{arctg}\left(e^{2x}+3\right)$;
	д) $y=\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}$;	**е)** $y=\ln\operatorname{tg}(2x+1)$;
	ж) $y=\frac{x^3}{(x-2)^2}$;	**з)** $y=2^{3x}+7x^7+e^{-x^2}$;
	и) $y=0{,}7^{\operatorname{ctg}^2 x}$;	**к)** $y=x^{\arcsin x}$
2.2.	**а)** $y=4x^7+\frac{1}{x^2}-\sqrt{2x}$;	**б)** $y=\frac{x+e^{3x+2}}{1+\cos 3x}$;
	в) $y=(x+2)\cdot e^{-x^2}$;	**г)** $y=\sin\left(3x^7+1\right)+8x$;
	д) $y=2^{\operatorname{tg}x}+3^{\cos 4x}$;	**е)** $y=x^2\cos 7x$;
	ж) $y=\frac{x^2}{(x+2)^2}$;	**з)** $y=\ln^5\sin x$;
	и) $y=\arcsin e^{4x}$;	**к)** $y=(\sin 2x)^{1/x}$
2.3.	**а)** $y=7x-\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x^3}$;	**б)** $y=\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$;

	в) $y=3x\cdot\arcsin 2x$;	**г)** $y=\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+1}$;
	д) $y=3^{\operatorname{ctg}x}+8^{\cos 4x}$;	**е)** $y=\sin^4 x+\cos^4 x$;
	ж) $y=\ln\dfrac{x^2}{1-x^2}$;	**з)** $y=\left(x^2+2x+2\right)\cdot e^{-x}$;
	и) $y=\sin(x+6)-x\cos 4x$;	**к)** $y=\left(x^2\right)^{1/x}$
2.4.	**а)** $y=9x^2+\dfrac{1}{2x^2}-\sqrt[3]{x}$;	**б)** $y=\sqrt[3]{1+x^3}$;
	в) $y=e^{\sin 5x}\cdot\ln x$;	**г)** $y=\ln\sin(2x+5)$;
	д) $y=0{,}9^{\cos^2 x}$;	**е)** $y=x\cdot\operatorname{arctg}3x$;
	ж) $y=\dfrac{9-x^2}{9+x^2}$;	**з)** $y=3\sin^2 x\cdot\cos 2x$;
	и) $y=e^{-x^2}+x^2+\dfrac{3}{x}$;	**к)** $y=x^{\arccos x}$
2.5.	**а)** $y=3x^5-\dfrac{1}{x^5}-\sqrt[5]{x}$;	**б)** $y=2\cdot\sqrt{4x+3}-\dfrac{3}{\sqrt{x^3}}$;
	в) $y=(\ln x+1)^2\cdot\cos 2x$;	**г)** $y=\arcsin\sqrt{1-4x}$;
	д) $y=5^{\operatorname{tg}x}+3^{\sin x}$;	**е)** $y=x\cdot\sqrt{1+x^2}$;
	ж) $y=\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$;	**з)** $y=\sin^2 2x+\cos x$;
	и) $y=\ln\operatorname{tg}5x$;	**к)** $y=(x+1)^{2x}$
2.6.	**а)** $y=2x^7-\dfrac{1}{7x^7}-\sqrt[7]{2x}$;	**б)** $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;
	в) $y=\left(3-\sin^2 x\right)^3$;	**г)** $y=\dfrac{1+\cos 2x}{x^3}+\sin(3x+9)$;
	д) $y=e^{\sqrt{2x}}+3$;	**е)** $y=\operatorname{arctg}x^2+7x^6+2$;
	ж) $y=\dfrac{x^2}{x^3-1}$;	**з)** $y=x^2\ln\left(x^2+1\right)$;

	и) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+5\cdot\sqrt[5]{x^3+1}$;	к) $y=(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$
2.7.	а) $y=3x^7-\frac{1}{x^7}-\sqrt[7]{3x}$;	б) $y=\sqrt{3-4x+5x^2}+4x\ln x$;
	в) $y=\arcsin(3x^2+2)$;	г) $y=\frac{\sin^2 x}{2+\cos^2 x}$;
	д) $y=3^{\sin^2 x}$;	е) $y=\frac{5+\sin 5x}{4-\cos 2x}$;
	ж) $y=(x^2+1)\operatorname{arctg} 4x$;	з) $y=(2x+5)\cdot e^{-x^5}$;
	и) $y=\ln\sqrt{2x+1}$;	к) $y=(\cos x)^{\sqrt{x}}$
2.8.	а) $y=4x^9-\frac{4}{x^9}-\sqrt[9]{4x}$;	б) $y=\sqrt[3]{1+\sqrt{x+3}}$;
	в) $y=\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}$;	г) $y=x\cdot\arccos\sqrt{4-x^2}$;
	д) $y=0{,}2^{\operatorname{ctg}^2 x}$;	е) $y=e^x\cos x$;
	ж) $y=3x^2\cdot\ln x^3$;	з) $y=\frac{3+\sin 2x}{9-e^{2x}}$;
	и) $y=(2x+2\cos x)e^{-x}$;	к) $y=(\sin 2x)^{\cos x}$
2.9.	а) $y=15x^3-\frac{15}{x^3}+\sqrt[3]{x^2}$;	б) $y=\sqrt{1+\ln^2 x}$;
	в) $y=\frac{\cos 3x+4}{\sin 3x-4}$;	г) $y=\operatorname{tg}^2\sqrt{x+5}+8x+7$;
	д) $y=3^{\arccos 3x}$;	е) $y=e^{\sin 4x+8}$;
	ж) $y=\frac{x}{x-1}-\ln 4x$;	з) $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;
	и) $y=\cos^{100} x+\sin 100x$;	к) $y=(x+x^2)^x$
2.10.	а) $y=5x^{10}+\frac{5}{x^{10}}+\sqrt[10]{5x}$;	б) $y=\sqrt{1+\cos^2 x^2}$;

в) $y = x^2 \cdot \sqrt{1 - x^2}$; **г)** $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}$;

д) $y = 5^{\sin x^3}$; **е)** $y = \sin x \cdot \cos(7x + 5)$;

ж) $y = \left(e^{\cos x} + 3\right)^2$; **з)** $y = \ln \sin(3x + 5)$;

и) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$; **к)** $y = \left(x^3\right)^{\ln x}$

2.11.

а) $y = 3x^{11} + \dfrac{5}{x^{11}} + \sqrt[11]{x^3}$; **б)** $y = \left(\sin \dfrac{x}{2} - \cos \dfrac{x}{2}\right)^2$;

в) $y = \dfrac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$; **г)** $y = \operatorname{arctg}(\ln x) + \ln(\sin x)$;

д) $y = 2^{\cos\left(4x + x^2\right)}$; **е)** $y = \left(1 - x^2\right) \cdot \cos 2x$;

ж) $y = \sqrt[3]{x + x\sqrt{x}}$; **з)** $y = e^{-x} \cdot \sin 2x$;

и) $y = \ln^5\left(x^2 - 1\right)$; **к)** $y = \left(\sqrt{x}\right)^{1/x}$

2.12.

а) $y = 12x^7 - \dfrac{12}{x^7} + \sqrt[7]{x^2}$; **б)** $y = x^2 \cdot \arccos \dfrac{x}{2} - 4x$;

в) $y = \dfrac{x^5}{x^4 + 2}$; **г)** $y = \operatorname{arctg}^2 x + 6x^2$;

д) $y = 5^{\frac{1 - x^2}{1 + x^2}} + 7^{\cos 4x}$; **е)** $y = e^{\operatorname{ctg} 3x}$;

ж) $y = \sqrt[4]{1 + \cos x^4}$; **з)** $y = \dfrac{4 + \cos 3x}{\sin(5x + 3)}$;

и) $y = \left(x^3 + x^2\right) \cdot e^{-x}$; **к)** $y = x^{\arcsin^2 x}$

2.13.

а) $y = 6x^7 + \dfrac{7}{x^6} + \sqrt[6]{x^5}$; **б)** $y = \sqrt[3]{2 - x^2 \cdot \sqrt{x}}$;

в) $y = \dfrac{x^6}{6x^5 - 1}$; **г)** $y = \ln^3 \sin(3x + 3)$;

д) $y = 2^{\operatorname{tg} 3x}$; **е)** $y = \ln\left(x^2 + 5\right)$;

	ж) $y = x^5 \cdot e^{-x}$;	**з)** $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;
	и) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$;	**к)** $y = \left(\sqrt{x}\right)^{\sin x}$
2.14.	**а)** $y = 12x^{14} + \dfrac{14}{x^2} - \sqrt[12]{x}$;	**б)** $y = \sqrt[3]{x^2 + 3x}$;
	в) $y = \dfrac{x}{x^2+2}$;	**г)** $y = \ln\left(2x^3 + 3x^2\right)$;
	д) $y = 5^{\frac{x}{x+1}}$;	**е)** $y = 8x \cdot e^{-x^2}$;
	ж) $y = (3x+1)^5 \cdot \cos 3x$;	**з)** $y = \dfrac{\sin x}{3\cos^2 x}$;
	и) $y = \operatorname{arctg}^2 e^x$;	**к)** $y = x^{\ln^2 x}$
2.15.	**а)** $y = x^{15} + \dfrac{15}{x^2} - \sqrt{x}$;	**б)** $y = \left(5x + x^3\right) \cdot \ln x^2$;
	в) $y = \dfrac{x\cos x}{1-\sin x} + 2\sin 4x$;	**г)** $y = \arccos \dfrac{1}{2x^2}$;
	д) $y = 0{,}7^{\operatorname{arctg} x}$;	**е)** $y = \cos\left(10x + x^3\right)$;
	ж) $y = \left(1 + \sqrt[3]{x}\right)^3$;	**з)** $y = \dfrac{7-\cos 3x}{5+\sin 5x}$;
	и) $y = \ln(4 + \sin 4x)$;	**к)** $y = x^{\sin\sqrt{x}}$
2.16.	**а)** $y = 2x^5 + \dfrac{5}{x^2} - \sqrt[5]{2x}$;	**б)** $y = \sqrt[3]{\cos^2 x + x^2}$;
	в) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^3}}$;	**г)** $y = x \cdot \arccos\sqrt{2-x^3}$;
	д) $y = 7^{\ln^2 x}$;	**е)** $y = (3x+2) \cdot \sin 3x$;
	ж) $y = \ln^2 \operatorname{tg} 2x$;	**з)** $y = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x} + \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$;

	и) $y=\arcsin\left(e^{7x}\right)$;	**к)** $y=(\sin 2x)^{x}$
2.17.	**а)** $y=x^{7}+\dfrac{7}{x^{3}}-\sqrt[3]{7x}$;	**б)** $y=\dfrac{\sin x}{1+\ln\sin x}$;
	в) $y=\left(5+x^{3}\right)^{2}\cdot e^{-x}$;	**г)** $y=2\sqrt{4x}-\dfrac{4}{\sqrt[3]{x^{2}+5}}$;
	д) $y=7^{\sqrt{\cos x}}$;	**е)** $y=e^{x}\cdot\sin 2x$;
	ж) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{3-x}{x-2}}$;	**з)** $y=\sqrt[3]{x+\sqrt[3]{x}}$;
	и) $y=\cos 3^{x}$;	**к)** $y=(\arcsin x)^{x^{2}}$
2.18.	**а)** $y=x^{5}+\dfrac{5}{x^{3}}-\sqrt[3]{5x}$;	**б)** $y=\dfrac{2\sin 5x}{1-\cos x}$;
	в) $y=\arcsin\left(\cos x^{2}\right)+x^{2}$;	**г)** $y=2\operatorname{tg}^{3}\left(x^{3}+2\right)$;
	д) $y=2^{\sin 3x}$;	**е)** $y=\left(x^{2}+6\right)\cdot\ln 3x$;
	ж) $y=\dfrac{x^{2}}{1-x}+\dfrac{9x+8}{x^{3}}$;	**з)** $y=e^{3x}\cdot\cos 3x$;
	и) $y=\operatorname{arctg}^{2}\dfrac{1}{x}$;	**к)** $y=(x+1)^{x^{2}}$
2.19.	**а)** $y=7x^{2}+\dfrac{x^{5}}{5}-\sqrt[5]{x}$;	**б)** $y=\ln\operatorname{ctg}^{3}x^{3}$;
	в) $y=\dfrac{x^{7}}{x^{5}-2}$;	**г)** $y=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}^{2}x+2\right)$;
	д) $y=2^{\frac{x}{1+x}}+7^{\cos 2x}$;	**е)** $y=\sin^{2}6x+3x^{2}$;
	ж) $y=\sqrt{3x}\cdot\arcsin x^{2}$;	**з)** $y=\dfrac{1+e^{2x}}{1-e^{4x}}$;
	и) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^{2}+2x+3}\right)$;	**к)** $y=\left(\sin\sqrt{x}\right)^{x}$
2.20.	**а)** $y=x^{7}-\dfrac{x^{6}}{6}+\sqrt[6]{x}$;	**б)** $y=\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}$;

	в) $y=3x\cdot\sin^3 x-\cos^3 x$;	**г)** $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$;
	д) $y=\ln^2\sin 3x$;	**е)** $y=2\ln\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$;
	ж) $y=\dfrac{x}{6(x+1)}$;	**з)** $y=\arcsin\left(e^{-4x}\right)$;
	и) $y=5^{\frac{1-x}{1+x}}+3^{\cos 4x}$;	**к)** $y=(3x)^{e^x}$
2.21.	**а)** $y=x^5-\dfrac{1}{x^5}+\sqrt[5]{x}$;	**б)** $y=\sqrt{x+2\sqrt{x}}$;
	в) $y=\sqrt{x}\cdot e^{\sqrt{x}}+5^{\cos 4x}$;	**г)** $y=\operatorname{arctg}(7\sin 3x)$;
	д) $y=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}$;	**е)** $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}+\dfrac{2+6x}{x^3}$;
	ж) $y=\ln^2\operatorname{arctg}x$;	**з)** $y=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}+\ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)$;
	и) $y=\left(\sqrt{x}\right)^{\cos x}$;	**к)** $y=\dfrac{x^2}{1+x^3}$
2.22.	**а)** $y=\sqrt[4]{x^3}+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}+2$;	**б)** $y=\operatorname{tg}\left(x^2+3\right)$;
	в) $y=x^{\cos^2 x}$;	**г)** $y=\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)$;
	д) $y=x^2\cdot\arcsin(9x+2)$;	**е)** $y=\dfrac{1+2\cos 3x}{1-\cos 2x}$;
	ж) $y=0{,}9^{\sqrt{x}}$;	**з)** $y=\sin^3\dfrac{x}{3}+\cos x$;
	и) $y=0{,}7^{x^5}$;	**к)** $y=x\sqrt{x}\cdot(3\ln x-2)$
2.23.	**а)** $y=\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{4}{x}-\dfrac{3}{x^2}+\ln 3$;	**б)** $y=\sqrt{2x-\sin 2x}$;

	в) $y=\sin^4 x+x^2\cdot\cos^2 x$;	**г)** $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$;
	д) $y=5^{\cos^2 x}$;	**е)** $y=e^{-1/x^2}$;
	ж) $y=3\operatorname{tg}^6 x+\cos 7$;	**з)** $y=4x\cdot\operatorname{arctg}(2x+9)$;
	и) $y=\dfrac{x^2}{(x-3)^2}$;	**к)** $y=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\arccos x}$
2.24.	**а)** $y=\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{2}{x^2}+1$;	**б)** $y=\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$;
	в) $y=\sqrt[3]{x}\cdot\operatorname{arctg} x$;	**г)** $y=\left(x^2-x^3\right)\cdot e^{-x}$;
	д) $y=15^{\ln^2 x}$;	**е)** $y=\operatorname{tg}\left(x^2+\cos x\right)$;
	ж) $y=\sqrt{\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}}$;	**з)** $y=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)$;
	и) $y=3x^3+\ln^3 x$;	**к)** $y=\left(\sqrt{x}\right)^{\operatorname{arctg} x}$
2.25.	**а)** $y=3x^5-\dfrac{1}{x^5}+\dfrac{1}{x^4}+2$;	**б)** $y=\operatorname{tg} x+\dfrac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x+\dfrac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$;
	в) $y=x^3\cdot(x-5\cos x)^2$;	**г)** $y=\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-2\cdot\sqrt[3]{x}}$;
	д) $y=5^{\sin 3x}$;	**е)** $y=\sqrt{1+x^2}+5^{\cos 3x}$;
	ж) $y=\ln^6 \sin x$;	**з)** $y=\arccos\dfrac{9-x^2}{9+x^2}$;
	и) $y=(1+9x)\cdot e^{-x^2}$;	**к)** $y=(1+x)^{\cos x}$
2.26.	**а)** $y=4x^2-\dfrac{3}{2x^2}+\sqrt[3]{x}$;	**б)** $y=\dfrac{2+e^{3x}}{9-e^{-4x}}$;
	в) $y=\operatorname{arctg}\left(x^2+e^{3x}\right)$;	**г)** $y=\ln\operatorname{tg}(5x+1)$;
	д) $y=3^{\ln 3x}$;	**е)** $y=\ln(2x-3\cos 4x)$;

	ж) $y=\dfrac{3+\sin 4x}{8-\cos 3x}$;	**з)** $y=\left(2x^3+5\right)^4\cdot x^3$;
	и) $y=\sin 5x+\cos 3x^3$;	**к)** $y=x^{2/x}$
2.27.	**а)** $y=3x^5-\dfrac{5}{x^5}+\sqrt[5]{5x+2}$;	**б)** $y=\arcsin\left(3x^3+4\right)$;
	в) $y=(x+8)\cdot\operatorname{arctg} 4x^3$;	**г)** $y=\dfrac{2x^3+3x^2}{3x-1}$;
	д) $y=4x\cdot(1-3\ln x)$;	**е)** $y=\dfrac{5x+\sin 4x}{\cos 2x-4}$;
	ж) $y=\ln\cos\left(5x^3+4\right)$;	**з)** $y=(\operatorname{ctg} 3x+1)^5$;
	и) $y=5^{\sin 2x}$;	**к)** $y=(\cos x)^x$
2.28.	**а)** $y=5x-\dfrac{1}{x^2}-\sqrt[5]{x}$;	**б)** $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$;
	в) $y=\sqrt[3]{(4+3x)^2}$;	**г)** $y=x^2\cdot\operatorname{ctg} 2x$;
	д) $y=\cos^2 5x+7x$;	**е)** $y=\cos^2 x-2\ln\cos x$;
	ж) $y=\dfrac{1}{(1+\sin 4x)^3}$;	**з)** $y=\arcsin^2\dfrac{1}{x}$;
	и) $y=7^{-x^2}$;	**к)** $y=(\cos x)^{\sin x}$
2.29.	**а)** $y=\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{3x^3}+\sqrt[3]{x}$;	**б)** $y=\dfrac{2}{2x^2+5}$;
	в) $y=(x+5)^7\cdot\sin 3x$;	**г)** $y=\sin^3 x+\cos^3 x$;
	д) $y=52^{\operatorname{ctg} x}$;	**е)** $y=\operatorname{arctg}\sqrt{4x^2-1}$;
	ж) $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$;	**з)** $y=(x+1)\cdot\arccos\left(x^2+1\right)$;
	и) $y=\ln\dfrac{x^5}{x^5-2}$;	**к)** $y=(\operatorname{tg} x)^{x+2}$

2.30.	**а)** $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\sin 3$; **б)** $y=3x\cdot\sin 5x+8$; **в)** $y=(3+\sin x)^2\cdot x$; **г)** $y=\frac{3x+2}{x^2-2x+5}$; **д)** $y=\arcsin\sqrt[3]{x}$; **е)** $y=\left(\frac{\sin x}{1+\cos 2x}\right)^2$; **ж)** $y=x\cdot(\cos\ln x+\sin\ln x)$; **з)** $y=2\cdot\left(e^{x/2}-e^{x/3}\right)$; **и)** $y=0{,}92^{x^3}$; **к)** $y=\left(\sqrt{x}\right)^{\mathrm{tg}^2 x}$

Задание 3. Найти производные функций.

3.1.	**а)** $y=\mathrm{tg}\,x+\ln\cos x+e^{5x}$; **б)** $y=e^{x-\arcsin x}$; **в)** $x^3y^3-2xy+3=0$
3.2.	**а)** $y=\ln\frac{x^2}{x+1}+3x\sqrt[3]{x}$; **б)** $y=2^{\mathrm{arctg}\,x-x^2}$; **в)** $x^2y^2-\cos x=0$
3.3.	**а)** $y=x^2+x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$; **б)** $y=2^{\arcsin\frac{1}{x}}$; **в)** $\cos(xy)-2=0$
3.4.	**а)** $y=\ln\frac{(x-1)^2}{x+2}+3\sqrt[3]{x^2}$; **б)** $y=2^{\frac{4}{\sin x}}$; **в)** $\frac{x}{y}+xy-2=0$
3.5.	**а)** $y=\ln\frac{x^2}{x-1}+4x\sqrt[4]{x}$; **б)** $y=\left(e^{\sin x}+3x\right)^3$; **в)** $5x^2y^2-7y+4=0$
3.6.	**а)** $y=x^3(3\ln x-1)-\frac{x+1}{e^x}$; **б)** $y=\left(5^{tg\,2x}+3\right)^4$;

	в) $x^3y^3-2xy+1=0$	
3.7.	**а)** $y=\ln\dfrac{(x+1)^2}{x+3}+3x\sqrt[3]{x}$; **в)** $x^2+xy+y^2=3$	**б)** $y=5^{\arcsin x^2}$;
3.8.	**а)** $y=e^{5x}(5x-1)-\dfrac{2\ln x+1}{x^2}$; в) $x^2+y^2-xy=0$	**б)** $y=4^{\operatorname{arctg}\frac{3}{x}}$;
3.9.	**а)** $y=\ln\dfrac{(x+1)^2}{x-2}+4\cdot\sqrt[4]{x^3}$; **в)** $x^3+y^3-3xy=0$	**б)** $y=2^{\sin^2\frac{1}{x}}$;
3.10.	**а)** $y=x(\ln x-1)+e^{3x}(3x-1)$; **в)** $x^4+y^4=x^2y^2$	**б)** $y=3^{\cos^2 4x}$;
3.11.	**а)** $y=x\arccos\dfrac{x}{2}-\sqrt{4-x^2}$; **в)** $y=\sqrt{x}+xe^y$	**б)** $y=e^{x\sin^2 x}$;
3.12.	**а)** $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{4}\arcsin\dfrac{x}{a}$; **в)** $y^3+e^{xy}=x$	**б)** $y=e^{\sqrt{x+1}}$;
3.13.	**а)** $y=\ln\left(3x^2+\sqrt{9x^4+1}\right)$; **в)** $xy+e^y=x^2$	**б)** $y=x10^{\sqrt{x}}$;
3.14.	**а)** $y=-\operatorname{ctg}^2\dfrac{x}{2}-2\ln\sin\dfrac{x}{2}$; **в)** $x^2y^3-\sin y+3=0$	**б)** $y=2^{x\cdot\operatorname{tg}x}$;
3.15.	**а)** $y=\dfrac{(2x+1)\sqrt{x^2-x}}{x^2}$; **в)** $y\sin x+xy^2=0$	**б)** $y=e^{-x^2}\ln x$;

3.16.	**а)** $y=\dfrac{\sqrt{2x+3}(x-2)}{x^2}$;	**б)** $y=e^{\sqrt{\ln x}}$;
	в) $x^3y^2-\cos y+4e^x=0$	
3.17.	**а)** $y=\dfrac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^3}}$;	**б)** $y=e^{1-\sin^2 x}$;
	в) $\ln y+xy-5=0$	
3.18.	а) $y=e^x(\cos 2x+2\sin 2x)$;	**б)** $y=2^{\sin^2 x}$;
	в) $x^2y^3+x\ln y=0$	
3.19.	**а)** $y=\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$;	**б)** $y=e^{\arcsin 2x}$;
	в) $tgy-xy^2=0$	
3.20.	**а)** $y=\operatorname{arctg}(x+1)+\dfrac{x+1}{x^2+2x+3}$;	**б)** $y=\sin 2^x$;
	в) $\sin y-xy^2+4=0$	
3.21.	**а)** $y=\operatorname{ctg}^3\dfrac{2}{x^3}+4x\cdot\sqrt[5]{x^2}$;	**б)** $y=\left(2^{\sin 3x}-3x\right)^5$;
	в) $7x^2y^2+\sqrt{5x}=3y^2-xy$	
3.22	**а)** $y=\ln\left\|\cos\dfrac{3}{x^2}\right\|-3x^2\cdot\sqrt[4]{x^3}$;	**б)** $y=\left(4^{\ln x}+3x\right)^4$;
	в) $2x^3y^4-4\cdot\sqrt{7xy}=3x^2y^3$	
3.23.	**а)** $y=x^4\cos\dfrac{6}{\sqrt{x}}+4x\cdot\sqrt[4]{x^3}$;	**б)** $y=7^{\operatorname{arctg}x^5+\ln x}$;
	в) $\sqrt{x^3}y^4-\sqrt{8xy^3}-4y=x$	
3.24.	**а)** $y=\ln\dfrac{3+x^2}{(x-3)^2}-5x^3\cdot\sqrt[3]{x}$;	**б)** $y=3^{\operatorname{arctg}\sqrt{x^5}}$;
	в) $2xy^4+\sqrt{8x^3y}+3\sqrt{y}=x$	

3.25.	**а)** $y = x\cos\dfrac{1}{2x^2} + 4x\cdot\sqrt[4]{x}$; **в)** $3x^2y^3 + 2\cdot\sqrt{5x} + 3x^3y^3 = 0$	**б)** $y = 5^{x-\sqrt{\ln x}}$;
3.26.	**а)** $y = \ln\dfrac{(2-x)^3}{x^2-2} + 3x^2\cdot\sqrt[3]{x}$; **в)** $3x^2y^5 + \sqrt{3x^5} + 3x^3\sqrt{y} = y$	**б)** $y = 2^{1-\arcsin\sqrt{x^5}}$;
3.27.	**а)** $y = \mathrm{tg}^2\dfrac{4}{x^2} - 5x^2\cdot\sqrt[5]{x}$; **в)** $4x^3 + 2x\sqrt{y} = 3x^4y - y$	**б)** $y = \left(3^{\log_3 3x} - \mathrm{tg}3x\right)^5$;
3.28.	**а)** $y = x^3\ln\dfrac{4}{\sqrt{x^3}} - 7x\cdot\sqrt[5]{x^2}$; **в)** $x\sqrt{y^3} + \sqrt{2y} - 5x^2 = xy$	**б)** $y = 10^{\arccos x^5 + \lg x}$;
3.29.	**а)** $y = \lg\dfrac{2-x^2}{(x+2)^3} - 6x\cdot\sqrt[3]{x}$; **в)** $2y^4 + 5\sqrt{x^3y} + 3x\sqrt{y} = x$	**б)** $y = 7^{\mathrm{tg}\sqrt{x^3}}$;
3.30.	**а)** $y = \arccos\sqrt{2x} - 6x^3\cdot\sqrt[4]{x}$; **в)** $7x^2y^2 + \sqrt{5x} = 3y^2 - xy$	**б)** $y = x\cdot e^{\mathrm{tg}\sqrt{x^3}}$;

Задание 4. Найдите вторую производную данной функции в заданной точке x_0.

4.1.	$y = (x+2)\ln(x+3)$, $x_0 = -2$	**4.2.**	$y = (x+2)\ln(x-2)$, $x_0 = 3$
4.3.	$y = (x+3)\cdot e^{2x}$, $x_0 = 0$	**4.4.**	$y = (2x+7)\cdot e^{-x}$, $x_0 = 0$
4.5.	$y = \cos^2 3x$, $x_0 = \pi$	**4.6.**	$y = \dfrac{3x-1}{3x+1}$, $x_0 = \dfrac{1}{3}$

4.7.	$y=(x-5)\ln(x-4)$, $x_0=5$	**4.8.**	$y=\ln(16+x^2)$, $x_0=0$
4.9.	$y=e^x\cdot\sin 4x$, $x_0=0$	**4.10.**	$y=x\cdot\sin 2x$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$
4.11.	$y=x\cdot\mathrm{tg}\,x$, $x_0=0$	**4.12.**	$y=(x+5)\cdot e^{3x}$, $x_0=0$
4.13.	$y=\ln(2t^3-1)$, $x_0=1$	**4.14.**	$y=2x^2\cdot\ln 3x$, $x_0=\dfrac{1}{3}$
4.15.	$y=x^5\cdot\ln x$, $x_0=1$	**4.16.**	$y=e^{x^3}$, $x_0=0$
4.17.	$y=e^{\sqrt{x}}$, $x_0=4$	**4.18.**	$y=\sin^2 2x$, $x_0=0$
4.19.	$y=\dfrac{x}{x^2-1}$, $x_0=2$	**4.20.**	$y=e^{x^2-4}$, $x_0=-2$
4.21.	$y=\dfrac{2}{x^3}\ln\dfrac{2}{x^3}-5$, $x_0=1$	**4.22.**	$y=x^2\cos 2x$, $x_0=\dfrac{\pi}{3}$
4.23.	$y=\dfrac{5x}{x^3-3}$, $x_0=2$	**4.24.**	$y=(x^2+1)\mathrm{arctg}\,x$, $x_0=1$
4.25.	$y=e^{2x}\sin 3x$, $x_0=0$	**4.26.**	$y=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$, $x_0=2$

4.27.	$y=(x+3)\cos 3x$, $x_0=\dfrac{\pi}{3}$	**4.28.**	$y=\dfrac{3}{x^2}\ln\dfrac{3}{x^2}-1$, $x_0=1$
4.29.	$y=\ln\lvert 5-x^2\rvert$, $x_0=2$	**4.30.**	$y=e^{-2x}\cos 4x$, $x_0=0$

<u>**Задание 5**</u>**.** Для функций, заданных параметрически, найти $\dfrac{dy}{dx}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

5.1. $\begin{cases} x=\cos 2t, \\ y=t-\sin 2t \end{cases}$

5.2. $\begin{cases} x=t^3+8t, \\ y=t^4+2t \end{cases}$

5.3. $\begin{cases} x=\sin 3t, \\ y=\cos 3t \end{cases}$

5.4. $\begin{cases} x=\cos 3t \\ y=t-\sin 3t \end{cases}$

5.5. $\begin{cases} x=t+\ln\cos 2t, \\ y=t-\ln\sin 2t \end{cases}$

5.6. $\begin{cases} x=2t-t^3 \\ y=2t^2 \end{cases}$

5.7. $\begin{cases} x=e^t\cos t, \\ y=e^t\sin t \end{cases}$

5.8. $\begin{cases} x=\ln t \\ y=t+\ln t \end{cases}$

5.9. $\begin{cases} x=t^4+1, \\ y=t^2+t \end{cases}$

5.10. $\begin{cases} x=\ln 2t \\ y=t+t^2 \end{cases}$

5.11. $\begin{cases} x=5\sin t-\sin 5t, \\ y=5\cos t+\cos 5t \end{cases}$

5.12. $\begin{cases} x=e^t(t-\cos t), \\ y=e^t(\sin t-1) \end{cases}$

5.13. $\begin{cases} x=\arccos\sqrt{t}, \\ y=\sqrt{t^2-t} \end{cases}$

5.14. $\begin{cases} x=e^t\cos 2t \\ y=e^t\sin 2t \end{cases}$

5.15. $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1+\cos t \end{cases}$

5.16. $\begin{cases} x=\arcsin t, \\ y=\sqrt{1-t^2} \end{cases}$

5.17. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin^2 t \end{cases}$

5.18. $\begin{cases} x = \arcsin\left(t^2 - 1\right), \\ y = \arccos t^2 \end{cases}$

5.19. $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t \end{cases}$

5.20. $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = \cos^2 t \end{cases}$

5.21. $\begin{cases} x = t + \cos t, \\ y = t - \sin t \end{cases}$

5.22. $\begin{cases} x = t^5 - t^3 + 1, \\ y = 4t^4 + t. \end{cases}$

5.23. $\begin{cases} x = \ln \operatorname{ctg} t, \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t \end{cases}$

5.24. $\begin{cases} x = e^t (t + 1), \\ y = e^t (t - 1) \end{cases}$

5.25. $\begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \sin^2 t \end{cases}$

5.26. $\begin{cases} x = t^2 - \sin 2t, \\ y = t - \cos 2t \end{cases}$

5.27. $\begin{cases} x = \arccos\sqrt{t}, \\ y = \sqrt{t^2 - 1} \end{cases}$

5.28. $\begin{cases} x = \arcsin\sqrt{t}, \\ y = \sqrt{1 - t} \end{cases}$

5.29. $\begin{cases} x = 2t - \sin 2t, \\ y = 1 + \cos 2t \end{cases}$

5.30. $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = t - \sin t \end{cases}$

<u>Задание 6.</u> Найти производную первого порядка заданной функции y.

6.1.	**а)** $y = \left(3x - 4\sqrt[3]{x} + 2\right)^4$;	**б)** $y = \dfrac{4x + 7\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + 9x^2}}$;
	в) $y = \cos 3x \cdot e^{\sin x}$	
6.2.	**а)** $y = \left(3x^3 - 2\sqrt[3]{x^2} - 1\right)^2$;	**б)** $y = \dfrac{\arcsin 3x}{1 - 8x^2}$;
	в) $y = 2^{3x} \cdot \operatorname{tg} 2x$	

6.3.	**а)** $y=\left(x^2-\frac{1}{x^3}+5\sqrt{x}\right)$; **в)** $y=e^{\operatorname{tg}x}\cdot\ln 2x$	**б)** $y=\frac{\arcsin 7x}{x^4+e^x}$;
6.4.	**а)** $y=\left(4x^2-\frac{3}{\sqrt{x}}+4\right)^3$; **в)** $y=2^{8x}\operatorname{tg}3x$	**б)** $y=\frac{\sin 2x}{\cos 5x}$;
6.5.	**а)** $y=\left(x^5-\sqrt[3]{x}+1\right)^5$; **в)** $y=e^{\operatorname{ctg}x}\sin 4x$	**б)** $y=\frac{\sqrt{1-4x^2}}{2^x+\operatorname{tg}x}$;
6.6.	**а)** $y=\left(6x^2-\frac{2}{x^4}+5\right)^2$; **в)** $y=3^{\operatorname{tg}x}\arcsin\left(x^2\right)$	**б)** $y=\frac{\cos 3x}{\sqrt{3x^2+4}}$;
6.7.	**а)** $y=\left(x^3-4\sqrt[4]{x^3}+2\right)^3$; **в)** $y=e^{\operatorname{ctg}x}\cos 6x$	**б)** $y=\frac{\operatorname{arctg}7x}{2-9x^2}$;
6.8.	**а)** $y=\left(x^2-2\sqrt[5]{x}+4\right)^4$; **в)** $y=4^{\cos x}\operatorname{arctg}2x$	**б)** $y=\frac{x^3+e^x}{\sqrt{4-9x^5}}$;
6.9.	**а)** $y=\left(3x^5-\frac{5}{x^3}-2\right)^5$; **в)** $y=e^{x^3}\operatorname{tg}7x$	**б)** $y=\frac{\cos 6x}{\sin 3x}$;
6.10.	**а)** $y=\left(x^4+2\sqrt[3]{x}+1\right)^2$; **в)** $y=2^{\sin x}\arcsin 2x$	**б)** $y=\frac{\sqrt{3-5x^3}}{e^x-\operatorname{ctg}x}$;

6.11.	**а)** $y=\left(3x^5-\frac{1}{x^4}+1\right)^3$; **б)** $y=\frac{x^4+\operatorname{tg}x}{\sqrt{4x^2+7}}$; **в)** $y=e^{\arcsin x}\operatorname{ctg}3x$
6.12.	**а)** $y=\left(2x^4-3\sqrt[3]{x}-1\right)^4$; **б)** $y=\frac{\sqrt{2-x^2}}{\cos 2x}$; **в)** $y=5^{\operatorname{arcctg}x}\sin 4x$
6.13.	**а)** $y=\left(3x^5+2\sqrt[4]{x}-8\right)^5$; **б)** $y=\frac{\operatorname{ctg}x-\cos x}{\sqrt{5x^2+1}}$; **в)** $y=e^{x^3}\arcsin 2x$
6.14.	**а)** $y=\left(x^3-\frac{3}{x^2}+4\right)^2$; **б)** $y=\frac{\sqrt{2-3x^5}}{\sin 2x}$; **в)** $y=4^{\operatorname{tg}x}\operatorname{arctg}3x$
6.15.	**а)** $y=\left(5x^2-3\sqrt[5]{x^2}-2\right)^3$; **б)** $y=\frac{2^x+\operatorname{ctg}x}{\sqrt{4+2x^3}}$; **в)** $y=e^{\sin x}\arccos 3x$
6.16.	**а)** $y=\left(2x^4+\frac{2}{x^3}-7\right)^4$; **б)** $y=\frac{\sqrt{1-7x^5}}{\cos 4x}$; **в)** $y=5^{6x}\arcsin 5x$
6.17.	**а)** $y=\left(3x^2-2\sqrt[4]{x}+5\right)^5$; **б)** $y=\frac{2x^2-\operatorname{ctg}x}{\sqrt{6x^2+5}}$; **в)** $y=e^{\arcsin x}\cos 4x$
6.18.	**а)** $y=\left(6x^6+\frac{3}{x^4}-8\right)^2$; **б)** $y=\frac{\sqrt{2-5x}}{\sin 3x}$; **в)** $y=4^{\operatorname{arctg}x}\cos 6x$

6.19.	**а)** $y=\left(4x^5-3\sqrt[5]{x^2}-7\right)^3$;	**б)** $y=\dfrac{\cos x-4x^3}{\sqrt{8+7x^5}}$;
	в) $y=e^{\sin x}\operatorname{arctg}3x$	
6.20.	**а)** $y=\left(3x^2-\dfrac{5}{x^3}+1\right)^4$;	**б)** $y=\dfrac{\sqrt{4x^5-2}}{\sin 7x}$;
	в) $y=2^{\operatorname{arctg}x}\arcsin 2x$	
6.21.	**а)** $y=\left(x^4+1\right)e^{\sin x}$;	**б)** $y=\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{1+4x^2}$;
	в) $y=\ln\sqrt{2x^2+3}$	
6.22.	**а)** $y=\left(1+9x^2\right)\operatorname{arctg}3x$;	**б)** $y=\dfrac{\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}$;
	в) $y=\ln\sqrt{x^2+2x+5}$	
6.23.	**а)** $y=\left(3x-\sqrt{x}+1\right)^5$;	**б)** $y=\dfrac{1+16x^2}{\operatorname{arctg}4x}$;
	в) $y=\ln\sqrt{4x^2+1}$	
6.24.	**а)** $y=\cos 3xe^{3x}$;	**б)** $y=\dfrac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}$;
	в) $y=\ln\operatorname{tg}2x$	
6.25.	**а)** $y=\left(x^2+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+2\right)^3$;	**б)** $y=\dfrac{\arccos 2x}{\sqrt{1-4x^2}}$;
	в) $y=\ln\sqrt{3x^2+1}$	
6.26.	**а)** $y=\left(x^3+2\right)2^{3x}$;	**б)** $y=\dfrac{\arcsin 3x}{\sqrt{1-9x^2}}$;
	в) $y=\ln\operatorname{ctg}5x$	
6.27.	**а)** $y=\left(x^3-3\sqrt[3]{x^2}+1\right)^2$;	**б)** $y=\dfrac{\sin 3x+1}{\cos 3x+1}$;

	в) $y = \ln\sqrt{2x^2+5}$	
6.28.	**а)** $y = \left(1+4x^2\right)\operatorname{arctg}2x$; **в)** $y = \ln\cos 5x$	**б)** $y = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}$;
6.29.	**а)** $y = \left(x^5 - 3\sqrt[3]{x}+1\right)^5$; **в)** $y = \ln\sqrt{2x^2+4x+1}$	**б)** $y = \dfrac{3-\cos 5x}{3+\sin 5x}$;
6.30.	**а)** $y = \left(x^2 - 4\sqrt{x}+3\right)^4$; **в)** $y = \ln\sqrt{4x^2+x}$	**б)** $y = \dfrac{e^{\operatorname{tg}x}}{1+\cos^2 x}$;

Задание 7. Найти значение $\dfrac{dy}{dx}$ в точке $M(x_0; y_0)$ для функций, заданных неявно.

7.1. $x^3 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5 = 0$, $M(1; 1)$

7.2. $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 - 6 = 0$, $M(1; -1)$

7.3. $x^4 - 6x^2y^2 + 9y^2 - 5x^2 + 15y^2 + 4 = 0$, $M(2; 1)$

7.4. $x^3 + y^3 - 3xy + 1 = 0$, $M(-2;1)$

7.5. $5x^2 + 3xy - 2y^2 + 2 = 0$, $M(0; 1)$

7.6. $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 19 = 0$, $M(3; 2)$

7.7. $x^3 + x^2y + y^2 - 13 = 0$, $M(1; 3)$

7.8. $x^3 - 2x^2 + y^2 = 0$, $M(1; 1)$

7.9. $x^2 + 5xy + y^2 - 2x + y - 6 = 0$, $M(1; 1)$

7.10. $x^5 + y^5 - 2xy = 0$, $M(1; 1)$

7.11. $x^2 + xy + y^2 = 7$, $M(-1; -2)$

7.12. $2x^3 - xy + y - 2 = 0,$ $M\,(1;\,5)$

7.13. $3x^2 - xy + y - 3 = 0,$ $M\,(1;\,-2)$

7.14. $x^2 + 2y^2 + 6x - 4y - 13 = 0,$ $M\,(1;\,-1)$

7.15. $3x^2 - 5y^2 - 6x - 20y + 25 = 0,$ $M\,(2;\,1)$

7.16. $4x^2 + y^2 + 8x - 4y + 3 = 0,$ $M\,(0;\,1)$

7.17. $2x^2 - 9y^2 + 4x + 18y + 11 = 0,$ $M\,(2;\,-1)$

7.18. $x^3 - xy + y + 7 = 0,$ $M\,(-1;\,-3)$

7.19. $x^4 - y^2 - y - 1 = 0,$ $M\,(1;\,0)$

7.20. $x^3 + 2xy^2 + y + 11 = 0,$ $M\,(-1;\,-2)$

7.21. $x^3 + 5xy + y^3 - 7 = 0,$ $M\,(1;\,1)$

7.22. $3x^2 - xy + y^3 - x = 0,$ $M\,(0;\,2)$

7.23. $x^6 + y^6 - 2xy = 0,$ $M\,(1;\,1)$

7.24. $x^2 + x^2y - y^2 - y = 0,$ $M\,(1;\,1)$

7.25. $7x^2 + xy - y^3 + 3 = 0,$ $M\,(1;\,-2)$

7.26. $x^2y^2 + xy + x^2 - 7 = 0,$ $M\,(1;\,2)$

7.27. $2x^5 + y^5 - 2xy + 26 = 0,$ $M\,(1;\,-2)$

7.28. $3x^2 - xy + y^2 + x - 34 = 0,$ $M\,(-2;\,4)$

7.29. $x^2 - x^2y + y^2 = 13,$ $M\,(-1;\,-3)$

7.30. $x^2y^2 - 4y^3 - x = 4,$ $M\,(0;\,-1)$

З а д а н и е 8 . Вычислить пределы, используя правило Лопиталя.

8.1. **а)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\sin 2x}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0} x\ln^2 x$;

	в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$.	
8.2.	а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\sin 2x}$;	б) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x}}$;
	в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-2x-1}{1-\cos 3x}$.	
8.3.	а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$;	б) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 e^{-x}$;
	в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-\cos x-x}{\ln(1+x)-x}$.	
8.4.	а) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}$;	б) $\lim\limits_{x\to 0} x e^{\frac{1}{x}}$;
	в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{\sin x-x}$.	
8.5.	а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-3^x}{1-4^x}$;	б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg} x-\dfrac{1}{x-\pi/2}\right)$;
	в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 e^{2x}+\ln\left(1-x^2\right)}{x\cos x-\sin x}$.	
8.6.	а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin x}{\ln\sin 2x}$;	б) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$;
	в) $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln\operatorname{tg} 3x}{\ln\sin 2x}$.	

8.7.	**а)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\arcsin x}$;	**б)** $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$;
	в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x-1,5x^2}{\sin x-x}$.	
8.8.	**а)** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$;	**б)** $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$;
	в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1-x^2}{\ln\left(1+x^2\right)-x^2}$.	
8.9.	**а)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\ln\cos 4x}$;	**б)** $\lim\limits_{x\to \pi}(\pi-1)\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$;
	в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{x\ln\cos 5x}$.	
8.10.	**а)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-5^x}{2^x-1}$;	**б)** $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\operatorname{tg}\dfrac{1}{x}$;
	в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x}{x\sin 3x}$.	
8.11.	**а)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$;	**б)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^2-3x+2}\right)$;
	в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$.	
8.12.	**а)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg}x}$;	**б)** $\lim\limits_{x\to +\infty}xe^{-2x}$;

	в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\ln\left(1+2x\right)}$.
8.13.	**а)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{\sqrt{x-1}}$; **б)** $\lim\limits_{x\to +\infty} x^3 e^{-\frac{x}{2}}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg}3x}{2x^3}$.
8.14.	**а)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{arctg}x}-\dfrac{1}{x}\right)$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x-\sin 3x}{x-\sin 5x}$.
8.15.	**а)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin x}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$.
8.16.	**а)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\sin 2x}$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(x+1)}-\dfrac{1}{x}\right)$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 3x}{x-\operatorname{tg}4x}$.
8.17.	**а)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\sin 3x}$; **б)** $\lim\limits_{x\to +\infty} x^3 e^{-x}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos 4x-1}$.

8.18.	**а)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{\sin(x-1)}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x\cos x}$.	**б)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}\right)$;
8.19.	**а)** $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{x}-2\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x}-2}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg}x}-e^x}{\operatorname{tg}x-x}$.	**б)** $\lim\limits_{x\to +\infty}x^2e^{-3x}$;
8.20.	**а)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-1}{3^x-4^x}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^3 x}$.	**б)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$;
8.21.	**а)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln \operatorname{tg}x}{\ln\sqrt{x}}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\left(e^x-e^{-x}\right)}{e^{x^3+1}-e}$.	**б)** $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{4}{x^2-4x+3}\right)$;
8.22.	**а)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\operatorname{arctg}x}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\cos x\ln\left(x-3\right)}{\ln\left(e^x-e^3\right)}$.	**б)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}\right)$;
8.23.	**а)** $\lim\limits_{x\to 100}\dfrac{\sqrt{x}-10}{\sin(x-100)}$;	**б)** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$;

	в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}+\ln(1-x)}{\operatorname{ctg}\pi x}$.
8.24.	а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\ln\cos x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{5}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{\ln(x^2-x)}{\ln(3^x-3)}$.
8.25.	а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{5^x-4^x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{\ln\sin\frac{\pi x}{2}}{\ln(2-x)}$.
8.26.	а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\left(\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{1}{1-x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$.
8.27.	а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{2}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$.
8.28.	а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{\sqrt{x-2}}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\ln x\cdot\ln(x-1)$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{\sin 3x-\operatorname{tg}2x}$.

8.29.	**а)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\ln(1+x)}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-3^{2x}}{x+\arcsin x^3}$.	**б)** $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg}x$;
8.30.	**а)** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$; **в)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\operatorname{tg}x-x}$.	**б)** $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\cdot\operatorname{ctg}\pi(x-1)$;

З а д а н и е 9 . Найти дифференциалы первого и второго порядков функции $y=f(x)$.

9.1. **а)** $y=\sqrt{\ln^2 x-4}$; **б)** $y=\sin\dfrac{x}{\ln x}$.

9.2. **а)** $y=\operatorname{tg}^2 x$; **б)** $y=\dfrac{x}{x+\ln x}$.

9.3. **а)** $y=\arccos\dfrac{1}{x}$; **б)** $y=x\sin 5x$.

9.4. **а)** $y=5^{\sqrt{2x-3}}$; **б)** $y=\arcsin\left(2x^2+5x\right)$.

9.5. **а)** $y=x^2\operatorname{tg}x^3$; **б)** $y=\operatorname{arcctg}\left(4x^2+8x\right)$.

9.6. **а)** $y=\operatorname{arctg}^3 x$; **б)** $y=x\ln^2 x$.

9.7. **а)** $y=\dfrac{x}{1+\operatorname{tg}5x}$; **б)** $y=\ln x\cdot\arcsin 9x$.

9.8. **а)** $y = \dfrac{1}{x - \operatorname{ctg} 8x}$; **б)** $y = x^2\sqrt{1 - x^3}$.

9.9. **а)** $y = \operatorname{tg}(\operatorname{ctg} 3x)$; **б)** $y = \sqrt{x}\ln^9 x$.

9.10. **а)** $y = x \cdot \operatorname{ctg} 8x$; **б)** $y = \dfrac{\ln x}{x + \ln x}$.

9.11. **а)** $y = \dfrac{1}{\sin\sqrt{x}}$; **б)** $y = 5^{\operatorname{tg} 7x}$.

9.12. **а)** $y = \operatorname{tg}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; **б)** $y = \dfrac{1 + \sin 5x}{\ln 2x}$.

9.13. **а)** $y = \operatorname{ctg}(\operatorname{tg} 7x)$; **б)** $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\ln 5x}$.

9.14. **а)** $y = \operatorname{tg}(\operatorname{ctg} 6x)$; **б)** $y = \dfrac{\sqrt{2x + 1}}{\ln 7x}$.

9.15. **а)** $y = x\arccos 6x$; **б)** $y = \dfrac{x^2}{1 + \ln 7x}$.

9.16. **а)** $y = \operatorname{tg}\left(\dfrac{4}{\sqrt{x}}\right)$; **б)** $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin 4x + \cos 7x}$.

9.17. **а)** $y = \dfrac{\ln x}{\ln\ln x}$; **б)** $y = x^6 \cdot \sqrt{1 - x^8}$.

9.18. **а)** $y = 2^{2\sin 3x + 4x}$; **б)** $y = \sqrt[7]{3x + \cos 5x}$.

9.19. **а)** $y = \dfrac{1}{2x - \operatorname{tg} 7x}$; **б)** $y = x^3 \cdot \sqrt{1 - x^2}$.

9.20. **а)** $y=\cos\ln^2 x$; **б)** $y=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{x}}$.

9.21. **а)** $y=\dfrac{\sqrt{x}}{1+\ln x}$; **б)** $y=x^4\sin 5x$.

9.22. **а)** $y=\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}\sqrt{x}}$; **б)** $y=x\ln\cos x$.

9.23. **а)** $y=2^{\sqrt{\sin 4x+x}}$; **б)** $y=\sqrt{x}\ln\ln x$.

9.24. **а)** $y=\sin\ln^2 x$; **б)** $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x^2}}$.

9.25. **а)** $y=x\cdot\operatorname{tg}9x$; **б)** $y=\dfrac{\arcsin\ln x}{x}$.

9.26. **а)** $y=\operatorname{ctg}\dfrac{1}{x^9}$; **б)** $y=\dfrac{1+\ln\sin 5x}{x}$.

9.27. **а)** $y=\operatorname{tg}(\sin 3x)$; **б)** $y=\ln^2\left(1+\sqrt{x}\right)$.

9.28. **а)** $y=\operatorname{ctg}(\operatorname{tg}5x)$; **б)** $y=\dfrac{\sqrt{4x+1}}{\ln(1+5x)}$.

9.29. **а)** $y=\dfrac{x}{\arccos^4 7x}$; **б)** $y=\cos\ln\sin x$.

9.30. **а)** $y=\sqrt{x}\cdot\operatorname{ctg}6x$; **б)** $y=\dfrac{e^{\arccos x}}{x^2}$.

Задание 10. Вычислить приближенное значение функции в данной точке.

10.1. $y=\lg x$, $x=11$

10.2. $y=\sqrt[3]{x^2}$, $x=1,03$

10.3. $y=\sqrt[3]{x}$, $x=1,21$

10.4. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x=4,16$

10.5. $y=\sqrt[3]{x^2+7}$, $x=0,97$

10.6. $y=\sqrt[3]{x}$, $x=27,46$

10.7. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+x+1}}$, $x=1,016$

10.8. $y=x^6$, $x=2,01$

10.9. $y=\sqrt{4x-1}$, $x=2,06$

10.10. $y=x^5$, $x=1,02$

10.11. $y=\sqrt[3]{x^3+7x}$, $x=1,012$

10.12. $y=x^{11}$, $x=1,021$

10.13. $y=\sqrt[3]{1+13x}$, $x=2,01$

10.14. $y=\sqrt[5]{x^2}$, $x=1,03$

10.15. $y=\sqrt{x^2+x+3}$, $x=1,97$

10.16. $y=\sqrt[3]{x}$, $x=27,54$

10.17. $y=\sqrt{1+\sin x}$, $x=0,01$

10.18. $y=\sqrt[3]{x^2}$, $x=1,03$

10.19. $y=\sqrt[3]{3x^2+1}$, $x=0,02$

10.20. $y=x^5$, $x=1,02$

10.21. $y=\sqrt[3]{3x+1}$, $x=0,01$

10.22. $y=x^5$, $x=2,997$

10.23. $y=\dfrac{x+\sqrt{5-x^2}}{2}$, $x=0,98$

10.24. $y=\sqrt[3]{x}$, $x=8,24$

10.25. $y=\arcsin x$, $x=0,08$

10.26. $y=x^7$, $x=1,996$

10.27. $y=\sqrt{x^3}$, $x=0,98$

10.28. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x=1,02$

10.29. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$, $x=1,58$

10.30. $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$, $x=1,03$

Задание 11. Вычислить с помощью дифференциала.

11.1. **а)** $\sqrt{24{,}8}$; **б)** $\operatorname{tg}48^\circ$.

11.2. **а)** $\sqrt{15{,}9}$; **б)** $\sin 63^\circ$.

11.3. **а)** $4{,}8^3$; **б)** $\arcsin 0{,}52$.

11.4. **а)** $\sqrt[3]{26}$; **б)** $\operatorname{ctg} 48^\circ$.

11.5. **а)** $\sqrt[5]{31{,}8}$; **б)** $\operatorname{tg} 58^\circ$.

11.6. **а)** $\lg 10{,}21$; **б)** $\operatorname{ctg} 123^\circ$.

11.7. **а)** $\operatorname{arctg} 0{,}98$; **б)** $\sin 153^\circ$.

11.8. **а)** $\operatorname{arctg} 1{,}058$; **б)** $\cos 147^\circ$.

11.9. **а)** $e^{0,02}$; **б)** $\sin 183^\circ$.

11.10. **а)** $(0{,}99)^4$; **б)** $\operatorname{tg} 44^\circ$.

11.11. **а)** $\sqrt{(1{,}02)^3}$; **б)** $\sin 2^\circ$.

11.12. **а)** $\operatorname{arctg} 1{,}028$; **б)** $\lg 1005$.

11.13. **а)** $\sqrt[4]{82}$; **б)** $\operatorname{ctg} 59^\circ$.

11.14. **а)** $(1{,}02)^4$; **б)** $\cos 3^\circ$.

11.15. **а)** $(0{,}98)^5$; **б)** $\sqrt[6]{65}$.

11.16. **а)** $(0{,}99)^8$; **б)** $\operatorname{ctg} 89^\circ$.

11.17. **а)** $(4{,}96)^3$; **б)** $\operatorname{tg} 3^\circ$.

11.18. **а)** $\cos \frac{13\pi}{36}$; **б)** $\frac{1}{\sqrt{0{,}94}}$.

11.19. **а)** $\operatorname{arctg} 0{,}96$; **б)** $\cos 153^\circ$.

11.20. **а)** $\frac{1}{(0{,}98)^7}$; **б)** $\cos 88^\circ$.

11.21. **а)** $\frac{1}{\sqrt{3{,}99}}$; **б)** $\sin 155^\circ$.

11.22. **а)** $(4{,}95)^4$; **б)** $\operatorname{tg} 5^\circ$.

11.23. **а)** $\sin\frac{13\pi}{36}$; **б)** $\frac{1}{\sqrt{1{,}04}}$.

11.24. **а)** $\frac{1}{(2{,}98)^5}$; **б)** $\operatorname{arctg} 0{,}97$.

11.25. **а)** $\frac{1}{\sqrt[3]{26{,}7}}$; **б)** $\sin 94^\circ$.

11.26. **а)** $\sqrt[4]{629}$; **б)** $\lg 99$.

11.27. **а)** $\sqrt[4]{84}$; **б)** $\operatorname{ctg} 28^\circ$.

11.28. **а)** $\lg 998$; **б)** $\operatorname{tg} 153^\circ$.

11.29. **а)** $(0{,}99)^6$; **б)** $\sqrt[6]{66}$.

11.30. **а)** $e^{0{,}07}$; **б)** $\operatorname{ctg} 88^\circ$.

З а д а н и е 1 2 . Составить уравнение касательной и нормали к линии в заданной точке.

12.1. $y=\frac{x^2-3x+6}{x^2}$ в точке $x=2$

12.2. $y=\ln x$ в точке $x=1$

12.3. $y=\dfrac{x^2-x+1}{x}$ в точке $x=-1$

12.4. $y=x^2+e^{2x}$ в точке $x=0$

12.5. $y=\dfrac{8}{4+x^2}$ в точке $x=2$

12.6. $y^2=x^3$ в точке $x=0$

12.7. $y=4x-x^2$ в точке $x=4$

12.8. $y^2=\left(4+x\right)^3$ в точке $x=-4$

12.9. $y=\dfrac{2}{1+x^2}$ в точке $x=1$

12.10. $y=\left(x+1\right)\sqrt{3-x}$ в точке $x=-1$

12.11. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ в точке $x=2$

12.12. $y=x-x^3$ в точке $x=-1$

12.13. $y=x+\sqrt{x^3}$ в точке $x=1$

12.14. $y=8\sqrt[4]{x}-70$ в точке $x=16$

12.15. $y=\dfrac{x^3+2}{x^3-2}$ в точке $x=2$

12.16. $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ в точке $x=1$

12.17. $y=\dfrac{x-4}{x-2}$ в точке $x=3$

12.18. $y=x-\dfrac{1}{x}$ в точке $x=2$

12.19. $y=\dfrac{x+9}{x+5}$ в точке $x=3$

12.20. $y=\dfrac{-8}{4+x^2}$ в точке $x=-2$

12.21. $y=\frac{x^3}{3}$ в точке $x=-1$

12.22. $y^2=4-x$ в точке $x=0$

12.23. $y=x^2+4x$ в точке $x=1$

12.24. $y=\sqrt{x^2-1}$ в точке $x=3$

12.25. $y=x^3+4x^2-1$ в точке $x=-1$

12.26. $y^2=\left(4+x\right)^3$ в точке $x=0$

12.27. $y=x^2+8\sqrt{x}-32$ в точке $x=4$

12.28. $y=\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ в точке $x=4$

12.29. $y=\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}$ в точке $x=64$

12.30. $y=\frac{x}{x^2+1}$ в точке $x=-2$

<u>**Задание 13.**</u> Найти уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$, проходящей параллельно прямой. Сделать чертеж.

13.1. $y = x^2 - 4x + 3$, $\quad y= -4x - 4$

13.2. $y = x^2 -5x + 4$, $\quad y = 3x + 1$

13.3. $y = x^2 - 2x - 3$, $\quad y = 2x + 2$

13.4. $y = x^2 - 6x + 8$, $\quad y = 2x + 3$

13.5. $y = -x^2 - 2x + 3$, $\quad y = 2x + 1$

13.6. $y = x^2 + 2x - 3$, $\quad y = 4x - 1$

13.7. $y = x^2 + 8x - 9$, $\quad y = 2x + 1$

13.8. $y = x^2 + x$, $\quad y = x - 3$

13.9. $y = x^2 - 4x + 3$, $\quad y = 2x + 4$

13.10. $y = x^2 - 6x + 8,$ $y = 4x + 1$

13.11. $y = x^2 - 2x - 3,$ $y = 4x - 1$

13.12. $y = x^2 + 8x - 9,$ $y = 4x$

13.13. $y = x^2 - 5x + 4,$ $y = x + 3$

13.14. $y = -x^2 - 2x + 3,$ $y = -6x + 4$

13.15. $y = x^2 - 4x + 3,$ $y = 4x + 4$

13.16. $y = x^2 + 2x - 3,$ $y = -4x + 2$

13.17. $y = x^2 - 6x + 8,$ $y = 6x + 1$

13.18. $y = x^2 - 2x - 3,$ $y = 6x + 3$

13.19. $y = -x^2 - 2x + 3,$ $y = -2x - 2$

13.20. $y = x^2 - 5x + 4,$ $y = -3x - 1$

13.21. $y = -x^2 + 4x,$ $y = 2x$

13.22. $y = x^2 + 8x - 9,$ $y = -2x + 1$

13.23. $y = x^2 - 8x - 9,$ $y = -6x$

13.24. $y = -x^2 - 2x + 3,$ $y = 4x - 3$

13.25. $y = x^2 - 5x + 4,$ $y = -x - 2$

13.26. $y = x^2 + 8x - 9,$ $y = 6x$

13.27. $y = x^2 + 2x - 3,$ $y = 2x - 2$

13.28. $y = x^2 - 6x + 8,$ $y = -4x + 2$

13.29. $y = x^2 - 4x + 3,$ $y = 6x - 6$

13.30. $y = x^2 - 2x - 3,$ $y = -4x + 2$

З а д а н и е 14. Найти угол между касательными, проведенными в точках пересечения кривой $F(x, y) = 0$ с осью Ox. Сделать чертеж.

14.1. $x^2 + x^2 - 2x + 4y - 3 = 0.$

14.2. $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 3 = 0.$

14.3. $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 4 = 0.$

14.4. $x^2 + y^2 - 4y - 4 = 0.$

14.5. $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0.$

14.6. $x^2 + 6x + y^2 - 2y + 6 = 0.$

14.7. $x^2 + y^2 - 10x + 9 = 0.$

14.8. $x^2 + 10x + y^2 - 6y + 16 = 0.$

14.9. $x^2 + 4x + y^2 + 2y - 4 = 0.$

14.10. $x^2 + y^2 + 4x - 4 = 0.$

14.11. $x^2 + y^2 + 10x + 9 = 0.$

14.12. $x^2 - 6x + y^2 - 6y + 8 = 0.$

14.13. $x^2 + y^2 - 14x + 40 = 0.$

14.14. $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 3 = 0.$

14.15. $x^2 + y^2 + 6x + 6y + 8 = 0.$

14.16. $x^2 + y^2 + 14x + 40 = 0.$

14.17. $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 8 = 0.$

14.18. $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0.$

14.19. $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0.$

14.20. $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 1 = 0.$

14.21. $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 1 = 0.$

14.22. $x^2 + 6x + y^2 - 2y + 1 = 0.$

14.23. $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0.$

14.24. $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0.$

14.25. $x^2 + y^2 + 10x + 6y + 16 = 0.$

14.26. $x^2 + 4x + y^2 - 2y - 3 = 0.$

14.27. $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0.$

14.28. $x^2 + y^2 - 6x + 6y + 8 = 0.$

14.29. $x^2 + 4x + y^2 - 2y + 3 = 0.$

14.30. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0.$

З а д а н и е 1 5 . Провести полное исследование функции и построить ее график.

15.1. $y = -3x^3 + 2x^2$

15.2. $y = -x^3 - 3x^2 + 4$

15.3. $y = -x^3 + x^2 + 5x + 3$

15.4. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 13$

15.5. $y = 0{,}0625 \cdot (x+1)^2 (x-3)^2$

15.6. $y = x^3 + 3x^2 - 4$

15.7. $y = -x^3 + 3x + 2$

15.8. $y = (x-3)^2 (x-1)^2$

15.9. $y = 0{,}5x^3 - 0{,}5x^2 - 4x + 4$

15.10. $y = -\dfrac{1}{3}x^4 + 2x^2$

15.11. $y = x^3 - 2x^2 - 4x + 5$

15.12. $y = -0{,}0625 \cdot (x^2 - 4)^2$

15.13. $y = x^3 - 3x + 2$

15.14. $y = x^2 (x-2)^2$

15.15. $y = 2x^3 + 3x^2 - 5$

15.16. $y = (x-3)^2 (x+3)^2$

15.17. $y = 2 + x - 3x^3$

15.18. $y = x^3 - 4x + 3$

15.19. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

15.20. $y = x^3 - 9x + 8$

15.21. $y = (x+1)^2 (x-1)^2$

15.22. $y = -x^3 - x^2 + x - 1$

15.23. $y = 3x^3 + 2x^2 - 5$

15.24. $y = x^3 + 6x^2 - 15x + 8$

15.25. $y = x^3 - 3x^2$

15.26. $y = x^3 - 2x^2 + x$

15.27. $y = 2x^3 - 3x^2 + 5$

15.28. $y = (2x-1)^2(2x-3)^2$

15.29. $y = (2x+1)^2(2x-1)^2$

15.30. $y = 16x^2(x-1)^2$

Задание 16. Провести полное исследование функции и построить ее график.

16.1. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x+3}$

16.2. $y = \dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$

16.3. $y = \dfrac{x^3 - 5x}{5 - 3x^2}$

16.4. $y = \dfrac{x^2 - 6x + 4}{3x+2}$

16.5. $y = \dfrac{21 - x^2}{7x+9}$

16.6. $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{2x+1}$

16.7. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

16.8. $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

16.9. $y = \dfrac{x^2}{1 - x^2}$

16.10. $y = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + 1}$

16.11. $y = \dfrac{x^2 - 6x + 13}{x-3}$

16.12. $y = \dfrac{x}{16 - x^2}$

16.13. $y = \dfrac{3x^2}{x^2 + 9}$

16.14. $y = \dfrac{x^3 + 4}{2x^2}$

16.15. $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$

16.16. $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$

16.17. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$

16.18. $y = \dfrac{x^2 - x - 6}{x-2}$

16.19. $y = \dfrac{x^2 - 3}{x+2}$

16.20. $y = \dfrac{(x-1)^2}{x^2 + 1}$

16.21. $y = \dfrac{4x^2 + 9}{4x+8}$

16.22. $y = \dfrac{3x}{1 + x^2}$

16.23. $y=\dfrac{4x^2-3x}{4x^2-1}$ **16.24.** $y=\dfrac{x+1}{x(x+2)}$

16.25. $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ **16.26.** $y=\dfrac{x^2+4}{x}$

16.27. $y=\dfrac{x^2}{x-2}$ **16.28.** $y=\dfrac{x^2}{x-1}$

16.29. $y=\left(\dfrac{x-3}{x+3}\right)^2$ **16.30.** $y=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$

З а д а н и е 1 7. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на данном отрезке.

17.1. $y=\dfrac{2\left(x^2+3\right)}{x^2-2x+5}$ при $x\in[-3;3]$

17.2. $y=1+\sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)}$ при $x\in[-1;5]$

17.3. $y=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}$ при $x\in[-1;5]$

17.4. $y=2x^2+\dfrac{108}{x}-59$ при $x\in[2;4]$

17.5. $y=\sqrt[3]{2x^2(x-3)}$ при $x\in[-1;6]$

17.6. $y=x^2+\dfrac{16}{x-1}-2x$ при $x\in[2;5]$

17.7. $y=\sqrt[3]{2(x-1)^2(x-4)}$ при $x\in[0;4]$

17.8. $y=-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{8}{x}+8$ при $x\in[-4;-1]$

17.9. $y=\sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)}$ при $x\in[1;5]$

17.10. $y=\dfrac{x^2}{2}+2x+\dfrac{8}{x-2}$ при $x\in[-2;1]$

17.11. $y=\sqrt[3]{2x^2(x-3)}$ при $x\in[-1;3]$

17.12. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ при $x\in[0;4]$

17.13. $y=x-2\sqrt{x}$ при $x\in[0;4]$

17.14. $y=\sqrt[3]{2x^2(x-6)}$ при $x\in[-2;1]$

17.15. $y=x^4-2x^2+5$ при $x\in[-2;2]$

17.16. $y=\sqrt[3]{100-x^2}$ при $x\in[-6;8]$

17.17. $y=\dfrac{10x}{1+x^2}$ при $x\in[0;3]$

17.18. $y=-\dfrac{2\left(x^2+3\right)}{x^2+2x+5}$ при $x\in[-5;1]$

17.19. $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$ при $x\in[-4;2]$

17.20. $y=x-4\sqrt{x+2}+8$ при $x\in[-1;7]$

17.21. $y=2\sqrt{x-1}-x+2$ при $x\in[1;5]$

17.22. $y=\dfrac{-2x(2x+3)}{x^2+4x+5}$ при $x\in[-2;1]$

17.23. $y=\dfrac{2\left(-x^2+7x-7\right)}{x^2-2x+2}$ при $x\in[1;4]$

17.24. $y=3-x-\dfrac{4}{(x+2)^2}$ при $x\in[-1;2]$

17.25. $y=\sqrt[3]{2(x+1)^2(5-x)}-2$ при $x\in[-3;3]$

17.26. $y=x-4\sqrt{x}+5$ при $x\in[1;9]$

17.27. $y=2\sqrt{x}-x$ при $x\in[0;4]$

17.28. $y=\sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)}-1$ при $x\in[0;6]$

17.29. $y=x^2+\dfrac{16}{x}-16$ при $x\in[1;4]$

17.30. $y=\dfrac{x^2}{3}-\sqrt[3]{x^2}$ при $x\in[-8;8]$

З а д а н и е 1 8 . Решить задачу геометрического или физического содержания.

18.1. К каменной стене надо пристроить ограду для сада в форме прямоугольника. Длина ограды равна l. Какие размеры должны быть у ограды, чтобы площадь, которую она будет ограничивать, была наибольшей?

18.2. Два прямолинейных шоссейных пути пересекаются в пункте C под углом в 60°. К пункту C одновременно отбыли две автомашины: одна со скоростью 1 км/мин – из пункта A, расположенного на одном из этих шоссе на расстоянии 60 км от C, а вторая со скоростью 0,5 км/мин из пункта B, находящегося на другом из этих шоссе на расстоянии 40 км от C. Через какое время автомашины окажутся на наименьшем расстоянии одна от другой и каково это расстояние? Рассмотрите два возможных случая.

18.3. Нужно изготовить коробку в форме прямоугольного параллелепипеда с площадью основания, равной 1 см^2. Сумма длин всех его ребер должна быть равна 20 см. При каких размерах коробки площадь ее поверхности будет наибольшей?

18.4. Требуется сделать коробку, объем которой должен равняться 108 см^3. Коробка открыта сверху и имеет квадратное дно. Каковы должны быть размеры коробки, чтобы на ее изготовление пошло наименьшее количество материала?

18.5. Из всех цилиндров, у которых площадь полной поверхности равна 48π см^2, найти тот, который имеет наибольший объем.

18.6. Требуется сделать из жести коробку без крышки с квадратным основанием наибольшего объема, площадь поверхности которой была бы равна 12 см^2. Определите размеры коробки.

18.7. Из пункта A, находящегося в лесу в 5 км от прямолинейной дороги, пешеходу нужно попасть в пункт B, расположенный на этой дороге в 13 км от пункта A. По дороге пешеход может двигаться с максимальной скоростью 5 км/ч, а по лесу – с максимальной скоростью 3 км/ч. За какое минимальное время пешеход сможет добраться из пункта A в пункт B (рис. 21)?

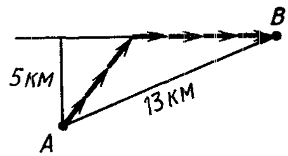


Рис. 21

18.8. Тело представляет собой прямой круговой цилиндр, завершенный сверху полушаром. Какую наименьшую площадь полной поверхности может иметь это тело, если его объем равен V?

18.9. Объем правильной четырехугольной призмы 8 см^3. Какую длину должны иметь сторона основания и высота призмы, чтобы площадь ее поверхности была наименьшей?

18.10. В основании пирамиды прямоугольный треугольник с гипотенузой 2 см. Высота пирамиды 6 см. Найдите наибольший объем пирамиды.

18.11. Найдите наибольший объем правильной треугольной пирамиды, у которой периметр боковой грани равен 6 см.

18.12. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ расстояние AC равно $2\sqrt{2}$ см, $AA' = 1$ см. Найдите площадь поверхности параллелепипеда, имеющего наибольший объем.

18.13. Найдите число, которое, если сложить со своим квадратом, даст наименьшую сумму.

18.14. Найдите положительное число, которое, если сложить с обратным ему числом, даст наименьшую сумму.

18.15. Найдите такое положительное число, чтобы разность между ним и его кубом была наибольшей.

18.16. Требуется изготовить ящик (без крышки) с прямоугольным основанием и заданным объемом V, отношение сторон основания которого равнялось бы k. Каковы должны быть размеры ящика, чтобы его поверхность была наименьшей? Вычислите размеры ящика при $k = 1$, $V = 32$.

18.17. Бак цилиндрический формы должен вмещать V литров воды. Каковы должны быть размеры бака, чтобы поверхность его (без крышки) была наименьшей?

18.18. Периметр равнобедренного треугольника равен $2p$. Какой длины должны быть его стороны, чтобы объем тела, образованного вращением этого треугольника вокруг его основания, был наибольшим?

18.19. Через пункт O из пунктов A и B, находящихся от O на расстоянии l_1 и l_2, едут два велосипедиста с постоянными скоростями v_1 и v_2 по прямолинейным дорогам, угол между которыми 60°. В какой момент времени расстояние между велосипедистами наименьшее?

18.20. Стоимость эксплуатации катера, плывущего со скоростью v км/ч, составляет $(90 + 0{,}4v^2)$ рублей в час. С какой скоростью должен плыть катер, чтобы стоимость 1 км пути была наименьшей?

18.21. На странице книги печатный текст должен занимать 150 см^2. Верхнее и нижнее поля страницы по 3 см, правое и левое — по 2 см. Если принимать во внимание только экономию бумаги, то каковы должны быть наиболее выгодные размеры страницы?

18.22. На двух стройплощадках возводятся два одноэтажных склада общей площадью 600 м^2. Стоимость постройки склада прямо пропорциональна квадрату его площади. Кроме того, известно, что строительство 1 м^2 на второй площадке обходится на 40% дороже, чем на первой. Какой должна быть площадь каждого склада, чтобы стоимость строительства была наименьшей?

18.23. Требуется выгородить прямоугольное пастбище площадью 1 км и разделить его на два прямоугольных участка. Какой наименьшей длины забор при этом может получиться?

18.24. В круг радиуса R впишите равнобедренный треугольник наибольшей площади.

18.25. Требуется огородить участок земли, примыкающий одной стороной к морю, с помощью a метров проволоки. Какую форму должен иметь участок, чтобы площадь его была наибольшей?

18.26. При каких размерах прямоугольная коробка с квадратным основанием и полной поверхностью S имеет наибольший объем?

18.27. Из проволоки длиной 24 см надо сделать модель прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием. При каких размерах сторон объем параллелепипеда будет наибольшим?

18.28. Найдите прямоугольник наибольшей площади, если длина диагонали l.

18.29. Заданы периметр $2p$ треугольника и длина a одной из его сторон. Какие длины должны иметь две другие стороны, чтобы площадь треугольника была наибольшей?

18.30. Опишите вокруг полушара радиуса R конус наименьшего объема.

18.31. Впишите в конус с высотой H и радиусом основания R цилиндр наибольшего объема.

Задание 19. Решить задачу геометрического или физического содержания.

19.1. В данный шар вписать цилиндр, имеющий наибольшую боковую поверхность.

19.2. В данный шар вписать цилиндр, имеющий наибольший объем.

19.3. Найти стороны прямоугольника наибольшего периметра, вписанного в полукруг радиуса R.

19.4. В шар радиуса R вписать конус наибольшего объема.

19.5. Найти наибольший объем конуса с образующей длины L.

19.6. Периметр осевого сечения цилиндра равен 6. Найти наибольший объем такого цилиндра при заданной длине L его образующей.

19.7. Найти прямоугольный треугольник с гипотенузой H, имеющей наибольшую площадь.

19.8. Найти прямоугольник максимальной площади, вписанный в эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

19.9. Найти прямоугольник наибольшей площади, вписанный в круг радиуса R.

19.10. Найти основание равнобедренного треугольника с боковой стороной, равной $\sqrt{2}$, имеющего наибольшую площадь.

19.11. Около правильной треугольной призмы объема V описан цилиндр. Найти наименьшую полную поверхность цилиндра.

19.12. Цилиндр вписан в шар. Под каким углом должны пересекаться диагонали осевого сечения цилиндра, имеющего наибольшую полную поверхность.

19.13. В равнобедренной трапеции меньшее основание и боковые стороны равны L. Найти длину большего основания, при которой площадь трапеции будет наибольшей.

19.14. Вычислить наибольшую площадь трапеции, вписанной в полукруг радиуса R так, что нижним основанием трапеции служит диаметр полукруга.

19.15. Найти наибольший объем правильной треугольной пирамиды, боковое ребро которой равно 12.

19.16. На кривой $y=\sqrt{x}$ найти точку, ближайшую к точке $M(3;6)$.

19.17. Найти наименьшее расстояние от точки $M(2;0)$ до точек графика функции $y=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{27(x-2)}}$.

19.18. Найти кратчайшее расстояние от точки $A(0;2)$ до кривой $y=\sqrt{x^2+4x+18}+2$.

19.19. Найти минимальное расстояние от точки $A(0;2)$ до точек графика функции $y=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2(x-2)}}$.

19.20. На графике функции $y=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ найти точку, ближайшую к началу координат.

19.21. Представить число 48 в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма куба одного из них и квадрата другого была наименьшей.

19.22. Число 8 разбить на два слагаемых так, чтобы сумма их кубов была наименьшей.

19.23. Число 20 разложить на два положительных слагаемых так, чтобы сумма куба одного из них и квадрата другого была наименьшей.

19.24. Сумма квадратов двух положительных чисел равно 300. Подобрать эти числа так, чтобы произведение одного на квадрат другого было наибольшим.

19.25. Найти число, утроенный квадрат которого превышает его куб на максимальное значение.

19.26. Число 180 разбить на три слагаемых так, чтобы два из них относились как 1:2, а произведение всех трех слагаемых было наибольшим.

19.27. Найти положительное число, которое при сложении с ему обратным дает наименьшую сумму.

19.28. Даны точки $A(2;0)$ и $B(4;3)$. На оси ординат найти точку N такую, чтобы сумма длин отрезков AN и BN была наименьшей.

19.29. Представить число 20 в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма куба одного из них и квадрата другого была наименьшей.

19.30. Из всех правильных треугольных призм объема V, найти призму с наименьшей суммой длин всех ее ребер. Найти длину стороны основания этой призмы.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОГО ОТДЕЛЕНИЯ

Вариант № 1.

1. Найти производные следующих функций:

а) $y = \arcsin\dfrac{1}{x}$; б) $y = \dfrac{e^{3x-1}+1}{\sin 2x}$; в) $y = (\sin x)^{x^2}$.

2. Найти производные функций, заданных параметрически:

$$\begin{cases} x = t^3 + 2, \\ y = t^2/2 + 2\cos 2t - 1. \end{cases}$$

3. Найти производные функций, заданных в неявном виде: $x^3 - 2x^2y^2 + 5x + \cos 2y - 5 = 0$.

4. Найти производную второго порядка: $y = \cos^2 5x$.

5. Найти дифференциал функции: $y = \mathrm{tg}^2(x^2+3)$.

6. Построить график функции с помощью первой производной: $y = 2x^3 - 3x^2 - 4$.

Вариант № 2.

1. Найти производные следующих функций:

а) $y = \dfrac{x^2}{\mathrm{arctg}\, 3x}$; б) $y = (x + e^{2x})^3 \sin 5x$; в) $y = (\cos 3x)^{\ln x}$.

2. Найти производные функций, заданных параметрически:

$$\begin{cases} x = \mathrm{tg} 3t; \\ y = \sin^3 2t \end{cases}$$

3. Найти производные функций, заданных в неявном виде: $xe^y + xy = e^x$.

4. Найти производную второго порядка: $y = \mathrm{arctg}\, x^2$.

5. Найти дифференциал функции: $y = 5^{\ln \mathrm{tg} x}$.

6. Построить график функции с помощью первой производной: $y = 2x^3 + 3x^2 - 5$.

Вариант № 3.

1. Найти производные следующих функций:

а) $y = x\operatorname{arctg} x^2$; б) $y = e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$; в) $y = (\sin 2x)^{\arcsin x}$.

2. Найти производные функций, заданных параметрически:

$$\begin{cases} x = 1/(t+1), \\ y = t/(t+1). \end{cases}$$

3. Найти производные функций, заданных в неявном виде: $x^4 + xy^4 = 2xy$.

4. Найти производную второго порядка: $y = e^{-2x^2}$.

5. Найти дифференциал функции: $y = \dfrac{\cos x}{1-x^2}$.

6. Построить график функции с помощью первой производной: $y = 2 - 12x^2 - 8x^3$.

Вариант № 4.

1. Найти производные следующих функций:

а) $y = \sqrt{x} \cdot \operatorname{arctg} \dfrac{x}{2}$; б) $y = \dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$; в) $y = (\ln x)^{1/2x}$.

2. Найти производные функций, заданных параметрически:

$$\begin{cases} x = e^{-t} + 2t; \\ y = e^{3t} \end{cases}$$

3. Найти производные функций, заданных в неявном виде: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2}$.

4. Найти производную второго порядка: $y = \arcsin 4x$.

5. Найти дифференциал функции: $y = \sqrt{\arcsin x}$.

6. Построить график функции с помощью первой производной: $y = x(12 - x^2)/8$.

Вариант № 5.

1. Найти производные следующих функций:

а) $y = x\arcsin\left(x^2 - 1\right)$; б) $y = \dfrac{2\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$; в) $y = \left(\cos 2x\right)^{\sqrt{5x}}$.

2. Найти производные функций, заданных параметрически:

$$\begin{cases} x = \ln\left(4 + 3t^2\right); \\ y = t - \operatorname{arctg} 2t \end{cases}$$

3. Найти производные функций, заданных в неявном виде: $2x^2 \ln y = x + y$.

4. Найти производную второго порядка: $y = x^3 \ln x$.

5. Найти дифференциал функции: $y = \operatorname{arctg}^2 \sqrt{x}$.

6. Построить график функции с помощью первой производной: $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x$.

Вариант № 6.

1. Найти производные следующих функций:

а) $y = \sqrt{1 - x} \cdot \arcsin\dfrac{x}{2}$; б) $y = \dfrac{\ln\sin x}{\cos x}$; в) $y = \left(\operatorname{tg} 2x\right)^{\operatorname{ctg} x}$.

2. Найти производные функций, заданных параметрически:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1 + t^2}; \\ y = \dfrac{3at^2}{1 + t^3} \end{cases}$$

3. Найти производные функций, заданных в неявном виде: $e^x \sin y - e^y \cos x = 2$.

4. Найти производную второго порядка: $y = xe^{x^2}$.

5. Найти дифференциал функции: $y = x\sqrt{a^2 - x^2}$.

6. Построить график функции с помощью первой производной: $y = 12x^2 - 8x^3 - 2$.

Вариант № 7.

1. Найти производные следующих функций:

а) $y = x^2 \arccos(2x+3)$; б) $y = \dfrac{\ln\cos 2x}{\sin 3x}$; в) $y = (\mathrm{ctg}\, 2x)^x$.

2. Найти производные функций, заданных параметрически:

$$\begin{cases} x = \arcsin t^2; \\ y = \ln(1-t^2) \end{cases}$$

3. Найти производные функций, заданных в неявном виде: $\sin(x+2y) + \cos(2x+y) = 1$.

4. Найти производную второго порядка: $y = \dfrac{1}{1+x^2}$.

5. Найти дифференциал функции: $y = a \cdot \arcsin \dfrac{x^2}{a}$.

6. Построить график функции с помощью первой производной: $y = x(12 - x^2)/8$.

Вариант № 8.

1. Найти производные следующих функций:

а) $y = \sqrt{1-2x} \cdot \sin \dfrac{x}{2}$; б) $y = \dfrac{10^{\sqrt{x}}}{x}$; в) $y = x^{\sqrt{x+1}}$.

2. Найти производные функций, заданных параметрически:

$$\begin{cases} x = a(t^2 - \sin t); \\ y = a(1 - \cos 2t) \end{cases}$$

3. Найти производные функций, заданных в неявном виде: $e^x + e^{2y} = e^{x+y}$.

4. Найти производную второго порядка: $y = e^{\sqrt{x}}$.

5. Найти дифференциал функции: $y = x^2 \,\mathrm{arctg}\, 3x$.

6. Построить график функции с помощью первой производной: $y = (16 - 6x^2 - x^3)/8$.

Вариант № 9.

1. Найти производные следующих функций:

а) $y=\dfrac{1}{\operatorname{arctg}2x}$; б) $y=(1-\cos 2x)\cdot 3^{2x}$; в) $y=\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x}$.

2. Найти производные функций, заданных параметрически:

$$\begin{cases} x=e^{3t}\cdot\sin t^2; \\ y=e^{t}\cdot\cos 2t \end{cases}$$

3. Найти производные функций, заданных в неявном виде: $x-y=\arcsin(x+2y)-\arcsin y$.

4. Найти производную второго порядка: $y=e^{-x^2/2}$.

5. Найти дифференциал функции: $y=\ln\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x^2}$.

6. Построить график функции с помощью первой производной: $y=16x^3-36x^2+24x-9$.

Вариант № 10.

1. Найти производные следующих функций:

а) $y=x\cdot\arcsin\dfrac{x}{2}$; б) $y=\dfrac{\ln x}{1+\sin x^2}$; в) $y=\left(\sqrt{\operatorname{tg}x}\right)^{x+1}$.

2. Найти производные функций, заданных параметрически:

$$\begin{cases} x=\dfrac{1+t^3}{t^2-1}; \\ y=t^2-1 \end{cases}$$

3. Найти производные функций, заданных в неявном виде: $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

4. Найти производную второго порядка: $y=(1+x^2)\operatorname{arctg}x$.

5. Найти дифференциал функции: $y=x^2\arcsin 4x$.

6. Построить график функции с помощью первой производной: $y=(11+9x-3x^2-x^3)/8$.

Вариант № 11.

1. Найти производные следующих функций:

а) $y=\sqrt{1-3x^2}\arcsin x$; б) $y=\sqrt{\operatorname{tg}\dfrac{x^2}{2}}$; в) $y=\left(x^2+1\right)^{\sin x}$.

2. Найти производные функций, заданных параметрически:

$$\begin{cases} x=\ln\left(4-3t^4\right); \\ y=t^2-\arcsin 2t \end{cases}$$

3. Найти производные функций, заданных в неявном виде: $xy=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.

4. Найти производную второго порядка: $y=\sqrt{1-\sin x^2}$.

5. Найти дифференциал функции: $y=\operatorname{ctg}^2\left(\sqrt{x}+1\right)$.

6. Построить график функции с помощью первой производной: $y=16x^3+12x^2-5$.

Вариант № 12.

1. Найти производные следующих функций:

а) $y=\operatorname{ctg}^2\sqrt{1-x\ln x}$; б) $y=\dfrac{\sin\sqrt{2x}}{\ln x}$; в) $y=\left(\cos 2x\right)^{x^2}$.

2. Найти производные функций, заданных параметрически:

$$\begin{cases} x=a\left(\cos 2t+t\sin t\right); \\ y=a\left(\sin 2t-t\cos t\right) \end{cases}$$

3. Найти производные функций, заданных в неявном виде: $xy^2+\sin\left(x-2y\right)+5=0$.

4. Найти производную второго порядка: $y=\ln\sqrt[3]{1-x^2}$.

5. Найти дифференциал функции: $y=\ln\left(x^2+2x+3\right)$.

6. Построить график функции с помощью первой производной: $y=16x^3-12x^2-4$.

Вариант **№ 13.**

1. Найти производные следующих функций:

а) $y = \dfrac{x^2}{\log_2 x}$; б) $y = x \arccos \sqrt{1-3x}$; в) $y = (\ln 2x)^{\sqrt{x}}$.

2. Найти производные функций, заданных параметрически:

$$\begin{cases} x = t(1-\sin t); \\ y = t\cos t \end{cases}$$

3. Найти производные функций, заданных в неявном виде: $\cos^2(4x-y)+3x-5y=0$.

4. Найти производную второго порядка: $y = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

5. Найти дифференциал функции: $y = x\ln\sqrt{1+x^2}$.

6. Построить график функции с помощью первой производной: $y = x^2(x-2)^2$.

Вариант **№ 14.**

1. Найти производные следующих функций:

а) $y = \ln\sqrt{1-x} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$; б) $y = \dfrac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$; в) $y = x^{\sin 3x}$.

2. Найти производные функций, заданных параметрически:

$$\begin{cases} x = (t+1)/t, \\ y = (t-1)/t. \end{cases}$$

3. Найти производные функций, заданных в неявном виде: $\ln(3x+y)+\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} = y$.

4. Найти производную второго порядка: $y = \sqrt{1+5x^2}$.

5. Найти дифференциал функции: $y = \sin x \ln\left(1+x^2\right)$.

6. Построить график функции с помощью первой производной: $y = 16x^3 - 12x^2 - 4$.

Вариант № 15.

1. Найти производные следующих функций:

а) $y=\ln\left(\sqrt{x\sin x}-1\right)$; б) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x-1}$; в) $y=(\operatorname{tg}2x)^{x}$.

2. Найти производные функций, заданных параметрически:

$$\begin{cases} x=\arcsin t^{2}; \\ y=1-\operatorname{arctg}^{2} t \end{cases}$$

3. Найти производные функций, заданных в неявном виде: $e^{2x+y}+\arcsin(x-2y)=3$.

4. Найти производную второго порядка: $y=\operatorname{tg}^{3}x$.

5. Найти дифференциал функции: $y=\cos\left(x^{2}+1\right)\cdot\ln x$.

6. Построить график функции с помощью первой производной: $y=(x-1)^{2}(x-3)^{2}$.

Вариант № 16.

1. Найти производные следующих функций:

а) $y=\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sin\left(x^{2}+1\right)}$; б) $y=x\operatorname{arctg}\sqrt{x}$; в) $y=(\ln x)^{\sqrt{x}}$.

2. Найти производные функций, заданных параметрически:

$$\begin{cases} x=\sin^{2}3t; \\ y=\cos 3t \end{cases}$$

3. Найти производные функций, заданных в неявном виде: $2x-3y=e^{4x-5y}$.

4. Найти производную второго порядка: $y=\sin^{3}x$.

5. Найти дифференциал функции: $y=\sqrt{e^{x}}+x$.

6. Построить график функции с помощью первой производной: $y=\dfrac{27}{4}\left(x^{3}-x^{2}\right)-4$.

Вариант № 17.

1. Найти производные следующих функций:

а) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x^2 - 1}{x}$; б) $y = \cos\sqrt{2x}\cdot\ln x$; в) $y = (1+x)^{\ln\left(x^2+1\right)}$.

2. Найти производные функций, заданных параметрически:

$$\begin{cases} x = \sin 5t; \\ y = \operatorname{tg}^3 4t \end{cases}$$

3. Найти производные функций, заданных в неявном виде: $\arcsin 4x + \sqrt{x - 2y} = 3y$.

4. Найти производную второго порядка: $y = e^{1/x} - x$.

5. Найти дифференциал функции: $y = x\operatorname{ctg}\sqrt{x}$.

6. Построить график функции с помощью первой производной: $y = 3x^2 - 2 - x^3$.

Вариант № 18.

1. Найти производные следующих функций:

а) $y = \sqrt{1+e^x}\cdot\sin 2x$; б) $y = \dfrac{\cos^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$; в) $y = (\sin 2x)^{\cos x}$.

2. Найти производные функций, заданных параметрически:

$$\begin{cases} x = \arccos^2 2t; \\ y = \arcsin^2 2t \end{cases}$$

3. Найти производные функций, заданных в неявном виде: $e^{2x-1} + 4xy - x/y = 0$.

4. Найти производную второго порядка: $y = \ln\dfrac{1-e^x}{e^x}$.

5. Найти дифференциал функции: $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x^2}$.

6. Построить график функции с помощью первой производной: $y = (2x-1)^2(2x-3)^2$.

Вариант № 19.

1. Найти производные следующих функций:

а) $y = xe^{\sqrt{\ln x}}$; б) $y = \dfrac{\sin^2 x}{1+\operatorname{ctg} 2x}$; в) $y = \left(x^2+1\right)^{\sin 2x}$.

2. Найти производные функций, заданных параметрически:

$$\begin{cases} x = 1 - e^{2t}; \\ y = e^{-4t} \end{cases}$$

3. Найти производные функций, заданных в неявном виде: $\arcsin 2x + \sqrt{3x - y} = 2y$.

4. Найти производную второго порядка: $y = \dfrac{\operatorname{arctg} x^2}{1+x^4}$.

5. Найти дифференциал функции: $y = e^{2x}\cos 3x$.

6. Построить график функции с помощью первой производной: $y = 16x^3 - 36x^2 + 24x - 9$.

Вариант № 20.

1. Найти производные следующих функций:

а) $y = x \cdot e^{1-\cos x}$; б) $y = \dfrac{\ln x}{\arcsin 2x}$; в) $y = (\sin 2x)^{\operatorname{tg} x}$.

2. Найти производные функций, заданных параметрически:

$$\begin{cases} x = 2^t + 1; \\ y = \sqrt{1 - 2^t} \end{cases}$$

3. Найти производные функций, заданных в неявном виде: $\operatorname{tg}(x/y) + \cos^2(x - 4y) = 5$.

4. Найти производную второго порядка: $y = x^2 \ln^2 x$.

5. Найти дифференциал функции: $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$.

6. Построить график функции с помощью первой производной: $y = \left(x^3 + 3x^2\right)/4 - 5$.

Вариант № 21.

1. Найти производные следующих функций:

а) $y=\sqrt{x}\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}$; б) $y=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x^2-1}}$; в) $y=(1+x)^{x^2/2}$.

2. Найти производные функций, заданных параметрически:

$$\begin{cases} x=\sqrt[3]{4t}; \\ y=\sqrt[3]{4t-1} \end{cases}$$

3. Найти производные функций, заданных в неявном виде: $\mathrm{ctg}\dfrac{x}{y}+\sin(x-2y)=1$.

4. Найти производную второго порядка: $y=e^{2x}\sin 3x$.

5. Найти дифференциал функции: $y=(x-1)\sqrt{e^{3x}}$.

6. Построить график функции с помощью первой производной: $y=2x^3+9x^2+12x$.

Вариант № 22.

1. Найти производные следующих функций:

а) $y=\sqrt{1+x\ln^2 x}$; б) $y=\dfrac{x\sin x}{1+x}$; в) $y=(\ln 2x)^{x^2+2x}$.

2. Найти производные функций, заданных параметрически:

$$\begin{cases} x=\mathrm{arctg}\,2t; \\ y=\mathrm{arctg}(5t-1) \end{cases}$$

3. Найти производные функций, заданных в неявном виде: $e^y+\sqrt{2x+y^2}=xy$.

4. Найти производную второго порядка: $y=\cos e^x+\sin e^x$.

5. Найти дифференциал функции: $y=x\sqrt{e^{x^2}}$.

6. Построить график функции с помощью первой производной: $y=16x^2(x-1)^2$.

Вариант № 23.

1. Найти производные следующих функций:

а) $y = x\ln\left(\sqrt{1+\sin x}\right)$; б) $y = \dfrac{x}{1-\cos 2x}$; в) $y = (\ln x)^{\operatorname{tg} x^2}$.

2. Найти производные функций, заданных параметрически:

$$\begin{cases} x = 1/\sqrt{2t}, \\ y = 1/\left(\sqrt{2t}-1\right). \end{cases}$$

3. Найти производные функций, заданных в неявном виде: $x - y + x\sqrt{x^2 - y^2} = \dfrac{x}{y}$.

4. Найти производную второго порядка: $y = \operatorname{arctg}^2 x$.

5. Найти дифференциал функции: $y = \operatorname{arctg}(\ln x)$.

6. Построить график функции с помощью первой производной: $y = \left(x^3 - 9x^2\right)/4 + 6x - 9$.

Вариант № 24.

1. Найти производные следующих функций:

а) $y = \operatorname{arctg}\left(x \cdot \sqrt{\sin x}\right)$; б) $y = \dfrac{1}{4}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$; в) $y = \left(\sqrt{x}\right)^{\operatorname{tg} 2x}$.

2. Найти производные функций, заданных параметрически:

$$\begin{cases} x = \sin^2 2t; \\ y = \cos^2 2t \end{cases}$$

3. Найти производные функций, заданных в неявном виде: $\arcsin\dfrac{y}{x} = 2x + y^2$.

4. Найти производную второго порядка: $y = \arcsin^2 x$.

5. Найти дифференциал функции: $y = \ln\left(\sqrt{e^x} + 1\right)$.

6. Построить график функции с помощью первой производной: $y = 6x - 8x^3$.

Вариант № 25.

1. Найти производные следующих функций:

а) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$; б) $y = e^{-x^2}\ln x$; в) $y = x^{\ln x}$.

2. Найти производные функций, заданных параметрически:

$$\begin{cases} x = a\sin^3 t; \\ y = a\cos^3 t \end{cases}$$

3. Найти производные функций, заданных в неявном виде: $\sqrt{xy} - \sqrt{x+y} = 1$.

4. Найти производную второго порядка: $y = \arcsin x^2$.

5. Найти дифференциал функции: $y = \dfrac{1}{x}\arccos x$.

6. Построить график функции с помощью первой производной: $y = 2x^3 - 3x^2 - 4$.

Вариант № 26.

1. Найти производные следующих функций:

а) $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$; б) $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$; в) $y = \left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt[3]{x}}$.

2. Найти производные функций, заданных параметрически:

$$\begin{cases} x = \cos^3 2t; \\ y = t\sin t \end{cases}$$

3. Найти производные функций, заданных в неявном виде: $xy\left(1+y^2\right) = 1 + x^2$.

4. Найти производную второго порядка: $y = \ln^2\left(1 - e^x\right)$.

5. Найти дифференциал функции: $y = \arcsin\dfrac{1}{x}$.

6. Построить график функции с помощью первой производной: $y = 2 - 12x^2 - 8x^3$.

Вариант № 27.

1. Найти производные следующих функций:

а) $y=\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$; б) $y=\dfrac{\sin 3x}{\sin^2 x}$; в) $y=(\sin 3x)^{x^2/2}$.

2. Найти производные функций, заданных параметрически:

$$\begin{cases} x=t(1-\cos t); \\ y=t\sin t \end{cases}$$

3. Найти производные функций, заданных в неявном виде: $x\sqrt{y}+\dfrac{y}{\sqrt[3]{x}}=x^2y$.

4. Найти производную второго порядка: $y=x^2\sin 3x$.

5. Найти дифференциал функции: $y=(x-1)\arcsin 2x$.

6. Построить график функции с помощью первой производной: $y=2x^3+3x^2-5$.

Вариант № 28.

1. Найти производные следующих функций:

а) $y=\sqrt{1+x\sin^2 x}$; б) $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$; в) $y=(x^2+1)^{\cos x}$.

2. Найти производные функций, заданных параметрически:

$$\begin{cases} x=2^{\sin t}; \\ y=2^{\cos t} \end{cases}$$

3. Найти производные функций, заданных в неявном виде: $xy=\arcsin(x/y)$.

4. Найти производную второго порядка: $y=x^2\cos 5x$.

5. Найти дифференциал функции: $y=\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$.

6. Построить график функции с помощью первой производной: $y=x(12-x^2)/8$.

***Вариант* № 29.**

1. Найти производные следующих функций:

а) $y = e^{2x}\cos^2 3x$; б) $y = \dfrac{\cos^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 3x}$; в) $y = (\sin x)^{\ln\sqrt{x}}$.

2. Найти производные функций, заданных параметрически:

$$\begin{cases} x = \sqrt{\sin t}; \\ y = \cos\sqrt{t} \end{cases}$$

3. Найти производные функций, заданных в неявном виде: $\ln(x + \ln y) = 2x - y$.

4. Найти производную второго порядка: $y = x^2 \operatorname{tg} x$.

5. Найти дифференциал функции: $y = \ln x \cdot \ln(1-x)$.

6. Построить график функции с помощью первой производной: $y = (2x-1)^2(2x-3)^2$.

***Вариант* № 30.**

1. Найти производные следующих функций:

а) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{1-\sqrt{3}x^2}$; б) $y = \cos^2\left(\sin\dfrac{x}{3}\right)$; в) $y = (\ln x)^{\sqrt[3]{x}}$.

2. Найти производные функций, заданных параметрически:

$$\begin{cases} x = \ln(t^2-1); \\ y = \ln^2(t-1) \end{cases}$$

3. Найти производные функций, заданных в неявном виде: $x^3y^3 + x^2y = \ln xy$.

4. Найти производную второго порядка: $y = x^2 \operatorname{ctg} x$.

5. Найти дифференциал функции: $y = \dfrac{x}{\sqrt{3x^2-1}}$.

6. Построить график функции с помощью первой производной: $y = 16x^3 - 36x^2 + 24x - 9$.

Список литературы

1. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. М.: Высшая школа 1999. Ч. I.

2. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. М.: Наука 1987.

3. Рябушко А.П., Бархатов В.В. и др. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Минск. Высшая школа 1990. Ч. I.

4. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов / Н.Ш. Кремер и др. - М.: ЮНИТИ, 2003. - 471с.

5. Общий курс высшей математики для экономистов / Под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2004 г. – 656 с.

6. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В. Математика в экономике: Учебник: в 2-х частях. Ч.1. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 224 с.

7. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты): Учеб. пособие для втузов. М.: Высш. шк., 1983. 175 с.

Макусева Татьяна Гавриловна
кандидат педагогических наук, доцент

Шемелова Ольга Васильевна
кандидат физико-математических наук

Бакеева Лариса Викторовна
кандидат педагогических наук, доцент

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМНННОЙ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ООО «Свое издательство»
199053, Санкт-Петербург, 1-я линия В.О., 42.
Телефон: +7812 612-18-81
Почта: editor@isvoe.ru
Сайт: http://isvoe.ru
Подписано в печать: 30.05.2017
Тираж 500 экз.
Гарнитура таймс.
Усл. печ.л. 6,75.
Заказ №00444.

Отпечатано с оригинал-макета
в РИО НХТИ (филиал) ФГБОУ ВО «КНИТУ»
г. Нижнекамск, 423570, ул. 30 лет Победы, д. 5а