

Министерство образования и науки Российской Федерации  
**Нижекамский химико-технологический институт (филиал)**  
федерального государственного бюджетного образовательного  
учреждения высшего образования  
«Казанский национальный исследовательский технологический  
университет»

**Ф.М. Алмакаева, И.А. Сабанаев**

# **РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ**

**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ**

**Нижекамск  
2016**

**УДК 539.3**

**А 51**

Печатается по решению редакционно-издательского совета НХТИ ФГБОУ ВО «КНИТУ».

**Рецензенты:**

**Латыпов Д.Н.**, кандидат технических наук, доцент;  
**Багоутдинова А.Г.**, кандидат технических наук, доцент.

**Алмакаева, Ф.М.**

**А 51** Расчеты на прочность и жесткость при изгибе : учебное пособие / Ф.М. Алмакаева, И.А. Сабанаев, – Нижнекамск : НХТИ ФГБОУ ВО КНИТУ, 2016 – 93 с.

Данное пособие рассматривает традиционные приемы определения напряжений и деформаций бруса, для которого справедлива гипотеза плоских сечений.

В пособии даны краткие сведения из теории, необходимые для решения задач на изгиб, приводятся примеры с подробными объяснениями.

Учебное пособие предназначено для студентов всех форм обучения по техническим профилям НХТИ.

Пособие может быть рекомендовано инженерно-техническим работникам машиностроительных предприятий и проектных организаций.

Подготовлено на кафедре машин и аппаратов НХТИ ФГБОУ ВО КНИТУ

**УДК 539.3**

© Алмакаева Ф.М., Сабанаев И.А., 2016  
© НХТИ ФГБОУ ВО КНИТУ, 2016

## ВВЕДЕНИЕ

При проектировании промышленных объектов, в том числе технологических установок химической и нефтеперерабатывающей промышленности, большое внимание уделяется их надежности. *Надёжность* – это комплексное свойство элемента механической системы сохранять в заданных пределах заложенные значения основных параметров (прочность, жесткость, износостойкость) в течение заданного времени с учётом заложенных условий применения, хранения и транспортирования.

Задачи, в которых анализируется поведение элементов механических систем под действием внешней нагрузки, решает наука «Сопротивление материалов». Эта наука рассматривается как раздел механики, который можно трактовать как *механика деформируемых твердых тел*. Сопротивление материалов как прикладная механика призван содействовать механическим расчетам различных инженерных систем. Механический расчет является основным расчетом в машиностроении. Любая система рассчитывается таким образом, чтобы в процессе ее эксплуатации, она не обрушилась или деформировалась в заданных пределах.

Основной задачей сопротивления материалов является разработка *моделей прочностной надежности*. Это объясняется усложнением технических изделий и необходимостью повышения надежности и эффективности элементов механических систем.

Для практической деятельности инженеру необходимо выработать навыки создания простых и ясных моделей явлений и реальных объектов. С помощью таких моделей инженер сможет выбрать материал и необходимые размеры элементов конструкций, оценить сопротивление конструкционных материалов внешним воздействиям. Для определения *критериев прочностной надежности* приняты четыре вспомогательные модели –

модели материала, модели формы, модели нагружения и модели разрушения.

При построении *модели материала* используется модель сплошного однородного тела.

*Модели формы* элемента конструкции представляют собой схематизированное описание геометрии элемента с помощью стандартных, типовых элементов. Это позволяет применять для расчета более простые методы, использующие особенности геометрической формы типовых элементов. Брус является основной геометрической моделью сопротивления материалов. Брус, работающий на изгиб, называется балка.

При построении *модели нагружения* внешние нагрузки схематизируются в виде одной из групп:

- 1) сосредоточенные силы,
- 2) распределенные силы,
- 3) объёмные или массовые силы.

*Модели разрушения* представляют собой уравнения, связывающие параметры работоспособности изделия в момент разрушения с параметрами, обеспечивающими прочность. Эти условия часто называют условиями прочности. Обычно рассматриваются четыре модели разрушения в зависимости от условий нагружения:

- 1) статическое разрушение;
- 2) длительное статическое разрушение;
- 3) малоцикловое разрушение;
- 4) усталостное разрушение.

К моменту начала изучения законов механики деформируемых тел студенты должны быть знакомы с положениями статики твердого тела, иметь сформированные представления о системах сил, способах их преобразования и законах равновесия твердых тел под воздействием сил. На этих положениях основываются выводы важнейших положений сопротивления материалов, таких как теория внутренних силовых факторов, применение метода сечений, расчет напряжений

при изгибе. Изучение этих положений способствует формированию знаний по применению математического аппарата при решении прикладных задач, осмыслению полученных численных результатов и поиску выбора наиболее оптимальных конструктивных решений.

## Раздел 1. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ (ВСФ)

Построение эпюр ВСФ решается в два этапа.

1. Построение расчетной схемы балки и определение приложенных к ней сил.

2. Определение внутренних силовых факторов и построение эпюр.

Рассмотрим эти этапы подробно.

### 1 ЭТАП. ПОСТРОЕНИЕ РАСЧЁТНОЙ СХЕМЫ БАЛКИ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕЙСТВУЮЩИХ СИЛ

*Расчетная схема* – это схематичное изображение реального объекта, освобожденного от несущественных с точки зрения данного расчета особенностей. На расчетной схеме в условных обозначениях рассматриваются сам элемент (при изгибе это балка), форма крепления (опоры), действующая нагрузка, опорные реакции, расстояния между точками приложения сил.

#### Внешние силы

По характеру приложения внешние силы делятся на сосредоточенные, т.е. приложенные в точку и распределенные. *Сосредоточенные силы* на схемах изображаются как обычные векторы, приложенные в заданную точку. Например, силы  $P_1$  и  $P_2$  (рис. 1).

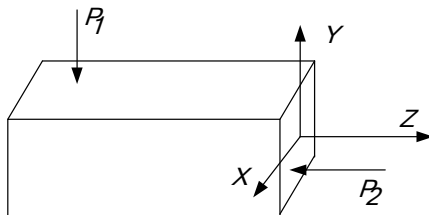


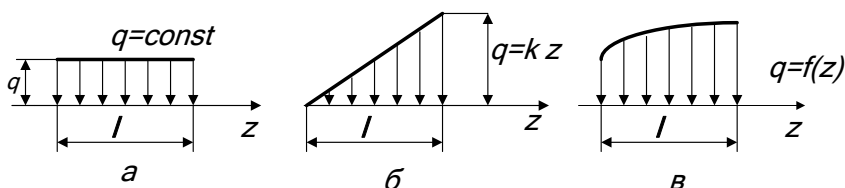
Рис. 1. Изображение сосредоточенных сил

Осью абсцисс является ось  $Z$ . В сопромате координатную ось, направленную вдоль оси балки принято, обозначать через  $Z$ , а не  $X$ . Тогда поперечное сечение бруса оказывается в привычной для нас плоскости  $X - Y$ .

На расчетных схемах нагрузка, распределенная по отрезку, изображается так, как это показано на рис. 2.

Распределенная нагрузка характеризуется величиной  $q$  и называется *интенсивностью распределенной нагрузки*.

Линия на схеме, от которой отходят стрелки к брусу показывает, как изменяется интенсивность нагрузки вдоль бруса. На рис.2а видно, что линия – постоянная, поэтому такую нагрузку называют равномерно распределенной.



**Рис. 2.** Схематичное изображение распределенной нагрузки

Чтобы рассчитать полную силу  $Q$  от распределенной нагрузки, нужно вычислить площадь фигуры, заключенной между линией интенсивности нагрузки и линией, показывающей на схеме сам брус.

Например, на рис.2а под линией интенсивности распределенной нагрузки мы видим прямоугольник. Тогда полная сила от нагрузки составит величину  $Q = q \cdot l$ .

На рис.2б показан прямоугольный треугольник. Тогда полная нагрузка равна его площади:  $Q = 0,5q \cdot l$ . В случае с криволинейной нагрузкой площадь рассчитывается как интеграл:

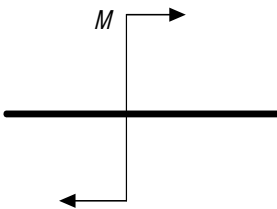
$$Q = \int_l q(z)dz$$

### Внешние моменты

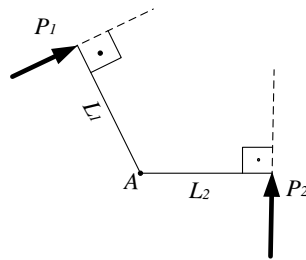
Внешние моменты, приложенные к брусу, имеют 3 различные формы:

- сосредоточенный момент;
- момент, создаваемый сосредоточенной силой;
- момент, создаваемый распределенной нагрузкой.

Сосредоточенный момент обычно изображают в виде пары сил так, как это показано на рис.3.



**Рис. 3.** Изображение сосредоточенного момента на расчетных схемах



**Рис. 4.** Моменты, создаваемые сосредоточенными силами

Момент, создаваемый сосредоточенной силой, определяется как произведение самой силы на плечо. Плечом является кратчайшее расстояние (перпендикуляр) от точки, в которой рассчитывается момент до линии, вдоль которой действует сила. При этом нужно учитывать знак момента.

Момент считается положительным, если он вращается вокруг точки в направлении против часовой стрелки и отрицательным, если по часовой. Моменты от сил  $P_1$  и  $P_2$  равны  $M_A = P_1 \cdot L_1$  и  $M_A = - P_2 \cdot L_2$  соответственно.



Чтобы вычислить момент, создаваемый распределенной нагрузкой, нужно выполнить два действия:

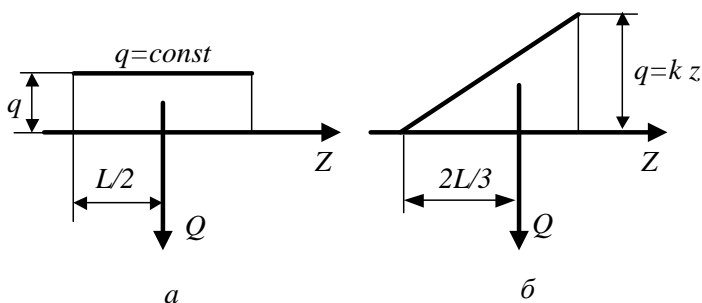
1) вычислить полную силу от нагрузки, как ее площадь (прямоугольника, треугольника), или по формуле на 4с;

2) полную силу умножить на плечо, где плечо рассчитывается как расстояние до центра тяжести площади под линией интенсивности. Например, для прямоугольника это будет середина отрезка, а для треугольника – расстояние  $2/3$  от начала нагрузки.

Примеры расчета момента для равномерно распределенной нагрузки и нагрузки, изменяющейся по линейному закону, показаны на рис.5:

- для рис. 5а  $M(q) = Q \cdot (1/2) \cdot L$ ;

- для рис. 5б  $M(q) = Q \cdot (2/3) \cdot L$ .



**Рис. 5.** Расчет момента распределенной нагрузки

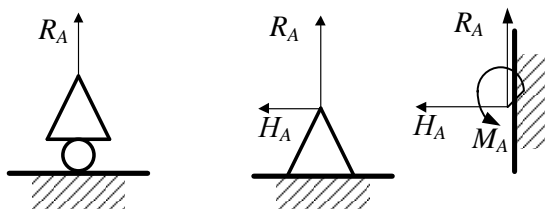
### Опорные реакции

Внешние силы делятся на активные и реактивные.

Активные – это заданные, известные силы (внешняя нагрузка).

Реактивные силы (реакции опор) возникают в местах закрепления бруса и заранее неизвестны. Опорные реакции являются связями, препятствующими перемещению в направлении, в котором они действуют. В сопро mate

опорой называют вообще любой способ закрепления. Все способы закрепления можно подвести к одной из трёх расчетных схем. Они показаны на рис. 6.



**Рис. 6.** Геометрические схемы опор и возникающие на опорах связи

Шарнирно-подвижная опора. Накладывает на опорное сечение одну связь, препятствуя перемещению в направлении, перпендикулярном к опорной поверхности. Возникает одна реакция  $R_A$ .

Шарнирно-неподвижная опора. Накладывает на опорное сечение две связи, препятствуя перемещениям в горизонтальном и вертикальном направлениях. Возникают две реакции  $R_A$  и  $H_A$ .

Жесткая заделка. Накладывает на опорное сечение три связи, препятствуя перемещениям в обоих направлениях и повороту сечения. Возникает три реакции:  $R_A$ ,  $H_A$ ,  $M_A$ . Момент, возникающий в заделке, препятствует повороту сечению. Значит, в жесткой заделке невозможны вообще никакие перемещения. Поэтому жесткая заделка – абсолютно жесткая форма закрепления.

### Уравнения равновесия

Из общей механики известно, что равновесие предполагает равенство нулю геометрической суммы всех сил и геометрической суммы всех моментов. Математически это формулируется в виде уравнений равновесия. Уравнения равновесия (или уравнения

статики) – основные уравнения в сопротивлении материалов, позволяющие производить подавляющее большинство расчетов.

При записи уравнений равновесия удобно рассматривать не геометрическую сумму всех сил, а сумму проекций всех сил на координатные оси. В результате, вместо одного уравнения суммы сил для объемной задачи (в системе координат с тремя осями) можно записать три уравнения равновесия – проекций сил на соответствующие оси. Таким же образом, уравнение суммы моментов можно представить в виде трех уравнений моментов относительно соответствующих осей. И тогда всего можно составить 6 уравнений равновесия:

$$\begin{aligned}\sum Z &= 0 & \sum M_z &= 0 \\ \sum Y &= 0 & \sum M_y &= 0 \\ \sum X &= 0 & \sum M_x &= 0\end{aligned}\quad (1)$$

Для плоской задачи (в системе координат с двумя осями  $Z$  и  $Y$ ) можно составить только три уравнения равновесия:

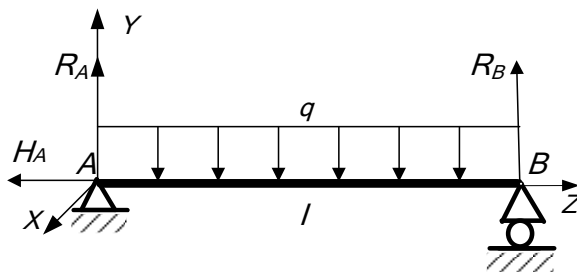
$$\begin{aligned}\sum Z &= 0 \\ \sum Y &= 0 \\ \sum M_x &= 0\end{aligned}\quad (2)$$

Уравнения равновесия используют для расчета связей, которые обеспечивают равновесие системы. В качестве связей, удерживающих в равновесии балку или раму, выступают опорные реакции. Первым этапом в любом расчете является вычисление реакций опор. Рассмотрим плоскую систему, когда все элементы конструкции, а также внешние силы находятся в одной плоскости  $Z - Y$ . Из трёх уравнений равновесия можно найти, как известно, только три неизвестные опорные

реакции. Например, задачу, показанную на рис.7, можно решить, составив 3 уравнения равновесия по формулам 2.

Рассмотрим примеры на определение опорных реакций.

**Пример 1.** Вычислить опорные реакции для балки, изображенной на рис.7.



**Рис. 7.** Схема плоской задачи с тремя связями

Для решения используем уравнения формулы 2. Составим первое уравнение. На горизонтальную ось координат – ось Z проекцию дает только сила  $H_A$ . Остальные силы проецируются на эту ось в виде точки, т.е. длина проекций этих сил равна 0. В результате в это уравнение входит только одна проекция  $H_A$  со знаком минус, поскольку направление проекции противоположно направлению оси.

Из этого уравнения определяется реакция  $H_A$ :

$$\begin{aligned} \sum Z &= -H_A, \\ H_A &= 0. \end{aligned}$$

Второе уравнение равновесия включает проекции всех внешних сил на ось Y.

$$\sum Y = R_A + R_B - ql.$$

Проекции сил  $R_A$  и  $R_B$  направлены вверх, т.е. совпадают с направлением оси Y, поэтому записываются со знаком плюс. Кроме сосредоточенных сил – опорных реакций к балке приложена равномерно распределенная нагрузка, интенсивность которой равна q. Полную силу,

создаваемую этой нагрузкой, вычисляем как площадь прямоугольника  $Q = q \cdot l$  (см. рис.2) .

В этом уравнении две неизвестные силы – это  $R_A$  и  $R_B$ . Из одного уравнения неизвестные вычислить нельзя, поэтому пока его оставим.

Третье уравнение системы рассматривает сумму моментов относительно оси X.

Эта ось перпендикулярна плоскости нашего рисунка (рис.7). Начало координат (точка, из которой исходит ось X) можно расположить в любом удобном месте. При расчете моментов эту точку располагают там, где проходит как можно больше сил (неизвестных сил). В нашем случае такой точкой является A. Тогда силы  $N_A$  и  $R_A$  в точке A создают нулевые моменты (плечо силы, проходящей через точку равно нулю). Это упрощает уравнение.

Момент от равномерно распределенной нагрузки вычисляется так, как это показано на рис.5а. Из этого уравнения можно определить реакцию  $R_B$ .

$$\sum M_A = R_B l - q l \frac{l}{2} = R_B l - \frac{ql^2}{2} = 0$$

$$R_B = \frac{ql^2 \cdot 2}{2l} = \frac{ql}{2}.$$

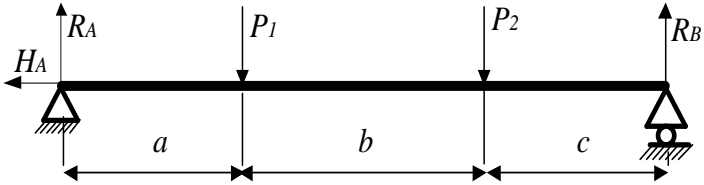
Теперь в уравнении проекций на ось Y осталась только одна неизвестная – реакция  $R_A$ .

В это уравнение подставляем уже известную силу  $R_B$  и вычисляем неизвестную  $R_A$ .

$$R_A = ql - R_B = ql - \frac{ql}{2} = \frac{ql}{2}.$$

При заданных значениях  $q$  и  $l$  получаем значения в абсолютных единицах (в метрах и ньютонах).

**Пример 2.** Вычислить опорные реакции для балки, изображенной на рис. 8.



**Рис. 8.** Расчетная схема балки к примеру 2

Дано:  $a = 1$  м,  $b = 8$  м,  $c = 1$  м.  $L = a + b + c = 10$  м.

$P_1 = 1$  кН,  $P_2 = 2$  кН.

Составим уравнения равновесия.

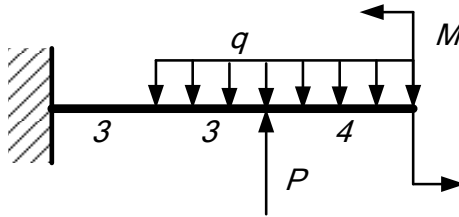
$$\sum M_B = -R_A \cdot 10 + P_1 \cdot 9 + P_2 \cdot 1 = 0, R_A = 1,1 \text{ кН}$$

$$\sum Y = R_A + R_B - P_1 - P_2 = 0, R_B = 1,9 \text{ кН.}$$

Связь  $H_A$  из уравнения проекций на горизонтальную ось  $Z$  равна нулю.

**Пример 3.** Вычислить опорные реакции, для балки, показанной на рис.9.

$q = 10$  кН/м;  $P = 8$  кН;  $M = 4$  кН\*м

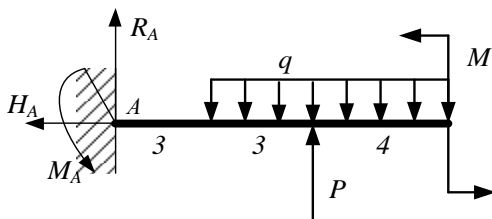


**Рис. 9.** Схема балки к примеру 3

Задана консоль – балка с одним закрепленным концом. Единственная опора закрепляет балку в точке А.

Жесткая заделка предполагает наличие трёх связей – двух сил  $R_A$  и  $H_A$ , а также момента заделки  $M_A$ .

Тогда схема балки примет вид, показанный на рис.10.



**Рис. 10.** Схема балки к примеру 3 с опорными реакциями

Составим уравнения равновесия.

$$\Sigma Z = - N_A = 0, N_A = 0;$$

$$\Sigma Y = R_A + P - q \cdot 7 = 0;$$

$$R_A = q \cdot 7 - P = 10 \cdot 7 - 8 = 62 \text{ (кН)};$$

$$\Sigma M_A = M_A + P \cdot 6 + M - q \cdot 7 \cdot 6,5 = 0;$$

$$M_A = q \cdot 45,5 - M - 6 \cdot P = 455 - 4 - 6 \cdot 8 = 403 \text{ (кН) \cdot м.}$$

## **2 ЭТАП. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ И ПОСТРОЕНИЕ ЭШЮР**

Внутри любого материала имеются внутренние межатомные силы, наличие которых определяет способность тела воспринимать действующие на него внешние силы, сопротивляться разрушению, изменению формы и размеров. Под внутренними силами в сопротивлении материалов понимают силы взаимодействия между отдельными элементами сооружения или между отдельными частями элемента, возникающие под действием внешних сил.

### **Внутренние силовые факторы**

Известно, что внешние силы, воздействуя на тело, приводят к его деформации.

Если деформация упругая, то после снятия внешних нагрузок тело возвращает свои прежние размеры и форму.

В кристаллических телах атомы образуют кристаллическую решетку. При деформации тела, деформируется эта решетка, меняется взаимное положение атомов. Тогда возникают силы, стремящиеся вернуть все в исходное состояние. Эти силы называют внутренними силами. Пока деформация упругая они существуют. При пластической деформации связи рвутся и, понятно, возврат невозможен. Возвращение тела в начальное состояние происходит за счет внутренних сил. Наша задача – научиться рассчитывать эти силы.

В сопротивлении материалов вводится понятие внутренних силовых факторов (ВСФ), которых в природе не существует, но их применение не искажает правильность решения задачи.

Внутренние силовые факторы действуют в поперечных сечениях бруса. Их возникновение можно объяснить следующим образом. В каждом поперечном сечении все внутренние силы геометрически складываются. Применяя правила сложения векторов, мысленно к первой внутренней силе прибавим вторую, к их сумме – третью и т.д. В результате останется единственная суммарная сила, приложенная в центр тяжести сечения.

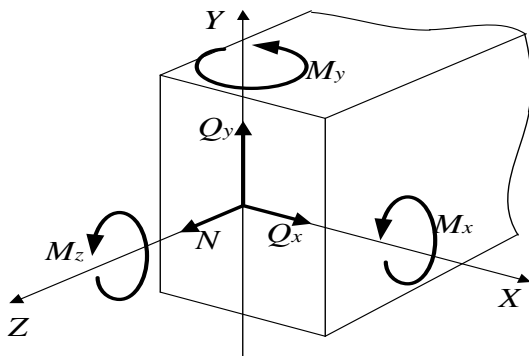
Таким же образом, сложим все внутренние моменты и получим суммарный или главный момент. Далее вектор главной силы разложим на проекции по осям  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , которые исходят из центра тяжести сечения. Аналогично поступим с главным моментом. В результате получим 6 величин, которые и называются внутренними силовыми факторами.

Схема разложения на проекции показана на рис. 11.

Проекция суммарной силы на продольную ось  $Z$  обозначается  $N$  и называется продольной силой. Проекция на поперечные оси  $X$  и  $Y$  называются поперечными силами и обозначаются соответственно  $Q_y$  и  $Q_x$ . Составляющая  $M_z$



– крутящим моментом. Составляющие  $M_x$  и  $M_y$  – изгибающими моментами.



**Рис. 11.** Внутренние силовые факторы

По наличию в сечении ВСФ определяют *вид деформации*. Обратите внимание, вид деформации определяют не по внешним силам, а по имеющимся в сечении ВСФ. Если в сечении возникает только один ВСФ, а остальные пять отсутствуют (равны нулю), то деформация называется *простой*.

Четыре наименования ВСФ предполагают четыре вида простых деформаций:

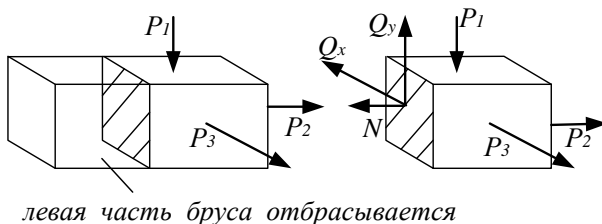
- присутствует только  $N$  – осевое растяжение или сжатие;
- только  $Q_y$  или  $Q_x$  – чистый сдвиг;
- присутствует только  $M_z$  – чистое кручение;
- имеется только  $M_x$  или  $M_y$  – чистый изгиб.

Если в сечении возникает больше одного ВСФ, то деформация называется *сложной*. Количество сложных деформаций равно числу возможных комбинаций ВСФ.

### **Метод сечений**

Для расчета ВСФ в сопромате применяется простой, но эффективный способ, называемый методом сечений. На каждом участке бруса нужно провести одно поперечное

сечении. Каждым сечением брус разрезается надвое (рис. 12).



**Рис. 12.** Иллюстрация метода сечений

Одну из частей отбрасывают. В открывшемся сечении становятся видны внутренние силы. До проведения сечения брус находился в равновесии. Равновесие обеспечивалось за счет внешних активных сил и реакций опор.

После отбрасывания одной из частей некоторые силы, включая опорные реакции, в обеспечении равновесия не участвуют. Но, несмотря на это, оставшаяся часть бруса все равно будет находиться в равновесии.

Теперь равновесие соблюдается за счет оставшихся внешних сил и появившихся в раскрытом сечении внутренних сил. Таким образом, можно составить уравнение равновесия: внешние силы плюс внутренние равны нулю.

Отсюда внутренние силы можно рассчитать как сумму сил внешних. Это и есть *метод сечений* – чтобы вычислить некоторый ВСФ, нужно сложить соответствующие внешние силы, имеющиеся в оставшейся части бруса с учетом знака.

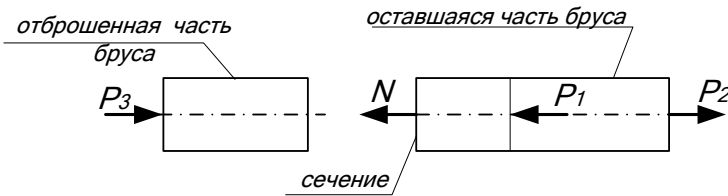
Продольная сила равна сумме внешних сил, действующих вдоль оси бруса или сумме проекций этих сил на ось.

Поперечная сила равна соответственно сумме поперечных сил, крутящий момент - сумме внешних крутящих моментов, изгибающий - сумме изгибающих.

При составлении уравнений ВСФ необходимо придерживаться правила знаков.

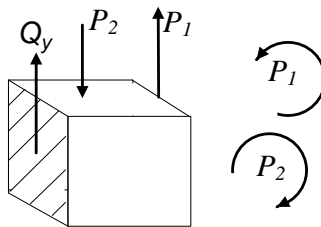
### Правила знаков

*Для продольной силы.* Если внешняя сила растягивает участок, то в уравнение внутренней продольной силы она подставляется со знаком плюс, если сжимает - то со знаком минус (рис.13). В данном случае  $N = -P_1 + P_2$ .



**Рис. 13.** Правило знаков для продольной силы

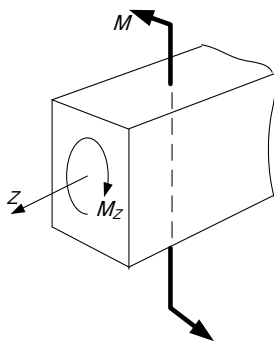
*Для поперечной силы.* Если внешняя сила поворачивает участок по часовой стрелке, то в уравнение внутренней поперечной силы она подставляется со знаком плюс, если против часовой - то со знаком минус (рис.14). В данном случае  $Q_y = -P_1 + P_2$ .



**Рис. 14.** Правило знаков для поперечной силы

*Для крутящего момента.* Если внешний момент поворачивает участок вокруг оси бруса против часовой стрелки, то в уравнение внутреннего крутящего момента он подставляется со знаком плюс, если по часовой - то со знаком минус. **На отсеченную часть нужно смотреть со стороны сечения.**

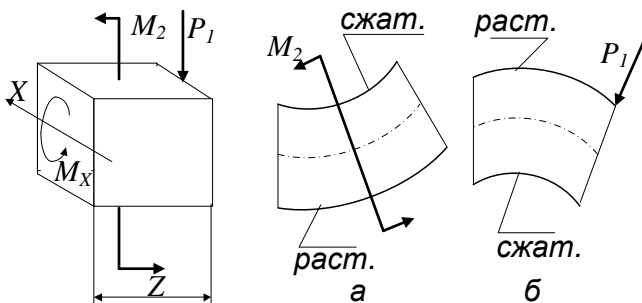
В данном случае  $M_z = -M_1 + M_2$  (рис. 15).



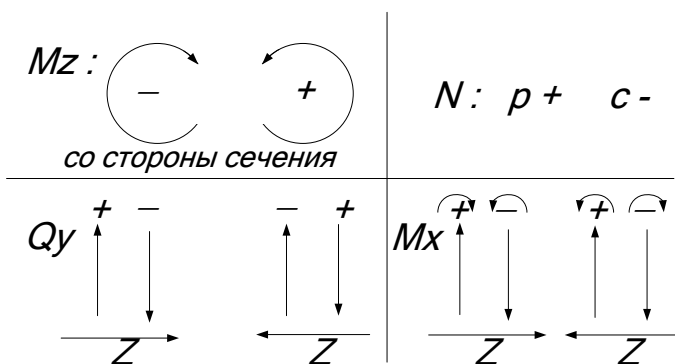
**Рис. 15.** Правило знаков для крутящего момента

*Для изгибающего момента.* При расчете балки на изгиб в сопроамте применяется следующая модель: балка представляет собой набор продольных волокон (веник). При изгибе каждое волокно либо растягивается, либо сжимается независимо от соседних. Волокна не создают давление на соседние волокна. Если внешний момент изгибает балку таким образом, что происходит сжатие ее верхних волокон (рис.16а), то в уравнение внутреннего изгибающего момента он подставляется со знаком плюс, если сжатие нижних волокон, как на рис.16 б - то со знаком минус. В данном случае  $M_x = -P_1 \cdot Z + M_2$ .

На рис. 17 представлена схема, изображающая правила знаков для ВСФ.



**Рис. 16.** Правило знаков для изгибающего момента



**Рис. 17.** Схема, изображающая правило знаков ВСФ

### Построение эпюр ВСФ

В инженерной практике особое место занимает умение представлять взаимодействие сил в расчете конструкции и связь между внешними и внутренними силами в элементах конструкции. Для этого внутренние силовые факторы в функции осевой координаты изображают графически. Эти графики называются **эпюрами**. Эпюра – это график, показывающий изменение какой – либо величины (в нашем случае ВСФ) по координате, построенный только по характерным точкам,

например на границах участков. Эпюры строятся по составленным уравнениям ВСФ.

Эпюру принято штриховать линиями, перпендикулярными оси бруса. Внутри эпюры указывают ее знак – плюс или минус. Построив эпюры можно определить *опасное сечение* – это сечение, в котором, в первую очередь, возможно разрушение.

Опасным является то сечение, в котором эпюра данного ВСФ максимальна. Например, на рис. 18 это сечение В.

### **Правила контроля построения эпюр**

Рассмотрим подробнее правило знаков для изгибающего момента. Если момент сжимает верхние волокна, то он считается положительным. Положительная эпюра откладывается сверху. Значит, если сжимаются верхние волокна, то эпюра сверху. Если момент сжимает нижние волокна, то он считается отрицательным. Отрицательная эпюра откладывается снизу. Значит, если сжимаются нижние волокна, то эпюра снизу. Отсюда следует, что эпюра момента всегда оказывается со стороны сжатых волокон. Поэтому говорят, что эпюра изгибающего момента строится на сжатом волокне. Это можно считать тоже правилом знаков для случая, когда определить, где нижние, а где верхние волокна невозможно.

Ниже представлены *7 правил*, применяя которые можно проконтролировать правильность построения эпюр.

1. В сечении, в котором приложена внешняя сосредоточенная сила, на эпюре внутренней силы  $Q_y$  должен быть скачок (ступенька) на величину и направление этой силы.

2. В сечении, в котором приложен внешний сосредоточенный момент, на эпюре внутреннего момента  $M_x$  должен быть скачок (ступенька) на величину и направление этого момента.

3. На концах балки внутренний момент должен быть равен нулю, если нет внешнего момента.

4. В промежуточном шарнире изгибающий момент равен нулю, поэтому эпюра  $M_x$  в шарнире должна пройти через ноль, т.е. пересечь ось.

5. На участке, на котором приложена равномерно распределенная нагрузка, эпюра  $Q_y$  – наклонная прямая линия, а эпюра  $M_x$  – парабола.

6. На участке, на котором
- эпюра  $Q_y$  – положительна, эпюра  $M_x$  возрастает,
  - $Q_y$  отрицательна,  $M_x$  убывает,
  - $Q_y$  равна нулю,  $M_x$  постоянная прямая.

7. В сечении, в котором эпюра  $Q_y$  пересекает нулевую линию, эпюра  $M_x$  обязательно имеет экстремум.

Шестое и седьмое правила являются следствием теоремы Журавского, согласно которой поперечная сила есть первая производная от изгибающего момента по координате:

$$\frac{dM_x}{dz} = (M_x)' = Q_y.$$

## ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ ЭПЮР ПОПЕРЕЧНЫХ СИЛ И ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ

### Пример 1.

Балка (рис.18) состоит из одного участка. Расположим начало координат в т. В. Проведем сечение на произвольном расстоянии  $Z$ . Это расстояние может быть любым в пределах от 0 до 2м. Отбросим левую часть балки. Запишем уравнения ВСФ как сумму внешних сил. Из шести возможных ВСФ возникнет только два: поперечная сила  $Q_y$  и изгибающий момент  $M_x$ .

Схема расчета ВСФ показана на рис.27.

Граница участка:

$$0 \leq Z \leq 2\text{м}.$$

Уравнение поперечной силы:

$Q_y = -P = -2\text{кН}$  - это уравнение прямой постоянной линии.

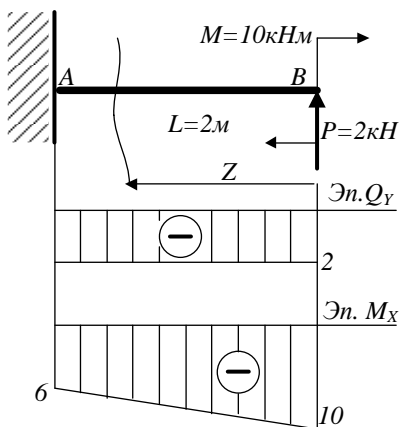
Уравнение изгибающего момента:

$M_x = -M + P \cdot Z = -10 + 2 \cdot Z$  - это уравнение прямой наклонной линии.

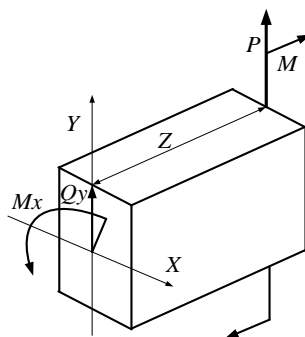
Чтобы построить такую линию, нужно вычислить значение момента в двух точках: в начале и в конце участка.

$$M_x |_{Z=0\text{м}} = -M + P \cdot Z = -10 + 2 \cdot 0 = -10\text{кН} \cdot \text{м}$$

$$M_x |_{Z=2\text{м}} = -M + P \cdot Z = -10 + 2 \cdot 2 = -6\text{кН} \cdot \text{м}.$$



**Рис. 18.** Эпюры ВСФ при плоском изгибе



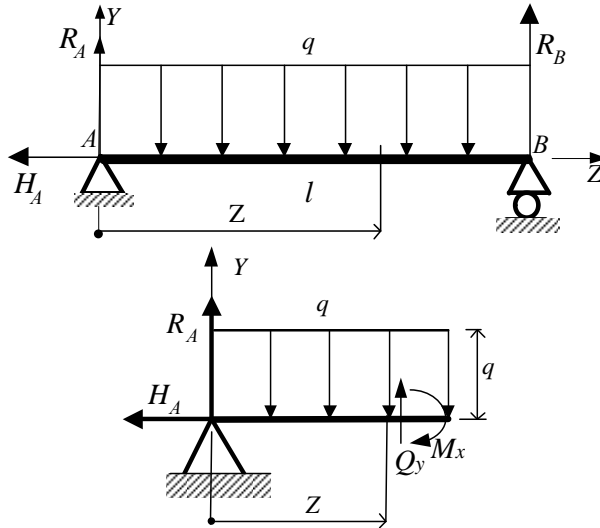
**Рис. 19.** ВСФ при изгибе балки к примеру 1

Далее строим эпюры. Эпюра поперечной силы является прямой, параллельной оси линии. Для ее построения в масштабе откладываем значение  $-2\text{ кН}$  в начале и в конце участка и соединяем прямой линией. Эпюра изгибающего момента представляет собой наклонную прямую линию. Для ее построения откладываем значения  $-10\text{ кН}\cdot\text{м}$  в начале участка и  $-6\text{ кН}\cdot\text{м}$



в конце участка. Полученные точки соединяем прямой линией. Далее обе эпюры штрихуем так, как это показано на рис. 18.

**Пример 2.** Построим эпюры ВСФ для схемы рис. 20. Опорные реакции определены на с. 12.



**Рис. 20.** Схема для расчета ВСФ к примеру 2

Для вычисления ВСФ применяем метод сечений. Балка содержит всего один участок. В произвольном месте на этом участке проведем сечение. Начало координат расположим, например, в точке  $A$ .

Чтобы показать, что сечение проведено действительно в произвольном месте участка, покажем, что расстояние до сечения есть величина переменная « $Z$ » (рис.20), которая может принимать любое значение в диапазоне  $0 \leq Z \leq l$ .

Теперь отбросим правую часть балки и вычислим ВСФ в сечении, применяя метод сечений.

Поперечная сила в сечении равна сумме двух внешних сил, оставшихся в левой части бруса – это сосредоточенная сила  $R_A$  и сила, возникающая от действия распределенной нагрузки  $q$ .

Опорная реакция в уравнение будет подставлена со знаком «+» в соответствии с правилом знаков для  $Q_y$  (рис. 25), а распределенная нагрузка – со знаком минус.

Полная сила от действия нагрузки рассчитывается как площадь прямоугольника: высота фигуры  $q$ , а ширина – расстояние от т. А до сечения, т.е.  $Z$  (рис. 20).

$$\text{Тогда } Q_y = R_A - q \cdot z = 0,5 q \cdot l - q \cdot z .$$

Записанное уравнение является уравнением прямой, так как переменная  $z$  находится в степени 1.

Чтобы построить прямую, нужно вычислить значение функции в двух точках. За такие точки удобно принять начало и конец участка. Тогда

$$Q_y |_{z=0} = 0,5 q l$$

$$Q_y |_{z=l} = -0,5 q l$$

Далее вычисляем внутренний момент.

В соответствии с методом сечений внутренний момент равен сумме всех внешних моментов. В нашем случае такими моментами являются два момента: момент, создаваемый опорной реакцией и момент, создаваемый распределенной нагрузкой.

Момент силы  $H_A$  равен 0, так как эта сила проходит через сечение и плечо ее равно нулю.

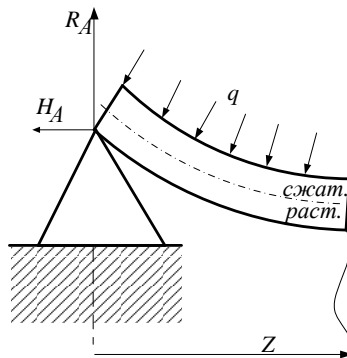
Момент от силы  $R_A$  равен произведению этой силы на плечо, т.е. на расстояние от т. А до сечения. В нашем случае это расстояние обозначено как  $Z$  (рис. 20). Запишем:

$$M_x = R_A \cdot z$$

Знак этого момента будет положительным, так как момент этой силы изгибает балку так, что сжимаются верхние волокна балки.

Величина момента от распределенной нагрузки вычисляется как произведение полной силы на плечо.

Полная сила рассчитывается как площадь прямоугольника  $Q = q \cdot z$ . Плечо этой силы отсчитывается как расстояние от сечения, в котором вычисляется внутренний момент до центра тяжести прямоугольника, т.е. половина расстояния  $z$ . Тогда величина момента станет  $-q \cdot z \cdot z/2$ , а весь внутренний момент  $M_x = R_A \cdot z - q \cdot z^2/2$ .



**Рис. 21.** Схема, показывающая сжатие волокон при совместном действии моментов

Переменная (координата вдоль оси балки) находится в степени 2 (в квадрате), следовательно, записанное уравнение является уравнением параболы. Знак « $-$ » перед  $z/2$  говорит о том, что ветви параболы направлены вниз (парабола выпуклостью вверх).

Для построения этой параболы необходимо вычислить значение момента на границах участка, т.е. в точках с координатами 0 м и 1 м.

$$M_x |_{Z=0} = R_B \cdot 0 - q \cdot \frac{0^2}{2} = 0;$$

$$M_x |_{Z=l} = q \frac{l}{2} \cdot l - q \cdot \frac{l^2}{2} = 0.$$

По значениям вычисленных величин на границах участков строим эпюры внутренней поперечной силы и изгибающего момента. Эпюры принято подписывать и указывать значения в характерных точках – на границах участков, точек экстремумов и т.д. В рассматриваемом примере эпюры будут выглядеть так, как показано на рис.22.

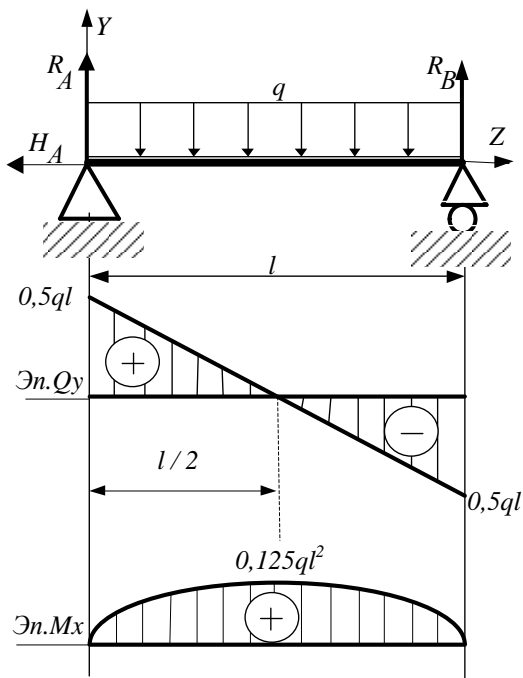
Для поперечной силы, отложенные две точки, соединяем прямой линией в соответствии с полученным уравнением. Значения изгибающего момента на концах балки оказались равны 0. Эти две точки с нулевыми значениями соединяем параболической линией в соответствии с полученным уравнением изгибающего момента. При этом нужно учитывать, что ветви параболы прогибаются вниз. Таким образом, линию можно провести только в том, случае, если у нее есть экстремум, в данном случае максимум. Максимум приходится на середину балки. Об этом говорит то, что эпюра поперечной силы в середине пересекает ось и в соответствии с правилом контроля эпюр № 7, эпюра момента действительно должна иметь экстремум. Эпюра изгибающего момента в соответствии с правилом знаков должна располагаться со стороны сжатого волокна, т.е. сверху (рис. 22).

Максимум на эпюре  $M_x$  вычисляется с помощью записанного ранее уравнения момента, подставляя вместо координаты  $Z$  координату середины балки, т.е.  $l/2$ .

$$M_x |_{Z=l/2} = \frac{0,5 \cdot ql \cdot l}{2} - \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{1}{8} ql^2 = 0,125ql^2.$$

Построив эпюры, можно определить опасное сечение балки. Таким сечением является сечение, в котором изгибающий момент наибольший по абсолютному значению.

В нашем случае опасным сечением является сечение, расположенное посередине балки, где изгибающий момент максимален.



**Рис. 22.** Эпюры поперечной силы и изгибающего момента к примеру 8

**Пример 3.** Построим эпюры внутренних силовых факторов. Опорные реакции определены на с. 14.

Рассматриваемая балка имеет три участка длиной 1 м, 8 м и 1 м. На каждом участке проведем сечение в произвольном месте участка.

Первый участок  $0 \leq Z_1 \leq 1$ .

Уравнения поперечной силы приравняет внутреннюю силу единственной внешней силе:

$$Q_y = R_A = 1,1 - \text{уравнение прямой постоянной линии.}$$

Для ее построения не нужно считать значения поперечной силы на концах участка.

$M_x = R_A \cdot z_1 = 1,1 \cdot z_1$  – уравнение прямой линии, наклонной по отношению к оси.

Для ее построения нужно вычислить значения на концах участка.

$$M_x |_{z=0} = 0 \quad M_x |_{z=1} = 1,1$$

Второй участок  $1 \leq Z_2 \leq 9$ .

Уравнение внутренней поперечной силы составляется как сумма двух внешних поперечных сил:

$Q_y = R_A - P_1 = 1,1 - 1 = 0,1$  – уравнение прямой постоянной линии.

Уравнения моментов можно составить так:

$$M_x = R_A \cdot z_2 - P_1 \cdot (z_2 - 1) = 1,1 \cdot z_2 + 1 - z_2 = 0,1 \cdot z_2 + 1$$

Плечо силы  $P_1$  можно вычислить как разность длин двух отрезков: отрезка длиной  $z_2$  и полной длины первого участка, т.е. 1 м. (рис. 23).

Полученное уравнение представляет собой уравнение наклонной прямой линии и для ее построения нужны две точки – начало и конец участка.

$$M_x |_{Z=1} = 1,1 \quad M_x |_{Z=9} = 0,1 \cdot 9 + 1 = 1,9.$$

Третий участок рассмотрим с правой стороны. Начало координат расположим в точке В. Тогда  $0 \leq Z_3 \leq 1$ .

Запишем уравнения.

$$Q_y = -R_B = -1,9$$

это уравнение прямой горизонтальной линии. Знак минус потому, что выбрана правая часть балки (см. правила знаков для  $Q_y$ ).

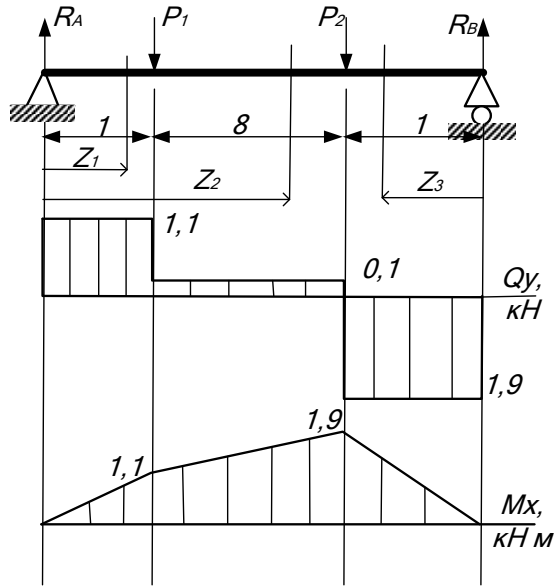
$$M_x = R_B \cdot Z_3 = 1,9 \cdot Z_3$$

это уравнение наклонной прямой линии.

$$M_x |_{Z=0} = 0 \quad M_x |_{Z=1} = 1,9.$$

По данным этих расчетов строим эпюры. Результат построения эпюр показан на рис. 23.

Из анализа эпюр следует, что опасным сечением является сечение, расположенное в точке приложения сосредоточенной силы  $P_2$ , там, где эпюра изгибающего момента максимальна.



**Рис. 23.** Эпюры поперечной силы и изгибающего момента к примеру 3

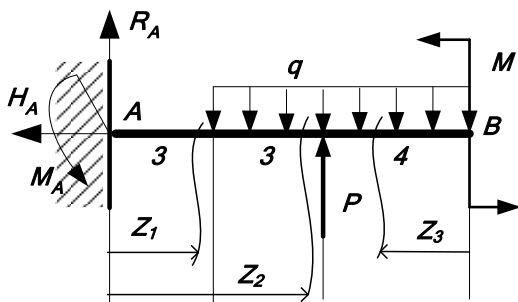
**Пример 4.** Построим эпюры внутренних силовых факторов (рис.24). Опорные реакции определены на с.15.

Разбиваем балку на три участка и рассматриваем на каждом по одному сечению  $Z_i$ . Индекс сечения соответствует номеру участка.

I участок  $0 \leq Z_1 \leq 3$ .

$Q_y = R_A = 62$  – уравнение горизонтальной прямой линии.

$M_x = R_A \cdot Z_1 - M_A = 62 \cdot Z_1 - 403$  – это уравнение наклонной прямой линии.



**Рис. 24.** Схема для расчета ВСФ к примеру 4

Момент опорной реакции считается положительным, потому что от его действия сжимаются верхние волокна.

Сосредоточенный момент  $M_A$  изгибает балку так, что сжимаются нижние волокна и поэтому его знак отрицательный.

$$M_x / Z=0 = -403 \quad M_x / Z=3 = 217.$$

II участок  $3 \leq Z_2 \leq 6$ .

$Q_y = R_A - q(z_2 - 3) = 62 - 10(z_2 - 3)$  – уравнение наклонной прямой линии.

$$Q_y / Z=3 = 62 \quad Q_y / Z=6 = 32$$

Обратите внимание, как вычисляется полная сила от распределенной нагрузки. Площадь прямоугольника есть произведение высоты  $q$  на ширину  $(Z_2 - 3)$ .

Уравнение внутреннего момента составляем путем сложения 3 внешних моментов:

$$\begin{aligned} M_x &= R_A \cdot z_2 - M_A - q(z_2 - 3) \frac{z_2 - 3}{2} = \\ &= 62 \cdot z_2 - 403 - 5(z_2 - 3)^2. \end{aligned}$$



Это уравнение отличается от уравнения изгибающего момента на первом участке тем, что добавляется еще один внешний момент – момент от распределенной нагрузки. Знак этого момента отрицательный, потому что от его действия сжимаются нижние волокна бруса.

Представленное уравнение есть уравнение прямой наклонной линии.

$$M_x / Z=0 = -217 \quad M_x / Z=3 = -76.$$

Для вычисления момента от распределенной нагрузки сначала вычисляется полная сила как произведение высоты нагрузки  $Q$  на ширину ( $Z-3$ ). Потом она умножается на плечо. Плечо отсчитывается как расстояние от сечения до середины приложения нагрузки, где расположен ее центр тяжести и равен половине ширины отрезка ( $z - 3$ ).

III участок балки  $0 \leq Z_3 \leq 4$  м.

Третий участок рассмотрен с правой части балки. Начало координат при этом переносится в т. В. Следовательно, расстояние до сечения есть величина переменная и лежащая в диапазоне от 0 до 4 м.

Поперечная сила рассчитывается как сумма всех внешних сил отсеченной левой части бруса. В качестве внешней силы здесь имеется только часть равномерной нагрузки.

Кроме того, обратите внимание на то, что правила знаков для поперечной силы выбирается наоборот.

$$Q_y = +q \cdot z_3.$$

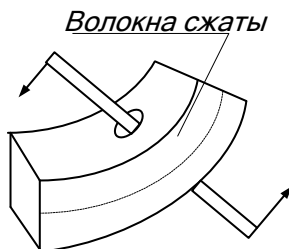
Это уравнение наклонной линии. Строим его по двум точкам:

$$Q_y / Z=0 = 0 \quad Q_y / Z=4 = 40.$$

Внутренний момент равен сумме двух внешних моментов – сосредоточенного момента  $M$  и момента от распределенной нагрузки  $q$ . Чтобы определить знак

момента  $M$ , представьте брус с отверстием, в которое вставлен стержень, и концы стержня подвергаются воздействию пары сил. В результате возникает рычаг, который изогнет балку и можно будет легко увидеть сжатие волокон и знак этого момента (рис. 25).

В нашем случае момент сжимает верхние волокна и, значит, подставляется в уравнение со знаком «+». А вот момент от распределенной нагрузки сжимает нижние волокна и, следовательно, будет отрицательным.



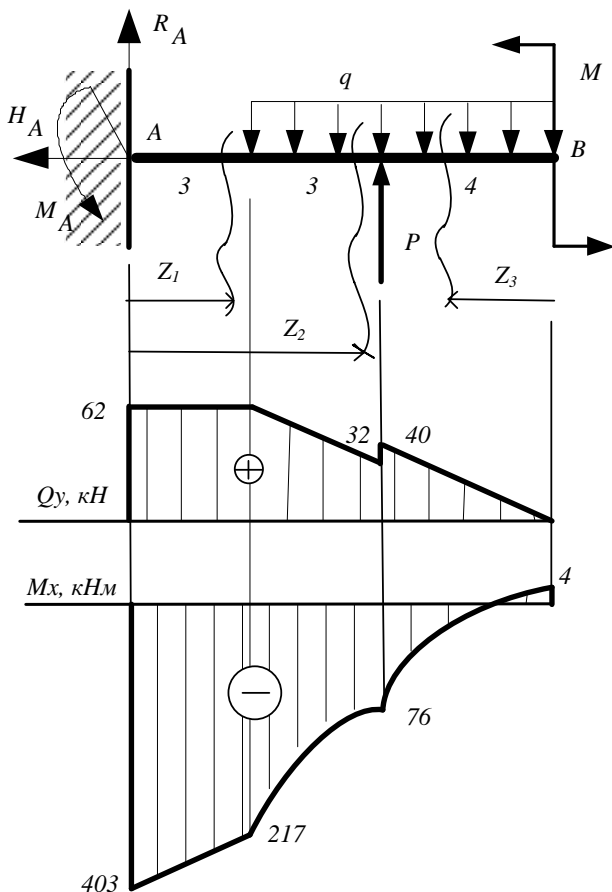
**Рис. 25.** Определение знака сосредоточенного момента

$$\text{Тогда } M_x = -q \frac{z_3^2}{2} + M = -5 \cdot z_3^2 + 4.$$

Момент от нагрузки считается в 2 этапа. Сначала определяется полная сила как произведение  $Q$  на ширину отрезка  $Z$ , потом результат умножается на расстояние до центра тяжести прямоугольника под линией нагрузки, т.е. на половину отрезка  $Z$ . В результате переменная оказывается в степени 2 и уравнение становится уравнением параболы, ветви которой направлены вниз (перед квадратом  $Z$  находится знак минус). Значения на границах участка:

$$M_x /_{Z=0} = 4 \quad M_x /_{Z=4} = 4 - 5 \cdot 4^2 = 76.$$

По вычисленным значениям строим эпюры сил и моментов (рис. 26). Из эпюр  $M_x^{max} = 403 \text{ кН*м}$ ,  $Q_y^{max} = 62 \text{ кН}$ .



**Рис. 26.** Эпюры ВСФ для примера 4

Сечение, в котором величина  $M_x$  достигает наибольшего значения, считается *опасным сечением*. Именно для такого сечения и делается расчет на прочность.

## Раздел 2. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ

Основной задачей расчета элемента механической системы является *обеспечение её прочности*. Прочность зависит от материала и от вида напряженного состояния бруса. При изгибе в элементе возникает плоское напряженное состояние. Для расчета используются частные формулы проверки прочности в зависимости от материала. Для пластичных материалов (стали) – это третья и четвертая теории прочности:

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

Для хрупких (чугуны) - это вторая теория прочности и теория Мора:

$$\frac{1 - \mu}{2} \sigma + \frac{1 + \mu}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma_p]$$

$$\frac{1 - k}{2} \sigma + \frac{1 + k}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma_p]$$

где  $\mu$  - коэффициент Пуассона;

$$k = \frac{\sigma_B^p}{\sigma_B^c},$$

$\sigma_B^p$  – временное напряжение при растяжении;

$\sigma_B^c$  – временное напряжение при сжатии.

Расчет на прочность начинается с построения эпюр внутренних усилий балки. При плоском поперечном изгибе в поперечном сечении бруса (балки) возникает два внутренних силовых фактора: поперечная сила  $Q_y$  и изгибающий момент  $M_x$ . Порядок их определения рассмотрен выше.

Когда внутренние усилия найдены, определяются напряжения в поперечном сечении изогнутой балки. Поскольку поперечная сила  $Q_y$  является равнодействующей касательных напряжений  $\tau$ , а изгибающий момент  $M_x$  – равнодействующей нормальных напряжений  $\sigma$ , в общем случае в поперечном сечении балки возникают и нормальные и касательные напряжения, и касательные:

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} \cdot y \dots\dots\dots(3)$$

где  $M_x$  – величина изгибающего момента в рассматриваемом сечении;

$J_x$  – осевой момент инерции относительно главной центральной оси X.

Касательные напряжения определяются по формуле Журавского:

$$\tau = \frac{S_x \cdot Q_y}{J_x \cdot b(y)} \dots\dots\dots(4)$$

где  $Q_y$  – значение поперечной силы в рассматриваемом сечении;

$S_x$  – статический момент площади отсеченной части сечения, зависящий от того, в какой точке определяется напряжение;

$b(y)$ - ширина сечения на уровне отсеченной части.

Из формулы 3 следует, что максимальные нормальные напряжения возникают в точках, максимально удаленных от нейтральной оси:

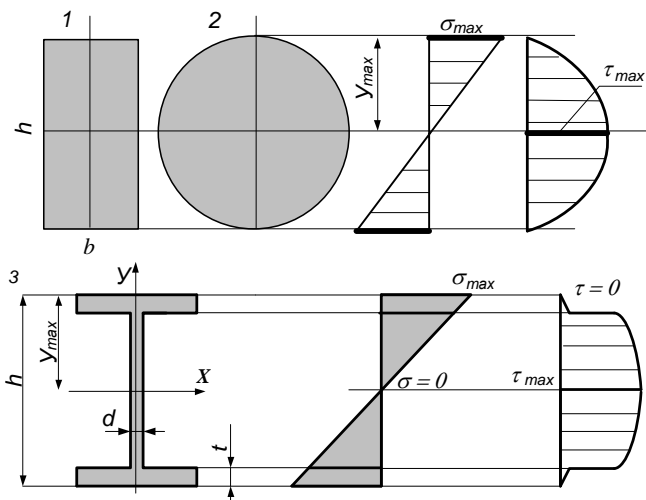
$$\sigma = \frac{M_x}{W_x},$$

где  $W_x = \frac{J_x}{y_{max}}$  - момент сопротивления балки при изгибе.

Если *нормальные* напряжения  $\sigma$  меняются по линейному закону, то закон распределения *касательных*

напряжений  $\tau$  зависит от формы поперечного сечения (рис. 27). Ось Z, на которой нормальные напряжения равны нулю, называется *нейтральной осью сечения*.

Для балок круглого и прямоугольного сечений касательные напряжения изменяются по закону квадратной параболы и равны нулю в точках, максимально удаленных от нейтральной оси X:



**Рис. 27.** Распределение напряжений по высоте для сплошных и тонкостенных сечений

Как видно из этих рисунков, *максимальной величины касательные напряжения достигают на нейтральной линии*, а в крайних точках сечения они равны нулю.

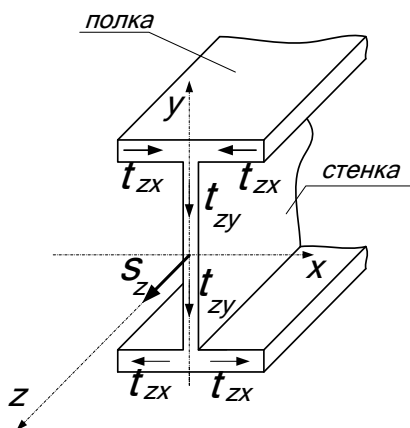
$$\tau_{1max} = \frac{3 \cdot Q_y}{2 \cdot F}$$

$$\tau_{2max} = \frac{4 \cdot Q_y}{3 \cdot F}$$

$$\tau_{zmax} = \frac{S_x \cdot Q_y}{I_x \cdot d}$$

где  $F$  – площадь поперечного сечения балки.

Для двутавровой балки (рис. 28) напряжения  $\tau$  в полках и стенках меняются по разным законам. Наиболее важными при проверке прочности являются  $\tau$  в стенке двутавра  $\tau_{zy}$ :



**Рис. 28.** Поперечное сечение двутавровой балки

Задача по проверке прочности балки сводится к решению двух вопросов:

- 1) подбор сечения балки (определение размеров, которые обеспечивают прочность);
- 2) определение предельной нагрузки, при которой сохраняется прочность.

Как правило, расчет балки на прочность производится только по нормальным напряжениям, так как в подавляющем большинстве балок величина нормальных

напряжений намного превосходит величину напряжений касательных.

Условие прочности при изгибе формулируется следующим образом: балка будет прочной, если максимальные нормальные напряжения не превысят допускаемых напряжений

$$\sigma_{max} = \frac{|M_{xmax}|}{W_x} \leq [\sigma] \dots \dots \dots (5)$$

Величина допускаемых напряжений  $[\sigma]$  назначается в зависимости от материала, из которого изготовлена балка.

Однако проверяется и условие прочности по касательным напряжениям, если рассчитываемая балка выполнена из дерева, если балка короткая, если на балку действуют большие сосредоточенные силы, приложенные на наибольших расстояниях от опор.

### **Три типа задач при расчете на прочность при изгибе**

1. Проверочный расчет или проверка прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{max} = \frac{M_x^{max}}{W_x} \leq [\sigma]$$

Цель расчета – проверка условия прочности при известных параметрах внешней нагрузки, размеров поперечного сечения и материала.

2. Проектный расчет или подбор сечения

$$W_x \geq \frac{M_x^{max}}{[\sigma]}$$

Цель расчета – определение размеров балки, если известны внешние нагрузки и материал. При данном расчете возможен и подбор материала для заданных размеров деталей.



### 3. Определение допускаемой нагрузки

$$[M_x] = M_x^{max} \leq [\sigma] * W_x$$

Цель расчета – определение максимально допустимых внешних нагрузок при заданных размерах балки и выбранном материале.

#### **Проектный расчет**

Проектный расчет балки проводится в форме полной проверки балки на прочность. Эта задача решается в три этапа.

1. Из условия прочности по нормальным напряжениям, т.е. по формуле (3) определяют размеры сечения. Изгибающий момент выбирают по его эпюрам как наибольший. При этом касательными напряжениями пренебрегают.

2. Выбранное сечение проверяют по формуле Журавского (4) по максимальным касательным напряжениям. Поперечную силу выбирают по ее эпюре как самую наибольшую. При этом может оказаться наибольший момент и сила принадлежат совсем разным сечениям. Если условие прочности на срез не выполняется, сечение увеличивают.

3. Выполняется проверка с помощью подходящей теории прочности, например, по приведенной на с. 37 формуле третьей или четвертой теорий прочности. При этом следует проверить все возможно опасные сечения с комбинацией больших значений поперечной силы и изгибающего момента. Если условие прочности не выполнится, сечение увеличивают.

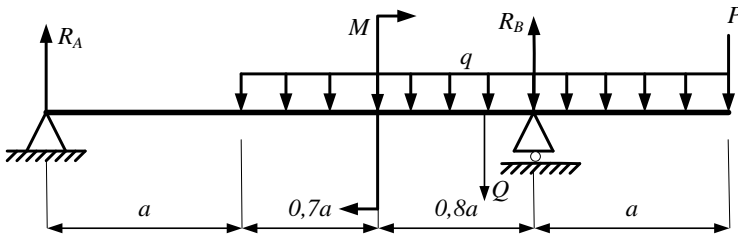
Для длинных балок, у которых длина значительно превышает поперечные размеры ( $> 30$  раз), влияние касательных напряжений незначительно, и ими можно пренебречь (считать, что их нет вовсе). В таком случае расчет проводится как при чистом изгибе, т.е. только по нормальным напряжениям (5).

## ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ НА ПРОЧНОСТЬ

### Пример 5. Подбор рационального сечения.

Стальная балка одинаковой жесткости по длине ( $EJ_x = \text{const}$ ) нагружена сосредоточенной силой  $P$  распределенной нагрузкой  $q$  моментом  $M$  (рис. 29).

$a = 0,5$  м;  $P = 22$  кН;  $q = 17 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ ;  $M = 15$  кН · м;  $[\sigma] = 165$  мПа



**Рис. 29.** Расчётная схема балки к примеру 5

#### Требуется:

- 1) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов;
- 2) подобрать двутавровое и прямоугольное сечение балки с соотношением сторон 1:2 из условия прочности, определить степень рациональности.

#### Решение

1. Найдем опорные реакции. Балка имеет шарнирное опирание и для определения двух не равных нулю опорных реакций  $R_A$  и  $R_B$  (горизонтальная реакция  $H_A$  равна нулю) составим два независимых уравнения статики. Рациональными уравнениями, в каждое из которых входит одна неизвестная реакция, в данном случае являются:

$$\sum M_A = 0;$$

$$R_B \cdot 2,5a - M - q \cdot 2,5a \cdot (a + 1,25a) + P \cdot 3,5a = 0$$

$$R_B = \frac{15 + 17 \cdot 1,25 \cdot 1,125 + 22 \cdot 1,75}{1,25} = 61,93$$

$$\sum Y = 0; \quad R_A - q \cdot 2,5a + R_B - P = 0$$

$$R_A = 17 \cdot 1,25 - 61,925 + 22$$

$$R_A = -18,68 \text{ кН}$$

2. Используя метод сечений, разобьем балку на участки I-IV, рассмотрим сечения  $Z_i$  и составим уравнения поперечных сил и изгибающих моментов:

I участок:

$$0 \leq Z_1 \leq 0,5$$

$$Q_Y = R_A = -18,68 \text{ кН}$$

$$M_{X1} = R_A \cdot Z_1$$

$$M_{X1} = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M_{X1} = -18,675 \cdot 0,5 = -9,34 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

II участок:

$$0 \leq Z_2 \leq 0,5$$

$$Q_Y = P + q \cdot Z_2$$

$$Q_{Y2} = 22 + 17 \cdot 0 = 22 \text{ кН}$$

$$Q_{Y2} = 22 + 17 \cdot 0,5 = 30,5 \text{ кН}$$

$$M_{X2} = -P \cdot Z_2 - q \cdot Z_2 \cdot \frac{Z_2}{2}$$

$$M_{X2} = -22 \cdot 0 - 17 \cdot 0 \cdot 0 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M_{X2} = -22 \cdot 0,5 - 17 \cdot 0,5 \cdot 0,25 = -13,13 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

III участок:

$$0,5 \leq Z_3 \leq 0,9$$

$$Q_{Y3} = P - R_B + q \cdot Z_3$$

$$Q_{Y3} = 22 - 61,925 + 17 \cdot 0,5 = -31,43 \text{ кН}$$

$$Q_{Y3} = 22 - 61,925 + 17 \cdot 0,9 = -24,63 \text{ кН}$$

$$M_{X3} = -P \cdot Z_3 + R_B(Z_3 - 0,5) - q \cdot Z_3 \cdot \frac{Z_3}{2}$$

$$M_{X3} = -22 \cdot 0,5 + 61,925 \cdot 0 - 17 \cdot 0,25 \cdot 0,5 \\ = -13,13 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M_{X3} = -22 \cdot 0,9 + 61,925 \cdot 0,4 - 17 \cdot 0,45 \cdot 0,9 = -1,92$$

IV участок:

$$0,9 \leq Z_4 \leq 1,25$$

$$Q_{Y4} = P - R_B + q \cdot Z_4$$

$$Q_{Y4} = 22 - 61,925 + 17 \cdot 0,9 = -24,63 \text{ кН}$$

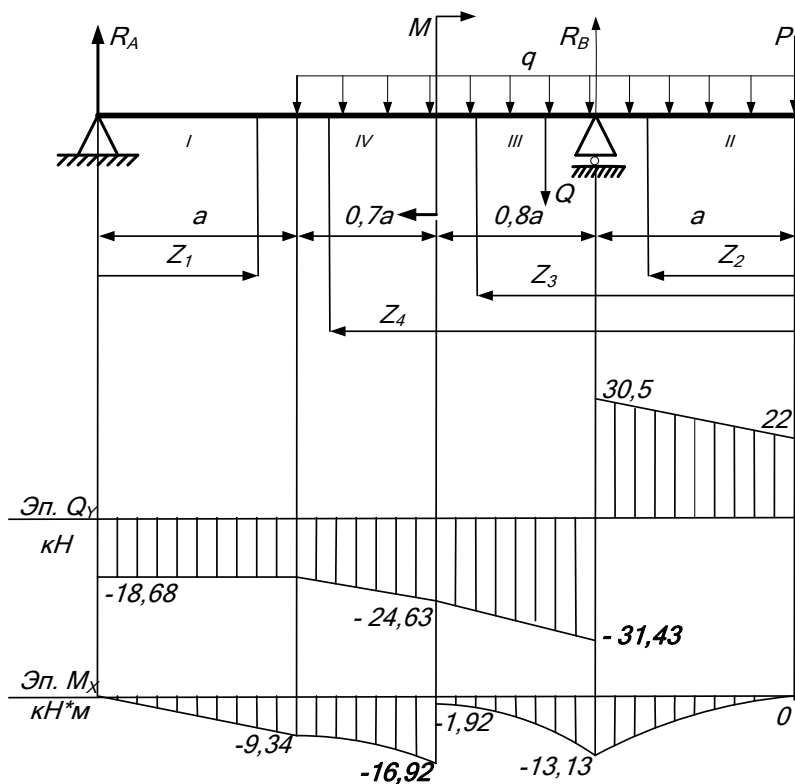
$$Q_{Y4} = 22 - 61,925 + 17 \cdot 1,25 = -18,68 \text{ кН}$$

$$M_{X4} = -P \cdot Z_4 + R_B(Z_4 - 0,5) - q \cdot Z_4 \cdot \frac{Z_4}{2} - M$$

$$M_{X4} = -22 \cdot 0,9 + 61,925 \cdot 0,4 - 17 \cdot 0,9 \cdot 0,45 - 15 \\ = -16,92 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M_{X4} = -22 \cdot 1,25 + 61,925 \cdot 0,75 - 17 \cdot 1,25 \cdot 0,625 - 15 \\ = -9,34 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

По полученным данным построим эпюры (рис. 30).



**Рис. 30.** Эпюры ВСФ к примеру 5

Из эпюры выписываем значения:

$$Q_Y^{\max} = 31,43 \text{ кН}; \quad M_X^{\max} = 16,92 \text{ кН}$$

Рассмотрим 2 сечения – сплошное (прямоугольное сторонами  $b \times h$ ) и тонкостенное (двутавровая балка).

Из условия прочности при изгибе, получаем:

$$W_x = \frac{M_x^{max}}{[\sigma]} = \frac{16,915 \cdot 10^3}{165 \cdot 10^6} = 10^{-6} \cdot 102,52 \text{ м}^3 \\ = 102,52 \text{ см}^3$$

1. Сплошное сечение. Из условия задачи:

$$\frac{b}{h} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{h}{2} = 0,5 \cdot h$$

Тогда:

$$W_x = \frac{I_x}{Y_{max}} = \frac{b \cdot h^3 \cdot 2}{12 \cdot h} = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{0,5 \cdot h^3}{6} = \frac{h^3}{12} \\ = 102,52 \text{ см}^3 \Rightarrow$$

$$h = \sqrt[3]{12 \cdot 102,52} = 10,72 \text{ см}$$

$$b = 0,5 \cdot h = 10,72 \cdot 0,5 = 5,36 \text{ см}$$

Площадь сечения:

$$F = b \cdot h = 10,72 \cdot 5,36 = 57,46 \text{ см}^2$$

Степень рациональности при изгибе:

$$\omega = \frac{W_x}{F^{3/2}}$$

Подставляя, получаем:

$$\omega_1 = \frac{102,52}{57,46^{3/2}} = \mathbf{0,24}$$

2. Подберем размер двутавра (номер двутавра) из условия прочности по таблице стандартов (ГОСТ 8239-89). Это двутавр №16. Выпишем данные и определим степень рациональности:

$$W_x = 109 \text{ см}^3$$

$$F = 20,2 \text{ см}^2$$

$$\omega_2 = \frac{109}{20,2^{3/2}} = 1,2$$

Сравнивая степени рациональности  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , делаем вывод, что из рассмотренных сечений рациональным является двутавр № 16 и сплошные сечения при изгибе использовать нерационально.

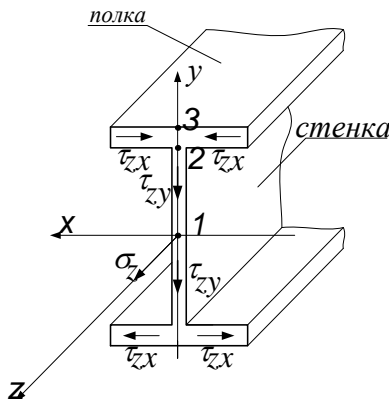
*Рассмотрим алгоритм решения задачи на полную проверку прочности двутавровой балки.*

По эпюрам поперечных сил и изгибающих моментов выбираем сечение, где  $Q_y$  и  $M_x$  одновременно близки к максимальным значениям.

Построим эпюр нормальных напряжений  $\sigma_z$ , используя формулу для расчета напряжений при изгибе 3, с. 37:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} * y$$

По формуле видно, что эта зависимость – линейная. Рассмотрим характерные точки 1, 2, 3 – в середине балки, в точке сопряжения полки и стенки и в крайней точках. Определим значения  $\sigma$  в каждой из трех точек, используя эту формулу и рис.31 и 32.



**Рис. 31.** Поперечное сечение двутавровой балки

Точка 1. Координата по оси  $y$

$$y_1 = 0.$$

Тогда, подставляя, получаем  $\sigma_1 = 0$ .

Точка 2. Координата по оси  $y$

$$y_2 = \frac{h}{2} - t.$$

$S_x$  и  $J_x$  берем из таблицы сортамента для заданного профиля сечения.

Подставляя, получаем значение  $\sigma_2$ :

$$\sigma_2 = \frac{M_x}{J_x} * \left(\frac{h}{2} - t\right)$$

Точка 3. Координата по оси  $y$

$$y_3 = y_{\max} = \frac{h}{2}.$$

Подставляя, получаем значение  $\sigma_3$ :

$$\sigma_3 = \frac{M_x}{J_x} * \frac{h}{2}.$$

По полученным результатам построим эпюр  $\sigma_z$  (рис. 33).

Построим эпюр касательных напряжений  $\tau$ , используя для расчета формулу Журавского:

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y * S_x}{J_x * b(y)},$$

где  $S_x$  – статический момент площади части сечения, находящейся выше рассматриваемой точки.

Определим значения  $\tau$  в каждой из трех точек, используя эту формулу и рис. 32.  $C_1$  и  $C_2$  – центр тяжести отсеченной части сечения.

Точка 1.  $S_x$  отсеченной части:

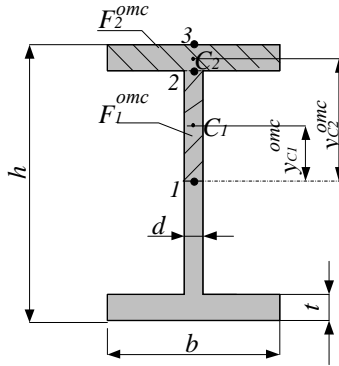
$$(S_x^{\text{отс}})_1 = F^{\text{отс}}_1 * y^{\text{отс}}_{C1} + F^{\text{отс}}_2 * y^{\text{отс}}_{C2},$$

$$\text{где } y^{\text{отс}}_{C1} = \frac{h-t}{2}; \quad F^{\text{отс}}_1 = \left(\frac{h}{2} - t\right) * d;$$

$$y^{\text{отс}}_{C2} = \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right);$$

$$F^{\text{отс}}_2 = b * t.$$





**Рис. 32.** Геометрия отсеченной части сечения (показана штриховкой)

Точка 2.  $S_x$  отсеченной части:

$$(S_x^{\text{отс}})_2 = F_2^{\text{отс}} * y_{C2}^{\text{отс}},$$

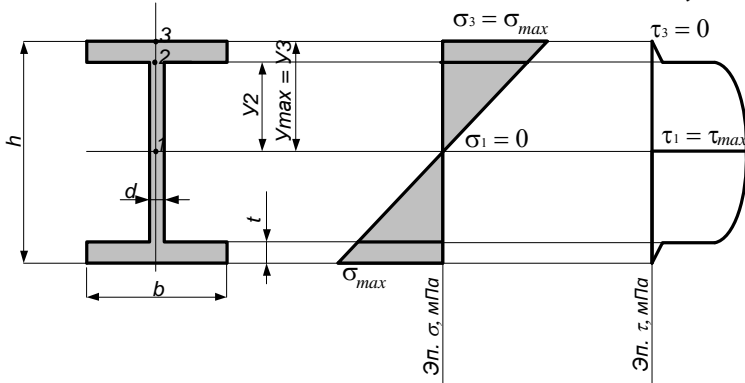
где  $F_2^{\text{отс}} = b * t$ ,

$$y_{C2}^{\text{отс}} = \left( \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right).$$

За ширину сечения  $b(y)$  в обеих точках принимается толщина стойки  $d$ .

Точка 3. для  $y_3 = \frac{h}{2}$  значение  $S_x = 0$ , т.к. нет отсеченной части и  $\tau_3 = 0$ .

По полученным результатам построим эпюры  $\tau_{zy}$ .



**Рис. 33.** Эпюры нормальных и касательных напряжений

Затем проверяем условие прочности по IV теории прочности. Стандартные тонкостенные профили проверяют в точке сопряжения стенки и полки (точка 2), т.к. она является опасной для сечения данной конфигурации.

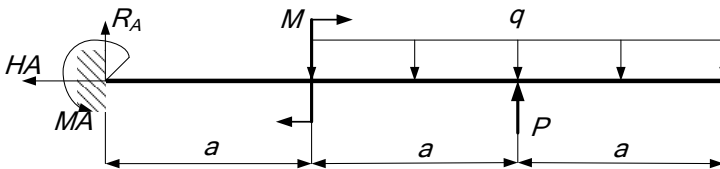
Должно выполняться условие:

$$\sigma^{IV} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3 * \tau_{zy}^2} \leq [\sigma] \dots \dots \dots (5)$$

Если условие не выполняется для обеспечения прочности необходимо увеличить размеры сечения, т.е. увеличить профиль до размера, который обеспечит выполнение условия (3).

**Пример 6.** Полная проверка прочности балки

Дано:  $a = 0,55$  м;  $P = 22$  кН;  $q = 17$  кН/м;  $M = 26$  кН м



Решение.

1. Определим реакции опор, используя уравнения статики:

$$\sum Z = 0; H_A = 0;$$

$$\sum M_A = 0; -q \cdot 2a(a + a) + P \cdot 2a + M_A - M = 0$$

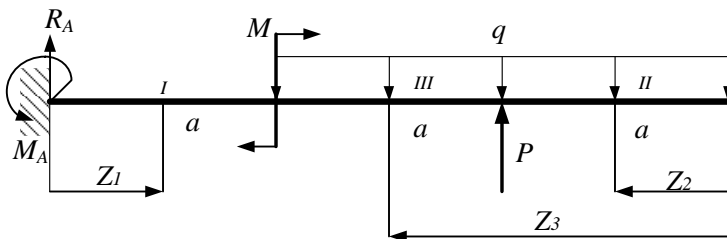
$$-17 \cdot 2 \cdot 0,55 \cdot (0,55 + 0,55) + 22 \cdot 2 \cdot 0,55 + M_A - 26 = 0$$

$$M_A = 22,37 \text{ кН}$$

$$\sum Y = 0; R_A - q \cdot 2a + P = 0$$

$$R_A - 17 \cdot 2 \cdot 0,55 + 22 = 0, R_A = -3,3 \text{ кН}$$

2. Используя метод сечений, разбиваем балку на три участка I, II, III и записываем уравнения поперечных сил и изгибающих моментов:



I участок  $0 \leq z_1 \leq a$ ;

$$Q_1 = R_A$$

$$Q_1(0) = -3,3 \text{ кН};$$

$$Q_1(0.55) = -3,3 \text{ кН};$$

$$M_1 = R_A z_1 - M_A;$$

$$M_1(0) = -22,37 \text{ кН}$$

$$M_1(0.55) = -24,19 \text{ кН}$$

II участок  $0 \leq z_2 \leq a$ ;

$$Q_2 = q z_2;$$

$$Q_2(0) = 0 \text{ кН};$$

$$Q_2(0.55) = 9.35 \text{ кН};$$

$$M_2 = -q \frac{z_2^2}{2};$$

$$M_1(0) = 0 \text{ кН}$$

$$M_1(0.55) = -2.57 \text{ кН}$$

III участок  $a \leq z_3 \leq 2a$

$$Q_3 = q z_3 - P;$$

$$Q_3(0.55) = -12,65 \text{ кН};$$

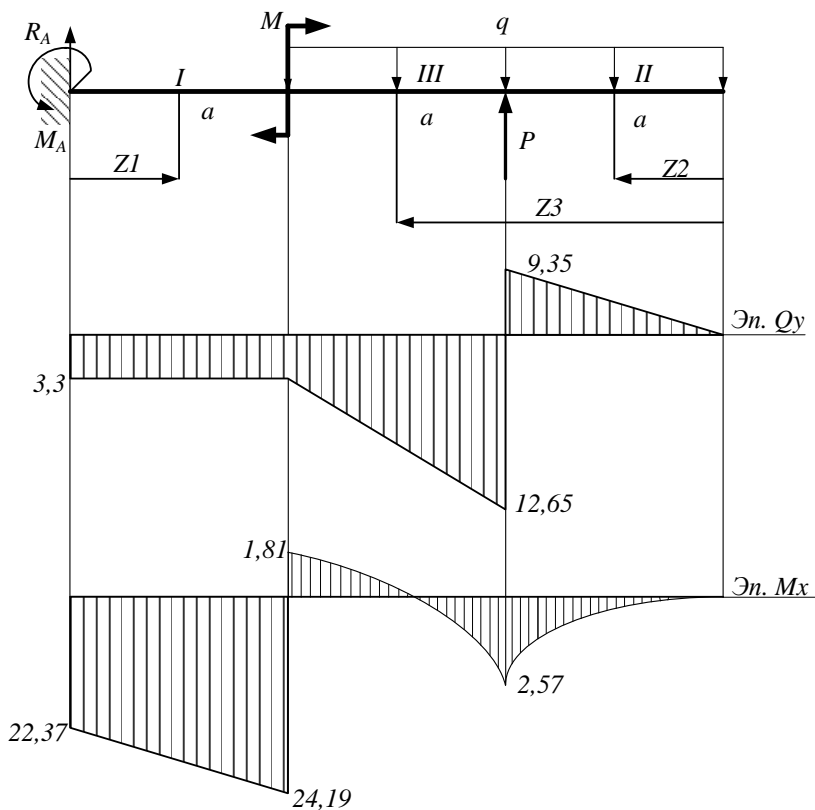
$$Q_3(1.1) = -3,3 \text{ кН};$$

$$M_3 = -q \frac{z_3^2}{2} + P(z_3 - a);$$

$$M_3(0.55) = -2.57 \text{ кН м};$$

$$M_3(1.1) = 1,81 \text{ кН м}.$$

По полученным результатам строим эпюры.



Из эпюры *максимальные значения* внутренних силовых факторов  $Q_{\max} = 12,65 \text{ кН}$ ;  $M_{\max} = 24,19 \text{ кН м}$

Из условия прочности  $\sigma_{\max} = \frac{|M_{x \max}|}{W_x} \leq [\sigma]$  определим

$$W_x = \frac{|M_{x\max}|}{[\sigma]} = \frac{24,19 \cdot 10^3}{30 \cdot 10^6} = 836,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 836,3 \text{ см}^3.$$

Из сортамента ГОСТ 8239-89 выберем двутавр с  $W_x > 836,3 \text{ см}^3$ , № 40.

Из таблицы  $W_{x\text{табл}} = 953 \text{ см}^3$ .  $F_4 = 72,6 \text{ см}^2$ .  $h = 400 \text{ мм}$ ;  $b = 165 \text{ мм}$ ;  $d = 8,3 \text{ мм}$ ;  $t = 13,0 \text{ мм}$ ;  $S^* = 545 \text{ см}^3$ ;  $J_x = 19062 \text{ см}^4$ .

Построим эпюры распределения касательных и нормальных напряжений для опасного сечения балки в точке приложения момента  $M = 24,19 \text{ кН м}$ ;  $Q = 3,3 \text{ кН}$

Делаем проверку в 3 точках.

Нормальные напряжения

$$y_1 = \frac{h}{2} = \frac{400}{2} = 200 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$\sigma_1 = \frac{M_x \cdot y_1}{J_x} = \frac{24,19 \cdot 10^3 \cdot 200 \cdot 10^{-3}}{19062 \cdot 10^{-8}} = 25,4 \text{ МПа}$$

$$y_2 = \frac{h}{2} - t = \frac{400}{2} - 13 = 187 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$\sigma_2 = \frac{24,19 \cdot 10^3 \cdot 187 \cdot 10^{-3}}{19062 \cdot 10^{-8}} = 23,7 \text{ МПа}$$

$$y_3 = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{M_x \cdot y_1}{J_x} = 0 \text{ МПа}$$

Касательные напряжения находим по формуле

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_x^*}{J_x \cdot b(y)}$$

$$\tau_1 = 0, \text{ т.к. } S_{x1} = 0$$

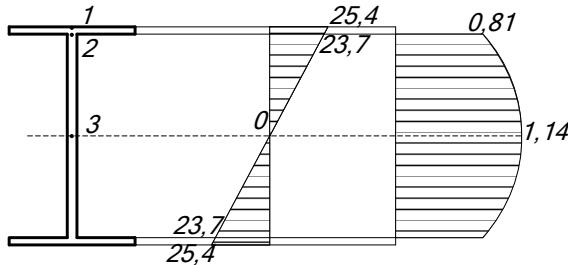
$$\begin{aligned} S_{x2}^* &= b \cdot t \cdot \left( \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = 155 \cdot 13 \cdot \left( \frac{400}{2} - \frac{13}{2} \right) \\ &= 389,9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 \end{aligned}$$

$$\tau_2 = \frac{3,3 \cdot 10^3 \cdot 389,9 \cdot 10^{-6}}{19062 \cdot 10^{-8} \cdot 8,3 \cdot 10^{-3}} = 0,81 \text{ мПа}$$

$$S_{x_3}^* = S_x^* = 545 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$$

$$\tau_3 = \frac{3,3 \cdot 10^3 \cdot 545 \cdot 10^{-6}}{19062 \cdot 10^{-8} \cdot 8,3 \cdot 10^{-3}} = 1,14 \text{ мПа}$$

Построим эпюры напряжений по высоте сечения, учитывая, что  $\sigma$  распределяется по линии,  $\tau$  по параболе:



Проверим условие прочности по III теории, рассмотрев точку, в которой вероятен излом – точка 2:

$$\sigma^{\text{III}} = \sqrt{\sigma_2^2 + 4 \cdot \tau_2^2} \leq [\sigma]$$

$$\sigma^{\text{III}} = \sqrt{23,7^2 + 4 \cdot 0,81^2} = 23,76 \text{ мПа}$$

$$[\sigma] = 30 \text{ мПа}$$

$23,76 \text{ мПа} < 30 \text{ мПа}$  – условие выполняется, прочность обеспечена.

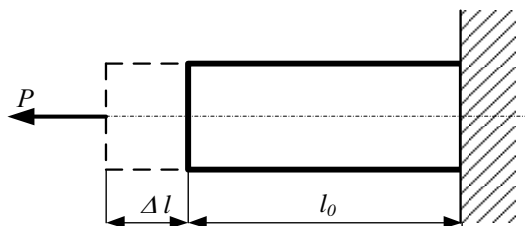
**Ответ.** Двутавровая балка №40 удовлетворяет заданному нагружению

### Раздел 3. РАСЧЕТ НА ЖЕСКОСТЬ

## Перемещения поперечных сечений бруса

Основными задачами курса сопротивления материалов являются задачи расчета на прочность и жесткость. Вторая задача требует расчета перемещений поперечных сечений бруса, и определения максимальных значений перемещений. Каждая из четырех простых видов деформаций приводит к возникновению своих характерных перемещений.

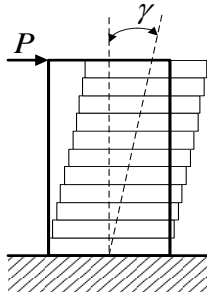
При растяжении или сжатии бруса его сечения перемещаются вдоль оси. Перемещение крайних сечений задает удлинение или укорочение всего стержня (рис. 34).



**Рис. 34.** Перемещения сечений при растяжении и удлинении стержня

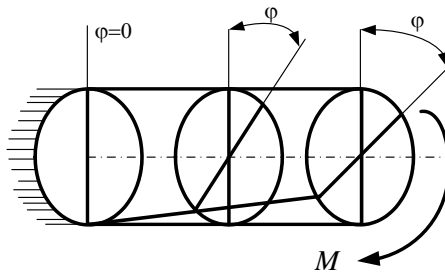
При сдвиге поперечные сечения перемещаются в направлении, перпендикулярном оси бруса. В результате между первоначальным положением оси и положением оси в момент деформации образуется угол, называемый углом сдвига.

Пояснения к определению угла сдвига показаны на рис. 35.



**Рис. 35.** Перемещения сечений при чистом сдвиге

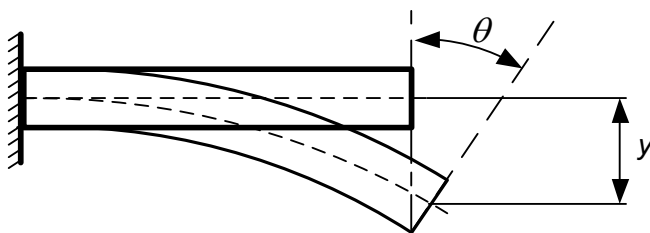
При кручении вала круглой формы сечения его представляют как набор абсолютно жестких дисков. Каждый диск поворачивается вокруг оси вала. В результате между начальным положением любого радиуса, проведенного в сечении до деформации и его положением в момент деформации, образуется угол  $\varphi$ , называемый углом закручивания вала (рис.36).



**Рис. 36.** Перемещения сечений вала при кручении

При плоском изгибе поперечные сечения балки испытывают 2 вида перемещений: линейное  $U$  и угловое  $\theta$  (рис.37).





**Рис. 37.** Перемещения сечений при плоском изгибе

Перемещение центра тяжести сечения по направлению, перпендикулярному оси балки называется прогибом балки в данной точке и обозначается буквой «У». Угол, на который поворачивается сечение по отношению к своему первоначальному положению, называется углом поворота сечения и обозначается  $\theta$  (тота).

Для определения перемещений поперечных сечений бруса, которые показаны на рис. 34–37, используются различные теоретические и экспериментальные методы. В основе них, как правило, лежат дифференциальные уравнения первого и второго порядков. Решения этих уравнений подробно рассматриваются в первой части сопротивления материалов. В итоге такого решения строятся эпюры перемещений и, по ним уже определяется наибольшее значение. Максимальное перемещение необходимо для проведения в последующем расчета на жесткость. Оно подставляется в неравенство, называемое условием жесткости. Например, при расчете на жесткость при изгибе условие жесткости записывается по прогибу и углу поворота сечения, при кручении по относительному углу закручивания:

$$y_{max} \leq [y]; \theta_{max} \leq [\theta]; \varphi_{max_{max}}^{отн} \leq [\varphi^{отн}]$$

## Энергетические методы определения перемещений поперечных сечений балки

Энергетические методы определения перемещений играют важную роль при решении задач расчета деталей машин и элементов конструкций на жесткость, а также при решении статически неопределимых систем методом сил.

Энергетическими способы называют потому, что в их основе лежит необходимость вычисления потенциальной энергии деформации. К группе энергетических обычно относят метод Кастильяно, метод Мора и способ Верещагина. Теоретические основы энергетических методов, в частности, формулировки теорем, на которых они основаны, доказательства теорем рассматриваются в курсе лекций.

Особенностью энергетических методов является то, что один расчёт, произведенный для бруса, позволяет определить лишь одно перемещение. Поэтому, чтобы построить эпюры перемещений придется решить ряд задач для нескольких характерных точек бруса. Энергетические методы применяют обычно тогда, когда необходимо найти перемещение только в одной - двух точках, например в центре бруса или на его концах. Эти методы особенно удобны при решении статически неопределимых задач. В таких задачах возникает необходимость расчета перемещений для ограниченного числа точек бруса.

Данное учебное пособие содержит минимальные теоретические сведения по энергетическим методам. Оно предназначено для формирования навыков решения практических задач. Рассмотрим некоторые наиболее важные понятия энергетических методов.

При применении энергетических методов силу  $P_1$  будем трактовать как обобщенную силу, понимая под обобщенной силой любую силу, группу сил или момент, которые удобно выделить для определения совершаемой ею работы. Обобщенной силе соответствует обобщенное

перемещение  $\delta_1$ . Обобщенное перемещение - это величина, на которую нужно умножить обобщенную силу, чтобы определить совершаемую ей работу:  $A = P_1 \delta_1$ .

Индекс «1» означает, что обобщенная сила приложена в некоторую точку, которой вместо имени А, В или С присвоили номер 1.

Если обобщенная сила - это сосредоточенная сила, то ей соответствует линейное перемещение (например, прогиб, удлинение). Если обобщенная сила - сосредоточенный момент, то ей соответствует угловое перемещение (например, угол поворота сечения, угол закручивания).

### Метод Мора

Метод Мора является универсальным методом определения любых перемещений сечений бруса при любой нагрузке. Для каждого из внутренних силовых факторов (ВСФ)  $Q_y$ ,  $M_x$ ,  $M_z$ ,  $N$ ,  $M_y$ ,  $Q_x$  составляют свой интеграл Мора. Запись интегралов для любого из ВСФ на основе теоремы Мора рассматривается в курсе лекций. Общее перемещение рассчитывается как сумма интегралов Мора для каждого внутреннего силового фактора.

В данном пособии рассматривается решение задач определения перемещений только от внутреннего изгибающего момента  $M_x$ . Перемещение от момента рассчитывается как интеграл Мора:

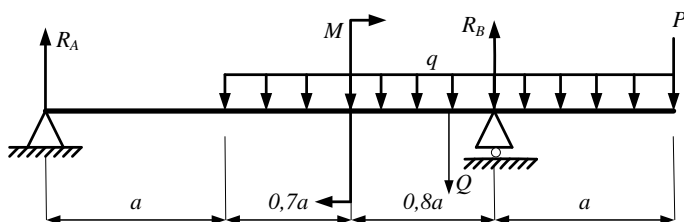
$$\Delta = \int_{\ell} \frac{M_x(z) \cdot M_{x1}(z)}{EI_x} dz$$

где  $EI_x$  - жесткость сечения;  $M_x(z)$  - уравнение изгибающего момента от действующей нагрузки (основная схема) на данном участке;  $M_{x1}(z)$  - уравнение изгибающего момента от единичной нагрузки (вспомогательная схема).

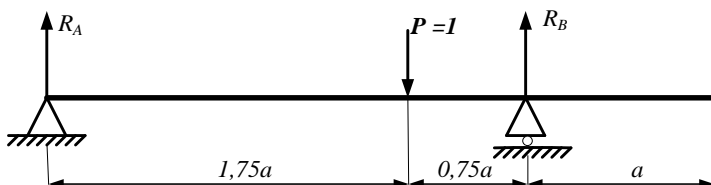
Вспомогательная схема составляется с учётом основной, но без заданных внешних нагрузок. В качестве

нагрузки здесь служат либо единичная сила ( $P = 1$ ) при вычислении прогиба, либо единичный момент ( $M = 1$ ) при вычислении угла поворота сечения. Их прикладывают в то сечение, перемещение которого определяется. Например, для определения прогиба в середине балки и угла поворота в правой опоре основная и вспомогательные схемы будут выглядеть так:

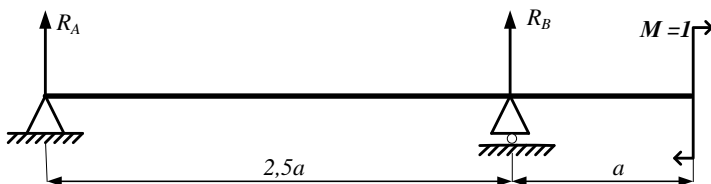
Заданная схема нагружения (основная)



Вспомогательная схема при определении прогиба



Вспомогательная схема при определении угла поворота



Общее число интегралов Мора должно быть равно числу участков, т.е. для каждого участка записывается свой интеграл с соответствующими границами. При этом, границы участков для основной и вспомогательной балок,

должны совпадать. Сумма всех интегралов есть искомое перемещение. Например, в случае, рассмотренном выше четыре участка на основной схеме. Значит, интегралов будет также четыре и для прогиба и для угла поворота.

Для формирования навыков решения задач нужно следовать особому шаблону решения. Он задает алгоритм, т.е. последовательность шагов, которые приведут к правильному решению. Рассмотрим его.

### **Порядок применения метода Мора для расчёта перемещений**

1. На основе заданной схемы нагружения (основная схема) вычерчивается вспомогательная схема, но без внешних нагрузок. На вспомогательной схеме в той точке, где нужно определить перемещение, необходимо приложить:

- единичную силу  $P=1$ , если рассчитывается прогиб  $U$ ;
- единичный момент  $M=1$ , если определяется угол поворота сечения  $\theta$ .

2. Определяется количество участков основной схемы и для каждого участка записываются уравнения моментов  $M_x(z)$  для основной и  $M_{x1}(z)$  для вспомогательной схемы. Число и границы участков для обеих схем должны совпадать.

3. Для каждого участка составляется свой интеграл Мора. Если участки имеют разные размеры сечений, то момент инерции вычисляется для каждого сечения. Если жесткость сечения по всей балке постоянна, то вычисление момента инерции можно оставить напоследок. При решении интегралов в этом случае, жесткость балки ( $EI_x$  – произведение модуля упругости на момент инерции) можно вынести за знак интеграла.

4. Результаты интегрирования на всех участках суммируются и таким образом рассчитывают требуемое перемещение. Перемещение в заданной точке есть сумма всех интегралов Мора.

Если вычисленное перемещение имеет положительный знак, то это означает, что его направление совпадает с направлением единичного усилия. Отрицательный знак указывает на то, что действительное направление искомого перемещения противоположно направлению единичного усилия.

### **Способ Верещагина**

А. Н. Верещагин в 1925 году, будучи студентом, предложил очень удобный способ вычисления интегралов Мора применительно к задачам изгиба балок и рам с прямолинейными участками, имеющими постоянную жесткость. При вычислении перемещений при изгибе он предложил заменить интеграл Мора на формулу:

$$\delta = \frac{\omega \cdot M_c}{EI_x}$$

где  $\omega$  – площадь грузовой эпюры, т.е. эпюры изгибающего момента на основной балке;  $M_c$  – ордината (высота) единичной эпюры, которая определяется под центром тяжести грузовой эпюры.

Порядок применения способа практически совпадает с порядком применения метода Мора, за исключением п. 3 и 4.

По уравнениям внутренних моментов  $M_x(z)$  для основной и  $M_{x1}(z)$  для вспомогательной схемы следует построить их эпюры, а вместо записи интегралов Мора, нужно «перемножить эпюры внутренних моментов» по формуле Верещагина, т.е. умножить площадь грузовой эпюры от основной схемы на момент, выбранный на

вспомогательной эпюре под центром тяжести грузовой эпюры.

Для расчета площадей эпюр и координат центра тяжести используют стандартные формулы, приведенные в таблице 1. В том случае, когда эпюра образована несколькими фигурами, ее разбивают на простые геометрические фигуры – треугольник, трапеция, парабола.

### **Порядок применения способа Верещагина для определения перемещений при изгибе**

1. Вычерчивается вспомогательная схема, которая геометрически совпадает с основной (заданной), но без внешних нагрузок, т.е. отбрасываются все приложенные силы, моменты и нагрузки.

2. На вспомогательной схеме в той точке, где нужно определить перемещение необходимо приложить либо единичную силу  $P = 1$ , если рассчитывается прогиб  $U$ ; либо единичный момент  $M = 1$ , если определяется угол поворота сечения.

3. Строятся эпюры изгибающих моментов для основной схемы (грузовая эпюра) и эпюры изгибающего момента для вспомогательной схемы (единичная эпюра).

4. Определяются площади грузовых эпюр  $\omega$  и единичные моменты  $M_c$  под центрами тяжести грузовых. Для каждого участка записывается формула Верещагина, по которой «перемножаются» эпюры.

5. Сложив результаты перемножения по всем участкам, разделив на жесткость сечения, получаем перемещение в данной точке.

Для удобства вычисления площадей и координат центров тяжести эпюр, их разбивают на простейшие элементы: прямоугольник, треугольник, параболический треугольник и выполняют перемножение по отдельным

элементам. Минимальное количество участков, на которое разбивается грузовая эпюра для вычисления площадей, равно числу участков на единичной эпюре, причем границы участков *должны совпадать* с границами их на единичной эпюре.

Для перемножения эпюр по способу Верещагина требуется, чтобы перемножаемые эпюры имели одинаковую длину по оси бруса.

В тех случаях, когда грузовая и единичная эпюры обе прямолинейны, можно умножать площадь единичной эпюры на соответствующую ординату грузовой эпюры, взятую под центром тяжести единичной, т.е. делать наоборот.

Необходимо запомнить, что ордината  $M_c$  всегда берется только на *линейной* эпюре.

Правило знаков при перемножении: если грузовая и единичная эпюры имеют разные знаки, то их произведение берется со знаком минус.

## ПРИМЕРЫ РАСЧЁТОВ НА ЖЕСТКОСТЬ

### Пример 7.

Дано: двухопорная стальная балка (рис.38), материал балки сталь Ст 10.

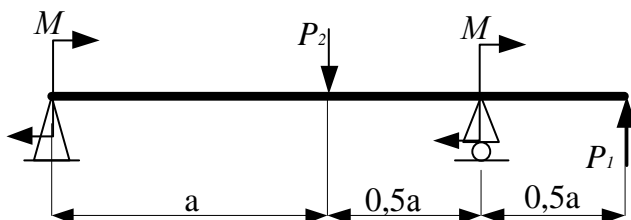


Рис. 38. Расчетная схема балки



Определить прогиб на свободном конце балки и угол поворота сечения в правой опоре, используя правило Верещагина (энергетические способы определения перемещений). Жесткость балки определить исходя из размеров сечения и материала. Сечение – на выбор.

$$P_1 = P_2 = 18.48 \text{ кН}, M = 22.18 \text{ кН}\cdot\text{м}, a = 1,2 \text{ м}.$$

Решение.

1. Определяем опорные реакции для расчетной схемы:

$$\sum M_A = 0;$$

$$\sum M_A = -M - M - P_2 \cdot a + R_B \cdot 1,5a + P_1 \cdot 2a = 0$$

$$R_B = \frac{2M + P \cdot a - P \cdot 2a}{1,5 \cdot a} = 12.33 \text{ кН}$$

$$\sum Y = -P_2 + R_A + R_B + P_1 = 0;$$

$$R_A = P_2 - R_B - P_1 = 9,6 - 6,4 + 9,6 = -12.33 \text{ кН}$$

2. Разбиваем балку на участки. Применяя метод сечений, определяем значения изгибающих моментов  $M_x$  на участках балки.

**1 участок: ( $0 \leq Z_1 \leq a$ )**

$$M_x = M + R_A \cdot Z_1 - \text{уравнение наклонной линии.}$$

$$M_x(0) = 22.18 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$M_x(a) = 7.4 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

**2 участок: ( $a \leq Z_2 \leq 1.5a$ )**

$M_x = R_A \cdot Z_2 - P_2(Z_2 - a) + M$  уравнение наклонной линии

$$M_x(a) = 7.4 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$M_x(1,5 \cdot a) = -11.09 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

**3 участок: ( $0 \leq Z_3 \leq 0.5a$ )**

$$M_x = P \cdot Z_3 - \text{уравнение наклонной линии.}$$

$$M_x(a) = 0 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$M_x(0,5 \cdot a) = 11,09 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

Построим эпюры  $M_x$  (рис.39)

На 2 участке  $M_x$  пересекает нулевую линию в точке  $Z_2^*$ . Определим длину  $Z_2^*$ :

$$M_x(Z_2^*) = R_A \cdot Z_2^* - P_2(Z_2^* - a) + M = 0, \text{ отсюда } Z_2^* = 1,44 \text{ м}$$

Из эпюры изгибающих моментов находим опасное сечение балки:  $M_{\max} = 22,18 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

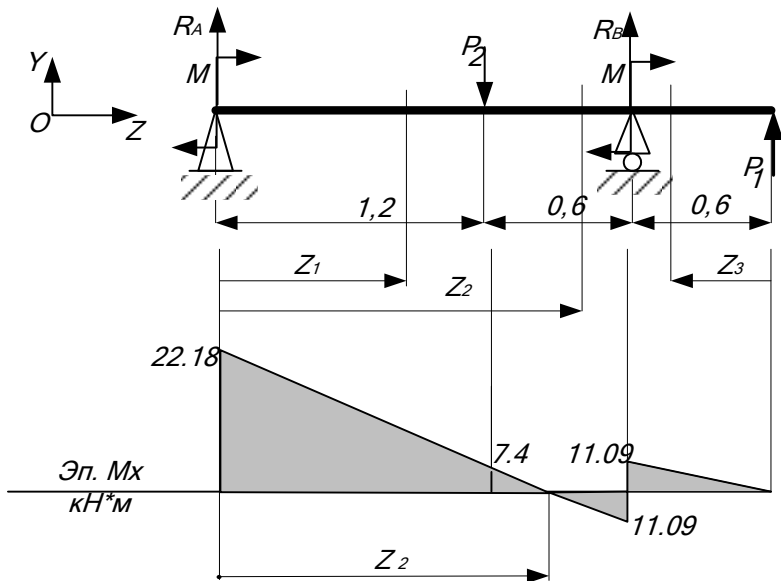


Рис. 39. Эпюра изгибающих моментов

Исходя из условий прочности, подбираем размер двутаврового сечения. Условие прочности балки по нормальным напряжениям имеет вид:

$$\sigma_{\max} / = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]$$

$$W_x = \frac{M_{\max}}{[\sigma]},$$

где  $[\sigma]$  – допускаемое (предельное) нормальное напряжение, мПа;

$$[\sigma] = \frac{\sigma_m}{[n]},$$

где  $\sigma_T$  – предел текучести материала вала, мПа;

$\sigma_T = 210$  мПа, для стали марки Ст 10;

$[n]$  – нормативный, допускаемый коэффициент запаса прочности, принимаем  $[n]=1,5$ ;

$$[\sigma] = \frac{210}{1,5} = 140 \text{ мПа}$$

$$W_x = \frac{22,18 \cdot 10^3}{140 \cdot 10^6} = 158,43 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 158,43 \text{ см}^3$$

По ГОСТ 8239-95 выбираем двутавр №18а, для которого  $W_x = 159 \text{ см}^3$   $J_x = 1430 \text{ см}^4$

Определим жесткость сечения балки:

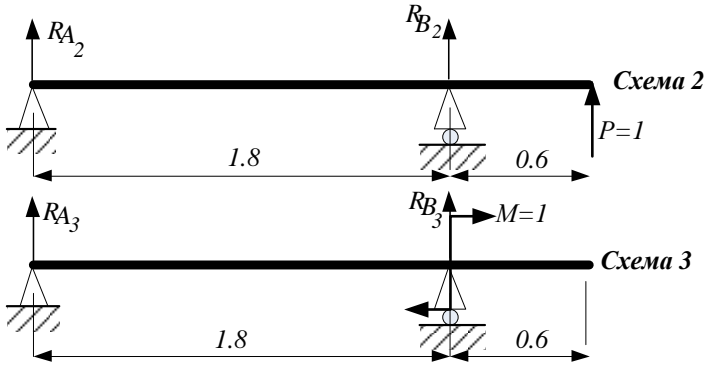
$$E \cdot J_x = 2 \cdot 10^{11} \cdot 1430 \cdot 10^{-8} = 2860 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$$

Обозначим основную схему как схема №1 и **используя энергетические способы определения перемещений**, вычерчиваем вспомогательные схемы 2 и 3 (рис. 40), которые геометрически совпадают с основной (заданной), но без внешних нагрузок. Отбрасываем все приложенные нагрузки, заменив на единичные в точках, где определяем прогиб и угол (схемы 2 и 3). Для удобства записи примем индексы 1,2,3 по соответствующим схемам.

Опорные реакции  $R_{A1}$ ,  $R_{B1}$ ,  $R_{A2}$ ,  $R_{B2}$ ,  $R_{A3}$ ,  $R_{B3}$  находим, используя уравнения статики (раздел «Статика», теоретическая механика).

Получаем:

$$\begin{aligned}
 R_{A1} &= -12.33 \text{ кН} \\
 R_{B1} &= 12.33 \text{ кН} \\
 R_{A2} &= 0.333 \text{ кН} \\
 R_{B2} &= -1.333 \text{ кН} \\
 R_{A3} &= -0.56 \text{ кН} \\
 R_{B3} &= 0.56 \text{ кН}
 \end{aligned}$$



**Рис. 40.** Вспомогательные схемы для прогиба и угла поворота

Распишем уравнения изгибающих моментов по участкам I, II, III для всех трёх схем, используя следующую индексацию:

$M_x$  – уравнение для основной схемы 1;

$M_{x1}$  – уравнение для вспомогательной схемы. В нашем случае это единичная схема 2 для прогиба  $Y$  в точке С и схема 3 для угла поворота  $\theta$  в точке В.

Все графические пояснения показаны на рис.41.

**I участок**  $0 \leq z \leq a$

1 схема  $M_x = R_{A1} * z + M$

2 схема  $M_{x1} = R_{A2} * z$

3 схема  $M_{x1} = R_{A3} * z$

**II участка  $\leq z \leq 1,5a$**

1 схема  $M_x = R_{A1} * z + M - P(z-a)$

2 схема  $M_{x1} = R_{A2} * z$

3 схема  $M_{x1} = R_{A3} * z$

**III участок  $0 \leq z \leq 0,5 a$**

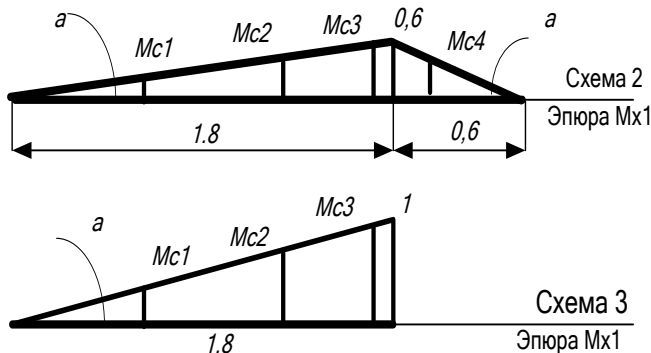
1 схема  $M_x = P_1 * z$

2 схема  $M_{x1} = P * z$

3 схема  $M_{x1} = 0$

Для определения перемещения методом Верещагина, необходимы эпюры изгибающих моментов для всех 3-х схем. Построим их, используя уравнения  $M_x$  и  $M_{x1}$ , расписанные выше.

Для определения  $M_{ci}$  для схем 2 и 3 определим тангенсы углов  $\alpha$ :



– **для схемы 2**

Левый угол  $tg \alpha = \frac{0,6}{1,8} = 0,333$

Правый угол  $tg \alpha = \frac{0,6}{0,6} = 1$

– **для схемы 3**

Левый угол  $tg \alpha = \frac{1}{1,8} = 0,5555$

**Определение прогиба.** Разделим эпюру  $M_x$  (рис.41) на простые фигуры 1,2,3,4 и определим их **площади  $\omega$** , **координаты центра тяжести  $Z_C$**  и **моменты  $M_C$**  на схеме №2 под центром тяжести эпюры схемы №1.  $M_C$  рассчитываем со схемы 2, используя тангенс угла  $\text{tga} = 0,333$ :

1 фигура

Прямоугольная трапеция высотой  $h_1 = 7.4$  и  $h_2 = 22.18$ .

$$\omega = \frac{1}{2} * (h_1 + h_2) * l = 17.75$$

$$Z_C = \frac{1}{3} * l * \frac{2h_2 + h_1}{h_1 + h_2} = 0.7 \text{ м}$$

$$M_{C1} = (1.2 - 0.7) * 0,333 = 0,17$$

2 фигура

Прямоугольный треугольник

$$\omega = \frac{1}{2} * h * l = \frac{1}{2} * 7.4 * 0.24 = 0.89$$

$$z_c^2 = \frac{2}{3} * 0.24 = 0,16$$

$$M_{C2} = (1.44 - 0,16) * 0,333 = 0,42$$

3 фигура

Прямоугольный треугольник

$$\omega = \frac{1}{2} * 11.09 * 0,36 = 2$$

$$Z_C = \frac{2}{3} * 0.36 = 0,24$$

$$M_{C3} = (1.44 + 0,36) * 0,333 = 0,6$$

4 фигура

Прямоугольный треугольник

$$\omega = \frac{1}{2} * h * l = \frac{1}{2} * 11.09 * 0,6 = 3.33$$

$$Z_C = \frac{2}{3} * 0.6 = 0,4$$

$$M_{C4} = 0,333 * 0.6 = 0,12$$

Прогиб в точке С определяем по формуле Верещагина:

$$\begin{aligned}
 y_c &= \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i * M_{ci}}{EJ_x} \\
 &= \frac{+(\omega_1 * M_{c1}) + (\omega_2 * M_{c2}) - (\omega_3 * M_{c3}) + (\omega_4 * M_{c4})}{EJ_x} \\
 &= \frac{2.59 * 10^3}{2680 \cdot 10^3} = 0,00097 \text{ м} = \mathbf{0.97 \text{ мм}}
 \end{aligned}$$

**Определение угла поворота.** Для определения угла поворота в точке В берем то же выражение, но  $M_c$  рассчитываем со схемы 3, используя тангенс угла  $\text{tga} = \mathbf{0,667}$

$$\begin{aligned}
 M_{c1} &= (1,2 - 0,7) * 0,5555 = 0,28 \\
 M_{c2} &= (1,44 - 0,16) * 0,5555 = 0,71 \\
 M_{c3} &= (1,44 + 0,24) * 0,5555 = 0,93 \\
 M_{c4} &= 0 \\
 \theta_B &= \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i * M_{ci}}{EJ_x} \\
 &= \frac{+(\omega_1 * M_{c1}) + (\omega_2 * M_{c2}) - (\omega_3 * M_{c3}) + (\omega_4 * M_{c4})}{EJ_x} \\
 &= \frac{3.74 * 10^3}{2680 \cdot 10^3} = 0,001395 \text{ рад} = \mathbf{0,08 \text{ град}}
 \end{aligned}$$

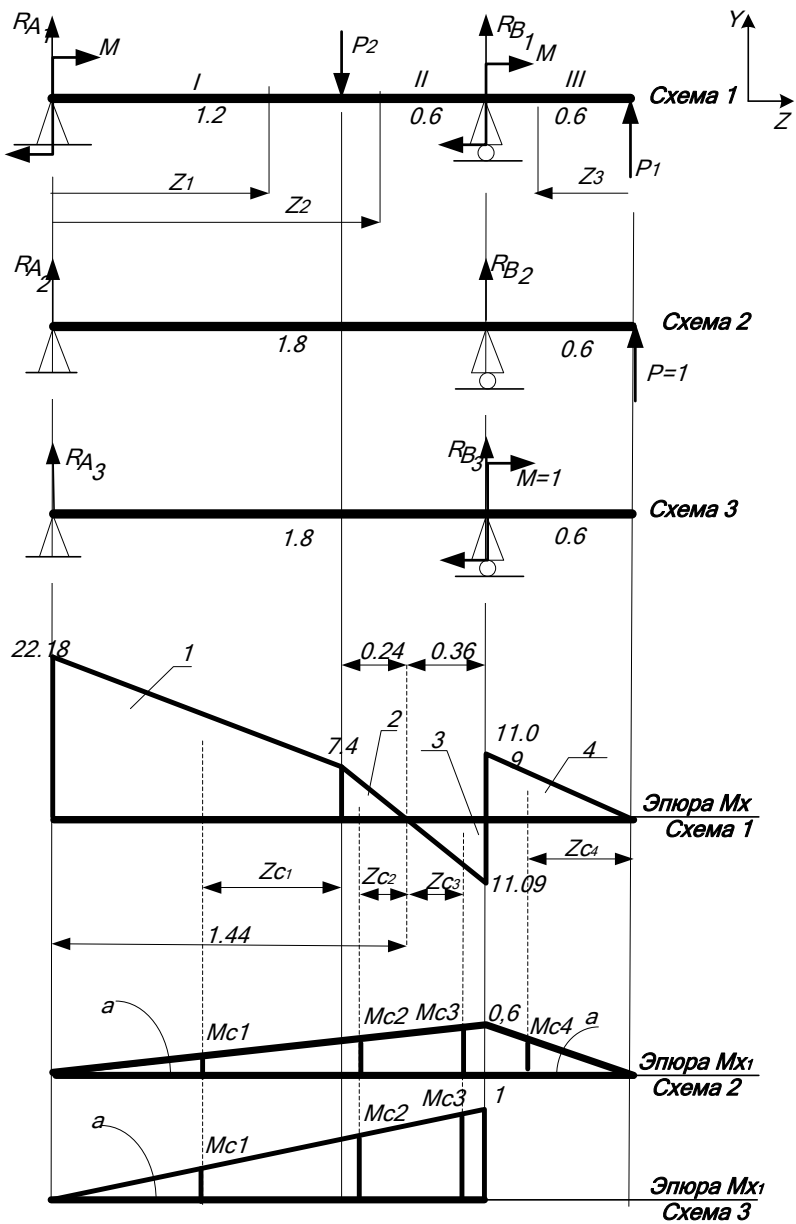
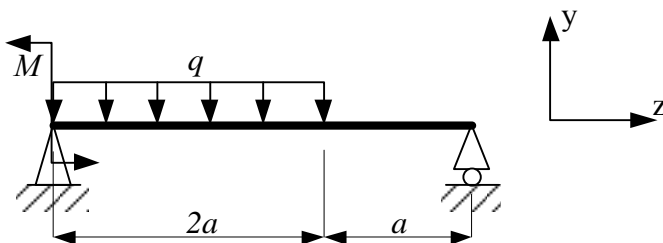


Рис. 41. Пояснения к примеру 7



**Пример 8.** Дано: балка изгибается под действием 2-х внешних нагрузок:



Используя интеграл Мора, определить угол поворота в точке опоры А и прогиб на расстоянии 1м от этой опоры, если задано:  $q=20$  кН/м;  $M=10$  кН\*м,  $a=1$ м. Размеры сечения и материал балки по всей длине одинаковые, т.е.  $E \cdot J_x = \text{const}$ .

Решение.

Разобьем расчет на этапы.

1) Составим расчетную и вспомогательные схемы и проставим на них опорные связи  $R_{A1}$ ,  $R_{B1}$ ,  $R_{A2}$ ,  $R_{B2}$ ,  $R_{A3}$ ,  $R_{B3}$ :

1 – основная схема

2 – вспомогательная схема при определении прогиба

3 – вспомогательная схема при определении угла поворота (рис. 42).

2) Определим опорные реакции  $R_{A1}$ ,  $R_{B1}$ ,  $R_{A2}$ ,  $R_{B2}$ ,  $R_{A3}$ ,  $R_{B3}$ , используя уравнения статики (раздел «Статика», теоретическая механика).

Получаем:

$$R_{A1} = 30 \text{ кН}$$

$$R_{B1} = 10 \text{ кН}$$

$$R_{A2} = 2/3 \text{ кН}$$

$$R_{B2} = 1/3 \text{ кН}$$

$$R_{A3} = - 1/3 \text{ кН}$$

$$R_{B3} = 1/3 \text{ кН.}$$

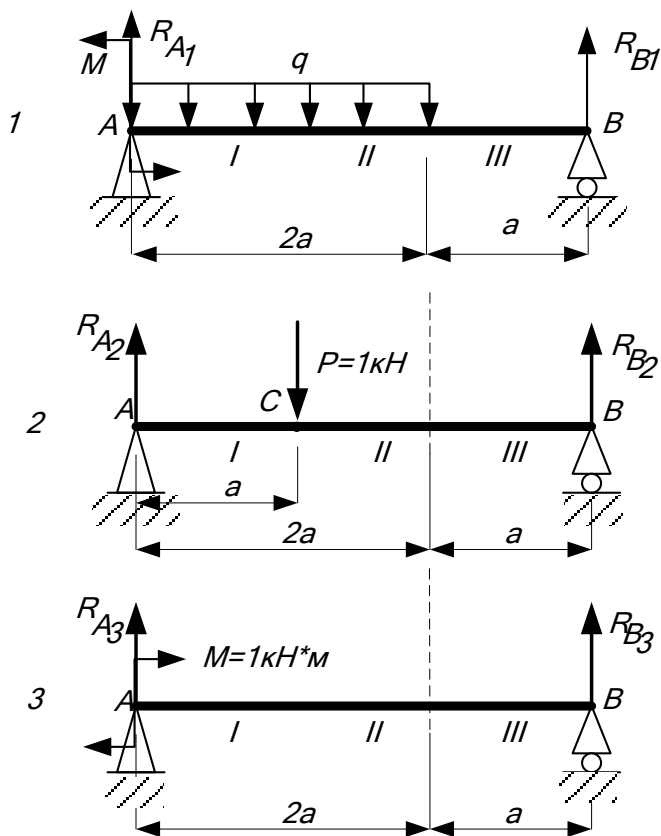


Рис. 42.

3) Для определения перемещений с помощью интеграла Мора распишем уравнения изгибающих моментов по участкам I, II, III для всех трёх схем, используя следующую индексацию:

$$\delta = \int \frac{M_x * M_{x1}}{EJ_x} dz$$

где  $M_x$  – уравнение для основной схемы (1);  $M_{x1}$  – уравнение для вспомогательной схемы. В нашем случае это единичная схема (2) для прогиба в точке С и схема (3) для угла поворота в точке А.

### **I участок $0 \leq z \leq a$**

1 схема  $M_x = R_{A1} * z - \frac{q * z^2}{2} - M = 30 * z - 10 * z^2 - 10$

2 схема  $M_{x1} = R_{A2} * z = \frac{2}{3} * z$

3 схема  $M_{x1} = R_{A3} * z + M = -\frac{1}{3} * z + 1$

### **II участок $a \leq z \leq 2a$**

1 схема  $M_x = R_{A1} * z - \frac{q * z^2}{2} - M = 30z - 10z^2 - 10$

2 схема  $M_{x1} = R_{A2} * z - P * (z-a) = 1 - \frac{1}{3} * z$

3 схема  $M_{x1} = R_{A3} * z + M = -\frac{1}{3} * z + 1$

### **III участок $0 \leq z \leq a$**

1 схема  $M_x = R_{B1} * z = 10 * z$

2 схема  $M_{x1} = R_{B2} * z = \frac{2}{3} * z$

3 схема  $M_{x1} = R_{B3} * z = \frac{1}{3} * z$

4) Учитывая, что  $E * J_x = \text{const}$ , вынесем её за интеграл и выражение  $\int M_x * M_{x1} dz$ , определим по участкам отдельно:

### **I участок**

$$\begin{aligned} y &= \int_0^a (30z - 10z^2 - 10) * \left(\frac{2}{3} z\right) dz \\ &= \int_0^1 \left(20z^2 - \frac{20}{3} z^3 - \frac{20}{3} z\right) dz = \\ &= \frac{20}{3} z^3 - \frac{20}{3 * 4} z^4 - \frac{20}{3 * 2} z^2 \Big|_0^1 = \frac{20}{12} \end{aligned}$$

$$\theta = \int_0^a (30z - 10z^2 - 10) * \left(-\frac{1}{3} * z + 1\right) dz = \frac{65}{6}$$

### II участок

$$y = \int_a^{2a} (30z - 10z^2 - 10) * \left(1 - \frac{1}{3} * z\right) dz = -\frac{65}{6}$$

$$\theta = \int_a^{2a} (30z - 10z^2 - 10) * \left(-\frac{1}{3} * z + 1\right) dz = -\frac{65}{6}$$

### III участок

$$y = \int_0^a 10z * \left(\frac{1}{3} z\right) dz = \frac{10}{3}$$

$$\theta = \int_0^a 10z * \left(\frac{1}{3} z\right) dz = \frac{10}{3}$$

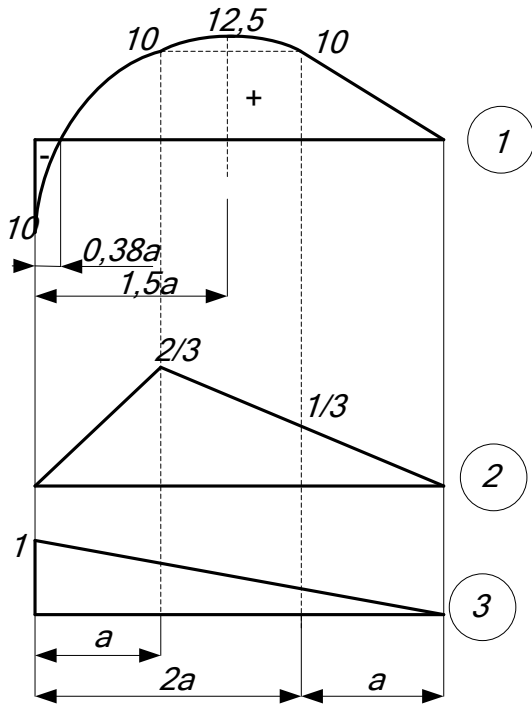
Суммируя по участкам, получаем:

$$y = \frac{0 - \frac{65}{6} + \frac{10}{3}}{EJ_x} = -\frac{45}{6(EJ_x)} \frac{\text{кН}}{\text{Па} * \text{м}^4} = \frac{7,5}{EJ_x} \text{кН} * \text{м}^2$$

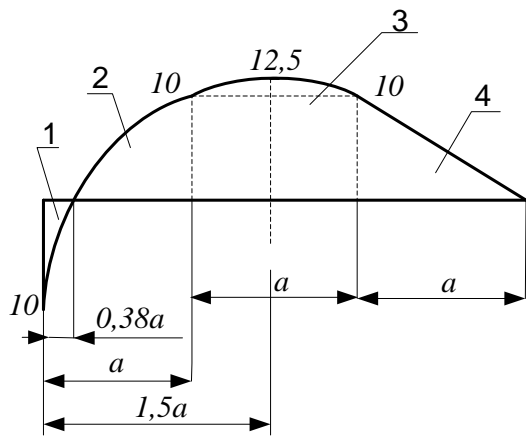
$$\theta = \frac{\frac{65}{6} - \frac{65}{6} + \frac{10}{3}}{EJ_x} = \frac{10 * 10^3}{3 * EJ_x}$$

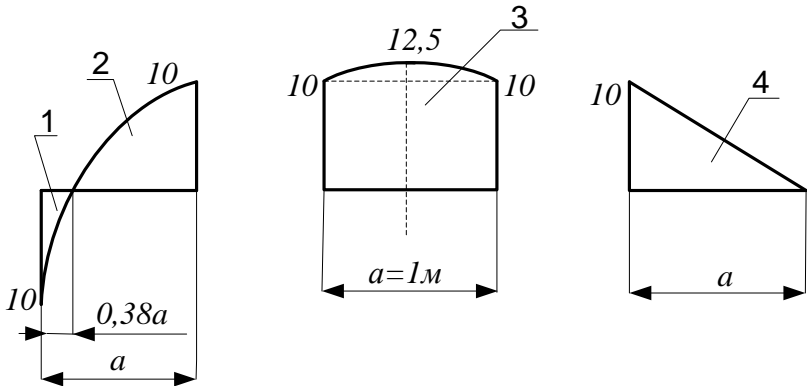
5) Для определения перемещения методом Верещагина, необходимы эпюры изгибающих моментов для всех 3-х схем. Построим их, используя уравнения  $M_x$  и  $M_{x1}$ , расписанные выше. При построении эпюр для балок, где действует распределенная нагрузка, необходимо проверить наличие экстремума, т.е. построить эпюру поперечных сил.

Получаем:



Разделим эпюру  $M_x$  на простые фигуры и рассмотрим каждую из них:





### Расчёт прогиба

При расчете используем эпюры изгибающих моментов основной схемы (1) и вспомогательной (2).

#### I участок

Рассмотрим 1 и 2 отдельно.

Воспользуемся формулами из таблицы 3, приложение, с.91.

Фигура №1 – прямоугольный треугольник 1.1 и парабола 1.2 высотой h.

$$1.1 \quad \omega = \frac{1}{2} * 10 * 0,38 = 1,9$$

$$z_c^{1.1} = z_c^{\text{слева}} = \frac{1}{3} * 0,38 = 0,12667$$

$$M_c = 0,08444$$

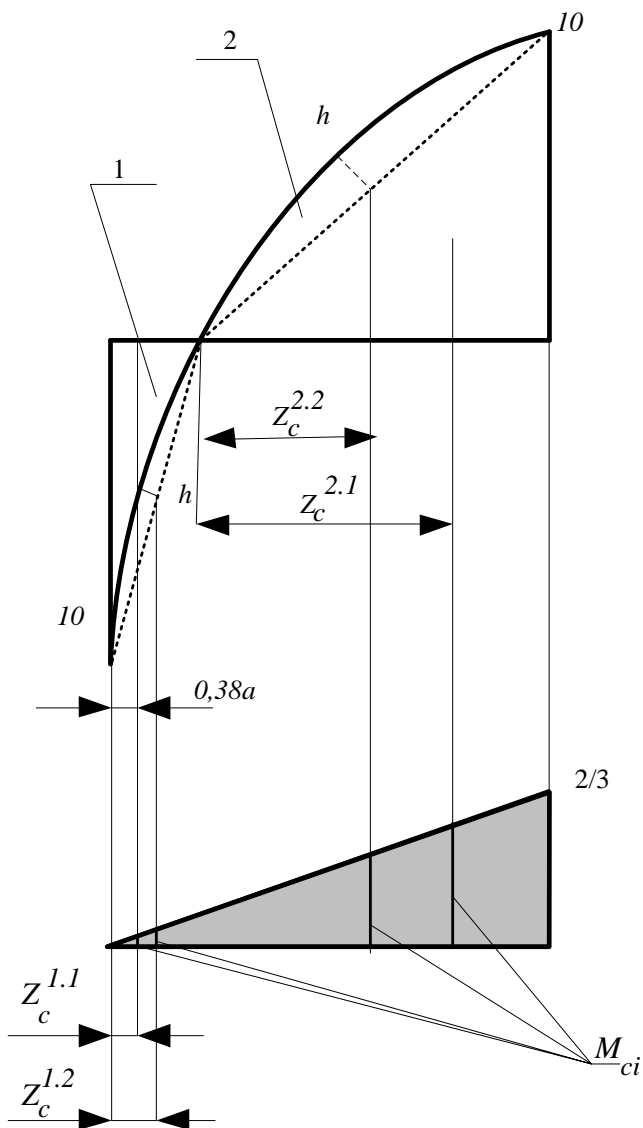
$$1.2 \quad \omega = \frac{2}{3} * h * l = \frac{2}{3} * 0,361 * 0,38 = 0,09145$$

$$h = \frac{1}{8} q l^2 = \frac{1}{8} * 20 * 0,38^2 = 0,361$$

$$z_c^{1.2} = \frac{l}{2} = 0,19$$

$$M_c = 0,12667$$

Фигура №2 – прямоугольный треугольник 2.1 и парабола 2.2 высотой  $h$ .



$$2.1.\omega = \frac{1}{2} * 10 * 0,62 = 3,1$$

$$z_c^{2.1} = z_c^{\text{справа}} = \frac{2}{3} * 0,62 = 0,41333$$

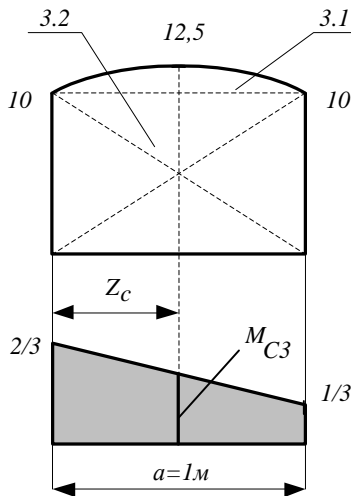
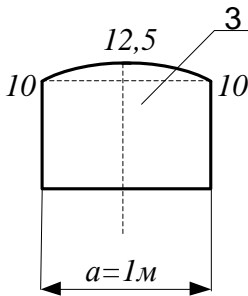
$$M_c = 0,48889$$

$$2.2. \omega = \frac{2}{3} * h * l = \frac{2}{3} * 0,961 * 0,62 = 0,3972$$

$$z_c^{2.2} = \frac{l}{2} = 0,31$$

$$\omega = \frac{1}{8} q l^2 = \frac{1}{8} * 20 * 0,62^2 = 0,961, M_c = 0,46$$

**II участок**  
**Фигура №3**



Так как это симметричная геометрическая фигура, рассмотрим её как параболу 3.1 и прямоугольник 3.2.

Центр тяжести её находится посередине, т.е.

$$z_c^{3.1} = z_c^{3.2} = 0,5\text{м} \text{ и } M_c^{3.1} = Mz_c^{3.2} = 0,5$$

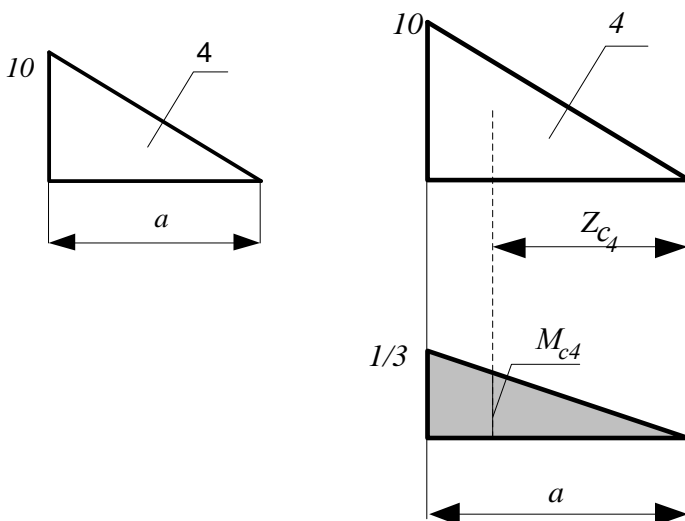
$$3.1 \omega = \frac{2}{3} * h * l = \frac{2}{3} * 2,5 * 1 = 1,33333$$

$$3.2 \omega = 1 * 10 = 10$$



### III участок

Фигура №4 – прямоугольный треугольник



$$\omega = \frac{1}{2} * 10 * 1 = 5$$

$$z_c^{2.1} = z_c^{\text{справа}} = \frac{2}{3} * 1 = 0,0333, M_c = 0,14815$$

Моменты  $M_c$  под центром тяжести  $Z_c$  грузовой эпюры  $\omega$  можно определить, используя правило подобия сторон треугольников.

Подставляя в формулу Верещагина при изгибе для балки, имеющей несколько участков, получаем:

$$y = \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i * M_{ci}}{EJ_x} =$$
$$= \frac{-(\omega_1 * M_{c1}) + (\omega_2 * M_{c2}) + (\omega_3 * M_{c3}) + (\omega_4 * M_{c4})}{EJ_x}$$

$$\begin{aligned}
 y = & [-1,9 * 0,0844 - 0,09145 * 0,12667] \\
 & + [3,1 * 0,48889 + 0,3972 * 0,46] \\
 & + [10 * 0,5 + 1,33333 * 0,5] + [5 * 0,14815] \\
 & * \frac{1}{EJ_x} = \frac{7,5}{EJ_x} \text{кН} * \text{м}^2
 \end{aligned}$$

Знак «-» берется с учетом знака  $M_x$  на эпюрах.

Расчёт угла поворота (угловое перемещение в точке А) проводится аналогично. При расчете используются эпюры изгибающих моментов основной схемы (1) и вспомогательной (3).

## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

### 1. Расчеты на прочность

Балка одинаковой жесткости по длине ( $EI_x = \text{const}$ ) нагружена сосредоточенной силой  $P$ , распределенной нагрузкой  $q$  и моментом  $M$ .

#### Требуется:

1) для расчетной схемы 1 (рис. 43) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, подобрать двутавровое и прямоугольное сечение балки с соотношением сторон 1:2 из условия прочности, определить степень рациональности;

2) для расчетной схемы 2 (рис. 44) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, подобрать двутавровое сечение балки и построить эпюры нормальных и касательных напряжений в опасном сечении балки.

Таблица исходных данных

Номер варианта	Расстояние $a$ , м	$P$ , кН	$q$ , кН/м	$M$ , кН·м	Допускаемое напряжение $[\sigma]$ , МПа
1	0,50	20	11	15	160
2	0,60	22	12	20	165
3	0,70	24	13	25	170
4	0,65	25	15	10	175

Решение задач следует начать с определения опорных реакций. Для этого следует составить два независимых уравнения статики в виде

$$\sum M = 0$$

После определения реакций должна быть выполнена проверка правильности расчетов. При этом рекомендуется использовать уравнение статики вида

$$\sum Y = 0$$

Если реакции определены верно, то, используя метод сечений, находят внутренние силовые факторы  $Q$  и  $M$ .

Для расчетной схемы 2 опорные реакции можно не определять, а сразу приступить к определению внутренних силовых факторов  $Q$  и  $M$ , используя метод сечений, начиная со свободного конца консольной балки. Эпюры  $Q$  и  $M$  необходимо строить под расчетными схемами балок.

Для контроля правильности построения эпюр следует руководствоваться следующими основными положениями:

1) На участках балки, где отсутствует распределенная нагрузка  $q$ , поперечные силы постоянны, а изгибающие моменты меняются по линейному закону.

2) Скачки на эпюре  $Q$  соответствуют точкам приложения сосредоточенных сил, в том числе и опорных реакций.

3) Скачок на эпюре  $M$  соответствует действию сосредоточенного внешнего момента  $M$ .

4) На участках, где приложена постоянная распределенная нагрузка  $q$ , поперечная сила изменяется по длине балки по линейному закону, а эпюра изгибающих моментов на этом участке ограничена квадратной параболой, вогнутость которой соответствует направлению распределенной нагрузки  $q$ .

## **2. Расчёты на жесткость**

Для расчетной схемы 3 (рис. 44) определить прогиб на свободном конце и угол поворота в левой опоре, используя:

1. вариант А – интеграл Мора;
2. вариант Б – правило Верещагина.

### Расчетная схема 1

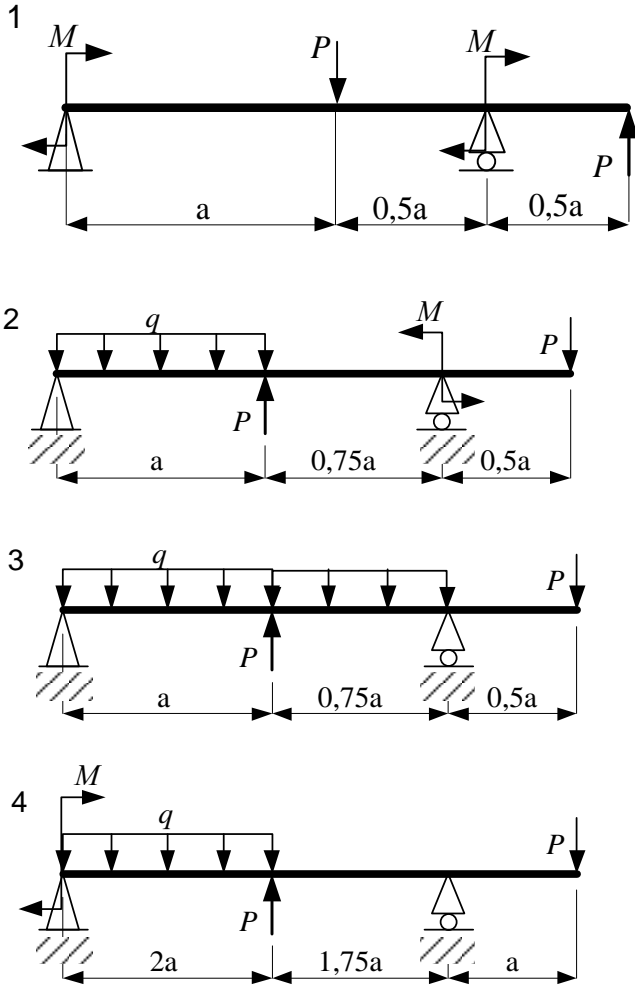
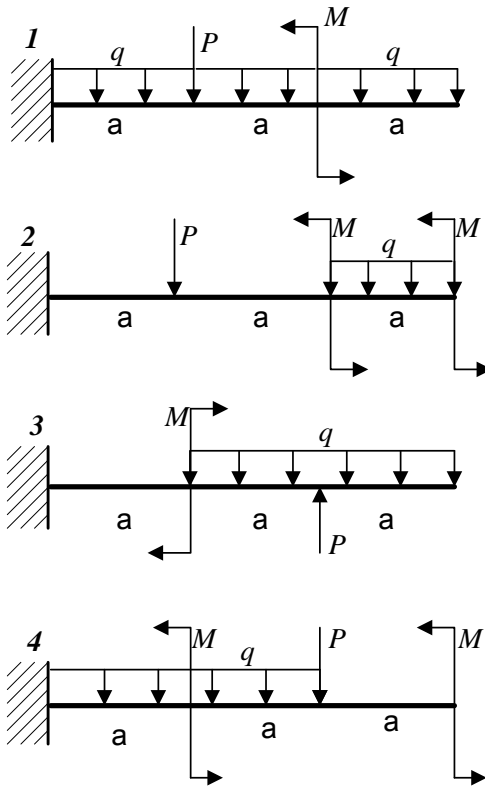


Рис. 43

### Расчетная схема 2



### Расчетная схема 3

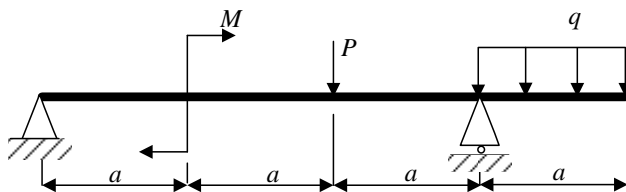


Рис. 44

## ПРИЛОЖЕНИЯ

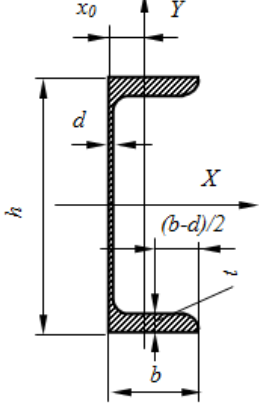
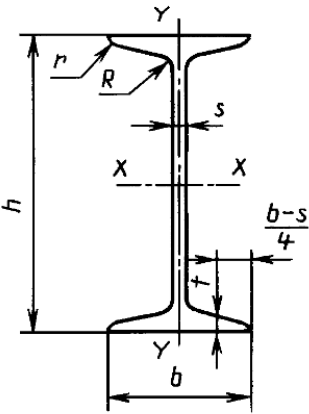
	<p>Таблица 1          ГОСТ 8240-97          Швеллеры <span style="float: right;">стальные</span>          горячекатаные. Сортамент.</p>
	<p>Таблица 2          ГОСТ 8239-89 <span style="float: right;">Двутавры</span>          стальные <span style="float: right;">горячекатаные.</span>          Сортамент</p>
<p>Справочные данные по          расчету площадей эпюр и          координат <span style="float: right;">центра</span>          тяжести</p>	<p>Таблица 3</p>

Таблица 1

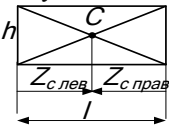
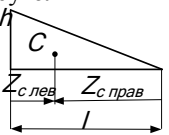
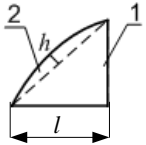
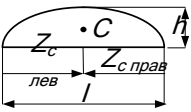
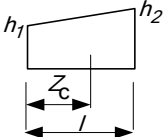
Номер швеллера серии У	h	b	s	r	R	r не более	Площадь поперечного сечения F, см <sup>2</sup>	Масса I м, кг	Справочные значения для осей								X <sub>0</sub> , см
									X—X				Y—Y				
									I <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> , см	S <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	I <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> , см		
5У	50	32	4,4	7,0	6,0	2,5	6,16	4,84	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16	
6,5У	65	36	4,4	7,2	6,0	2,5	7,51	5,90	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24	
8У	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	7,05	89,4	22,4	3,16	23,30	12,80	4,75	1,19	1,31	
10У	100	46	4,5	7,6	7,0	3,0	10,90	8,59	174,0	34,8	3,99	20,40	20,40	6,46	1,37	1,44	
12У	120	52	4,8	7,8	7,5	3,0	13,30	10,40	304,0	50,6	4,78	29,60	31,20	8,52	1,53	1,54	
14У	140	58	4,9	8,1	8,0	3,0	15,60	12,30	491,0	70,2	5,60	40,80	45,40	11,00	1,70	1,67	
16У	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5	18,10	14,20	747,0	93,4	6,42	54,10	63,30	13,80	1,87	1,80	
16аУ	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5	19,50	15,30	823,0	103,0	6,49	59,40	78,80	16,40	2,01	2,00	
18У	180	70	5,1	8,7	9,0	3,5	20,70	16,30	1090,0	121,0	7,24	69,80	86,00	17,00	2,04	1,94	
18аУ	180	74	5,1	9,3	9,0	3,5	22,20	17,40	1190,0	132,0	7,32	76,10	105,00	20,00	2,18	2,13	
20У	200	76	5,2	9,0	9,5	4,0	23,40	18,40	1520,0	152,0	8,07	87,80	113,00	20,50	2,20	2,07	
22У	220	82	5,4	9,5	10,0	4,0	26,70	21,00	2110,0	192,0	8,89	110,00	151,00	25,10	2,37	2,21	
24У	240	90	5,6	10,0	10,5	4,0	30,60	24,00	2900,0	242,0	9,73	139,00	208,00	31,60	2,60	2,42	
27У	270	95	6,0	10,5	11,0	4,5	35,20	27,70	4160,0	308,0	10,90	178,00	262,00	37,30	2,73	2,47	
30У	300	100	6,5	11,0	12,0	5,0	40,50	31,80	5810,0	387,0	12,00	224,00	327,00	43,60	2,84	2,52	
33У	330	105	7,0	11,7	13,0	5,0	46,50	36,50	7980,0	484,0	13,10	281,00	410,00	51,80	2,97	2,59	
36У	360	110	7,5	12,6	14,0	6,0	53,40	41,90	10820,0	601,0	14,20	350,00	513,00	61,70	3,10	2,68	
40У	400	115	8,0	13,5	15,0	6,0	61,50	48,30	15220,0	761,0	15,70	444,00	642,00	73,40	3,23	2,75	



Таблица 2

Номер луга/трава	Размеры						Площадь поперечного сечения, см <sup>2</sup>	Масса 1 м, кг	Справочные значения для осей						
	h	b	s	t	R				X—X			Y—Y			
					R	r			I <sub>x</sub> см <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> см <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> см	S <sub>x</sub> см <sup>3</sup>	I <sub>y</sub> см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> см
мм															
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	11,50	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	13,70	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	15,90	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	18,40	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	21,00	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,10	2,07
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	24,00	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,60	2,27
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	27,30	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,50	2,37
27	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	31,50	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,50	2,54
30	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	36,50	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,69
33	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	42,20	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,90	2,79
36	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	48,60	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,10	2,89
40	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0	72,6	57,00	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,10	3,03
45	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	66,50	27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,00	3,09
50	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0	100,0	78,50	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,00	3,23
55	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0	118,0	92,60	55962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151,00	3,39
60	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	138,0	108,00	76806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,00	3,54

**Таблица 3**

Фигура	Формула площади	Координата центра тяжести с левой стороны	Координата центра тяжести с правой стороны
<p>прямоугольник</p> 	$\omega = h * l$	$Z_{C \text{ лев}} = \frac{l}{2}$	$Z_{C \text{ прав}} = \frac{l}{2}$
<p>прямоугольный треугольник</p> 	$\omega = \frac{1}{2} h * l$	$Z_{C \text{ в} \hat{a} \hat{a}} = \frac{1}{3} l$	$Z_{C \text{ в} \hat{a} \hat{a}} = \frac{2}{3} l$
<p>прямоугольный треугольник 1 и парабола 2</p> 	$\omega_2 = \frac{2}{3} h * l$ $h_2 = \frac{1}{8} q * l^2$	$Z_{C2} = \frac{l}{2}$	$Z_{C2} = \frac{l}{2}$
<p>парабола</p> 	$\omega = \frac{2}{3} h * l$	$Z_{C \text{ лев}} = \frac{l}{2}$	$Z_{C \text{ прав}} = \frac{l}{2}$
<p>Прямоугольная трапеция</p> 	$\omega = \frac{(h_1 + h_2) * l}{2}$	$Z_C = \frac{1}{3} * l * \frac{2 * h_2 + h_1}{(h_1 + h_2)}$	

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Степин, П.А. Сопротивление материалов: учебник / П.А. Степин - М.: Высш. школа, 1988. –367 с.
2. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов: учебник./ В.И. Феодосьев - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 592с.
3. Кочетов В.Т. Сопротивление материалов: учебное пособие. – Ростов-на-Дону: Изд-во Феникс, 2001. - 368 с.
4. Сабанаев И.А., Алмакаева Ф.М. Энергетические методы определения перемещений и решение статически неопределимых балок методом сил : учебное пособие. – Казань: Изд-во Казан. гос. технол. ун-т., 2009. - 80 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

1.	ВВЕДЕНИЕ.....	3
2.	РАЗДЕЛ 1. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ.....	5
3.	1 ЭТАП. Построение расчетной схемы балки и определение опорных реакций.....	5
4.	2 ЭТАП. Определение внутренних силовых факторов и построение эпюр.....	15
5.	Примеры построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.....	23
6.	РАЗДЕЛ 2. РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ.....	36
7.	Примеры расчетов на прочность.....	42
8.	РАЗДЕЛ 3. РАСЧЕТЫ НА ЖЕСТКОСТЬ .....	55
9.	Перемещения в поперечном сечении бруса.....	55
10.	Энергетические методы определения перемещений при изгибе .....	58
11.	Метод Мора .....	59
12.	Способ Верещагина.....	62
13.	Примеры расчетов на жесткость.....	64
14.	ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.....	83
15.	ПРИЛОЖЕНИЯ.....	87
	Швеллеры. Таблица проката .....	88
	Двутавры. Таблица проката .....	89
	Справочные данные по расчету площадей эпюр и координат центра тяжести.....	90
16.	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	91

**Учебное издание**

**Алмакаева Флорида Минулловна**

**Сабанаев Илдар Арифович**

кандидат технических наук, доцент

**РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ  
И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ**

**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ**

Корректор Белова И.М.

Худ. редактор Фёдорова Л.Г.

Сдано в набор 30.11.16.

Подписано в печать 05.12.16.

Бумага писчая. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. л. 5,8. Тираж 100 экз.

Заказ № 27.

**НХТИ ФГБОУ ВО «КНИТУ»**

г. Нижнекамск, 423570, ул. 30 лет Победы, д.5а.