Министерство образования и науки РФ
**Нижнекамский химико-технологический институт (филиал)**
федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего профессионального образования
«Казанский национальный исследовательский технологический
университет»

**Л.А. Апайчева, Л.Е. Шувалова**

# КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

**Нижнекамск**
**2014**

**УДК 517.3**
**А76**

Печатается по решению редакционно-издательского совета Нижнекамского химико-технологического института (филиала) ФГБОУ ВПО «КНИТУ».

**Рецензенты:**
**Багоутдинова А.Г.,** кандидат технических наук, доцент;
**Садыков А.В.,** кандидат технических наук, доцент.

**Апайчева, Л.А.**
**А76** Кратные интегралы : учебное пособие / Л.А. Апайчева, Л.Е. Шувалова. - Нижнекамск : Нижнекамский химико-технологический институт (филиал) ФГБОУ ВПО «КНИТУ», 2014. - 72 с.

Содержит основные понятия о кратных интегралах и методах их решения. Показаны приложения кратных интегралов в механике и геометрии. Изложение материала сопровождается большим количеством типовых примеров с решениями. Приведены варианты заданий для самостоятельной работы студентов.

Предназначено для формирования профессиональных компетенций при подготовке бакалавров технических направлений вузов.

Подготовлено на кафедре математики НХТИ (филиал) ФГБОУ ВПО «КНИТУ».

**УДК 517.3**

©Апайчева Л.А., Шувалова Л.Е., 2014
©Нижнекамский химико-технологический институт (филиал) ФГБОУ ВПО «КНИТУ», 2014

# Оглавление

# Глава I
# ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

Пусть функция $f(x,y)=f(M)$ определена и непрерывна на замкнутой ограниченной области *D* плоскости *Oxy*. Разобьем область *D* на *n* подобластей $\Delta\sigma_\kappa$, площади которых также обозначим через $\Delta\sigma_\kappa$, а диаметры – через $d_k$: $S=\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta\sigma_\kappa$.

Возьмем произвольные точки $\mathrm{M}_k\in\Delta\sigma_k$, $k=1,2...,n$ (*рис.1*).

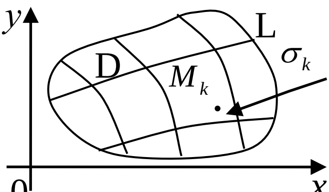


*Рис. 1*

Выражение

$$I_n=\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta\sigma_k$$

называется интегральной суммой для функции $f(M)$ по области *D*.

Если существует предел $\lim\limits_{\max d_k\to 0} I_n$ и этот предел не зависит ни от способа разбиения области *D* на элементарные подобласти $\Delta\sigma_k$, ни от способа выбора точек $M_k\in\Delta\sigma_k$, то он называется двойным интегралом от функции $f(x,y)$ по области *D* и обозначается $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$.

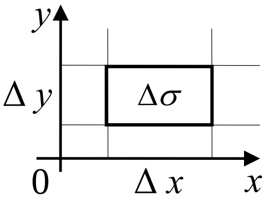


*Рис. 2*

В декартовой системе координат область $D$ удобно разбивать на области $\Delta\sigma_k$ прямыми, параллельными осям координат (*рис.2*).

Следовательно, $d\sigma = dxdy$ и

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta\sigma_k . \quad (1)$$

Основные свойства двойного интеграла:

1. $\iint\limits_D Cf(x,y)dxdy = C\iint\limits_D f(x,y)dxdy,\ C - const$ .

2. $$\iint\limits_D f1(f,x) \pm f2(x,y))dxdy =$$
$$= \iint\limits_D f1(x,y)dxdy = \iint\limits_D f2(x,y)dxdy.$$

3. Если область $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, то
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

# § 1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Вычисление двойного интеграла сводится к последовательному вычислению двух определенных интегралов.

1) **Двойной интеграл по прямоугольнику**

Пусть область $D$ – замкнутый прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, то есть ограничена прямыми $x=a$, $x=b$ $(a \le x \le b)$, $y=c$, $y=d$ $(c \le y \le d)$ (*рис.3*), то двойной интеграл вычисляется по одной из формул:

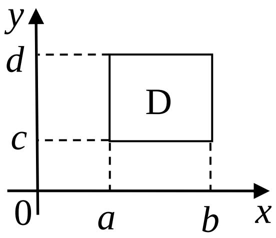



*Рис. 3*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy, \qquad (2)$$

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx. \qquad (3)$$

Интегралы, стоящие в правых частях этих формул, называются повторными или двукратными.

В формуле (2) интеграл $\int\limits_c^d f(x,y)dy$ называется внутренним.

Вычисление двукратного интеграла следует начинать с вычисления внутреннего интеграла. Он вычисляется в предположении, что переменная $x$ сохраняет постоянное значение. Затем берется внешний интеграл, то есть результат первого интегрирования интегрируем по переменной $x$ в пределах от $a$ до $b$.

Если же для вычисления двойного интеграла берется формула (3), то первое (внутреннее) интегрирование берется по переменной $x$ при постоянном $y$, а второе интегрирование – по переменной $y$.

Если $f(x,y)$ непрерывна в области $D$, то

$$\int\limits_c^b dx\int\limits_c^d f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)dx.$$

<u>Пример 1.</u> Вычислить $\int\limits_1^2 dx\int\limits_0^1 \frac{dy}{(x+2y)^3}$

◄ Сначала вычислим внутренний интеграл:

$$\int_0^1 \frac{dy}{(x+2y)^3} = \frac{1}{2}\int_0^1 (x+2y)^{-3} d_y(x+2y) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x+2y)^{-2}}{-2}\Bigg|_{y=0}^{y=1} =$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\left( \quad (x+2)^{-2} - x^{-2} \quad \right) = -\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{(x+2y)^2} - \frac{1}{x^2}\right).$$

Вычислим внешний интеграл:

$$-\frac{1}{4}\int_1^2\left(\frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{x^2}\right)dx = -\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{(x+2)} + \frac{1}{x}\right)\Bigg|_{x=1}^{x=2} =$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1\right) = \frac{5}{48} \blacktriangleright$$

<u>Пример 2.</u> Найти двойной интеграл от функции $z = x + 3y^2$ по области $D:\{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$.

$$\blacktriangleleft \iint_D (x+3y^2)dxdy = \int_0^1 dy \int_0^1 (x+3y^2)dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + 3y^2 x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1\left(\frac{1}{2} + 3y^2\right)dy = \left(\frac{1}{2}y + y^3\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{2}$$

.

Вычислим интеграл вторым способом, изменив порядок интегрирования

$$\iint\limits_D \left(x+3y^2\right)dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1\left(x+3y^2\right)dy=\int\limits_0^1\left(xy+y^3\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1}dx=$$

$$=\int\limits_0^1 (x+1)dx=\frac{(x+1)^2}{3}\Bigg|_0^1=\frac{3}{2}. \blacktriangleright$$

**2) Двойной интеграл по произвольной плоской области.**

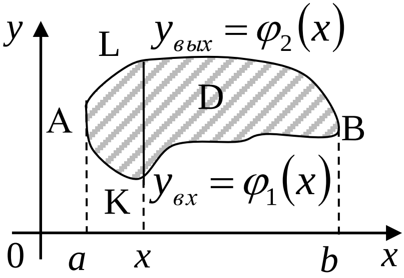



*Рис. 4*

1) Если область интегрирования $D$ ограничена кривой, которую каждая прямая, параллельная оси $Oy$ и проходящая через внутреннюю точку $D$, пересекает не более чем в двух точках (*рис.4*), то двойной интеграл, распространенный на эту область, вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\ . \qquad (4)$$

Пределы интегрирования в двукратном интеграле в правой части формулы находятся так:

а) область $D$ проектируется на ось $Ox$. Этим определяется отрезок $[a,b]$, на котором в области $D$ изменяется переменная $x$: $a \le x \le b$. Числа $a$ и $b$ – абсциссы крайних точек (слева и справа) области $D$;

б) точки $A$ и $B$ с абсциссами $a$ и $b$ делят контур на нижнюю и верхнюю части. Пусть эти части определяются соответственно уравнениями $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$. Очевидно, что $y$ изменяется от $\varphi_1(x)$ до $\varphi_2(x)$, то есть $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$; причем предполагается, что $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны на $[a,b]$ и каждая из них задана одним аналитическим выражением.

Внутренний интеграл в формуле (4) отличается от внутреннего интеграла (2) тем, что здесь пределы интегрирования не постоянные величины $c$ и $d$, а функции переменной $x$.

Внутренний интеграл в формуле (4) вычисляется в предположении, что $x$ сохраняет постоянные значения.

2) Если область $D$ ограничена кривой, которую любая прямая параллельная оси $Ox$ и проходящая через внутреннюю точку $D$, пересекает не более чем в двух точках (*рис.5*), то двойной интеграл вычисляется по формуле (5)

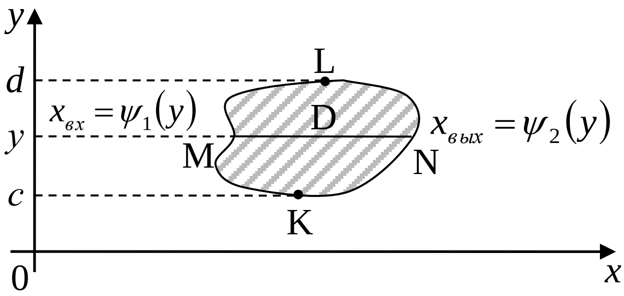



*Рис. 5*

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\,. \quad (5)$$

а) Чтобы найти пределы во внешнем интеграле, область *D* проектируется на ось *Oy*. Так определяется отрезок $[c,d]$. Числа *c* и *d* будут соответственно нижними и верхними пределами во внешнем интеграле.

б) Точки *K* и *L* разбивают границу области на две кривые *KML* и *KNL,* уравнения которых $x=\psi_1(y)$ и $x=\psi_2(y)$, причем предполагается, что функции $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ на отрезке $[c,d]$ непрерывны и каждая из них задана одним аналитическим выражением. Поэтому *x* изменяется от $\psi_1(y)$ до $\psi_2(y)$, то есть $\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)$.

Внутренний интеграл вычисляется по переменной *x* в предположении, что *y* сохраняет постоянное значение. В результате вычисления внутреннего интеграла $\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$ получится функция переменной *y*, а повторное интегрирование дает число.

## Замечания

а) Внешние пределы в двукратном интеграле всегда постоянны.

б) Пределы внутреннего интеграла в общем случае являются переменными и зависят от той переменной, по которой вычисляется внешний интеграл.

в) Все пределы интегрирования будут постоянными только в том случае, когда область интегрирования представляет собой прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат.

В случае 1), если окажется, что нижняя или верхняя граница состоит из нескольких участков, имеющих различные уравнения, то область следует разбить прямыми, параллельными оси *Oy*, на части, в любой из которых нижняя и верхняя граница определяются одним уравнением.

Так для области, изображенной на *рис.6*, вычисление двойного интеграла приводит к вычислению двух повторных интегралов:

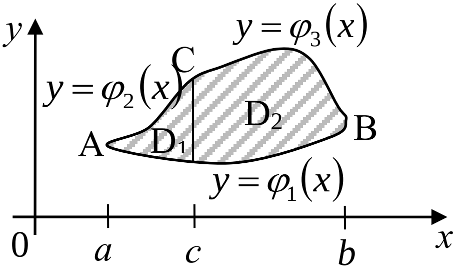



*Рис. 6*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy =$$

$$= \int_a^c dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy + \int_c^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_3(x)} f(x,y)dy .$$

В случае 2), если левая или правая границы будут состоять из нескольких участков с различными уравнениями, то область *D* следует разбить прямыми параллельными оси *Ox* на части, где левая и правая границы определяются не разными аналитическими выражениями.

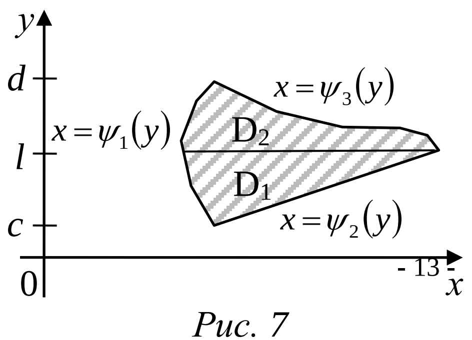



*Рис. 7*

Двойной интеграл по области *D*, изображенной на *рис.7*, сводится к двум повторным интегралам:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy =$$

$$= \int\limits_{c}^{l} dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx + \int\limits_{l}^{d} dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_3(y)} f(x,y)dx .$$

<u>Пример 3.</u> Представить двойной интеграл $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$ в виде повторного интеграла двумя способами (с внешним интегрированием по *x* и внешним интегрированием по *y*), если область *D* задана указанными линиями $D: y=e^x, x=0, x=2, y=0$ (*рис.8*).

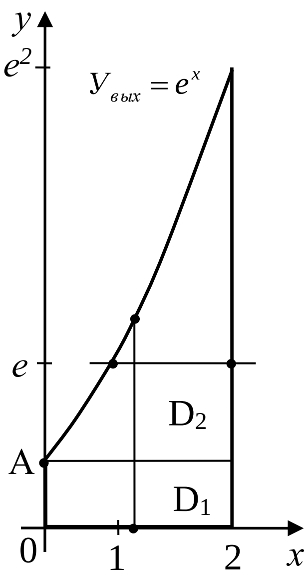


*Рис. 8*

◄ а) Если внешнее интегрирование проводится по переменной *x*, то в области *D*: $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le e^x$.

б) Если внешнее интегрирование проводится по переменной *y*, то область *D* следует разбить на две области $D_1$ и $D_2$ прямой, проходящей через точку À$(0,1)$ параллельно оси $Ox$, то есть прямой ó$=1$. Тогда в области $D_1$: $0 \le y \le 1, 0 \le x \le 2$.

Далее рассмотрим область $D_2$. Из уравнения $y = e^x$ находим $x = \ln y$. Имеем $1 \le y \le e^2, \ln y \le x \le 2$.

Итак, получаем

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{e^x} f(x,y)dy =$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^2 f(x,y)dx + \int_1^{e^2} dy \int_{\ln y}^2 f(x,y)dx \qquad \blacktriangleright$$

<u>Пример 4.</u> Вычислить $\iint_D xydxdy$, если область $D$ ограничена

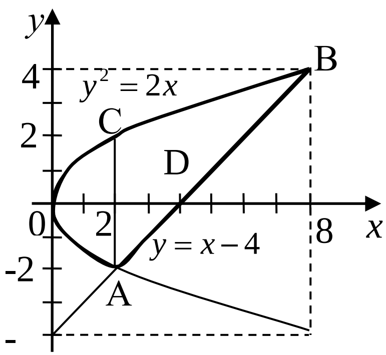



*Рис. 9*

линиями $y = x - 4$ и $y^2 = 2x$ (*рис.9*). ◄ Находим точки пересечения прямой и параболы, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ y = x - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-4)^2 = 2x \\ y = x - 4 \end{cases}$$

или $\begin{cases} x^2 - 10x + 16 = 0 \\ y = x - 4 \end{cases}$

Отсюда находим точки пересечения $A(2,-2)$, $B(8,4)$.

Область $D$ определяется системой неравенств:

$$\begin{cases} -2 \le y \le 4, \\ \dfrac{y^2}{2} \le x \le y + 4, \end{cases}$$

Вычислим двойной интеграл по формуле (5):

$$I = \int_{-2}^{4} y dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{y+4} x dx = \int_{-2}^{4} y \left( \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_{\frac{y^2}{2}}^{y+4} dy =$$

$$= \int_{-2}^{4} \left( \frac{(y+4)^2}{2} - \frac{y^4}{8} \right) y dy = \frac{1}{2} \int_{-2}^{4} \left( y^2 + 8y + 16 - \frac{y^4}{4} \right) y dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^{4} \left( y^3 + 8y^2 + 16y - \frac{y^5}{4} \right) dy =$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{y^4}{4} + \frac{8y^3}{3} + 8y^2 - \frac{y^6}{24} \right) \Bigg|_{-2}^{4} = 90.$$

Если интегрировать в другом порядке – сначала по $y$, а затем по $x$, то, как было сказано выше, необходимо разбить область интегрирования прямой $AC$, параллельной оси $Oy$, на две части, так как здесь нижняя граница состоит из двух участков, которые имеют различные уравнения.

$y=-\sqrt{2x}(OA)$ и $y=x-4(AB)$

$$I=\iint\limits_{D_1} xydxdy+\iint\limits_{D_2} xydxdy=\int\limits_0^2 xdx\int\limits_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} ydy+\int\limits_2^8 xdx\int\limits_{x-4}^{\sqrt{2x}} ydy=$$

$$=\int\limits_0^2 x\left(\frac{y^2}{2}\Bigg|_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}}\right)dx+\int\limits_2^8\left(\frac{y^2}{2}\Bigg|_{x-4}^{\sqrt{2x}}\right)xdx=$$

$$0+\frac{1}{2}\int\limits_2^8\left(2x-(x-4)^2\right)xdx=\frac{1}{2}\int\limits_2^8\left(10x^2-x^3-16x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{10}{3}x^3-\frac{x^4}{4}-8x^2\right)\Bigg|_2^8=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{10}{3}\cdot 8^3-\frac{8^4}{4}-512-\frac{10}{3}\cdot 2^3+\frac{2^4}{4}+32\right)=90. \blacktriangleright$$

Очевидно, что первый способ вычисления целесообразнее второго.

<u>Пример 5.</u> Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $I=\int\limits_0^{\sqrt{2}} dy\int\limits_y^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx.$

◀ Область интегрирования задается системой неравенств

$$\begin{cases} 0\le y\le\sqrt{2}, \\ y\le x\le\sqrt{4-y^2}. \end{cases}$$

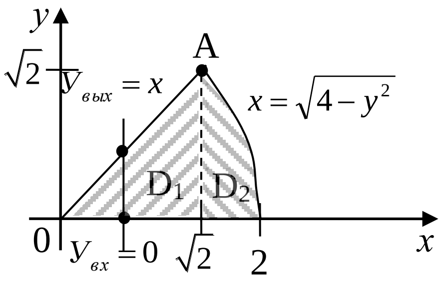



*Рис. 10*

Строим область интегрирования $D$ по пределам интегрирования:

$x = y$, $x = \sqrt{4-y^2}$,

$y = 0$, $y = \sqrt{2}$

(*рис.10*).

Окружность $x = \sqrt{4-y^2}$ и прямая $x = y$ пересекаются в точке $A\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$. При изменении порядка интегрирования нужно спроектировать область интегрирования $D$ на ось $Ox$. Область $D$ прямой $x = \sqrt{2}$ разбивается на две области $D_1$ и $D_2$. В области $D_1$: $0 \le x \le \sqrt{2},$ $y_{вх} = 0$, $y_{вых} = x$ в области $D_2$: $\sqrt{2 \le x \le 2}$, $y_{вх} = 0$, $y_{вых} = \sqrt{4-x^2}$. Поэтому имеем

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^x f(x,y)dy + \int_{\sqrt{2}}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy. \blacktriangleright$$

# § 2. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ
# В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Для упрощения вычислений в двойных интегралах часто используется метод подстановки, аналогично, как при вычислении определенного интеграла. Наиболее важным для практических приложений частным случаем замены переменных является замена декартовых координат $x$ и $y$ полярными координатами $r$ и $\varphi$:

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi\,. \tag{6}$$

Элемент площади в формуле (1) в полярных координатах имеет вид

$$dxdy = rdrd\varphi\,. \tag{7}$$

Формула перехода от интеграла (1) в декартовых координатах к интегралу в полярных интегралах будет иметь вид

$$\iint\limits_{D} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi \tag{8}$$

$D$ – область в декартовой системе координат,

$D^*$ - соответствующая область в полярной системе координат.

## Правила расстановки пределов интегрирования

1.Пусть полюс не содержится внутри области

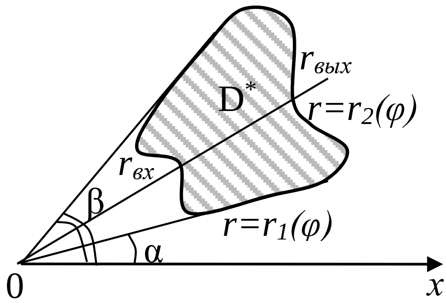



*Рис. 11*

интегрирования $D^*$, заключенной между лучами $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$, где $\alpha<\beta$, и кривыми $r=r_1(\varphi)$ и $r=r_2(\varphi)$, где $r_1(\varphi)\le r_2(\varphi)$.

Луч, исходящий из полюса, пересекает ее границу не более чем в двух точках (такая область $D^*$ называется правильной) (*рис.11*). Тогда

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_{\alpha}^{\beta}d\varphi\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rdr}. \qquad (9)$$

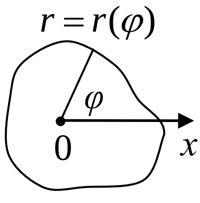



*Рис. 12*

2. Пусть полюс содержится внутри области интегрирования, ограниченной кривой, уравнение которой в полярной системе координат: $r=r(\varphi)$ (*рис.12*).

Тогда

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr}. \quad (10)$$

3. Пусть областью интегрирования является круг с центром в

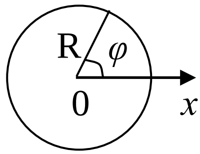



*Рис. 13*

начале координат: $x^2 + y^2 \le R^2$. В полярной системе координат уравнение окружности имеет вид: $r = R$ (*рис.13*).

Тогда

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr}. \quad (11)$$

*<u>Замечание.</u> Двойной интеграл удобно вычислять в полярных координатах, если областью интегрирования служит круг.*

<u>Пример 6.</u> Вычислить $\iint\limits_D \sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy$, где область D

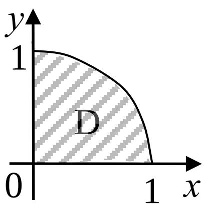



*Рис. 14*

определена неравенствами $x^2 + y^2 \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ (*рис.14*).

◄ Интеграл вычислим в полярных координатах.

$$\iint\limits_{D}\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy=\left|\begin{array}{ll}\text{Применимформулы}(6)-(8) & \\ x=r\cos\varphi; & dxdy=rdrd\varphi \\ y=r\sin\varphi; & 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\end{array}\right|=$$

$$=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{0}^{1}\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}rdr=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{0}^{1}\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\cdot\frac{\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{1-r^2}}rdr=$$

$$=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_{0}^{1}\frac{\left(r-r^3\right)dr}{\sqrt{1-r^4}}\right)d\varphi=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_{0}^{1}\frac{rdr}{\sqrt{1-\left(r^2\right)^2}}-\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{1}\frac{4r^3dr}{\sqrt{1-r^4}}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}\frac{d\left(r^2\right)}{\sqrt{1-\left(r^2\right)^2}}+\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{1}\frac{d\left(1-r^4\right)}{\sqrt{1-r^4}}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\arcsin r^2+\frac{1}{2}\sqrt{1-r^4}\right)\Bigg|_{0}^{1}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\arcsin 1-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right).\blacktriangleright$$

Пример 7. Вычислить $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$, $D: x^2+y^2 \le 4x$.

◄ Приведем уравнение $x^2+y^2=4x$ к каноническому виду: $(x-2)^2+y^2=4$. Это уравнение окружности с центром в точке C(2;0), радиус R=2 (*рис.15*). Уравнение данной кривой в полярной системе координат примет вид: $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 4r\cos\varphi$, $r^2 = 4r\cos\varphi$, то есть $r = 4\cos\varphi$. Вычислим интеграл в полярной системе координат, используя формулы (6), (7).

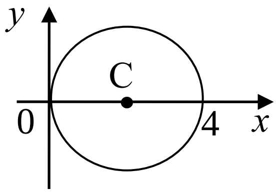



*Рис. 15*

$$I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{4\cos\varphi} \left(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi\right) r dr =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{4\cos\varphi} r^3 dr = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^{4\cos\varphi} \right) d\varphi = 64 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi =$$

$$= 64 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\cos 2\varphi)^2}{4} d\varphi =$$

$$= 16 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi\right) d\varphi =$$

$$= 16 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right) d\varphi =$$

$$= 16\left(\frac{3}{2}\varphi + \sin 2\varphi + \frac{1}{8}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 16\left(\frac{3}{4}\pi + \sin\pi + \frac{1}{8}\sin 2\pi + \frac{3}{4}\pi + \sin\pi + \frac{1}{8}\sin 2\pi\right) =$$

$$= 24\pi \,. \blacktriangleright$$

## §3. ПРИЛОЖЕНИЯ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Таблица 1.

**Приложения двойных интегралов в геометрии**

| № | Наименование | Общая формула | Прямоугольные координаты | Полярные координаты |
|---|---|---|---|---|
| **1** | Площадь плоской фигуры $D$ в плоскости $Oxy$ | $S=\iint\limits_D d\sigma$ | $S=\iint\limits_D dxdy$ | $S=\iint\limits_{D^*} rdrd\varphi$ |
| **2** | Объем цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z=f(x,y)$, снизу областью $D$, расположенной в плоскости $XOY$. | $V=\iint\limits_D zd\sigma$ | $V=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ | $V=\iint\limits_{D^*} f(r,\varphi)rdrd\varphi$ |
| **3** | Площадь части поверхности, заданной уравнением $z=f(x,y)$, проектирующейся в область $D$ плоскости $Oxy$ | | $\sigma=\iint\limits_D \sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}\,dxdy$ | |

**Приложение двойных интегралов в механике**

| № | Наименование | Общая формула | Прямоугольные координаты | Полярные координаты |
|---|---|---|---|---|
| **4** | Масса тонкой плоской пластинки с поверхностной плотностью $\rho=\rho(x,y)$. | $m=\iint\limits_D \rho d\sigma$ | $m=\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy$ | $m=\iint\limits_{D^*} \rho(r,\varphi)rdrd\varphi$ |
| **5** | Статические моменты пластинки $D$ относительно осей $Ox$ и $Oy$ | $S_x=\iint\limits_D yp d\sigma, S_y=\iint\limits_D xp d\sigma$ | $S_x=\iint\limits_D yp(x,y)dxdy,\ S_y=\iint\limits_D xp(x,y)dxdy$ | |
| **6** | Координаты центра тяжести пластинки $D$ с поверхностной плотностью $\rho=\rho(x,y)$, $m$ – масса пластинки | $x_c=\dfrac{S_y}{m}, y_c=\dfrac{S_x}{m}$ | $x_c=\dfrac{\iint\limits_D xp(x,y)dxdy}{\iint\limits_D p(x,y)dxdy}, y_c=\dfrac{\iint\limits_D yp(x,y)dxdy}{\iint\limits_D p(x,y)dxdy}$ | |
| **7** | Координаты центра тяжести материальной однородной пластинки, $\rho=const$ | $x_c=\dfrac{\iint\limits_D xd\sigma}{S}, y_c=\dfrac{\iint\limits_D yd\sigma}{S}$ | $x_c=\dfrac{\iint\limits_D xdxdy}{S}, y_c=\dfrac{\iint\limits_D ydxdy}{S}$ | $x_c=\dfrac{\iint\limits_{D^*} r^2\cos\varphi drd\varphi}{S}, y_c=\dfrac{\iint\limits_{D^*} r^2\sin\varphi drd\varphi}{S}$ |

Область $D$ - проекция на плоскость XOY. В каждую точку области $D$ проектируется только одна точка поверхности

Пример 8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{5}{x}$ и $y=4e^x$, $y=2$, $y=5$ (*рис.16*).

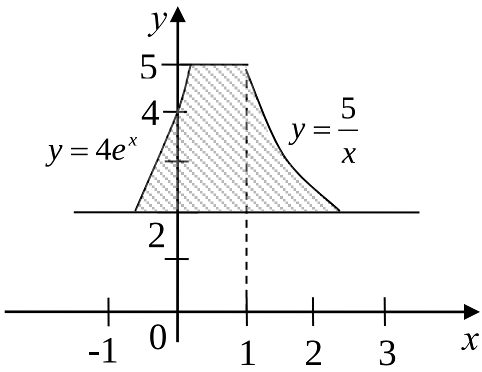



*Рис. 16*

◄ По формуле 1 таблицы 1 находим площадь $S=\iint\limits_D dxdy$.

Для вычисления двойного интеграла удобнее сначала интегрировать по $x$, затем по $y$.

Воспользуемся формулой (5). Из уравнения $y=4e^x$ находим $x_{вх}=\ln\frac{y}{4}$, а из уравнения $y=\frac{5}{x}$ выводим $x_{вых}=\frac{5}{y}$.

Поэтому

$$S=\int\limits_2^5 dy\int\limits_{\ln\frac{y}{4}}^{\frac{5}{4}} dx=\int\limits_2^5\left(x\Big|_{\ln\frac{y}{4}}^{\frac{5}{y}}\right)dy=\int\limits_2^5\left(\frac{5}{y}-\ln\frac{y}{4}\right)dy=$$

$$=5\ln|y|\,\Big|_2^5-I_2=5\ln\frac{5}{2}-I_2.$$

Интеграл $I_2$ вычислим по частям:

$$I_2 = \int_2^5 \ln\frac{y}{4}dy \left| \begin{array}{l} u = \ln\frac{y}{4}, du = \frac{dy}{y}, \\ dv = dy, v = y. \end{array} \right| = y\ln\frac{y}{4}\Big|_2^5 - \int_2^5 y\cdot\frac{1}{y}dy =$$

$$= 5\ln\frac{5}{4} - 2\ln\frac{1}{2} - y\Big|_2^5 = 5\ln\frac{5}{4} + \ln 4 - 3.$$

Таким образом, имеем

$$S = 5\ln\frac{5}{2} - 5\ln\frac{5}{4} - \ln 4 + 3 = (5\ln 2 - \ln 4 + 3) =$$

$\ln 8 + 3$*кв.ед.*. ►

Пример 9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 2y$ (*рис.17*).

◄ Канонические уравнения данных линий имеют вид: $(x-1)^2 = 2x$, $x^2 + (y-1)^2 = 1$. Это окружности радиуса 1 с центрами в точках $(1,0)$ и $(0,1)$ соответственно. Запишем уравнения окружностей в полярных координатах, полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

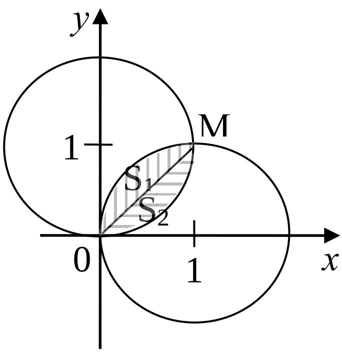


*Рис. 17*

Уравнения принимают вид соответственно $r = 2\cos\varphi$, $r = 2\sin\varphi$.

Совместно решая эти уравнения, находим

$$2\cos\varphi = 2\sin\varphi \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Луч $OM\left(\varphi = \frac{\pi}{4}\right)$ делит область $D$ на две равные части $S_1$ и $S_2$. Поэтому

$$S = 2S_2 = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} rdr = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \left. \frac{r^2}{2} \right|_0^{2\sin\varphi} \right) d\varphi =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\varphi d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = 2\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \text{кв.ед}$$ ▶

<u>Пример 10.</u> Найти массу, статистические моменты и координаты центра тяжести равнобедренного прямоугольного треугольника (*рис.18*). Поверхностная

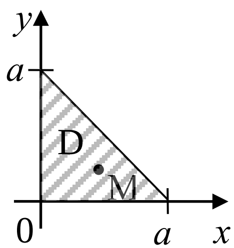



*Рис. 18*

плотность в каждой точке пластинки пропорциональна сумме координат точки.

◄ Пусть $M$ – произвольная точка пластинки $D$. По условию $p=k(x+y)$, где $k$ – коэффициент пропорциональности. Уравнение гипотенузы: $x+y=a$. По формуле 4 таблицы 1 находим массу пластинки:

$$m=\iint\limits_D k(x+y)dxdy=k\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{a-x}(x+y)dy=$$

$$=k\int\limits_0^a\left(xy+\frac{y^2}{2}\bigg|_0^{a-x}\right)dx=k\int\limits_0^a\left(x(a-x)+\frac{1}{2}(a-x)^2\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}k\int\limits_0^a\left(a^2-x^2\right)dx=\frac{1}{2}k\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\bigg|_0^a=\frac{1}{3}ka^3.$$

Находим статистические моменты пластинки. По формулам 5 таблицы 1 получаем:

$$S_x = \iint\limits_D yk(x+y)dxdy = k\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{a-x}(xy+y^2)dy =$$

$$= k\int\limits_0^a \left( \frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{3} \Bigg|_0^{a-x} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}k\int\limits_0^a \left(a^2x - 2ax^2 + x^3\right)dx + \frac{k}{3}\int\limits_0^a (a-x)^3\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}k\left( \frac{a^2x^2}{2} - \frac{2ax^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right)\Bigg|_0^a - \frac{k}{3}\cdot\frac{(a-x)^4}{4}\Bigg|_0^a = \frac{ka^4}{8}.$$

$$S_y = \iint\limits_D xk(x+y)dxdy = k\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{a-x}\left(x^2+xy\right)dy = \frac{ka^4}{8}.$$

Используя формулы 6 таблицы 1, находим координаты центра тяжести пластинки

$$x_C = \frac{S_y}{m} = \frac{ka^4}{8} : \frac{1}{3}ka^3 = \frac{3}{8}a; \quad y_C = \frac{S_x}{m} = \frac{3}{8}a.$$

Пример 11. Найти площадь поверхности, вырезанной цилиндром $x^2+y^2=4$ из сферы $x^2+y^2+z^2=9$ (*рис.19*).

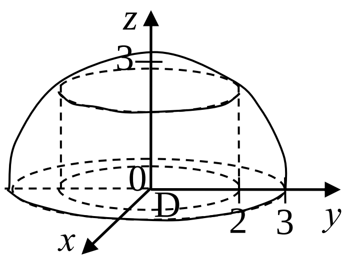



*Рис. 19*

◄ В силу симметрии поверхности относительно координатных плоскостей вычислим 1/8 часть ее площади. Тогда по формуле 3 таблицы 1 находим

$$\frac{1}{8}\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(z'_x\right)^2 + \left(z'_y\right)^2}\,dxdy,$$

где $D$ – четверть круга, ограниченного окружностью

$x^2 + y^2 = 4$.

Уравнение поверхности разрешим относительно $z$:

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2},$$

$$z'_x = -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}, \qquad z'_y = -\frac{y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{8}\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{9 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{9 - x^2 - y^2}}\,dxdy =$$

$$= \iint_D \frac{3dxdy}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} = \left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ dxdy = rdrd\varphi. \end{array} \right| =$$

$$=3\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 \frac{rdrd\varphi}{\sqrt{9-r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi}} = -\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 \frac{d(9-r^2)}{\sqrt{9-r^2}} =$$

$$=-\frac{3}{2}\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot 2\sqrt{9-r^2}\Big|_0^2 = \frac{3\left(3-\sqrt{5}\right)}{2}\pi;$$

$\sigma = 12\left(3-\sqrt{5}\right)\pi$ кв.ед.►

### § 4. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

**<u>Задача 1.</u>** Представить двойной интеграл $S = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в виде повторного интеграла при разных порядках интегрирования по $x$ и по $y$, если известно, что область $D$ ограничена линиями:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | а) $D: y = x, x = 0,$ <br> $x + y = 3$ | б) $D: (x-2)^2 + y^2 = 1, x \geq 0,$ <br> $y \leq 0, y \geq -1$ |
| 2. | а) $D: y = 2x, y = 0,$ <br> $2x + y - 4 = 0$ | б) $D: y = \log_2 x, x \geq 0,$ <br> $y \geq 0, y \leq 1$ |
| 3. | а) $D: y = -3x + 1, x = 0,$ <br> $-2x + y - 6 = 0$ | б) $D: -4x + 2y + 5 = 0, x^2 = 2y$ |
| 4. | а) $D: y = 2x + 1, y = 0,$ <br> $x + 4y + 4 = 0$ | б) $D: y = 3^x, 2x + y - 5 = 0, x = 0$ |
| 5. | а) $D: y = -4x + 1, x = 0,$ | б) $D: y = \sqrt{4-x^2}, y = \sqrt{3x}, x \geq 0$ |

| | | |
|---|---|---|
| | $-5x+2y+10=0$ | |
| 6. | $a)\ D: y=-3x+1, y=0,$ <br> $x-2y-6=0$ | б) $D:(x-4)^2+y^2=1, x\geq 0,$ <br> $y\geq 0, y\leq 1$ |
| 7. | $a)\ D: y=3x+1, x=0,$ <br> $2x+4y+8=0$ | б) $D: y=\lg x, x\geq 0, y\geq 0, y\leq 1$ |
| 8. | $a)\ D: y=-2x, y=0,$ <br> $2x-5y+10=0$ | б) $D: 2x+3y-2=0, y^2=-2x$ |
| 9. | $a)\ D: y=3x, x=0,$ <br> $x+y-4=0$ | б) $D: y=2^{-x}, 3x-y+5=0,$ <br> $x\leq 0$ |
| 10. | $a)\ D: y=x, y=0,$ <br> $3x+2y-6=0$ | б) $D: y=\sqrt{4-x^2}, y=\sqrt{3x}, y\geq 0$ |
| 11. | $a)\ D: y=-2x+1, x=0$ <br> $4x-y-8=0$ | б) $D: x^2+(x-2)^2=1, x\geq 0,$ <br> $y\geq 0, y\leq 1$ |
| 12. | $a)\ D: y=3x+1, y=0,$ <br> $2x+3y+6=0$ | б) $D: y=\ln x, x\geq 0, y\geq 1, y\leq 0$ |
| 13. | $a)\ D: -4x+2, y=0,$ <br> $-3x+y+6=0$ | б) $D: 2y-5x+4=0, x^2=2y$ |
| 14. | $a)\ D: -x+3, y=0,$ <br> $-2x+y-8=0$ | б) $D: y=2^{-x}, 4x-y-6=0$ <br> $x\geq 0$ |
| 15. | $a)\ D: y=5x+1, x=0$ <br> $x+2y+4=0$ | б) $D: y=\sqrt{4-x^2}, y=-\sqrt{3x},$ <br> $x\geq 0$ |
| 16. | $a)\ D: y=-x+2, y=0$ <br> $x-2y-6=0$ | б) $D: x^2+(y+4)^2=1, x\geq -1,$ <br> $x\leq 0, y\leq 0$ |
| 17. | $a)\ D: y=-3x-1, y=0$ <br> $2x-5y-10=0$ | б) $D: y=\log_{\frac{1}{2}} x, x\geq 0,$ <br> $y\leq 0, y\geq -1$ |
| 18. | $a)\ D: y=2x, x=0$ <br> $x+y=1$ | б) $D: y^2=2x, 5y-2x-4=0$ |

| | | |
|---|---|---|
| 19. | $a)\ D: y = x-4, y=0$<br>$2x+3y-6=0$ | б) $D: y=3^{-x}, -2x+y-5=0,$<br>$x\le 0$ |
| 20. | $a)\ D: y = -4x+1, x=0$<br>$2x-y-4=0$ | $D: y=-\sqrt{4-x^2}, y=-\sqrt{3x},$<br>$y\le 0$ |
| 21. | $a)\ D: y = 2x-1, y=0$<br>$x+3y+6=0$ | б) $D: x^2+(y-3)^2=1, y\ge 0,$<br>$y\ge -1, x\le 0$ |
| 22. | $a)\ D: y = -3x+2, x=0$<br>$-x+2y+4=0$ | б) $D: y=\log_{\frac{1}{4}} x, x\ge 0,$<br>$y\ge 0, y\le \frac{1}{4}$ |
| 23. | $a)\ D: y = -5x+1, y=0$<br>$2x-y+10=0$ | $D: y=3^{-x}, 4x-y-7=0$<br>$x\ge 0$ |
| 24. | $a)\ D: y = 3x+3, x=0$<br>$2x+y+6=0$ | б) $D: y=\log_3 x, x+3y-6=0,$<br>$y\ge 0$ |
| 25. | $a)\ D: y = -2x-1, y=0$<br>$-3x+y-6=0$ | $D: y=-\sqrt{4-x^2}, y=-\sqrt{3x},$<br>$y\ge 0$ |
| 26. | $a)\ D: y = 4x, x=0$<br>$2x+y=4$ | б) $D: x^2+(y+2)^2=1, x\ge 0,$<br>$x\le 1, y\le 0$ |
| 27. | $a)\ D: y = 2x-6, y=0$<br>$x+y-5=0$ | б) $D: y=\lg x, x\ge 0, y\le 0, y\ge -1$ |
| 28. | $a)\ D: y = -x+2, x=0$<br>$3x-y+6=0$ | б) $D: 4x+3y-2=0, y^2=-4x$ |
| 29. | $a)\ D: y = 3x-1, y=0$<br>$2x+5y+10=0$ | б) $D: (x+3)^2+y^2=1, x\le 0,$<br>$y\ge -1, y\le 0$ |
| 30. | $a)\ D: y = -5x+1, x=0$<br>$-x+3y+6=0$ | б) $D: y=-\sqrt{4-x^2}, y=-\sqrt{3x},$<br>$x\le 0$ |

**Задача 2.** Изменить порядок интегрирования.

| | |
|---|---|
| 1. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{3^y}^{4-y} f(x,y)dx$; | 2. $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{4^{-x}}^{x+5} f(x,y)dy$; |
| 3. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_{\frac{-2}{\pi}x}^{\sin x} f(x,y)dy$; | 4. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_{\cos x}^{\frac{2}{\pi}x+1} f(x,y)dy$; |
| 5. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{arctgx}^{-\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{2}} f(x,y)dy$; | 6. $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{3^{-y}}^{y+4} f(x,y)dx$; |
| 7. $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{e^{-x}}^{ex+2e} f(x,y)dy$; | 8. $\int\limits_{0}^{\pi} dx \int\limits_{x-\pi}^{\cos x} f(x,y)dy$; |
| 9. $\int dx \int\limits_{\pi x-\frac{3\pi}{4}}^{an} f(x,y)dy$; | 10. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2^y}^{3-y} f(x,y)dx$; |
| 11. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{3^x}^{-x+4} f(x,y)dy$; | 12. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{\arcsin x}^{-\frac{\pi}{2}x+\pi} f(x,y)dy$; |
| 13. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} dx \int\limits_{tgx}^{-\frac{4}{\pi}x+2} f(x,y)dy$; | 14. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} dx \int\limits_{-x-\frac{\pi}{2}}^{\cos x} f(x,y)dy$; |
| 15. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{2^x}^{-x+3} f(x,y)dy$; | 16. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{10^y}^{11-y} f(x,y)dx$; |

| | |
|---|---|
| 17. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\arccos x}^{x+\frac{\pi}{2}} f(x,y)dy$; | 18. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\pi x-\frac{3\pi}{4}}^{arcctgx} f(x,y)dy$; |
| 19. $\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{0} dx \int\limits_{\sin x}^{\frac{4}{\pi}x+1} f(x,y)dy$; | 20. $\int\limits_1^e dx \int\limits_{\ln x}^{-\frac{x}{e}+2} f(x,y)dy$; |
| 21. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x-\frac{1}{2}}^{2^{-x}} f(x,y)dy$; | 22. $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{\frac{-\pi}{2}x-\pi}^{\arcsin x} f(x,y)dy$; |
| 23. $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{arcctgx}^{\frac{\pi}{4}x+\pi} f(x,y)dy$; | 24. $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{\arcsin x}^{\frac{\pi}{2}x-\pi} f(x,y)dy$; |
| 25. $\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{0} dx \int\limits_{\cos x}^{x+\frac{\pi}{2}} f(x,y)dy$; | 26. $\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{0} dx \int\limits_{\frac{-2x}{\pi}-2}^{\sin x} f(x,y)dy$; |
| 27. $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{arctgx}^{\pi x+\frac{3\pi}{4}} f(x,y)dy$; | 28. $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{\arccos x}^{\pi x+2\pi} f(x,y)dy$; |
| 29. $\int\limits_1^5 dx \int\limits_{\log_5 x}^{-x+6} f(x,y)dy$; | 30. $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{\left(\frac{1}{2}\right)^y}^{y+3} f(x,y)dx$. |

**Задача 3.** Вычислить двойной интеграл по области D, ограниченной линиями.

1. $\iint\limits_D x(y-1)dxdy,\ D: y=\sqrt{x}, y=-x^3, x=1$.

2. $\iint\limits_D xydxdy,\ D: x=-y^2, y=\sqrt{x+2}, y=0.$

3. $\iint\limits_D y(x-2)dxdy,\ D: y=x^2, y=\sqrt{x-2}, y=0, y=1..$

4. $\iint\limits_D \sqrt[3]{xy}dxdy,\ D: y=\sqrt{1-x}, y=-x^2, x=0, x=1.$

5. $\iint\limits_D y(x+1)dxdy,\ D: y=x^2, y=-\sqrt{x}, x=1.$

6. $\iint\limits_D x^2ydxdy,\ D: y=-\sqrt{x+3}, x-y+3=0, x=0$ .

7. $\iint\limits_D \sqrt{x}(y+x)dxdy,\ D: y=-x^2-1, y=0, x=1, x=0.$

8. $\iint\limits_D (5-x)\cdot\sqrt[3]{y}dxdy,\ D: y=2x, y=x, x=1.$

9. $\iint\limits_D \sqrt{y}(x-y)dxdy,\ D: y=x, x+y-3=0, y=0.$

10. $\iint\limits_D (x+y)dxdy,\ D: y=\sqrt{1+x}, x-y+2=0, y=1, y=0.$

11. $\iint\limits_D yx^2dxdy,\ D: y=\sqrt{x}, y=x^3, x=-1.$

12. $\iint\limits_D \sqrt[3]{x}(y-x)dxdy,\ D: y=2x, y=-x, x=1.$

13. $\iint\limits_D \sqrt[3]{y}\cdot xdxdy,\ D: y=x, x+y-2=0, y=0.$

14. $\iint\limits_D x(\sqrt{y}-1)dxdy,\ D: y=\sqrt{x+1}, y=0, x=0.$

15. $\iint\limits_D (y-x)dxdy,\ D: y=-x^3, y=-\sqrt{-x}, x=-1.$

16. $\iint\limits_D x^2 ydxdy,\ D: y=x, y=-x^2, x=1.$

17. $\iint\limits_D \sqrt{y}(x+y)dxdy,\ D: y=3x, x+y=4, y=0.$

18. $\iint\limits_D (x+5)y^2 dxdy,\ D: y=x^2+1, x=1, x=0, y=1.$

19. $\iint\limits_D (2x+y)ydxdy,\ D: y=-x, y=2x, x=-1.$

20. $\iint\limits_D (x^2+y)dxdy,\ D: y=-\sqrt[3]{-x}, y=-x^2, x=-1.$

21. $\iint\limits_D y^2 xdxdy,\ D: y=\sqrt{2-x}, y=x^2, y=0, y=1.$

22. $\iint\limits_D x(y+3)dxdy,\ D: y=\sqrt{-x}, y=x, x=-1.$

23. $\iint\limits_D \sqrt[3]{y}(x^2-y)dxdy,\ D: y=x, x+y=4, y=0.$

24. $\iint\limits_D (y-3)x^2 dxdy,\ D: y=\sqrt{2-x}, y=x\ \ , y=0.$

25. $\iint\limits_D (y^2+x)dxdy,\ D: y=x^3+1, x=1, x=0, y=0.$

26. $\iint\limits_D x\sqrt{y}dxdy,\ D: y=x^2, y=-x, x=1.$

27. $\iint\limits_D (y+x^2)dxdy,\ D: y=-\sqrt{-x}, y=-x, x=-1.$

28. $\iint\limits_D (x+3y)xdxdy,\ D: y=\sqrt{-x}, y=1, x=0.$

29. $\iint\limits_D \sqrt{x}ydxdy,\ D: y=\sqrt{4-x}, x-2y-4=0, x=0.$

30. $\iint\limits_D \left(y-x^3\right)dxdy,\ D: y=-\sqrt{-x}, x=-1, y=0.$

**Задача 4.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

1. $(x-2)^2+y^2\geq 4,\ x^2+(y-2)^2\leq 4$.
2. $x^2+y^2-6x=0,\ y\leq 0,\ y\geq -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x,\ x^2+y^2-2x=0$.
3. $(x-1)^2+y^2\geq 1;\ x^2+(y+1)^2\leq 1$.
4. $x^2+y^2+4y=0,\ x\leq 0,\ x^2+y^2+2y=0,\ y\leq \sqrt{3}x$.
5. $(x+2)^2+y^2\geq 4,\ x^2+(y+2)^2\leq 4$.
6. $x^2+y^2+8x=0,\ y\geq 0,\ y\leq -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x,\ x^2+y^2+4x=0$.
7. $(x+3)^2+y^2\leq 9,\ x^2+(y-3)^2\geq 9$.
8. $x^2+y^2-6y=0,\ x\leq 0,\ x^2+y^2-4y=0,\ y\geq -\sqrt{3}x$.
9. $(x-4)^2+y^2\leq 16,\ x^2+(y-4)^2\geq 16$.
10. $x^2+y^2-4x=0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2-2x=0,\ y\leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$.
11. $(x-3)^2+y^2\leq 9,\ x^2+(y+3)^2\geq 9$.
12. $x^2+y^2+10y=0,\ x\geq 0,\ x^2+y^2+6y=0,\ y\leq -\sqrt{3}x$.
13. $(x+1)^2+y^2\leq 1,\ x^2+(y+1)^2\geq 1$.
14. $x^2+y^2+4x=0,\ y\leq 0,\ x^2+y^2+6x=0,\ y\geq \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$.
15. $(x+4)^2+y^2\geq 16,\ x^2+(y-4)^2\leq 16$.
16. $x^2+y^2-4x=0,\ y\leq 0,\ x^2+y^2-4x-5=0,\ y\geq -x,\ y\leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$.

17. $x^2+y^2\le 1,\ x^2+y^2-2x\le 0$.

18. $x^2+y^2-2y=0,\ x^2+y^2-2y-3=0,\ y\ge x,\ y\ge -\sqrt{3}x$.

19. $x^2+y^2\ge 4,\ x^2+y^2\le 9,\ y\ge\sqrt{3}x,\ y\ge -\frac{1}{\sqrt{3}}x$.

20. $x^2+y^2+4x=0,\ y\le -\frac{1}{\sqrt{3}}x,\ y\ge x,\ x^2+y^2+4x-12=0$.

21. $x^2+y^2\le 1,\ x^2+y^2-2y\le 0$.

22. $x^2+y^2+2y=0,\ y\le -\sqrt{3}x,\ y\le x,\ x^2+y^2+2y-8=0$.

23. $x^2+y^2\ge 1,\ x^2+y^2\le 4,\ y\le -\sqrt{3}x,\ y\ge \frac{1}{\sqrt{3}}x$.

24. $x^2+y^2-6x=0,\ y\ge -\frac{1}{\sqrt{3}},\ y\le\sqrt{3}x,\ x^2+y^2-6x-7=0$.

25. $x^2+y^2\le 1,\ x^2+y^2+2x\le 0$.

26. $x^2+y^2-8y=0,\ y\ge x,\ y\ge -\frac{1}{\sqrt{3}}x,\ x^2+y^2-8y+7=0$.

27. $x^2+y^2\ge 4,\ x^2+y^2\le 16,\ y\le\sqrt{3}x,\ y\le -x$.

28. $x^2+y^2+8x=0,\ y\le -\sqrt{3}x,\ y\ge \frac{1}{\sqrt{3}}x,\ x^2+y^2+8x-9=0$.

29. $x^2+y^2\le 1,\ x^2+y^2+2y\le 0$.

30. $x^2+y^2+6y=0,\ y\le -\frac{1}{\sqrt{3}}x,\ y\le x,\ x^2+y^2+6y-16=0$.

**Задача 5.** Вычислите интегралы, используя полярные координаты.

| | |
|---|---|
| 1. $\iint\limits_D x\,dxdy$, | 2. $\iint\limits_D \frac{xy}{x^2+y^2}\,dxdy$, |

| | |
|---|---|
| $D: 2x \le x^2 + y^2 \le 8x,\ y \ge -x$ | $D: x^2 + y^2 \le 4,\ y \le 0$ |
| 3. $\iint\limits_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dxdy$, <br> $D: x^2 + y^2 \le 9$ | 4. $\iint\limits_D \cos(x^2 + y^2)\,dxdy$, <br> $D: x^2 + y^2 \le 16$ |
| 5. $\iint\limits_D y\,dxdy$, <br> $D: 2y \le x^2 + y^2 \le 6y,\ y \ge x$ | 6. $\iint\limits_D \frac{xy}{x^2 + y^2}\,dxdy$, <br> $D: (x-2)^2 + y^2 \le 4$ |
| 7. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}$, <br> $D: x^2 + y^2 \le 9,\ x \ge 0,\ y \ge 0$ | 8. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot tg\sqrt{x^2 + y^2}}$, <br> $D: x^2 + y^2 \le \frac{\pi^2}{9},\ y \ge 0,\ x \le 0$ |
| 9. $\iint\limits_D \frac{x}{x^2 + y^2}\,dxdy$, <br> $D: x^2 + (y-2)^2 = 4,\ y \ge x$ | 10. $\iint\limits_D x\,dxdy$, <br> $D: -4y \le x^2 + y^2 \le -8y,\ ó \le -x$ |
| 11. $\iint\limits_D \frac{xy}{x^2 + y^2}\,dxdy$, <br> $D: (x-4)^2 + y^2 \le 16$ | 12. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, <br> $D: 1 \le x^2 + y^2 \le 25,\ y \ge -\sqrt{3},\ y \ge x$ |
| 13. $\iint\limits_D \frac{\cos\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dxdy$, <br> $D: 4 \le x^2 + y^2 \le 9,\ y \le -x$ | 14. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot ctg\sqrt{x^2 + y^2}}$, <br> $D: \frac{\pi^2}{36} \le x^2 + y^2 \le \frac{\pi^2}{4},\ y \le x,\ y \ge 0$ |
| 15. $\iint\limits_D y\,dxdy$, | 16. $\iint\limits_D \frac{xy}{x^2 + y^2}\,dxdy$, <br> $D: x^2 + (y-2)^2 \le 4$ |

| | |
|---|---|
| $D: -6y \le x^2 + y^2 \le -8y,$ $y \ge -x$ | |
| 17. $\iint\limits_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, $D: x^2+y^2 \le 25,\ y \le 0$ | 18. $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, $D: x^2-2x+y^2=0,\ y \ge 0$ |
| 19. $\iint\limits_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, $D: x^2+y^2+4y=0,\ x \le 0$ | 20. $\iint\limits_D xdydy$, $D: 4y \le x^2+y^2 \le 10y,\ y \ge x$ |
| 21. $\iint\limits_D \frac{xy}{x^2+y^2}dxdy$, $D: (x-3)^2+y^2 \le 9$ | 22. $\iint\limits_D \sin(x^2+y^2)dxdy$, $D: x^2+y^2 \le 25$ |
| 23. $\iint\limits_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, $D: x^2-4x+y^2=0,\ y \le 0$ | 24. $\iint\limits_D y^2xdxdy$, $D: 4 \le x^2+y^2 \le 25,\ y \le -\sqrt{3}x$ |
| 25. $\iint\limits_D ydxdy$, $D: -4x \le x^2+y^2 \le 12x,$ $y \le -x$ | 26. $\iint\limits_D \frac{xy}{x^2+y^2}dxdy$, $D: x^2+(y+4)^2 \le 16$ |
| 27. $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$, $D: 4 \le x^2+y^2 \le 25$ | 28. $\iint\limits_D xydxdy$, $D: x^2+y^2 \le 4,\ y \ge \frac{1}{\sqrt{3}}x,\ y \le -x$ |
| 29. $\iint\limits_D \frac{y}{x^2+y^2}dxdy$, | 30) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, $D: x^2+y^2-2y=0,\ x \le 0$ |

| | |
|---|---|
| $D:(x+2)^2+y^2=4,$<br>$y \geq -\sqrt{3}x$ | |

# Глава II
# ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

Пусть в замкнутой области $V \in R^3$ определена и непрерывна функция $u = f(x,y,z)$. Разобьем область $V$ произвольным образом на $n$ областей $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$. В каждой частичной области $\Delta V_i$ выберем произвольную точку $Mi(xi, yi, zi)$ и составим интегральную сумму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} f(xi, yi, zi)\Delta V_i.$$

Если существует предел интегральной суммы при неограниченном увеличении числа $n$ при стремлении к нулю наибольшего из диаметров областей $\Delta V_i$ $(d_i \to 0)$, то его называют **тройным интегралом** от функции $u = f(x, y, z)$ по области $V$ и обозначают

$$\iiint\limits_V f(M)dV \text{ или } \iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz .$$

Здесь $dV = dxdydz$ - элемент объема.

Если функция $u = f(x, y, z)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области $V$, то предел интегральной суммы $I_n$ при $n \to \infty$ и $max\, d_i \to \infty$ существует и не зависит ни от способов разбиения области $V$ на части, ни от способа выбора точек $Mi(xi, yi, zi)$ в них.

Свойства тройного интеграла аналогичны свойствам двойного интеграла.

1. $\iiint\limits_V Cf(x, y, z)dV = C\iint\limits_V f(x, y, z)dV, C - const.$

2. $\iiint\limits_V (f_1(x, y, z) \pm f_2(x, y, z))dV =$

$$= \iiint\limits_V f_1(x, y, z)dV \pm \iiint\limits_V f_2(x, y, z)dV .$$

3. $\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dV + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)dV$,

если $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$.

4. $\iiint\limits_V dV = V$, так как если $f(x,y,z) = 1$ интегральная сумма имеет вид $\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta V_k = V$ и численно равна объему тела.

# § 1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

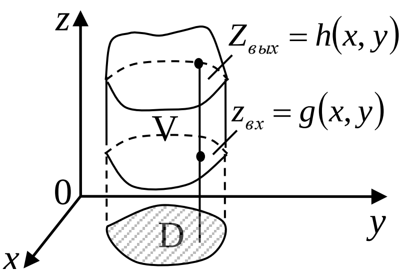



*Рис. 20*

Если область $V$ (*рис.20*) такова, что любая прямая, проходящая через внутреннюю точку этой области параллельно оси *Oz*, пересекает ее границу в двух точках, то тройной интеграл можно вычислить по формуле

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{Z_{вх}=g(x,y)}^{Z_{Вых}=h(x,y)} f(x,y,z)dz \ ,(12)$$

где $D$ – проекция области $V$ на плоскость $Oxy$; $z = g(x,y)$, $z = h(x,y)$ – уравнения нижней и верхней поверхностей, ограничивающих область $V$.

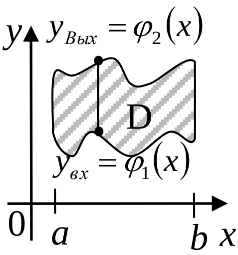



*Рис. 21*

Если область $D$ ограничена линиями $x = a,\ x = b\ (a < b)$, $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ (*рис.21*), то для вычисления тройного интеграла получаем формулу

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\phi_2(x)} dy \int\limits_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)dz \ . \quad (13)$$

В частности, если область $V$ представляет собой прямоугольный параллелепипед, определяемый условиями: $a \le x \le b$, $c \le y \le d$, $m \le z \le n$, то тройной интеграл сводится к трем определенным интегралам

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\tilde{n}}^d dy \int\limits_m^n f(x,y)dz}. \qquad (14)$$

Порядок интегрирования в формулах (12), (13), (14) может быть другим.

<u>Пример 12.</u> Вычислить интеграл $I = \iiint\limits_V xdxdydz$, где $V$ - тетраэдр, ограниченный плоскостями $2x+3y+4z=12$, $z=0$, $y=0$, $x=0$ (*рис.22*).

◀ Плоскость $2x+3y+4z=12$ отсекает на координатных осях *Ox, Oy, Oz* соответственно отрезки $a=6$, $b=4$, $c=3$. Проекцией тела *V* на плоскость *Oxy* является треугольник *OAB* (область *D)* (*рис.23*).

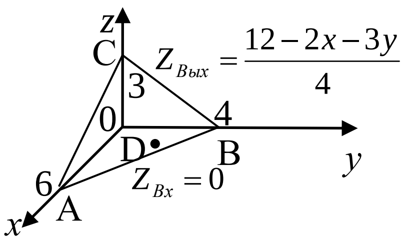



*Рис. 22*

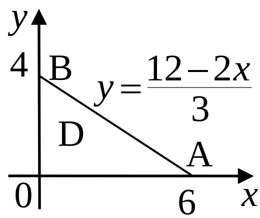



*Рис. 23*

Найдем пересечение плоскости $2x+3y+4z=12$ с координатной плоскостью $Oxy$, полагая $z=0$. Получаем уравнение прямой $AB$: $2x+3y=12$. Отсюда $y=\frac{12-2x}{3}$.

Таким образом, имеем область $D$: $\begin{cases} 0 \le x \le 6 \\ 0 \le y \le \frac{12-2x}{3} \end{cases}$

Из уравнения плоскости $2x+3y+4z=12$ получаем $Z_{Вых}=\frac{12-2x-3y}{4}$. Используя формулу (14), последовательно находим

$$I=\iiint\limits_V x\,dx\,dy\,dz=\int_0^6 \tilde{o}dx \int_0^{\frac{12-2x}{3}} dy \int_0^{\frac{12-2x-3y}{4}} dz=$$

$$=\int_0^6 x\,dx \int_0^{\frac{12-2x}{3}} \left( z \Bigg\|_0^{\frac{12-2x-3y}{4}} \right) dy=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^6 x\,dx \int_0^{\frac{12-2x}{3}} (12-2x-3y)\,dy.$$

Вычислим внутренний интеграл

$$\int_0^{\frac{12-2x}{3}} (12-2x-3y)dy = \left(12y - 2xy - \frac{3}{2}y^2\right)\Bigg|_{y=0}^{y=\frac{12-2x}{3}} =$$

$$= 4\cdot(12-2x) - \frac{2x(12-2x)}{3} - \frac{3(12-2x)^2}{18} = \frac{2}{3}x^2 - 8x + 24.$$

Вычислим внешний интеграл

$$I = \frac{1}{4}\int_0^6 x\left(\frac{2}{3}x^2 - 8x + 24\right)dx = \frac{1}{4}\int_0^6 \left(\frac{2}{3}x^3 - 8x^2 + 24x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{x^4}{6} - \frac{8x^3}{3} + 12x^2\right)\Bigg|_0^6 = 18. \ ►$$

# § 2. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

В цилиндрической системе координат положение точки М определяется координатами $r, \varphi, z$ (*рис.24*).

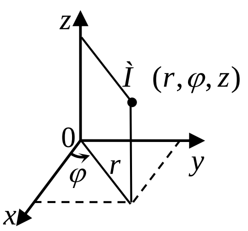



*Рис. 24*

Цилиндрические координаты связаны с декартовыми координатами следующими формулами:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi \qquad (15)$$
$$z = z$$

где $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $-\infty < z < \infty$.

Элемент объема

$$\boxed{dV = dxdydz = rdrd\varphi dz}. \qquad (16)$$

Поэтому формула перехода от тройного интеграла в прямоугольных координатах к интегралу в цилиндрических координатах имеет вид

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdrd\varphi dz\ , \qquad (17)$$

где $V^*$ - данная область в цилиндрических координатах.

<u>Пример 13.</u> Вычислить $I = \iiint\limits_V z\sqrt{x^2 + y^2}dxdydz$, где область $V$ ограничена поверхностью $V\colon x^2 + y^2 = 2x, (y \geq 0)$ и плоскостями $y = 0$, $z = 0$, $z = 4$.

◄ Уравнение поверхности $x^2 + y^2 = 2x$ запишем в виде $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Данное тело $V$ – половинка кругового цилиндра с образующими, параллельными оси *Oz* (*рис.25*).

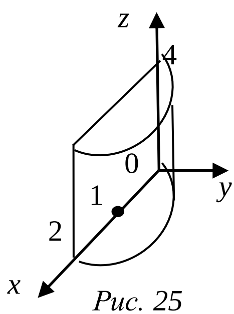


*Рис. 25*

Запишем уравнение поверхности в цилиндрической системе координат, используя формулы (15).

Получим $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 2r\cos\varphi$.

Отсюда $r = 2\cos\varphi$. Проекция тела $V$ в плоскости *Oxy* – полукруг (*рис.26*).

Вычислим интеграл в цилиндрических координатах.

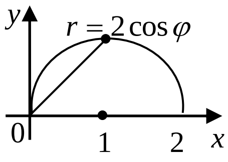



*Рис. 26*

Имеем

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r dr \int\limits_0^4 z\sqrt{r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi}\, dz=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2 dr \int\limits_0^4 z dz=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2 dr\cdot \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^4=8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2 dr .$$

Вычислим внутренний интеграл

$$\int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2 dr=\left.\frac{r^3}{3}\right|_0^{2\cos\varphi}=\frac{8\cos^3\varphi}{3}.$$

Наконец получаем

$$I=\frac{64}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi d\varphi=\frac{64}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2\varphi\right)\cos\varphi d\varphi=$$

$$=\frac{64}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2\varphi\right)d(\sin\varphi)=\frac{64}{3}\left.\left(\sin\varphi-\frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{128}{9}. \blacktriangleright$$

# § 3. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ В СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

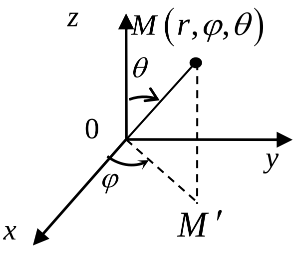



*Рис. 27*

В сферической системе координат положение точки

определяется координатами $r$, $\varphi$, $\theta$ (*рис. 27*).
Формулы перехода к сферическим координатам:

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned} \qquad (18)$$

где $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

Элемент объема

$$\boxed{dV = dxdydz = r^2 \sin\theta drd\theta d\varphi}. \qquad (19)$$

Для того, чтобы тройной интеграл $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ преобразовать к сферическим координатам, надо *x, y, z* в подынтегральной функции (12) заменить по формулам (18), а элемент объема $dV$ – по формуле (19). После этого вычислить его тремя последовательными интегрированиями.

Переход к сферическим координатам особенно удобен в том случае, когда областью интегрирования является шар. Запишем уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ в сферических координатах. С учетом формул (18) получим:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\cos^2\theta =$$

$$= r^2\sin^2\theta\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + r^2\cos^2\theta = r^2\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) = r^2$$

то есть $r^2 = R^2$. Отсюда уравнение сферы: $r = R$.

<u>Пример 14.</u> Вычислить $I = \iiint\limits_V \sqrt{1+(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dV$,

где $V$ –шар $x^2+y^2+z^2 \le 1$ (*рис.28*).

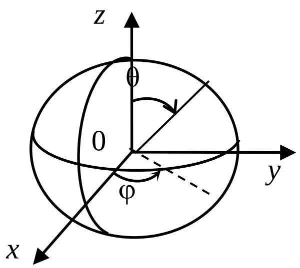



*Рис. 28*

◄ Переходя в интеграле $I$ к сферическим координатам по формулам (18), (19), последовательно получаем

$$I = \iiint\limits_V \sqrt{1+r^3}\,r^2 \sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{1} \sqrt{1+r^3}\,r^2\, dr\ .$$

Вычислим внутренний интеграл.

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1+r^3}\,r^2 dr = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 (1+r^3)^{\frac{1}{2}} d(1+r^3) = \frac{1}{3}(1+r^3)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{9}(2^{\frac{3}{2}}-1) =$$

$$= \frac{2}{9}(2\sqrt{2}-1).$$

$$I = \frac{2}{9}\left(2\sqrt{2}-1\right)\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = \frac{2}{9}\left(2\sqrt{2}-1\right)\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{4}{9}(2\sqrt{2}-1)\cdot 2\pi = \frac{8\pi(2\sqrt{2}-1)}{9}\ .$$ ►

# § 4. ПРИЛОЖЕНИЯ ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Таблица 2.

**Приложение тройных интегралов в геометрии и механике**

| № | Наименование | Общая формула | Прямоугольные координаты | Цилиндрические координаты | Сферические координаты |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | Объем тела | $V=\iiint\limits_V dV$ | $V=\iiint\limits_V dxdydz$ | $V=\iiint\limits_V rdrd\varphi dz$ | $V=\iiint\limits_V r^2\sin\theta dzd\varphi d\theta$ |
| **2** | Масса тела с плотностью $\rho$ | $m=\iiint\limits_V \rho dV$ | $m=\iiint\limits_V \rho dxdydz$ | $m=\iiint\limits_V \rho rdrd\varphi dz$ | $V=\iiint\limits_V \rho r^2\sin\theta drd\varphi d\theta$ |
| **3** | Момент инерции тела относительно оси *Oz* | $I_Z=\iiint\limits_V r^2dV$ | $I_Z=\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$ | $I_Z=\iiint\limits_V r^3drd\varphi dz$ | $I_m=\iiint\limits_V r^4\sin\theta drd\varphi d\theta$ |
| **4** | Координаты центра тяжести однородного тела | $x_{ñ}=\dfrac{\iiint\limits_V xdV}{V}$ $y_{ñ}=\dfrac{\iiint\limits_V ydV}{V}$ $z_{ñ}=\dfrac{\iiint\limits_V zdV}{V}$ | $x_{ñ}=\dfrac{\iiint\limits_V xdxdydz}{V}$ $y_{ñ}=\dfrac{\iint\limits_V ydxdydz}{V}$ $z_{ñ}=\dfrac{\iint\limits_V zdxdydz}{V}$ | | |

Пример 15. Вычислить объем тела, ограниченного цилиндрическими поверхностями: $y=\sqrt{x}, y=2\sqrt{x}$ и плоскостями $z=0$, $z=4-\tilde{o}$ (*рис.29*).

◀Воспользуемся формулой 1 таблицы 2. Проекция тела в плоскости Оху изображена на *рис.30*.

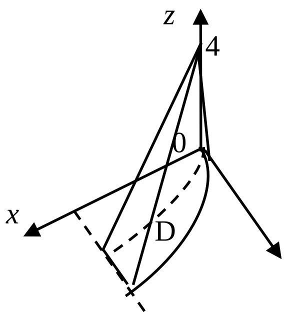



*Рис.29*

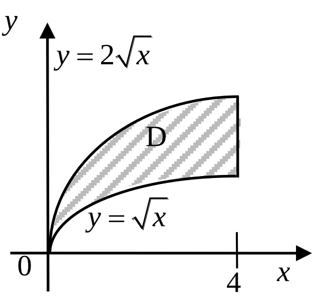



*Рис.30*

$$V=\iiint\limits_V dxdydz=\int\limits_0^4 dx\int\limits_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy\int\limits_0^{4-x} dz=\int\limits_0^4 dx\int\limits_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}\left(z\Big|_0^{4-x}\right)dy=$$

$$=\int\limits_0^4 dx\int\limits_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}(4-x)dy=\int\limits_0^4(4-x)dx\int\limits_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}dy=\int\limits_0^4(4-x)\left(y\Big|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^4(4-x)\sqrt{x}dx=\int\limits_0^4\left(4x^{1/2}-x^{3/2}\right)dx=\left(4x^{3/2}\cdot\frac{2}{3}-x^{5/2}\cdot\frac{2}{5}\right)\Bigg|_0^4=$$

$$=\frac{64}{3}-\frac{64}{5}=\frac{128}{15}.$$

Пример 16. Найти массу тела (*рис.31*), ограниченного цилиндрической поверхностью $x^2 = 2y$ и плоскостями $z = 0$, $2y + z = 2$, если в каждой его точке объемная плотность численно равна ординате этой точки.

◄ По условию плотность $p(x, y, z) = y$, по формуле 2 таблицы 2 масса тела равна:

$$m = \iiint\limits_V y\,dx\,dy\,dz\,.$$

Проекция тела в плоскости *Oxy* изображена на *рис.32*. Тело симметрично относительно плоскости *Oxy*. Поэтому

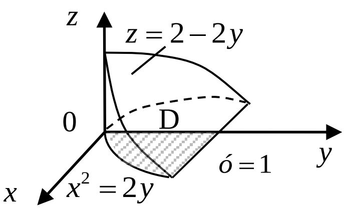


*Рис.31*

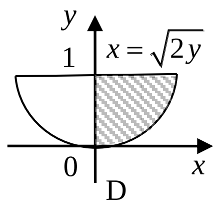


*Рис.32*

$$m = 2\int_0^1 y\,dy \int_0^{\sqrt{2y}} dx \int_0^{2-2y} dz = 2\int_0^1 y\,dy \int_0^{\sqrt{2y}} z\Big|_0^{2-2y} dx =$$

$$= 2\int_0^1 y\,dy \int_0^{\sqrt{2y}} (2-2y)\,dx = 2\int_0^1 y(2-2y)\,dy \int_0^{\sqrt{2y}} dx = 4\int_0^1 (y - y^2)\sqrt{2y}\,dy =$$

$$= 4\sqrt{2}\int_0^1 (y^{3/2} - y^{5/2})\,dy = 4\sqrt{2}\left( y^{5/2}\cdot\frac{2}{5} - y^{7/2}\cdot\frac{2}{7}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 4\sqrt{2}\left(\frac{2}{5} - \frac{2}{7}\right) = \frac{16\sqrt{2}}{35}\,.$$

Пример 17. Вычислить объем, координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного параболоидом $z = 3 - x^2 - y^2$ и плоскостью $z = 0$ (*рис.33*).

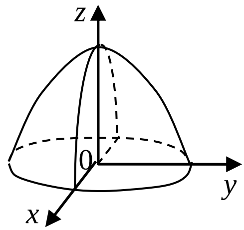



*Рис.33*

◄ Вычислим объем тела в цилиндрических координатах по формуле 1 таблицы 2:

$$V = \iiint\limits_V r dr d\varphi dz .$$

Уравнение параболоида в цилиндрических координатах с помощью формул (15) примет вид $z = 3 - r^2$.

Проекцией тела в плоскости $Oxy$ служит круг $x^2 + y^2 = 3$, радиус которого $R = \sqrt{3}$. Поэтому

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} r dr \int_0^{3-r^2} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} r\left(3 - r^2\right) dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \left(3r - r^3\right) dr = 2\pi \cdot \left(\frac{3r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = \frac{9\pi}{2} .$$

Для определения центра тяжести тела воспользуемся формулой из таблицы 2.

Так как тело симметрично, то центр его тяжести лежит на оси $Oz$, поэтому $x_c = 0$, $y_c = 0$, $z_c = \dfrac{\iiint\limits_V z dV}{V}$.

Вычислим интеграл $\iiint\limits_V z dV$ в цилиндрических координатах:

$$\iiint\limits_V z\,dV = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} r\,dr \int\limits_0^{3-r^2} z\,dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} \left( \left. \frac{z^2}{2} \right|_0^{3-r^2} \right) r\,dr =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \int\limits_0^{\sqrt{3}} (3 - r^2)^2\, r\,dr = \pi \int\limits_0^{\sqrt{3}} (9r - 6r^3 + r^5)\,dr =$$

$$= \pi \left. \left( \frac{9r^2}{2} - \frac{3r^4}{2} + \frac{r^6}{6} \right) \right|_0^{\sqrt{3}} = \frac{9\pi}{2}.$$

Тогда $z_C = 1$.

# § 5. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

**Задача 1.** Вычислить тройной интеграл

| | |
|---|---|
| 1. $\iiint\limits_V \left(x-2y^2+xz\right)dxdydz,$ $V: 1\le x\le 2,\ 0\le y\le 3,\ -1\le z\le 3$ | 2. $\iiint\limits_V \left(x+4xz+y^2\right)dxdydz,$ $V: 1\le x\le 2,\ 0\le y\le 3,\ -1\le z\le 3$ |
| 3. $\iiint\limits_V \left(x-y+3yz\right)dxdydz,$ $V: -2\le x\le 1,\ 0\le y\le 2,\ 1\le z\le 3$ | 4. $\iiint\limits_V \left(2xy^2-xz+z^3\right)dxdydz,$ $V: 0\le x\le 2,\ -2\le y\le 1,\ 0\le z\le 2$ |
| 5. $\iiint\limits_V \left(xy-3y^2-z^2\right)dxdydz,$ $V: -3\le x\le 0,\ 1\le y\le 2,\ 0\le z\le 3$ | 6. $\iiint\limits_V \left(x-2yz+3z^2\right)dxdydz,$ $V: -1\le x\le 2,\ 0\le y\le 3,\ 0\le z\le 2$ |
| 7. $\iiint\limits_V \left(2xz^2-y^2-z\right)dxdydz,$ $V: 0\le x\le 3,\ -2\le y\le 1,\ 1\le z\le 2$ | 8. $\iiint\limits_V \left(4xy^3+y-2z^2\right)dxdydz,$ $V: -2\le x\le 2,\ 0\le y\le 4,\ -1\le z\le 2$ |
| 9. $\iiint\limits_V \left(x^2-2xz^2+y^3\right)dxdydz,$ $V: -1\le x\le 2, 0\le y\le 3, -1\le z\le 1$ | 10. $\iiint\limits_V \left(3x^2-xy+2z^2\right)dxdydz,$ $V: -2\le x\le 1,\ 0\le y\le 4,\ -1\le z\le 2$ |
| 11. $\iiint\limits_V \left(2xz+yz^2-z^3\right)dxdydz,$ $V: 0\le x\le 2, -1\le y\le 3, 0\le z\le 2$ | 12. $\iiint\limits_V \left(x+4xz-y^2\right)dxdydz,$ $V: -1\le x\le 4,\ 0\le y\le 2,\ 1\le z\le 3$ |
| 13. $\iiint\limits_V \left(2+x^3-yz\right)dxdydz,$ $V: -2\le x\le 1,\ 0\le y\le 3,\ 1\le z\le 2$ | 14. $\iiint\limits_V \left(2x-3y+z^2\right)dxdydz,$ $V: -3\le x\le 0,\ 1\le y\le 2,\ 0\le z\le 4$ |

| | |
|---|---|
| 15. $\iiint\limits_V \left(x^2+yz-2z^2\right)dxdydz,$ $V:-1\le x\le 3,\ 0\le y\le 2,\ 1\le z\le 2$ | 16. $\iiint\limits_V \left(x+2xy-z^2\right)dxdydz,$ $V:0\le x\le 3,\ -2\le y\le 2,\ 0\le z\le 1$ |
| 17. $\iiint\limits_V \left(4x-y^2+yz\right)dxdydz,$ $V:-2\le x\le 1,\ 0\le y\le 3,\ 1\le z\le 2$ | 18. $\iiint\limits_V \left(2x^2+xz-3y\right)dxdydz,$ $V:0\le x\le 3,\ -2\le y\le 0,\ 0\le z\le 3$ |
| 19. $\iiint\limits_V \left(x-2yz^2+4y\right)dxdydz,$ $V:-2\le x\le -1, 0\le y\le 1, 1\le z\le 2$ | 20. $\iiint\limits_V \left(3x+yz^2-5\right)dxdydz,$ $V:-1\le x\le 2,\ 1\le y\le 3,\ 0\le z\le 1$ |
| 21. $\iiint\limits_V \left(x^2y-3y+z\right)dxdydz,$ $V:0\le x\le 3,\ -1\le y\le 1,\ 0\le z\le 2$ | 22. $\iiint\limits_V \left(2x+x^2z-y^2\right)dxdydz,$ $V:-2\le x\le -1,\ 0\le y\le 2,\ 1\le z\le 3$ |
| 23. $\iiint\limits_V \left(x-4y^2+3xz^2\right)dxdydz,$ $V:1\le x\le 3,\ 0\le y\le 2,\ 0\le z\le 1$ | 24. $\iiint\limits_V \left(3x+xy-z^3\right)dxdydz,$ $V:1\le x\le 3,\ -1\le y\le 2,\ 0\le z\le 1$ |
| 25. $\iiint\limits_V \left(x-z^3+2\right)dxdydz,$ $V:0\le x\le 3,\ 1\le y\le 2,\ 0\le z\le 1$ | 26. $\iiint\limits_V \left(4xy^2-y+3z\right)dxdydz,$ $V:-2\le x\le 1,\ 0\le y\le 3,\ 1\le z\le 2$ |
| 27. $\iiint\limits_V \left(2x-y+3z^2\right)dxdydz,$ $V:-2\le x\le 1,\ 0\le y\le 3,\ 0\le z\le 1$ | 28. $\iiint\limits_V \left(3x+yz^2-4\right)dxdydz,$ $V:1\le x\le 2,\ -1\le y\le 1,\ 0\le z\le 3$ |
| 29. $\iiint\limits_V \left(xz^2-2y^3+3\right)dxdydz,$ $V:0\le x\le 1,\ -1\le y\le 1,\ 0\le z\le 2$ | 30. $\iiint\limits_V \left(4x+y-2yz^2\right)dxdydz,$ $V:1\le x\le 3,\ 0\le y\le 1,\ -1\le z\le 1$ |

**<u>Задача 2.</u>** Вычислить тройной интеграл, если область $V$ ограничена указанными поверхностями

1. $\iiint\limits_V (2x+y)dxdydz,\ V: x=1, y=2x, y=3x,\ z\le 0,\ z=x^2+y^2-4.$

2. $\iiint\limits_V xdxdydz,\ V: x=0,\ y=0,\ x+y=1,\ z\ge 0,\ z=4-x^2-y^2.$

3. $\iiint\limits_V (1+x)dxdydz,\ V: x=0,\ y=0,\ x+y+z=1,\ z=0.$

4. $\iiint\limits_V (x+2y-z)dxdydz,\ V: x=0,\ y=0,\ x+y=3,\ z=0,\ z=4.$

5. $\iiint\limits_V ydxdydz,\ V: x=4,\ y=0,\ y=\sqrt{x},\ z=0,\ z+y=1.$

6. $\iiint\limits_V zdxdydz,\ V: x=3,\ y=x,\ y=2x,\ z\ge 0,\ z=\sqrt{x^2+y^2}.$

7. $\iiint\limits_V (x+2)dxdydz,\ V: x=0,\ y=4,\ y=x^2,\ z=0,\ y+z=3.$

8. $\iiint\limits_V xzdxdydz,\ V: x=0,\ x=2,\ y=1,\ y=3,\ z=4-x^2.$

9. $\iiint\limits_V x^2dxdydz,\ V: x=0,\ y=0,\ x+y+z=4,\ z=0.$

10. $\iiint\limits_V (x+1)dxdydz,\ V: x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ x+y=3,\ z=9-x^2-y^2.$

11. $\iiint\limits_V (y-1)dxdydz,\ V: y=x,\ y=-x,\ y=2,\ z\ge 0,\ z=2(x^2+y^2).$

12. $\iiint\limits_V yzdxdydz,\ V: x=0,\ x=3,\ y=0,\ y=2,\ z=4-y^2.$

13. $\iiint\limits_V zdxdydz,\ V: x=0,\ x=\dfrac{1}{2}, y=x, y=2x, z=0, z=\sqrt{1-x^2-y^2}.$

14. $\iiint\limits_V xyzdxdydz,\ V: z=\sqrt{1-x^2-y^2},\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

15. $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3},\ V: x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1.$

16. $\iiint\limits_V (3x+y)dxdydz,\ V: y=2x,\ y=\sqrt{x},\ z=0,\ z=4.$

17. $\iiint\limits_V (x-yz)dxdydz,\ V: y=x,\ x=4,\ z=0,\ z=2x^2+y^2.$

18. $\iiint\limits_V (2x-z)dxdydz,\ V: x=0,\ x=2,\ y=0,\ y=1,\ z=5-y^2.$

19. $\iiint\limits_V ydxdydz,\ V: y=x^2,\ x=0,\ y=4,\ z=0,\ z=4-y.$

20. $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{(x+2)^2},\ V: x=-1,\ x=1,\ y=0,\ y=2,\ z=3-y^2.$

21. $\iiint\limits_V xydxdydz,\ V: x=0,\ y=0,\ z=0,\ 2x+3y+z=6.$

22. $\iiint\limits_V zdxdydz,\ V: y=0,\ y=3,\ z=4-x^2,\ z=0.$

23. $\iiint\limits_V (x+y^2)dxdydz,\ V: x=-2,\ x=2,\ y=0,\ y=1,\ z=0,\ z=2x^2.$

24. $\iiint\limits_V (2x+z)dxdydz,\ V: y=\sqrt{x},\ y=x^2,\ z=0,\ z=5-x^2.$

25. $\iiint\limits_V yzdxdydz,\ V: x=0,\ y=0,\ x=2,\ y=3, 4x^2+z^2=16.$

26. $\iiint\limits_V (x+2y)zdxdydz,\ V: x=0,\ y=0,\ x=3,\ y=4,\ z^2-x^2=4.$

27. $\iiint\limits_V (2x-yz)dxdydz,\ V: y=x,\ y=3x,\ x=1,\ y=4,\ z=5-2x.$

28. $\iiint\limits_V (3x+y)dxdydz,\ V: x=-1,\ x=1,\ y=0,\ y=2,\ z=9-x^2.$

29. $\iiint\limits_V (x-2y+z)dxdydz,\ V: y=x^2,\ y=2x,\ z=2x^2+3.$

30. $\iiint\limits_V (x+y+2z)dxdydz,\ V: y=-x,\ y=x,\ y=2,\ z=6-x^2.$

**<u>Задача 3.</u>** Вычислить тройной интеграл с помощью цилиндрических или сферических координат.

| | |
|---|---|
| 1. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, <br> $V: x^2+y^2\le z^2,\ z\le 1$ | 2. $\iiint\limits_V z^2dxdydz$, <br> $V: z=x^2+y^2,\ z\le 4$ |
| 3. $\iiint\limits_V \left(x^2-y^2\right)dxdydz$, <br> $V: x^2+y^2\le 2z,\ z\le 2$ | 4. $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)^3dxdydz$, <br> $V: x^2+z^2\le 1,\ 0\le y\le 2$ |
| 5. $\iiint\limits_V x^2dxdydz$, <br> $V: 1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ y\ge 0,$ <br> $z\ge 0$ | 6. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}e^{x^2+y^2}dxdydz$, <br> $V: y=0,\ y=\sqrt{4-x^2};\ 0\le z\le 3$ |
| 7. $\iiint\limits_V \cos\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, | 8. $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)dxdydz$, <br> $V: 1\le x^2+y^2+z^2\le 2,$ |

| | |
|---|---|
| $V: 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \sqrt{4-x^2},$<br>$1 \le z \le 2$ | |
| 9. $\iiint\limits_V y\,dxdydz$ ,<br>$V: 9 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 16,\ y \le \sqrt{3}x,$<br>$y \ge 0,\ z \ge 0,$ | 10. $\iiint\limits_V \frac{y\,dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ,<br>$V: x^2 + y^2 = 4y,\ x^2 + y^2 = 6y,$<br>$x \ge 0,\ z \ge 0,\ z = 4,$ |
| 11. $\iiint\limits_V y\,dxdydz$ ,<br>$V: x^2 + y^2 + z^2 = 8,\ z^2 = x^2 + y^2$ | 12. $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$ ,<br>$V: x^2 + y^2 = 4x,\ y + z = 4$ |
| 13. $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$ ,<br>$V: x^2 + y^2 = 2y,\ \ x \ge 0,\ z = 0,$<br>$z = 2$ | 14. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ,<br>$V: x^2 + y^2 = 2x,\ z = 9 - x^2,$<br>$z = 0$ |
| 15. $\iiint\limits_V \frac{x\,dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ,<br>$V: 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9,\ x \ge 0,$<br>$y \ge 0,\ z \ge 0$ | 16. $\iiint\limits_V y\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$ ,<br>$V: x^2 + y^2 + z^2 \le 4, z \ge 0$ |
| 17. $\iiint\limits_V (x+2y)dxdydz$ ,<br>$V: z = 4 - x^2 - y^2,\ z = 0$ | 18. $\iiint\limits_V \frac{z\,dxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$ ,<br>$V: y \ge 0,\ y \le x,\ z = 4\left(x^2 + y^2\right)$ |
| 19. $\iiint\limits_V xy\,dxdydz$ ,<br>$V: y \ge 0,\ z^2 = x^2 + y^2,\ z = 4$ | 20. $\iiint\limits_V (x^2 - 2y^2)dxdydz$ ,<br>$V: z = 9 - x^2 - y^2, z = 0,$ |

| | |
|---|---|
| 21. $\iiint\limits_V (y+z)dxdydz$, <br> $V: x^2+4x+y^2=0,\ z=1,\ z=2$ | 22. $\iiint\limits_V \frac{y^2dxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}}$, <br> $V: x\ge 0,\ z=4-\sqrt{x^2+y^2}$, <br> $z=0$ |
| 23. $\iiint\limits_V (2x-y)dxdydz$, <br> $V: x^2+y^2+2y=0,\ z=0,\ z=3$ | 24. $\iiint\limits_V \frac{y^2dxdydz}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}$, <br> $V: 1\le x^2+y^2+z^2\le 9,\ z\ge 0$ |
| 25. $\iiint\limits_V (x-y)dxdydz$, <br> $V: 2z=x^2+y^2,\ z\ge 0$ | 26. $\iiint\limits_V (x-z)dxdydz$, <br> $V: z=3-x^2-y^2,\ z=0,\ y\ge 0$ |
| 27. $\iiint\limits_V (y^2+z^2)dxdydz$, <br> $V: x^2+6x+y^2=0,\ z=0,\ z=2$ | 28. $\iiint\limits_V \frac{y^2dxdydz}{x^2+y^2+z^2}$, <br> $V: 1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ x\ge 0$, <br> $y\le x, z\ge 0$ |
| 29. $\iiint\limits_V (2x-y)dxdydz$, <br> $V: z^2=x^2+y^2,\ z=3$ | 30. $\iiint\limits_V (x+3y)dxdydz$, <br> $V: x^2+4x^2+y^2=0,\ y\le 0$, <br> $z=0,\ z=4$ |

**Задача 4.** С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями.

1. $y^2=x,\ x=4,\ z=0,\ z+y=5;$

2. $x-2y+2=0,\ x+y-7=0,\ z=x^2,\ z\ge 0;$

3. $y=x^2,\ y=x,\ z=4-y^2,\ z\ge 0;$

4. $x+2y=2,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ z=x^2+2y^2;$

5. $y=x^2-1,\ y=3,\ z=x^2+y^2+2,\ z\geq 0;$

6. $x^2+y^2=9,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ x+z=4;$

7. $x=y^2,\ x=4,\ 2y+z=6,\ z\geq 0;$

8. $y=\sqrt{4-x^2}, z=3y, z\geq 0, y=0;$

9. $z=9-y^2,\ x^2+y^2=1,\ z\geq 0;$

10. $x+y=3,\ z=x^2+2y^2,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0;$

11. $y=x,\ y=-x,\ y=1,\ z=5-x^2, z=0;$

12. $z=y^2-4,\ 0\leq x\leq 1,\ z\leq 0;$

13. $y=x,\ y=2x,\ y=2,\ z=x^2+y^2,\ z=4;$

14. $z=x^2-1, 1\leq y\leq 4,\ z\leq 0;$

15. $y=x^2,\ y=2x^2,\ x=2,\ z=0,\ z=3;$

16. $y=\sqrt{x},\ y=0,\ x=4,\ z=0,\ z=2;$

17. $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=z^2;$

18. $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=3z;$

19. $2x-y=0,\ x+y=6,\ x=0,\ z=0,\ z=x^2;$

20. $y=x^2+2,\ y=6,\ z=0,\ z=3;$

21. $y=4-x^2,\ y=0,\ z=5-x, z=0;$

22. $2y=x^2+z^2, x+z=2, x=0, y=0, z=0;$

23. $z=0, y=0, x=4, x^2=y^2+z^2;$

24. $x^2+z^2=4, y=x^2+z^2,\ y\geq 0;$

25. $x^2+y^2=1; z=6-x-y, z\geq 0;$

26. $y=8-x-z, x^2+z^2=4, y\geq 0;$

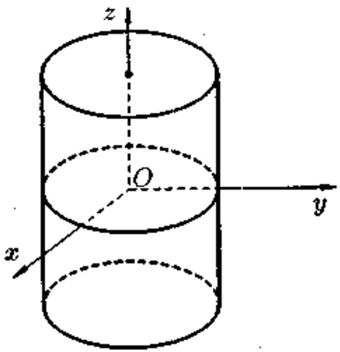
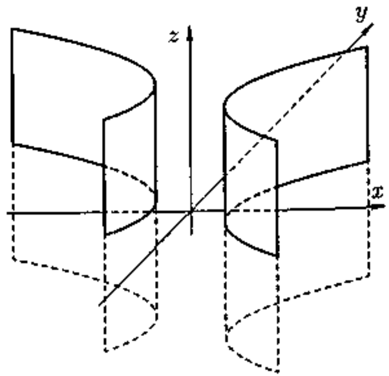
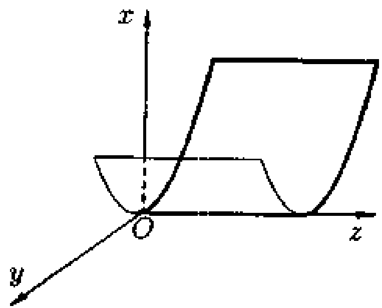
27. $x=0, z=0, y=2, y^2=x^2+z^2;$

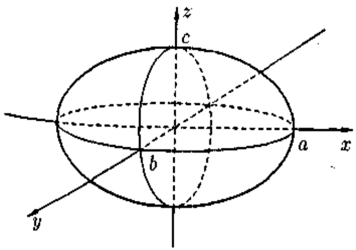
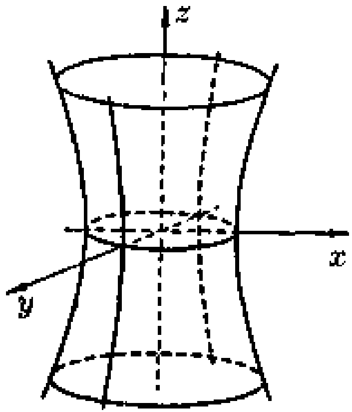
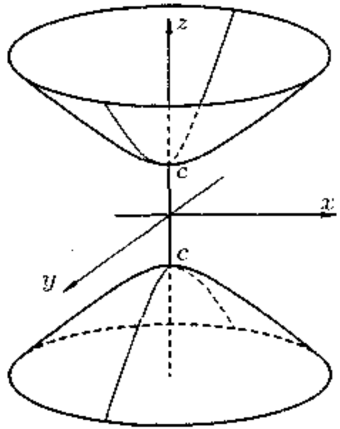
28. $y^2+z^2=9, x=y^2+z^2, x\geq 0;$

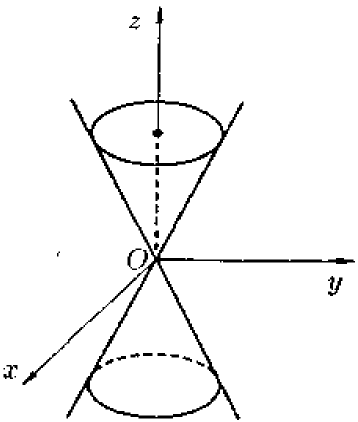
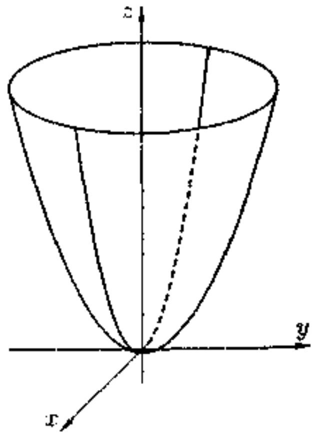
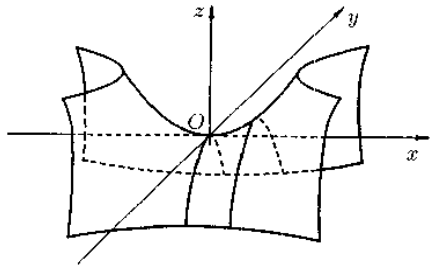
29. $x=4-y-z, y^2+z^2=1, x\geq 0$ ;

30. $x^2+z^2=16, y=x^2+z^2, y\geq 0;$

# Приложение

| | | | |
|---|---|---|---|
| Название | **Ц И Л И Н Д Р И Ч Е С К И Е   П О В Е Р Х Н О С Т И**<br>***Цилиндром второго порядка*** называется цилиндрическая поверхность, направляющей которой является эллипс (окружность), гипербола или парабола. | | |
| | **1. Эллиптический цилиндр** | **2. Гиперболический цилиндр** | **3. Параболический цилиндр** |
| Уравнение | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ | $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ | $y^2 = 2qx$ |
| Чертеж |  |  |  |

| Название | **Поверхности вращения второго порядка** | | |
|---|---|---|---|
| | **4. Эллипсоид** | **5. Однополостной гиперболоид** | **6. Двуполостной гиперболоид** |
| Уравнение | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ |
| Чертеж |  |  |  |

| Название | **7. Конус** | **8. Эллиптический параболоид** | **9. Гиперболический параболоид** |
|---|---|---|---|
| Уравнение | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ | $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ |
| Чертеж |  |  |  |

# Литература

1. Лунгу К.Н., Норин В.П., Письменный Д.Т., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 2 курс/ Под ред. С.Н. Федина. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 592с.

2. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. ч. IV – Харьков: Харьковский гос. университет – 1966. – 236 с.

3. Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа. (Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука. – 1981. – 368 с.

4. Данко П.Е., Попова А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах.ч.2-М.:Высш.шк.,1999-416 с.