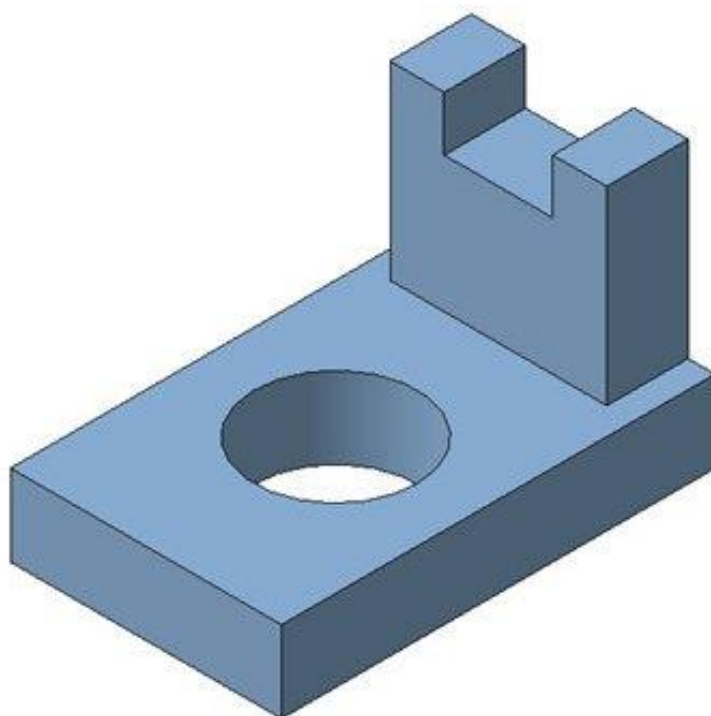


МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Нижекамский химико-технологический институт (филиал) федерального государственного  
бюджетного образовательного учреждения высшего образования  
«Казанский национальный исследовательский технологический университет»  
НХТИ ФГБОУ ВО «КНИТУ»

**О.А. Маркова**

# **ИНЖЕНЕРНАЯ ГРАФИКА (начертательная геометрия)**

Учебное пособие



Нижекамск

2018

УДК 514.181+182

М 25

**Маркова, О.А.**

М 25 Инженерная графика (начертательная геометрия): Учебное пособие / О.А. Маркова. - Нижнекамск: ИПЦ «Гузель», 2018. - 98 с.

Учебное пособие содержит теоретический и практический материал, необходимый для выполнения контрольной работы по первому разделу инженерной графики - начертательной геометрии. Все рекомендации подкреплены теоретическими положениями, конкретными примерами и образцами выполнения заданий (эпюров). Пособие содержит варианты заданий.

Публикация предназначена для студентов, обучающихся в учреждениях высшего образования по программам бакалавриата технического направления на заочном отделении.

Подготовлено на кафедре «Техника и физика низких температур» НХТИ ФГБОУ ВО «КНИТУ».

Рецензенты:

**Гарипов М.Г.**, кандидат технических наук, доцент;

**Макусева Т.Г.**, кандидат педагогических наук, доцент.

© Маркова О.А., 2018

© НХТИ ФГБОУ ВО «КНИТУ», 2018

## Введение

Дисциплина «Инженерная графика» включает в себя элементы начертательной геометрии и основ черчения, а также машиностроительного черчения. Усвоение учебного материала этой дисциплины служит базой для дальнейшего изучения компьютерной графики, прикладной механики. Первая часть учебного пособия содержит индивидуальные варианты контрольных заданий по начертательной геометрии, теоретические положения, рекомендации по их выполнению и примеры оформления заданий.

*Предметом начертательной геометрии является изложение и обоснование способов задания изображений геометрических образов на чертеже (плоскости). Под геометрическими образами понимают точки, прямые и кривые линии, плоскости. Совокупность этих образов дает любую пространственную форму (поверхность) - деталь, конструкцию, сооружение.*

Чертежи, выполнение которых основано на способах начертательной геометрии, обладают точностью, простотой исполнения, наглядностью и обратимостью. При этом способы служат не только целям изображения предметов, они позволяют также решать различные задачи, носящие производственный характер, такие, как определение площадей плоских фигур и кривых поверхностей, построение разверток изделий из листового материала, определение веса предметов по их изображениям, конструирование различных поверхностей и многое другое.

## 1. Выполнение контрольных работ

Рабочими программами кафедр вузов предусматривается выполнение студентами заочного отделения контрольных работ, обычно на каждую дисциплину по одной работе в семестре. Текущий контроль преподавателя за работой заочника производится именно по этим контрольным работам. Контрольные работы представляются студентом на рецензию (в сброшюрованном виде и оформляются титульным листом) в сроки, указанные в учебном графике, в полном объеме (все эюры и пояснения к ним). Замечания преподавателя должны быть приняты обучающимся к исполнению. Если работа не зачтена или зачтена не полностью, то на повторную рецензию надо представить снова всю работу. *При сдаче экзамена или зачета студент представляет все задания и рецензии к ним.*

*Организация выполнения контрольных работ:*

1. Изучение теоретического материала по начертательной геометрии по учебным пособиям, конспектам лекций, учебникам, использование возможностей интернета.

2. Ознакомление с данным учебным пособием и образцами выполнения эюров.

3. Задания на контрольные работы представлены в вариантах. *Номер варианта контрольной работы соответствует двум последним цифрам номера зачетной книжки студента.*

4. Решение задач на черновиках, после этого оформление заданий чертежами (эюрами).

*Требования к выполнению контрольных работ:*

1. Графическое оформление контрольных работ должно соответствовать требованиям стандартов ЕСКД.

2. Образец титульного листа выдается деканатом (или преподавателем на установочной сессии). Выполняют его на чертежной бумаге (ватмане) и заполняют чертежным шрифтом (допускается компьютерный вариант).

3. Формат листов чертежной бумаги для данной контрольной работы обычно выбирают А3.

4. В основной надписи чертежей записывается наименование темы - название задания. Шифр (обозначение) учебных чертежей выглядит так: НГ 01 XX 00 (или ИГ 01 XX 00), где НГ - начертательная геометрия (ИГ - инженерная графика); 01 - номер контрольной работы; XX (01 ... 30) - номер варианта; 00 - если чертеж не является рабочим чертежом детали.

5. Пояснения к эюрам необходимо выполнять на обычной бумаге в клетку и прикреплять к соответствующему чертежу.

## 2. Основные правила оформления чертежей

### 2.1. Формат. Основная надпись

Все чертежи должны выполняться на листах бумаги (ватмана) стандартного формата. *Форматом чертежа называется размер листа, определяемый размерами внешней рамки.*

ГОСТ 2.301-68 установил следующие основные форматы листов чертежей, их обозначения и размеры (табл. 1).

Таблица 1

*Обозначения и размеры основных форматов*

Обозначение формата	A0	A1	A2	A3	A4
Размеры сторон формата, мм	841x1189	594x841	420x594	297x420	210x297

Основные форматы получают путем последовательного деления на две равные части параллельно меньшей стороне формата площадью 1 кв. м с размерами сторон 1189x841 мм (рис. 1).

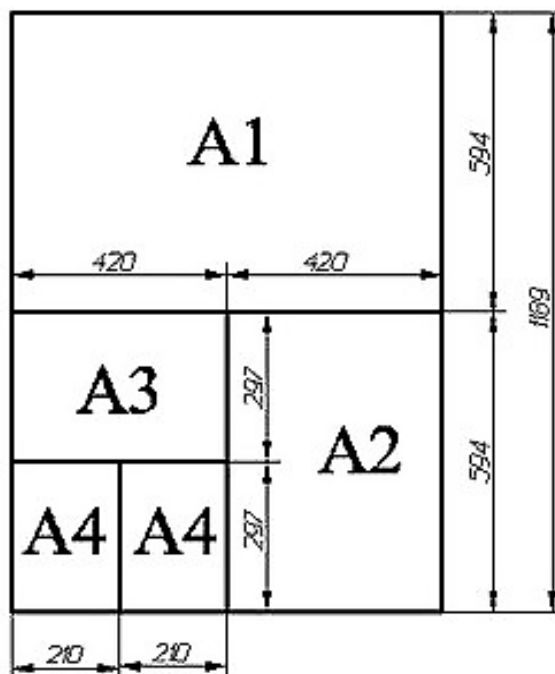


Рисунок 1 - Схема деления форматов

К основным форматам относится и формат A5 с размерами 148x210 мм.

При необходимости допускается использовать дополнительные (производные) форматы. *Дополнительные форматы образуются увеличением коротких сторон основных форматов в  $n$  раз*, где  $n$  (кратность) - целое число: *Ахп*. Обозначение производного формата составляется из обозначения основного формата и его кратности, например, А0х2, А4х8 и т.д. Размеры производных форматов следует выбирать по таблице 2.

Таблица 2

*Форматы*

Кратность	Формат				
	А0	А1	А2	А3	А4
2	1189x1682	-	-	-	-
3	1189x2523	841x1783	594x1261	420x891	297x630
4	-	841x2378	594x1682	420x1189	297x841
5	-	-	594x2102	420x1486	297x1051
6	-	-	-	420x1783	297x1261
7	-	-	-	420x2080	297x1471
8	-	-	-	-	297x1682
9	-	-	-	-	297x1892

Внутри внешней рамки формата сплошной основной линией проводится внутренняя рамка. Сверху, справа и снизу расстояние между линиями, ограничивающими внутреннюю и внешнюю рамки, принимаются равными 5мм. С левой стороны для подшивки чертежей оставляют полосу шириной 20 мм. В правом нижнем углу формата располагается *основная надпись*; в левом верхнем углу формата чертится дополнительная графа габаритами 70 x 14, в которой пишется обозначение чертежа (шифр) с поворотом на 180° (рис. 2). Основной формат А4 располагается *только вертикально* (рис. 3), а форматы с А3 по А0 *и вертикально и горизонтально*.

Чертёж без основной надписи не рассматривается, как стандартный элемент документации и не может быть передан в производство. Содержание основной надписи, её расположение и размеры регламентируются стандартом. В основной надписи записываются необходимые сведения такие как: обозначение чертежа, наименование чертежа, информация о предприятии, разработавшем чертёж, вес изделия, масштаб отображаемой детали, стадию разработки, номер листа, дату выпуска чертежа, а так же информацию о лицах ответственных за данный документ. Графические элементы основной надписи выполняются линиями, предусмотренными для нанесения видимого контура, все остальные линии тонкие.

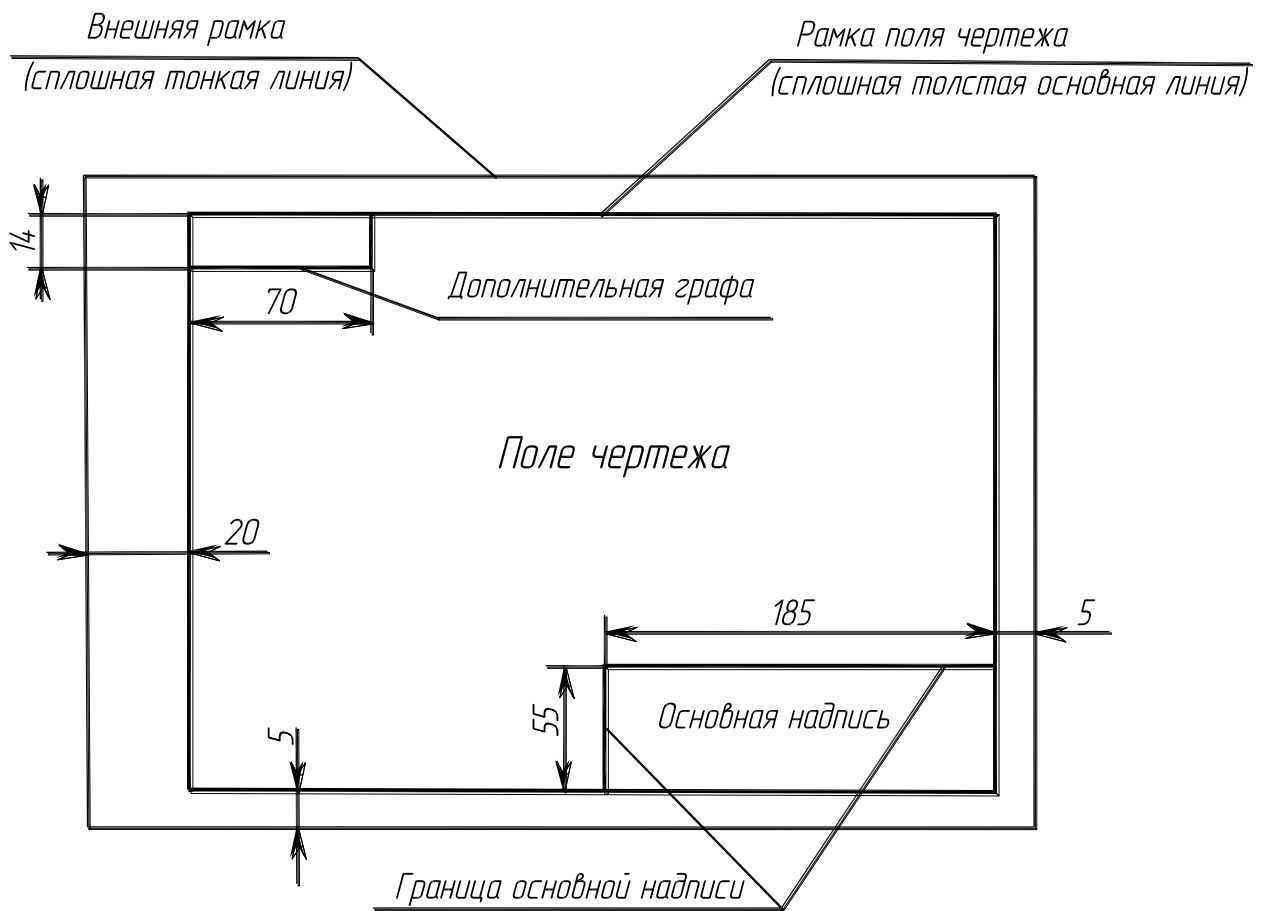


Рисунок 2 – Пример оформления листа формата больше A4

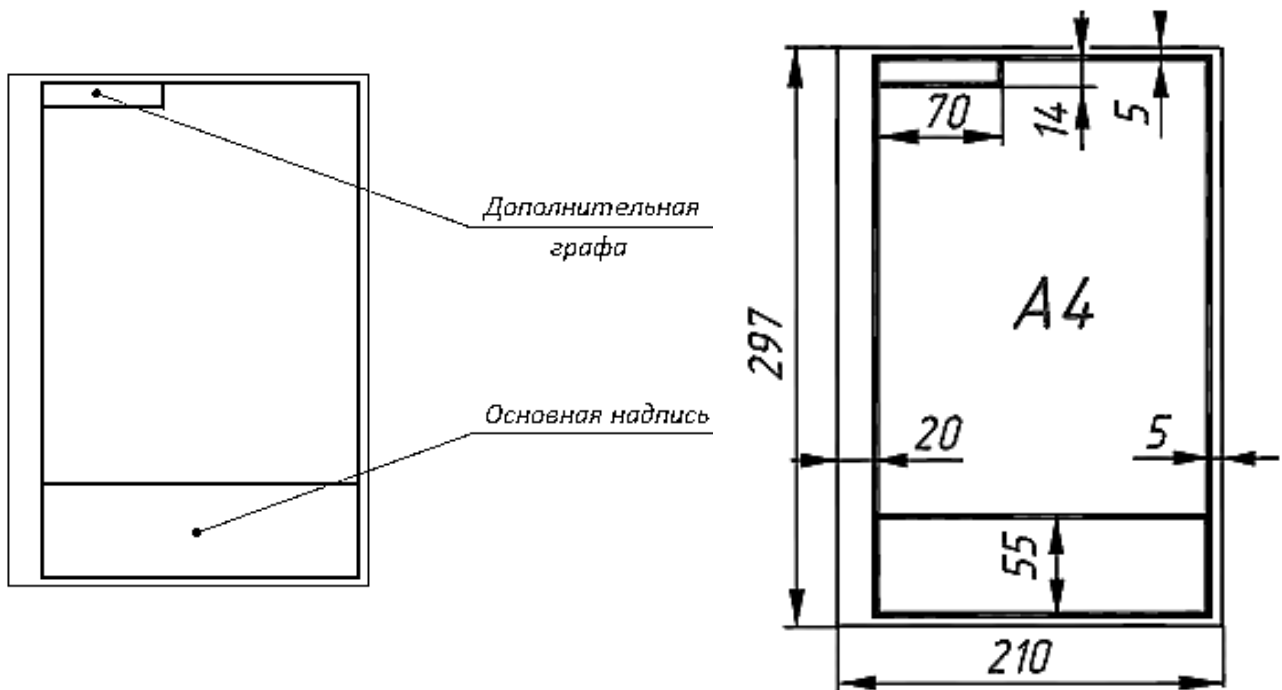


Рисунок 3 – Примеры оформления листа формата A4

Рекомендуемая основная надпись для чертежей (эпюров), выполняемая на первом листе чертежей и схем, приведена на рисунке 4.

Содержание ее граф следующее:

- (1) - наименование задания или изделия;
- (2) - обозначение (шифр) чертежа по ГОСТ 2.201-80;
- (3) - обозначение материала детали (заполняется только на рабочих чертежах деталей);
- (4) - литера, присвоенная данному документу по ГОСТ 2.103-68 (в нашем случае учебная - У);
- (5) - масса изделия по ГОСТ 2.109-73 (в чертежах по начертательной геометрии графа не заполняется);
- (6) - масштаб по ГОСТ 2.302-68;
- (7) - порядковый номер листа (на документах, состоящих из одного листа, не заполняется);
- (8) - число листов документа одного задания (заполняется только на первом листе);
- (9) - наименование или различительный индекс предприятия (изготовителя), выпускающего документ (чертеж);
- (10) - характер работы, выполняемой лицом, подписавшим документ (на учебных чертежах порядок заполнения строк следующий: «Разработал», «Проверил», «Утвердил»);
- (11) - фамилии лиц, подписавших документ;
- (12) - подписи лиц, фамилии которых указаны в графе 11;
- (13) - дата подписания документа.

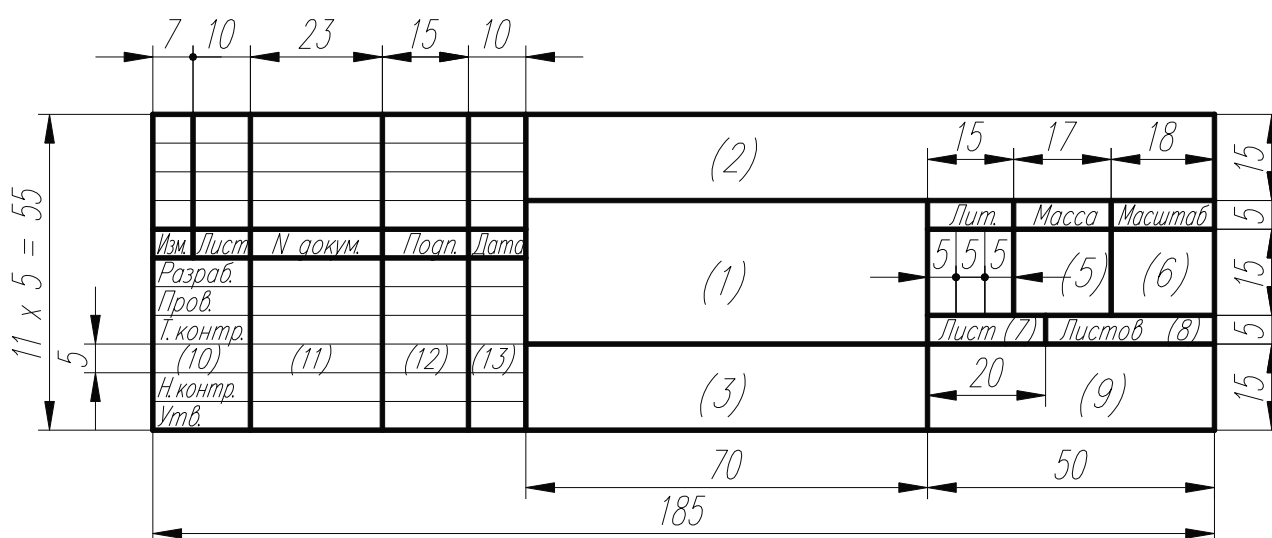


Рисунок 4 - Основная надпись (форма 1)



## 2.2. Масштаб чертежа

Чертежи, на которых изображения выполнены в истинную величину, дают правильное представление о действительных размерах предмета. Однако при очень малых размерах предмета или, наоборот, при слишком больших, его изображение приходится увеличивать или уменьшать.

*Масштабом чертежа называется отношение линейных размеров изображения изделия к действительным размерам изделия.*

Масштабы установлены ГОСТ 2.302-68 и должны выбираться из соответствующего ряда (табл. 3). Масштаб, указанный в предназначенной для этого графе основной надписи чертежа, должен обозначаться по типу 1:1; 1:2; 2:1 и т. д., а для отдельных изображений на поле чертежа значение масштаба указывается в скобках - (1:1); (1:2); (5:1) и т. д.

Таблица 3

*Группы масштабов*

Масштабы уменьшения	1:2; 1:2,5; 1:4; 1:5; 1:10; 1:15; 1:20; 1:25; 1:40; 1:50; 1:75; 1:100; 1:200; 1:400; 1:500; 1:800; 1:1000
Натуральная величина	1:1
Масштабы увеличения	2:1; 2,5:1; 4:1; 5:1; 10:1; 20:1; 40:1; 50:1; 100:1; 200:1; 400:1; 500:1; 800:1; 1000:1

*Произвольные масштабы при выполнении чертежей использовать нельзя.* Следует помнить, что независимо от выбранного стандартного масштаба размерные числа на чертеже должны соответствовать натуральным размерам изображенного изделия.

## 2.3. Линии чертежа по ГОСТ 2.303 – 68

Контрольную работу выполняют карандашом с применением чертежных инструментов (если изучение компьютерной графики выделено в отдельный предмет). Но в работах по начертательной геометрии приветствуется обводка результатов выполненных построений цветными гелевыми ручками.

По правилам выполнения и оформления графических документов на одном чертеже за исходную принимают *сплошную толстую основную линию*, линию видимого контура изображения. Толщина этой линии  $S$  должна выбираться в пределах от 0,5 до 1,4 мм. Целесообразнее всего на чертежах эту толщину выдерживать 0,8...1 мм. Толщину остальных линий чертежа устанавливают в зависимости от выбора толщины основной линии. Толщина линий каждого типа должна быть одинакова для всех изображений одного масштаба на данном чертеже.

Названия, изображения, толщины и основное назначение всех типов линий, используемых при выполнении графических построений, приведены в таблице 4. Практическое применение различных типов линий показано на рисунке 5.

Таблица 4

*Типы линий чертежа*

Наименование	Начертание	Толщина линии	Назначение
Сплошная толстая основная		$s$ (0,5...1,4 мм)	Линии видимого контура, линии перехода видимые
Сплошная тонкая		$s/3... s/2$	Линии выносные и размерные, линии штриховки, линии-выноски и др.
Сплошная волнистая		$s/3... s/2$	Линии обрыва, линии разграничения вида и разреза
Штриховая		$s/3... s/2$	Линии невидимого контура, линии перехода невидимые
Штрихпунктирная тонкая		$s/3... s/2$	Линии осевые и центровые. Линии сечений, являющиеся осями симметрии для наложенных или вынесенных сечений
Штрихпунктирная утолщенная		$s/2...2/3 s$	Линии, обозначающие поверхности, подлежащие обработке или покрытию и др.
Разомкнутая		$s ... 1,5 s$	Линии сечений
Сплошная тонкая с изломами		$s/3... s/2$	Длинные линии обрыва
Штрихпунктирная с двумя точками тонкая		$s/3... s/2$	Линии сгиба на развертках, линии для изображений изделий в крайних положениях и др.

Толщина линий  $S/3$  допускается только для чертежей, выполненных тушью, на форматах с А4 по А2.

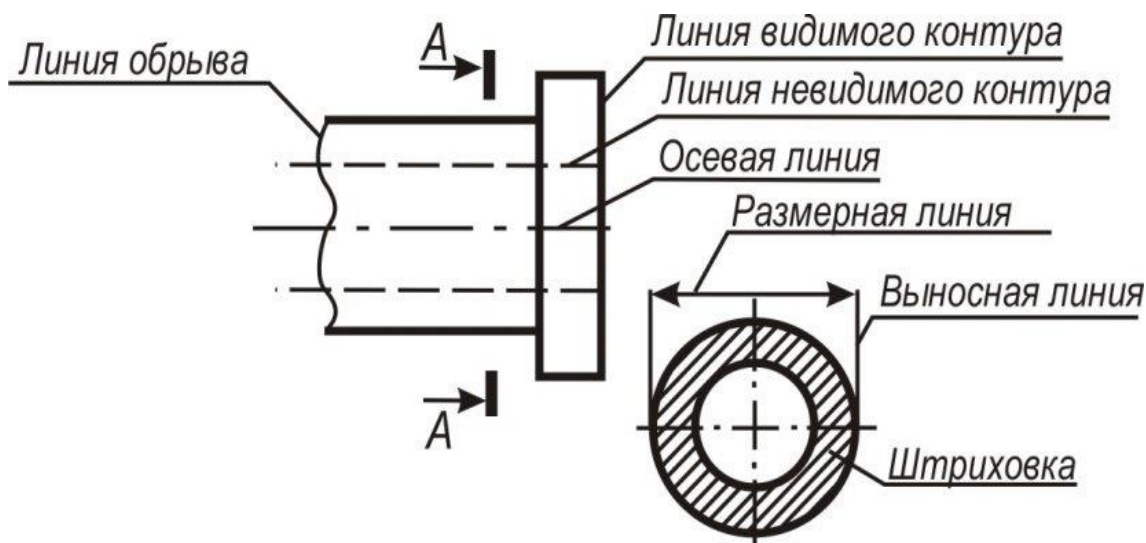


Рисунок 5 - Применение типов линий на чертеже

## 2.4. Шрифты по ГОСТ 2.304-81

Все надписи на чертежах должны быть выполнены чертёжным шрифтом. Начертание букв и цифр чертёжного шрифта устанавливается стандартом. Существуют русский, латинский и греческий алфавиты, а также арабские и римские цифры и знаки.

Основным параметром шрифта является его размер  $h$  - высота прописных букв в миллиметрах, измеренная по перпендикуляру к основанию строки. *Высота  $h$  определяет размер шрифта.* Он может быть равен 1,8; 2,5; 3,5; 5; 7; 10; 14; 20; 28; 40 мм. *Рекомендуемые размеры шрифта - 3,5; 5; 7 и 10.*

ГОСТ 2.304-81 установил 2 типа шрифтов: тип А и тип Б, каждый из которых можно выполнить без наклона или с наклоном 75 градусов к основанию строки:

1. Тип А без наклона ( $d=h/14$ );
2. Тип А с наклоном около  $75^\circ$  ( $d=h/14$ );
3. Тип Б без наклона ( $d=h/10$ );
4. Тип Б с наклоном около  $75^\circ$  ( $d=h/10$ ).

Тип определяется параметрами шрифта: расстояниями между буквами, минимальный шаг строк, минимальное расстояние между словами и толщина линий шрифта. Шрифты выполняют при помощи вспомогательной сетки,

образованной тонкими линиями, в которую вписывают буквы. Шаг линий сетки определяется в зависимости от толщины линий шрифта  $d$ .

Основные параметры шрифта типа А с наклоном около  $75^\circ$  ( $d = \frac{1}{14}h$ ) приведены в таблице 5.

Таблица 5

*Параметры шрифты типа А с наклоном около  $75^\circ$  ( $d = \frac{1}{14}h$ )*

Параметры шрифта	Обозначение	Относительный размер	Размер, мм							
			2,5	3,5	5,0	7,0	10,0	14,0	20,0	
Высота прописных букв	h	$(\frac{14}{14})h$	14d	2,5	3,5	5,0	7,0	10,0	14,0	20,0
Высота строчных букв	c	$(\frac{10}{14})h$	10d	1,8	2,5	3,5	5,0	7,0	10,0	14,0
Расстояние между буквами	a	$(\frac{2}{14})h$	2d	0,35	0,5	0,7	1,0	1,4	2,0	2,8
Минимальный шаг строк	b	$(\frac{22}{14})h$	22d	4,0	5,5	8,0	11,0	16,0	22,0	31,0
Минимальное расстояние между словами	e	$(\frac{6}{14})h$	6d	1,1	1,5	2,1	3,0	4,2	6,0	8,4
Толщина линий шрифта	d	$(\frac{1}{14})h$	d	0,18	0,25	0,35	0,5	0,7	1,0	1,4

Начертание букв и цифр шрифта типа А с наклоном около  $75^\circ$  ( $d = \frac{1}{14}h$ ) показаны на рисунке 6.

Желательно внимательно изучить формы букв и цифр, соотношения между высотой и остальными их размерами. Ширина букв и цифр колеблется от  $0,3h$  до  $0,8h$ , в этом - одна из трудностей усвоения стандартного шрифта. Необходимо развивать глазомер и помнить, что ширина любого знака не может быть равной или быть больше, чем номер шрифта. Недопустимо неправильное начертание семерки, когда ее легко спутать с единицей; шестерки, когда ее легко принять за ноль и т. п.

На рисунке 7 приведен пример процесса написания нескольких букв стандартного шрифта.



Рисунок 6 - Начертание букв и цифр русского алфавита типа А ( $d = h/14$ )



Рисунок 7 - Написание букв шрифта

### 3. Контрольная работа по начертательной геометрии

*Цели контрольной работы:* развитие пространственного мышления, ознакомление с основами геометрических построений, отработка умений решения графических задач на плоскости.

Контрольная работа состоит из четырех графических заданий (эпюров) по основным темам курса.

#### 3.1. Теоретические положения к выполнению эпюра 1

##### 3.1.1. Задание на чертеже точки, прямой, плоскости

Любое отображение пространственных объектов на плоскость осуществляется посредством проецирования. Все чертежи строят при помощи способа проецирования (задания), поэтому их и называют *проекционными*. Рассмотрение способа проекций начинается с построения проекций точки, так как при создании плоского изображения *любая пространственная форма рассматривается как множество принадлежащих ей точек*.

Проекция точки есть точка. Чтобы спроецировать некоторую точку  $A$  на плоскость  $\Pi$ , надо из точки на плоскость опустить перпендикуляр (рис. 8,*а*). Если же на плоскости  $\Pi$  задать проекцию точки, например  $B_1$ , то по этой одной проекции нельзя определить положение пространственной точки  $B$ , так как на проецирующем луче будет множество точек, соответствующих этой проекции (рис. 8,*б*). Другими словами одна проекция не определяет положение точки в пространстве.

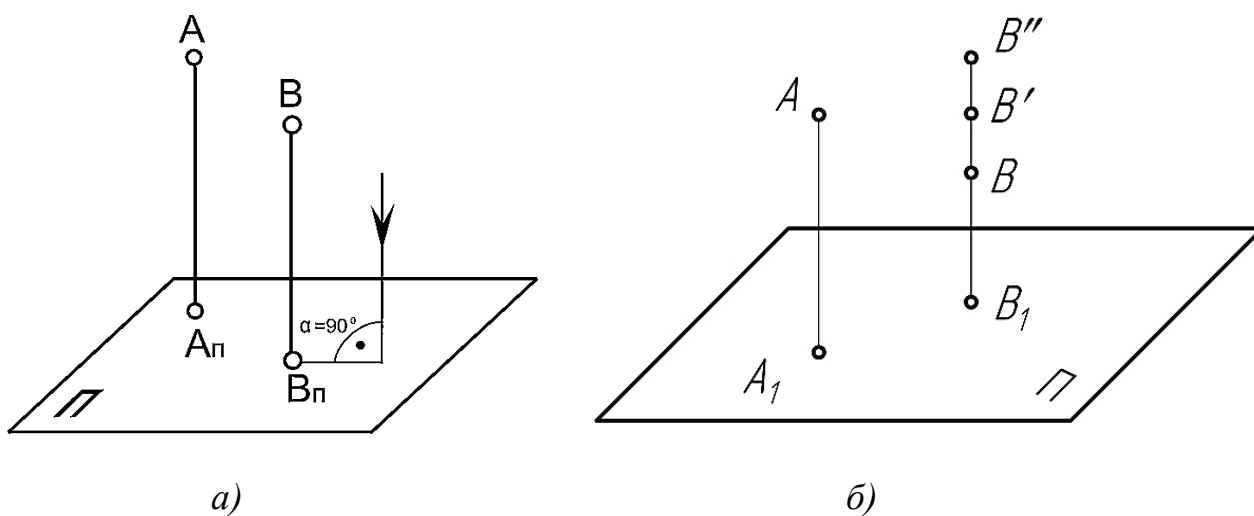


Рисунок 8 - Проецирование точки

Графическое решение задач выполняют на наглядных и комплексных чертежах, а также на эпюрах - чертежах по начертательной геометрии.

Если некоторую точку  $A$  спроецировать на три взаимно перпендикулярные плоскости проекций  $\pi_1, \pi_2$  и  $\pi_3$ , то получим три проекции точки - горизонтальную  $A_1$ , фронтальную  $A_2$  и профильную  $A_3$ .

Из наглядного чертежа (рис. 9) видно, что все три проекции точки взаимосвязаны между собой.

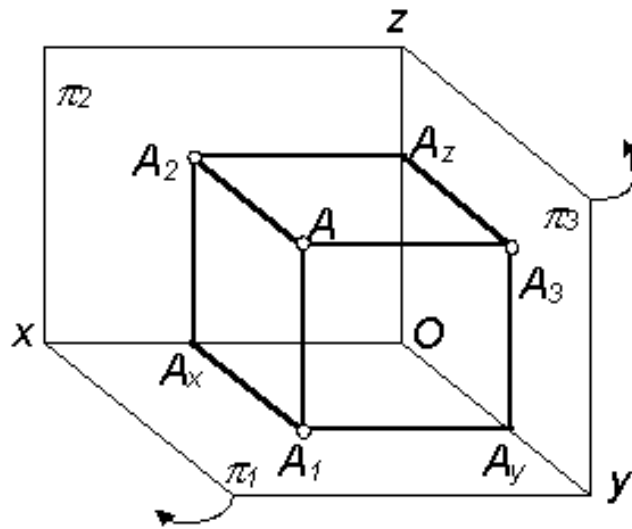


Рисунок 9 - Наглядный чертеж точки

*Необходимо отметить:*

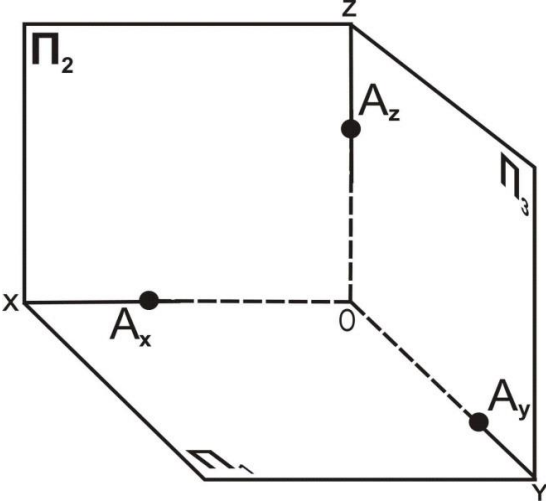
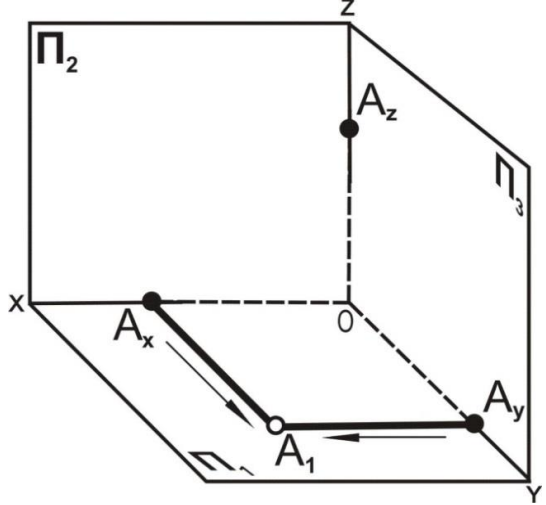
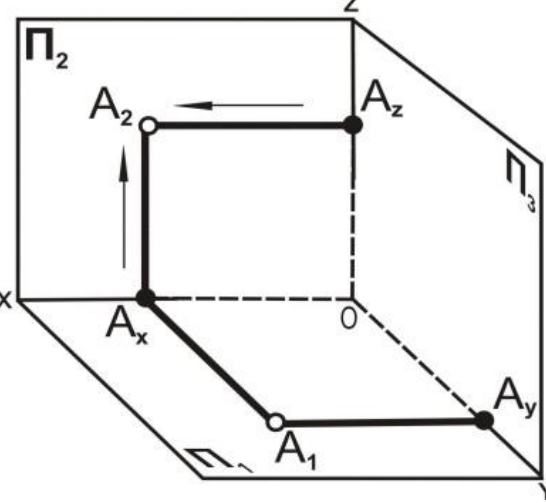
- 1). Две проекции точки определяют положение третьей ее проекции.
- 2). Любая точка пространства задается координатами:
  - $AA_3 = A_1A_Z = A_XO = A_2A_Z$  - расстояние от  $A$  до  $\pi_3$  - это координата  $X$ ;
  - $AA_2 = A_1A_X = A_YO = A_3A_Z$  - расстояние от  $A$  до  $\pi_2$  - это координата  $Y$ ;
  - $AA_1 = A_2A_X = A_ZO = A_3A_Y$  - расстояние от  $A$  до  $\pi_1$  - это координата  $Z$ .
- 3). Точки  $A_X, A_Y$  и  $A_Z$  называют точками схода.
- 4). Любую проекцию точки определяют две координаты:
  - $A_1$  -  $X$  и  $Y$ ;  $A_2$  -  $X$  и  $Z$ ;  $A_3$  -  $Y$  и  $Z$ .
- 5). Линии  $|A_1A_2|, |A_2A_3|, |A_2A_X|, |A_XA_1|, |A_1A_Y|, |A_3A_Y|$  - линии связи.
- 6). Горизонтальная  $A_1$  и фронтальная  $A_2$  проекции лежат на одной линии связи (вертикальной), перпендикулярной оси  $X$ , а фронтальная  $A_2$  и профильная  $A_3$  проекции лежат на одной линии связи, перпендикулярной оси  $Z$ , то есть находятся на одной высоте.

Следовательно, положение точки  $A$  в пространстве определяется тремя координатами  $X, Y, Z$ , показывающими величины расстояний, на которые точка удалена от плоскостей проекций.

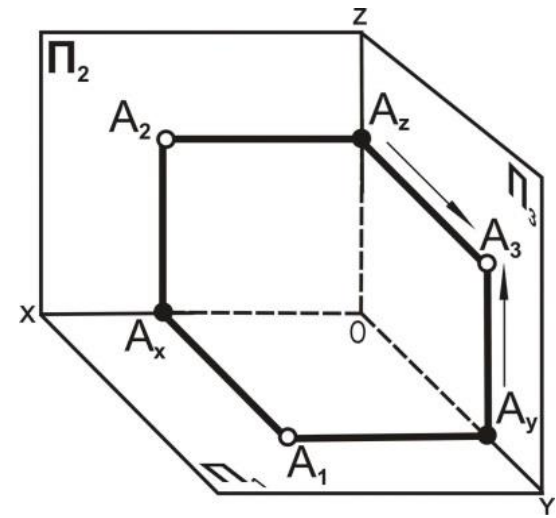
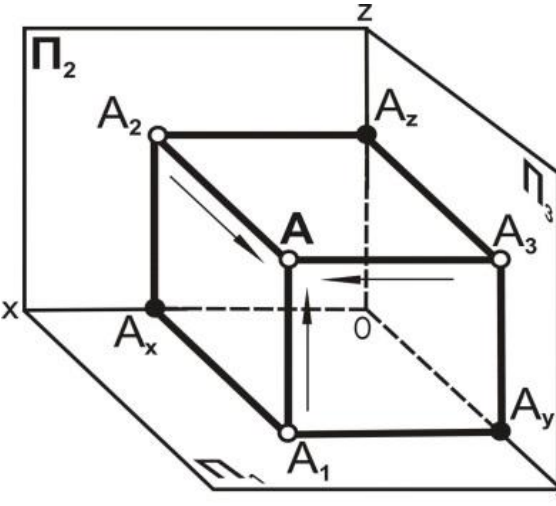
В таблице 6 представлен общий алгоритм построения точки  $A$  по заданным координатам в пространственной (наглядной) модели системы трех плоскостей проекций  $\Pi_1\Pi_2\Pi_3$ .

Таблица 6

## Алгоритм построения наглядного изображения точки по координатам

Словесная форма	Графическая форма
<i>I</i>	<i>II</i>
<p>1). Отложив на осях X, Y, Z соответствующие координаты точки A, получают точки схода - <math>A_x, A_y, A_z</math>.</p>	
<p>2). Горизонтальную проекцию <math>A_1</math> находят на пересечении линий связи из точек схода <math>A_x</math> и <math>A_y</math>, проведенных параллельно осям X и Y.</p>	
<p>3). Фронтальная проекция <math>A_2</math> определяется на пересечении линий связи из точек <math>A_x</math> и <math>A_z</math>, проведенных параллельно осям X и Z.</p>	



I	II
<p>4). Профильная проекция <math>A_3</math> находится на пересечении линий связи из точек <math>A_y</math> и <math>A_z</math>, проведенных параллельно осям <math>Y</math> и <math>Z</math>.</p>	
<p>5). Точка <math>A</math> располагается на пересечении линий связи, проведенных из проекций точки - <math>A_1, A_2</math> и <math>A_3</math>.</p>	

Чтобы построить для точки комплексный чертеж или эпюр Монжа пространственное изображение необходимо преобразовать в плоскостное. При этом плоскости проекций разворачиваются следующим образом: фронтальная плоскость  $\Pi_2(\pi_2)$  всегда остается на месте, горизонтальная плоскость  $\Pi_1(\pi_1)$  поворотом вниз вокруг оси  $X$ , а профильная плоскость  $\Pi_3(\pi_3)$  поворотом вправо вокруг оси  $Z$  совмещаются с фронтальной плоскостью (оба поворота на 90 градусов).

На рисунке 10 выполнен комплексный чертеж точки  $A(20;15;25)$ .

*Алгоритм построения:*

1). Отложив на осях  $X, Y, Z$  соответствующие координаты точки  $A$ , получают точки схода  $A_x, A_y$  и  $A_z$ .

2). Горизонтальная проекция  $A_1$  находится на пересечении линий связи из точек  $A_x$  и  $A_y$ , проведенных параллельно осям  $X$  и  $Y$ .

3). Фронтальная проекция  $A_2$  располагается на пересечении линий связи из точек  $A_X$  и  $A_Z$ , проведенных параллельно осям  $X$  и  $Z$ .

4). Профильная проекция  $A_3$  определяется на пересечении линий связи из точек  $A_Z$  и  $A_Y$ , проведенных параллельно осям  $Z$  и  $Y$ .

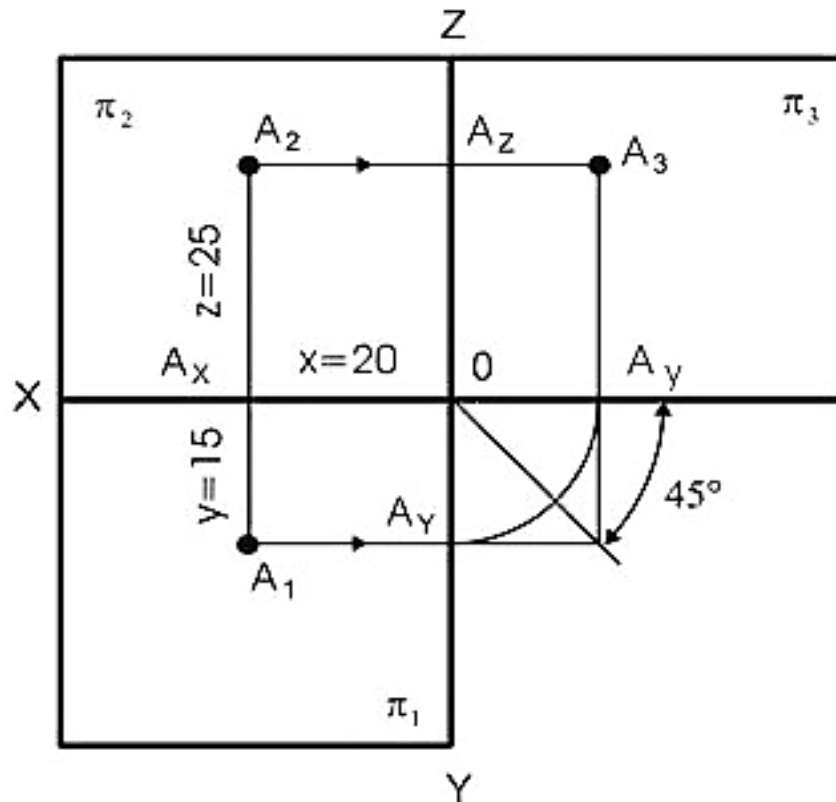


Рисунок 10 - Комплексный чертеж точки

Этапы преобразования наглядного чертежа точки в комплексный чертеж, а затем и в эпюр Монжа изображены на рисунке 11.

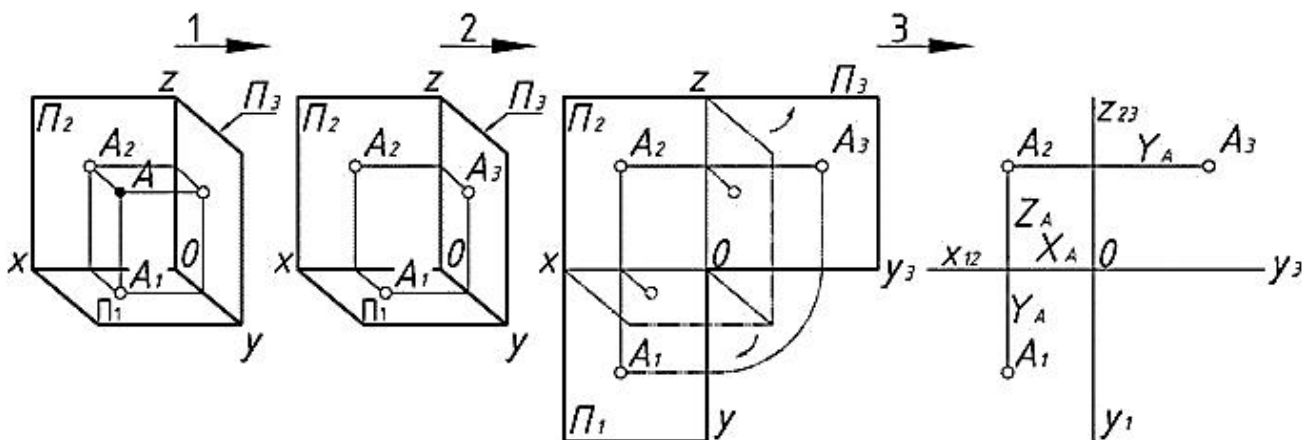


Рисунок 11 – Этапы преобразования чертежей точки

На рисунке 12 показано построение эпюра точки  $A(25;10;20)$  по заданным координатам.

Построение:

- проводят координатные оси  $X, Y, Z$ ;
- откладывают координаты по трем осям;
- находят фронтальную  $A_2$  и горизонтальную  $A_1$  проекции точки  $A$ ;
- с помощью переноса  $A_y$  строят профильную проекцию точки  $A - A_3$ .

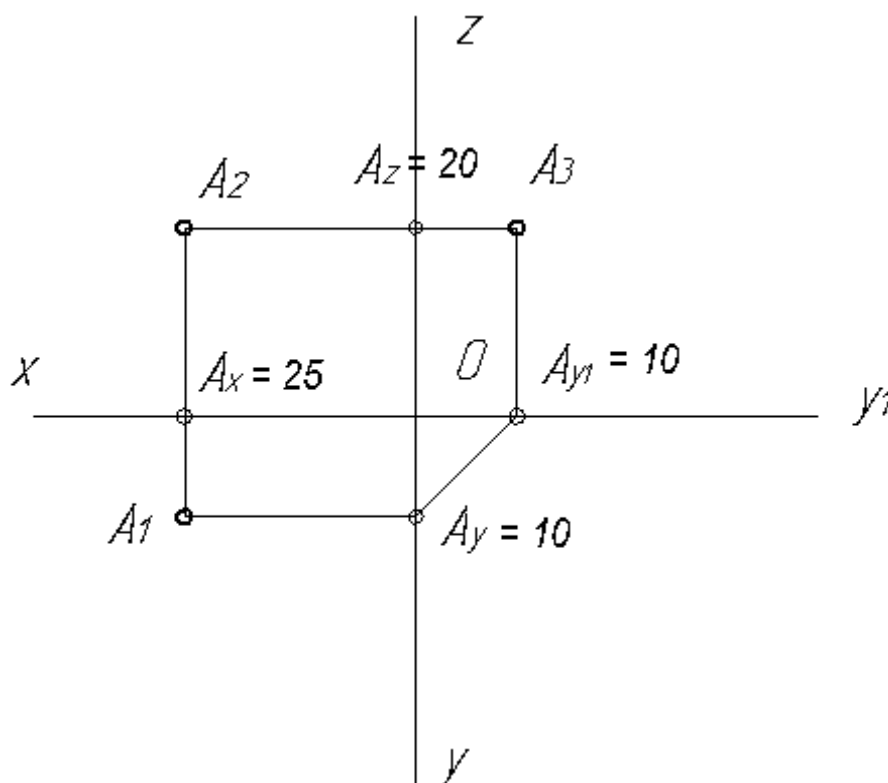


Рисунок 12 - Эпюр точки

Несколько точек на одном проецирующем луче называются *конкурирующими*. Объяснение такому названию в том, что в пространстве для наблюдателя одна из точек видна, другие нет. Если рассматривать две конкурирующие точки, то на чертеже одна из проекций точек видима, проекция другой точки – невидима. Задача определения видимости конкурирующих точек имеет большое практическое значение, поскольку окончательная обводка изображения геометрической фигуры производится с учетом видимости всех ее элементов.

На пространственной модели проецирования (рис. 13,а) из двух конкурирующих точек  $A$  и  $B$  наблюдателю видна точка  $A$ . Судя по цепочке  $I \Rightarrow A \Rightarrow B$  точка  $A$  находится ближе к наблюдателю, чем точка  $B$  и дальше от плоскости проекций  $\Pi_1$ , то есть  $Z_A > Z_B$ . Сравнению подлежат координаты  $Z$

этих точек. Если видима сама точка  $A$ , то видима и ее проекция  $A_1$  по отношению к совпадающей с ней проекцией  $B_1$ . Для наглядности невидимые проекции точек часто заключают в скобки.

На эюре ( $I_2 \Rightarrow A_2 \Rightarrow B_2$ ) останутся совпадающие проекции точек на плоскости проекций  $\Pi_1$  и отдельные изображения – на  $\Pi_2$  (рис. 13,б).

Из двух конкурирующих точек  $C$  и  $D$  наблюдатель видит точку  $D$  и ее проекцию  $D_2$ . Поскольку общий проецирующий луч этих точек параллелен оси  $Y$ , то признак видимости конкурирующих точек определяется неравенством  $Y_D > Y_C$ . Следуя цепочке  $I_2 \Rightarrow D_1 \Rightarrow C_1$  на эюре останутся совпадающие проекции точек на плоскости  $\Pi_2$  и отдельные изображения – на  $\Pi_1$ .

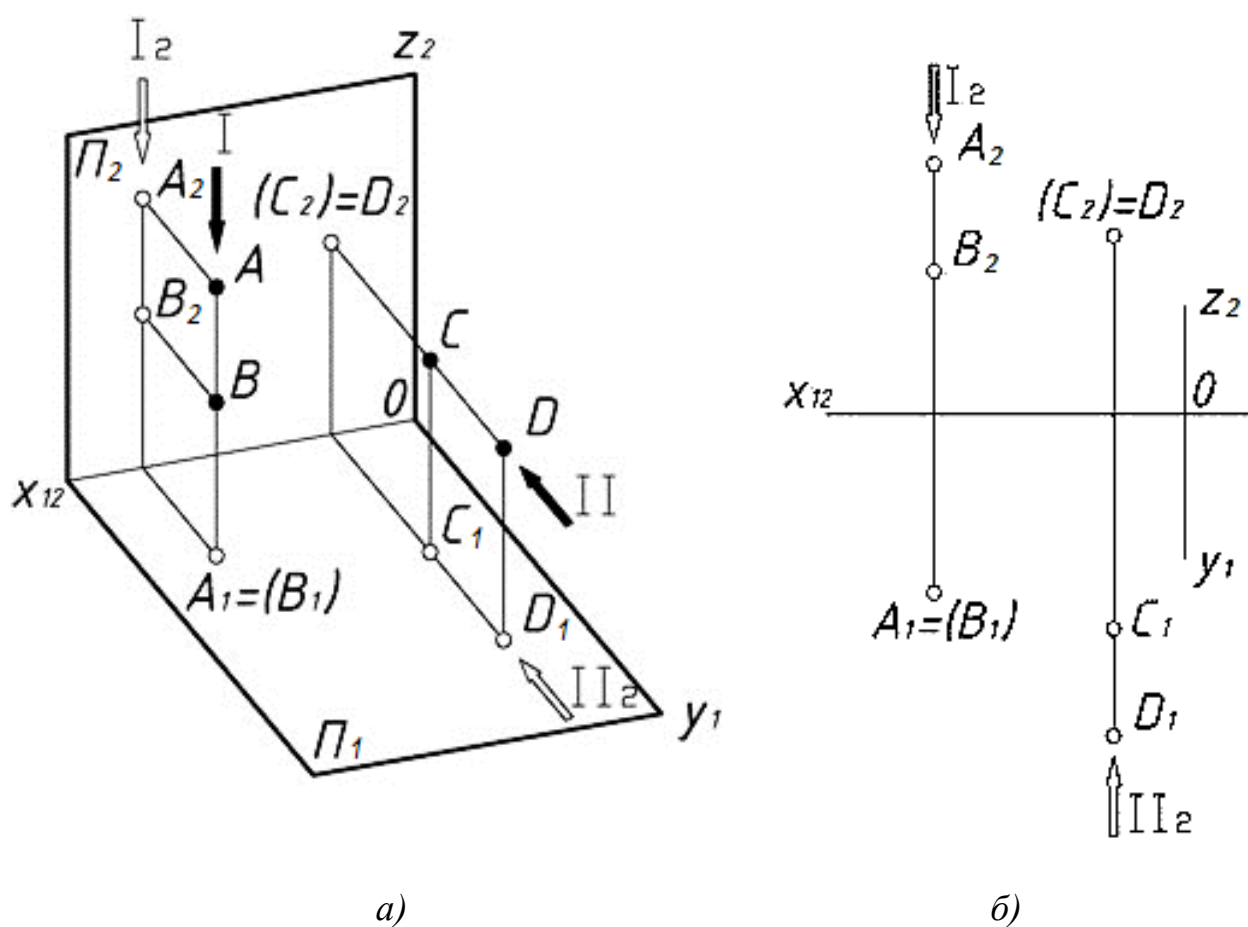


Рисунок 13 – Проецирование конкурирующих точек  
а) пространственное изображение; б) эюр

Точки  $A$  и  $B$  являются горизонтально-конкурирующими, а точки  $C$  и  $D$  – фронтально-конкурирующими.

Проецирование прямой линии опирается на следующие теоретические положения:

1). Прямая линия определяется двумя точками. Для отображения прямой на плоскости достаточно спроецировать на эту плоскость две ее точки.

2). Любая прямая неограниченна и не имеет определенной длины, поэтому и задается на чертеже чаще всего отрезком. Две проекции прямой (или отрезка) – это минимальное, но достаточное количество проекций на комплексном чертеже или эюре.

3). Прямая, не параллельная и не перпендикулярная ни одной из плоскостей проекций, называется *прямой общего положения* (рис. 14).

4). *Прямые частного положения* расположены параллельно или перпендикулярно плоскостям проекций (прямые уровня и проецирующие прямые).

5). Прямую на чертежах часто задают отрезком.

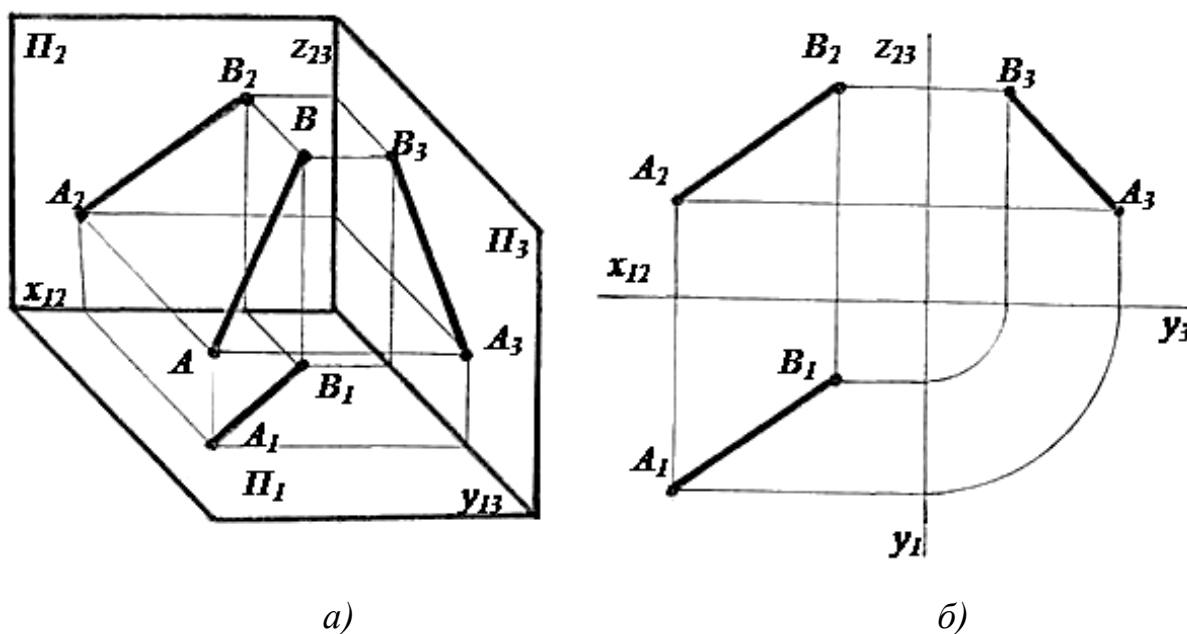


Рисунок 14 – Чертежи отрезка  $AB$  прямой общего положения:  
 а) наглядное изображение; б) эюр

Прямая, параллельная одной плоскости проекций, называется *прямой уровня* (рис. 15).

Прямых уровня три:

- прямая, параллельная горизонтальной плоскости проекций, называется *горизонталью* (горизонтальной прямой) и обозначается  $h(H)$  (рис. 15,а);

- прямая, параллельная фронтальной плоскости проекций, называется *фронталью* (фронтальной прямой) и обозначается  $f(F)$  (рис. 15,б);

- прямая, параллельная профильной плоскости проекций, называется *профильной прямой* и обозначается  $p(P)$  (рис.15,в).

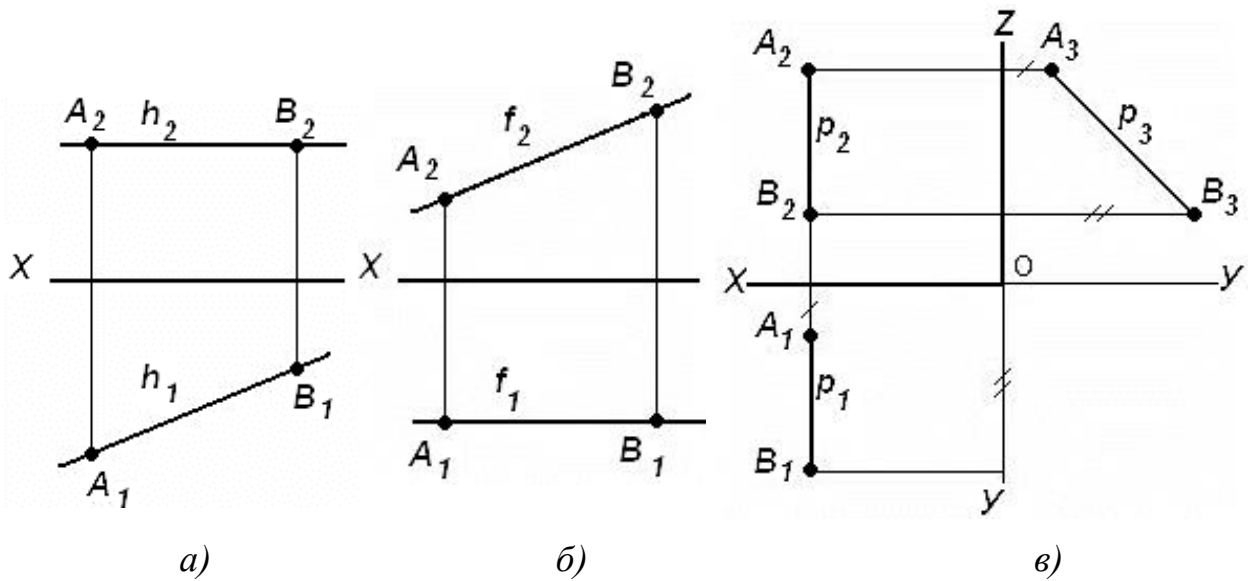


Рисунок 15 – Эпюры прямых уровня

Прямая, параллельная двум плоскостям проекций и перпендикулярная третьей, называется *проецирующей прямой* (рис.16).

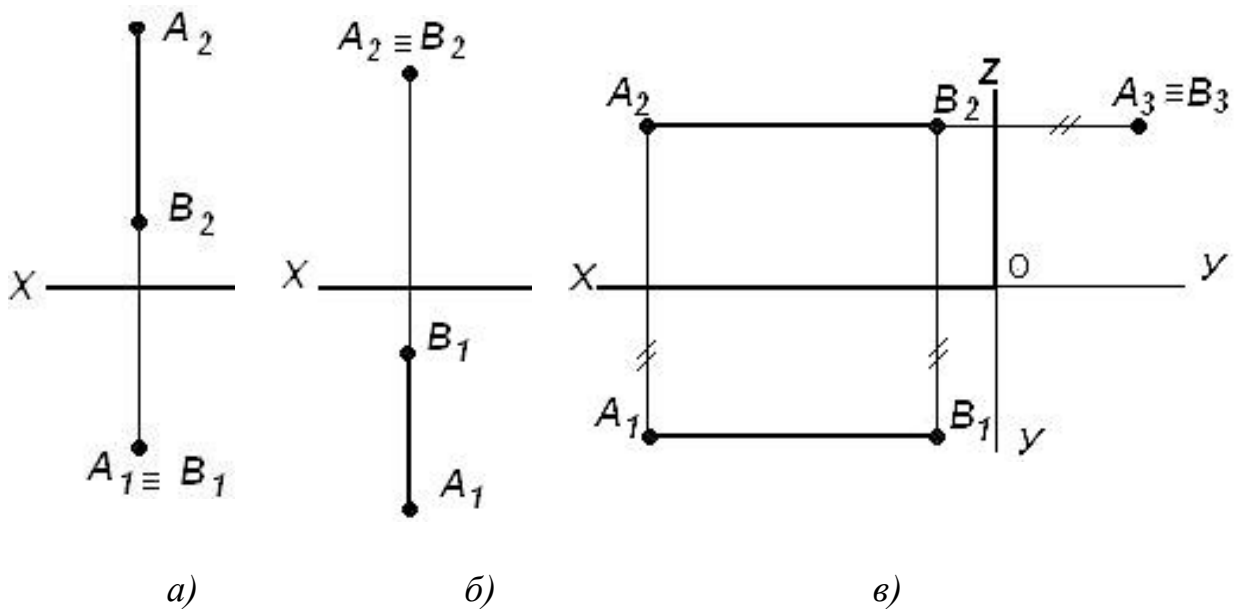


Рисунок 16 – Эпюры проецирующих прямых

Проецирующих прямых три:

- прямая, перпендикулярная плоскости проекций  $\pi_1$ , называется *горизонтально-проецирующей прямой* (рис. 16,а);

- прямая, перпендикулярная плоскости проекций  $\pi_2$ , называется *фронтально-проецирующей прямой* (рис. 16,б);

- прямая, перпендикулярная плоскости проекций  $\pi_3$ , называется *профильно-проецирующей прямой* (рис. 16,в).

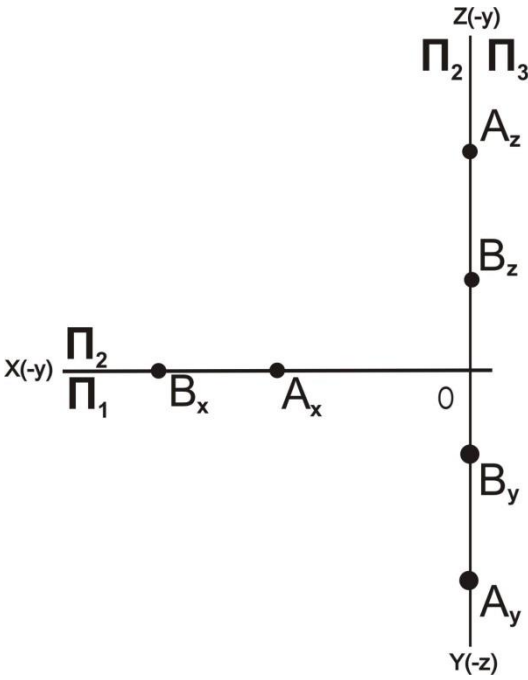
Чертежи любой прямой строятся по аналогии с чертежами точек.

Для получения комплексного чертежа или эпюра прямой линии (отрезка) достаточно построить проекции двух ее точек, а затем соединить между собой прямой линией одноименные проекции этих точек. В результате получаются горизонтальная, фронтальная и профильная проекции прямой или отрезка. Иногда для решения графических задач достаточно построить только две проекции прямой или отрезка.

В таблице 7 дан алгоритм построения комплексного чертежа отрезка прямой линии общего положения по двум заданным точкам А и В. Считается, что координаты точек известны.

Таблица 7

*Алгоритм построения проекций отрезка прямой линии*

Словесная форма	Графическая форма
<i>I</i>	<i>II</i>
<p>1). Отложив значения координат для точек А и В на осях X, Y, Z, получают вспомогательные точки: <math>A_x, B_x</math> на оси X; <math>A_y, B_y</math> на оси Y; <math>A_z, B_z</math> на оси Z.</p> <p>При построении этих точек учитывают знаки координат и откладывают их на осях в соответствующем направлении.</p>	

I	II
<p>2). Строят проекции точек <math>A</math> и <math>B</math>: <math>A_1(X; Y)</math>, <math>B_1(X; Y)</math>; <math>A_2(X; Z)</math>, <math>B_2(X; Z)</math>.</p> <p>3). Соответствующие проекции точек <math>A_1</math> и <math>B_1</math>, <math>A_2</math> и <math>B_2</math> соединяют. Получают проекции отрезка <math>AB</math>: <math>[A_1B_1]</math> и <math>[A_2B_2]</math>.</p> <p><math>[A_1B_1]</math> – это проекция отрезка прямой линии на <math>\Pi_1</math>.</p> <p><math>[A_2B_2]</math> – это проекция отрезка прямой линии на <math>\Pi_2</math>.</p>	
<p>4). Откладывают значение координаты <math>Y</math> и на оси <math>Y</math> профильной плоскости <math>\Pi_3</math>: <math>A_y</math>, <math>B_y</math>, где <math>A_3(Y; Z)</math>, <math>B_3(Y; Z)</math>.</p> <p>5). Одноименные проекции <math>A_3</math> и <math>B_3</math> соединяют толстой линией.</p> <p>Судя по проекциям точек <math>A</math> и <math>B</math> – это отрезок прямой общего положения.</p>	

*Проецирование плоскости* опирается на следующие теоретические положения:

1). Плоскость - одно из основных понятий начертательной геометрии. Плоскостью является двумерный геометрический образ, имеющий длину и ширину.



2). Любая плоскость считается бесконечной, не имеющей толщины и непрозрачной.

3). Плоскость – это поверхность, содержащая полностью каждую прямую, соединяющую любые ее точки.

4). Плоскость в пространстве можно задать следующими способами:

- тремя точками, не лежащими на одной прямой (рис. 17,а);
- прямой и точкой, не принадлежащей этой прямой (рис. 17,б);
- двумя параллельными прямыми (рис. 17,в);
- двумя пересекающимися прямыми (рис. 17,г);
- какой-либо плоской фигурой - треугольником, четырехугольником, окружностью и др. (рис. 17,д);
- следом плоскости (рис. 17,е).

5). Плоскости в пространстве могут занимать общее или частное положение.

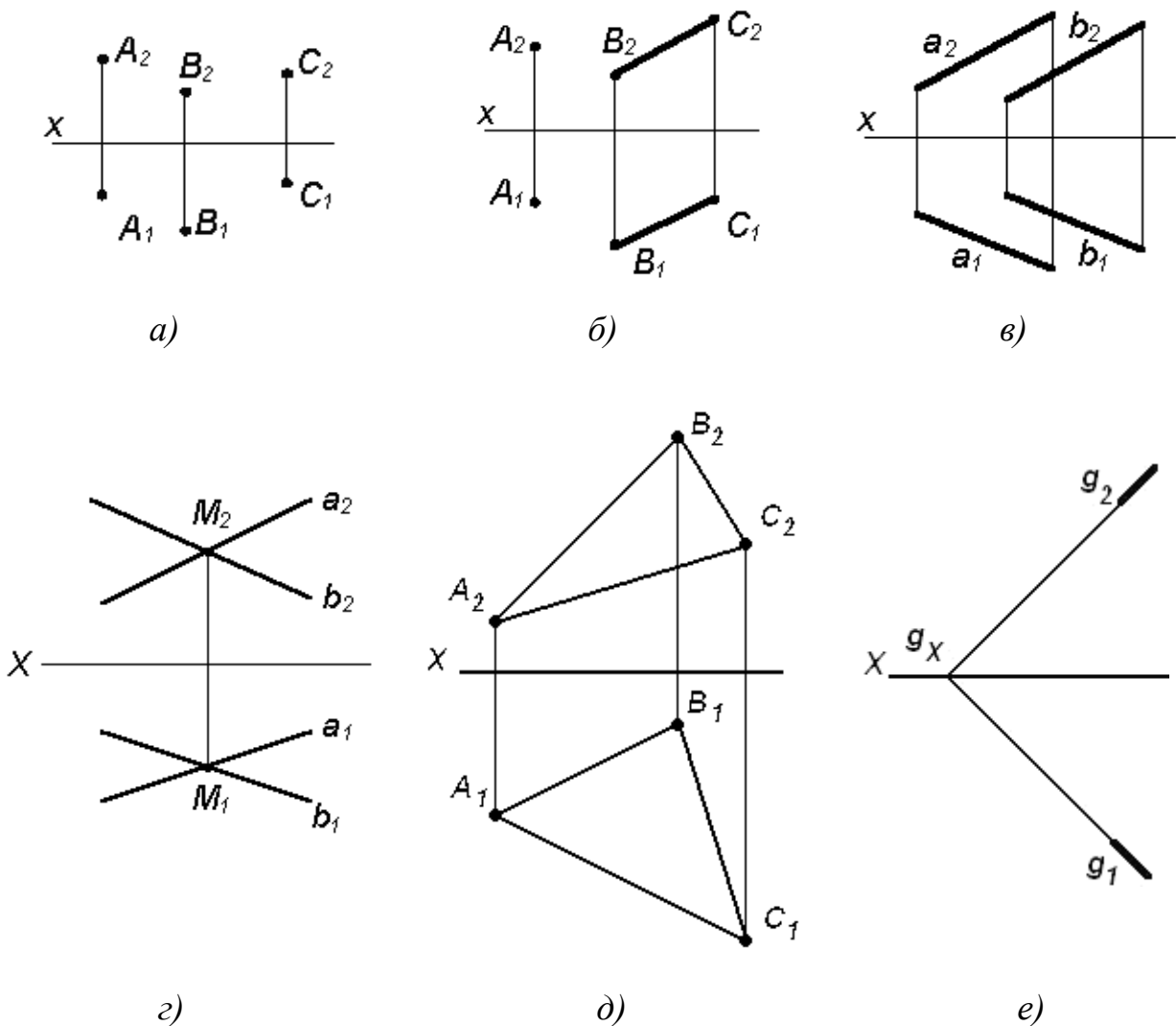


Рисунок 17 - Задание плоскостей на эпюрах

Плоскость, не перпендикулярную и не параллельную ни к одной из плоскостей проекций, называют плоскостью общего положения. На рисунке 18 плоскость общего положения, заданная треугольником ABC, представлена наглядным и комплексным изображениями.

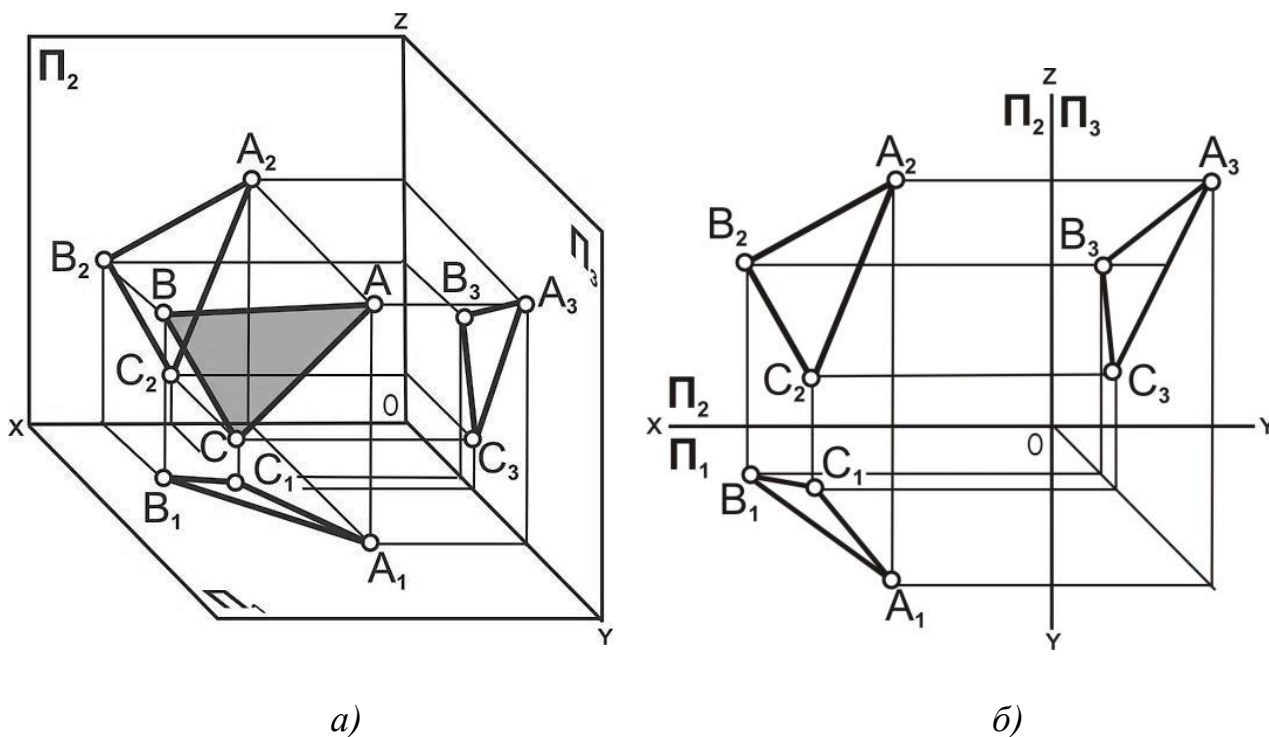


Рисунок 18 – Чертежи плоскости общего положения:  
 а) наглядное изображение; б) комплексный чертеж (эпюр)

На рисунке 19 изображена плоскость общего положения  $\alpha$ , заданная следами. Следом плоскости называется прямая линия, по которой плоскость пересекается с плоскостью проекций.

В зависимости от того, какую плоскость проекций пересекает плоскость  $\alpha$ , различают горизонтальный след  $\alpha_1$ , фронтальный след  $\alpha_2$  и профильный след  $\alpha_3$  плоскости. Следы плоскости общего положения пересекаются попарно на осях проекций в точках  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$ ,  $\alpha_z$ . Эти точки называют точками схода следов.

Плоскости частного положения в пространстве расположены или параллельно или перпендикулярно плоскостям проекций. Плоскости уровня - это плоскости, параллельные одной из плоскостей проекций, таких плоскостей три.

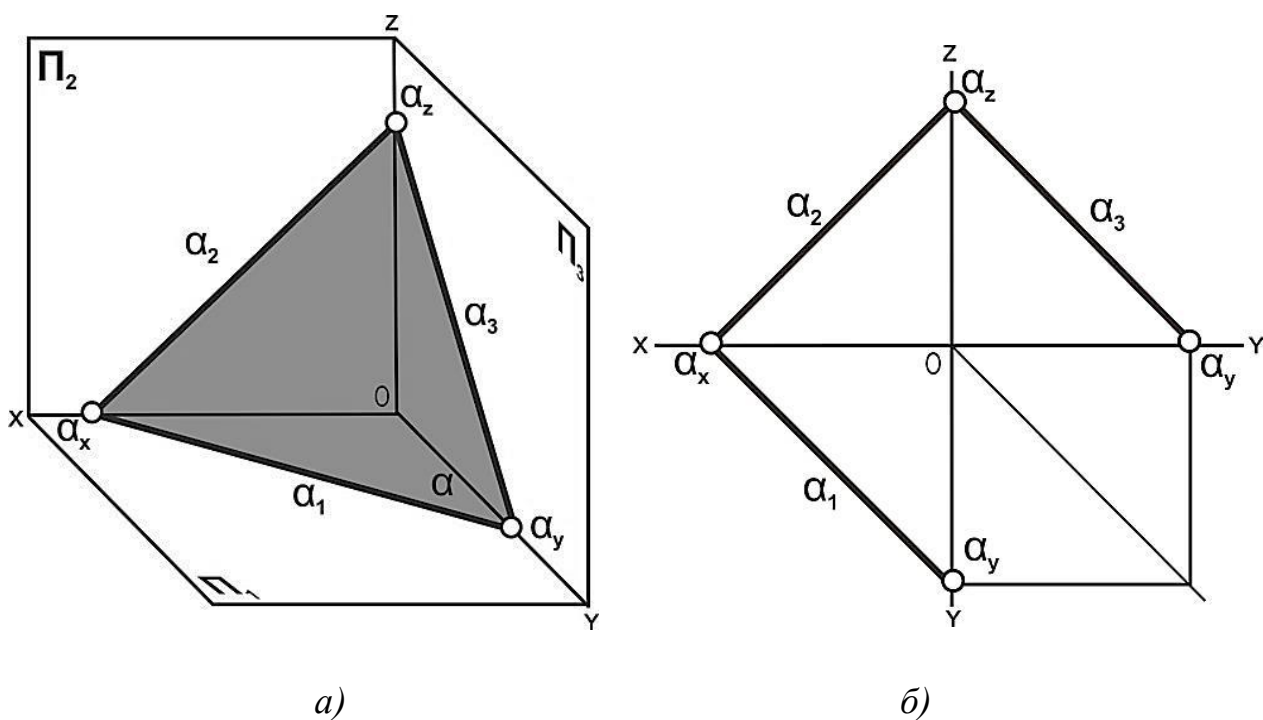


Рисунок 19 – Плоскость общего положения, заданная следами:  
 а) наглядное изображение; б) эпюр

*Горизонтальной плоскостью называется плоскость, параллельная горизонтальной плоскости проекций  $\Pi_1$  -  $\alpha(\Delta ABC) \parallel \Pi_1$  (рис. 20).*

Свойства проекций горизонтальной плоскости:

- горизонтальная проекция, содержащая геометрический объект, принадлежащий этой плоскости, проецируется на плоскость  $\Pi_1$  без искажения;
- фронтальная и профильная проекции проецируются в прямые – следы плоскости  $|A_2B_2C_2| \parallel$  оси X и  $|B_3A_3C_3| \parallel$  оси Y.

*Фронтальной плоскостью называется плоскость, параллельная фронтальной плоскости проекций  $\Pi_2$  -  $\alpha(\Delta ABC) \parallel \Pi_2$  (рис. 21).*

Свойства проекций фронтальной плоскости:

- фронтальная проекция, содержащая геометрический объект, принадлежащий этой плоскости, проецируется на плоскость  $\Pi_2$  без искажения.
- горизонтальная и профильная проекции проецируются в прямые линии – следы плоскости  $|C_1B_1A_1| \parallel$  оси X и  $|A_3C_3B_3| \parallel$  оси Z.

*Профильной плоскостью называется плоскость, параллельная профильной плоскости проекций  $\Pi_3$  -  $\alpha(\Delta ABC) \parallel \Pi_3$  (рис. 22).*

Свойства проекций профильной плоскости:

- профильная проекция, содержащая геометрические объекты, принадлежащие этой плоскости, проецируется на плоскость  $\Pi_3$  без искажения.

- горизонтальная и фронтальная проекции проецируются в прямые – следы плоскости  $|C_1A_1B_1| \parallel$  оси  $Y$  и  $|A_2B_2C_2| \parallel$  оси  $Z$ .

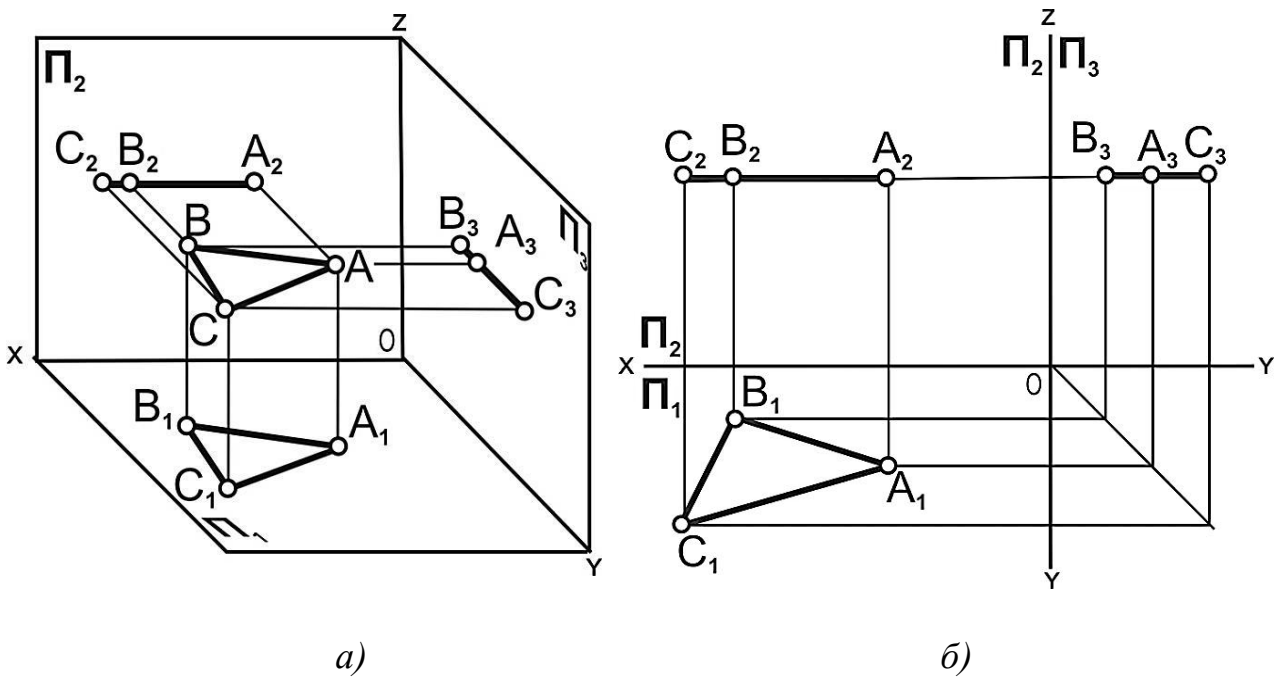


Рисунок 20 – Горизонтальная плоскость:  
 а) наглядное изображение; б) комплексный чертеж (эпюр)

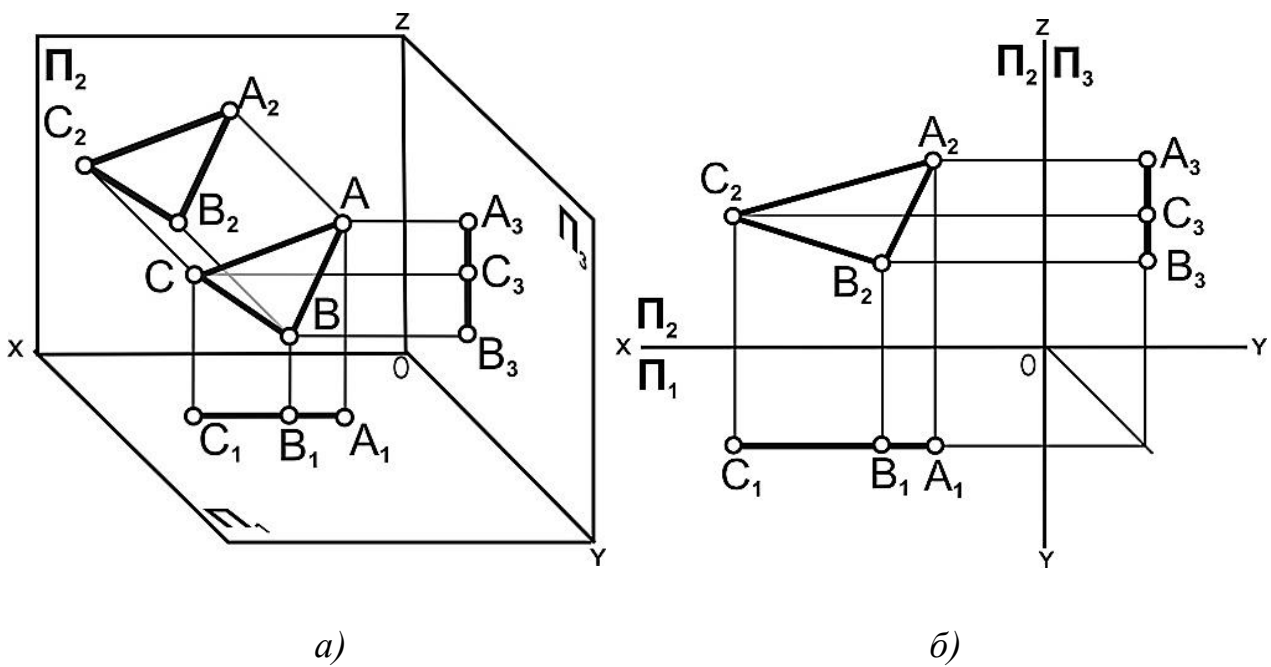


Рисунок 21 – Фронтальная плоскость:  
 а) наглядное изображение; б) комплексный чертеж (эпюр)

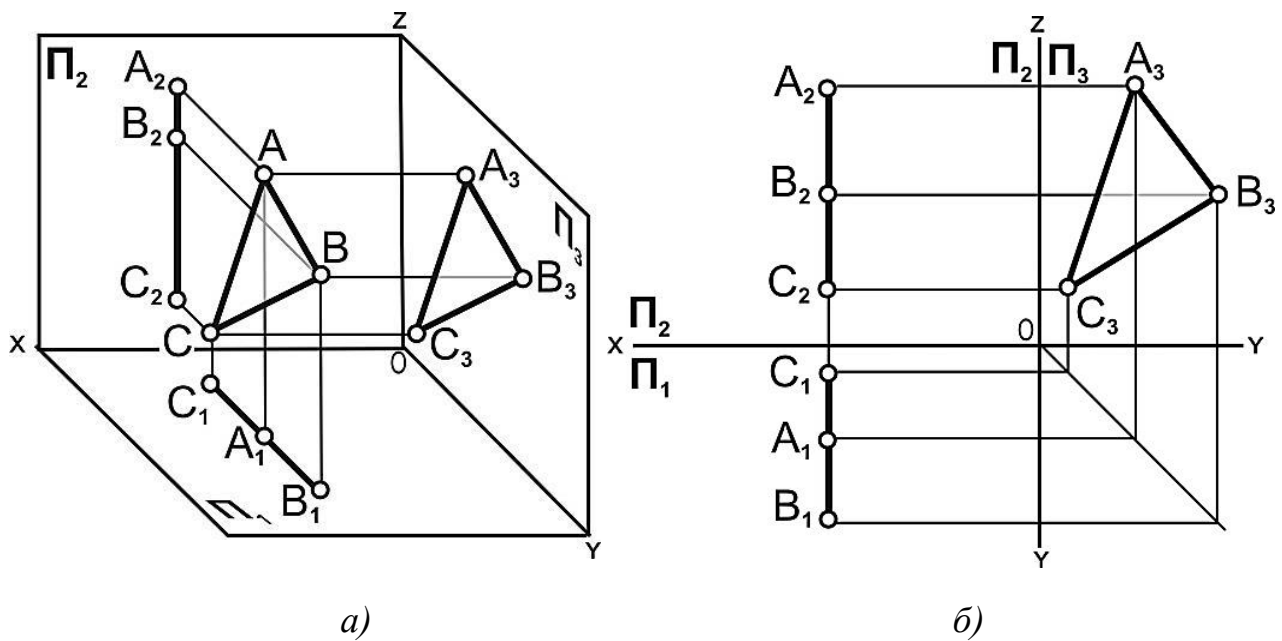


Рисунок 22 – Профильная плоскость:  
 а) наглядное изображение; б) комплексный чертеж (эпюр)

Проецирующие плоскости - это плоскости, перпендикулярные одной из плоскостей проекций, таких плоскостей три. Проецирующая плоскость и все лежащие в ней элементы проецируются на перпендикулярную ей плоскость проекций в прямую линию, совпадающую со следом этой плоскости, поэтому подобная плоскость может быть задана всего одной прямой – своим следом.

Горизонтально-проецирующей плоскостью называется плоскость, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций  $\Pi_1$  -  $\alpha(\Delta ABC) \perp \Pi_1$  (рис. 23).

Свойства проекций горизонтально-проецирующей плоскости:

- горизонтальной проекцией плоскости  $\alpha$  является прямая линия, совпадающая со следом  $|A_1B_1C_1|$ ;
- угол  $\beta$  – натуральная величина угла наклона горизонтально-проецирующей плоскости к плоскости проекций  $\Pi_2$ .

Фронтально-проецирующей плоскостью называется плоскость, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций  $\Pi_2$  -  $\alpha(\Delta ABC) \perp \Pi_2$  (рис. 24).

Свойства проекций фронтально-проецирующей плоскости:

- фронтальной проекцией плоскости  $\alpha$  является прямая линия, совпадающая со следом  $|A_2B_2C_2|$ ;
- угол  $\alpha$  – натуральная величина угла наклона горизонтально-проецирующей плоскости к плоскости проекций  $\Pi_1$ .

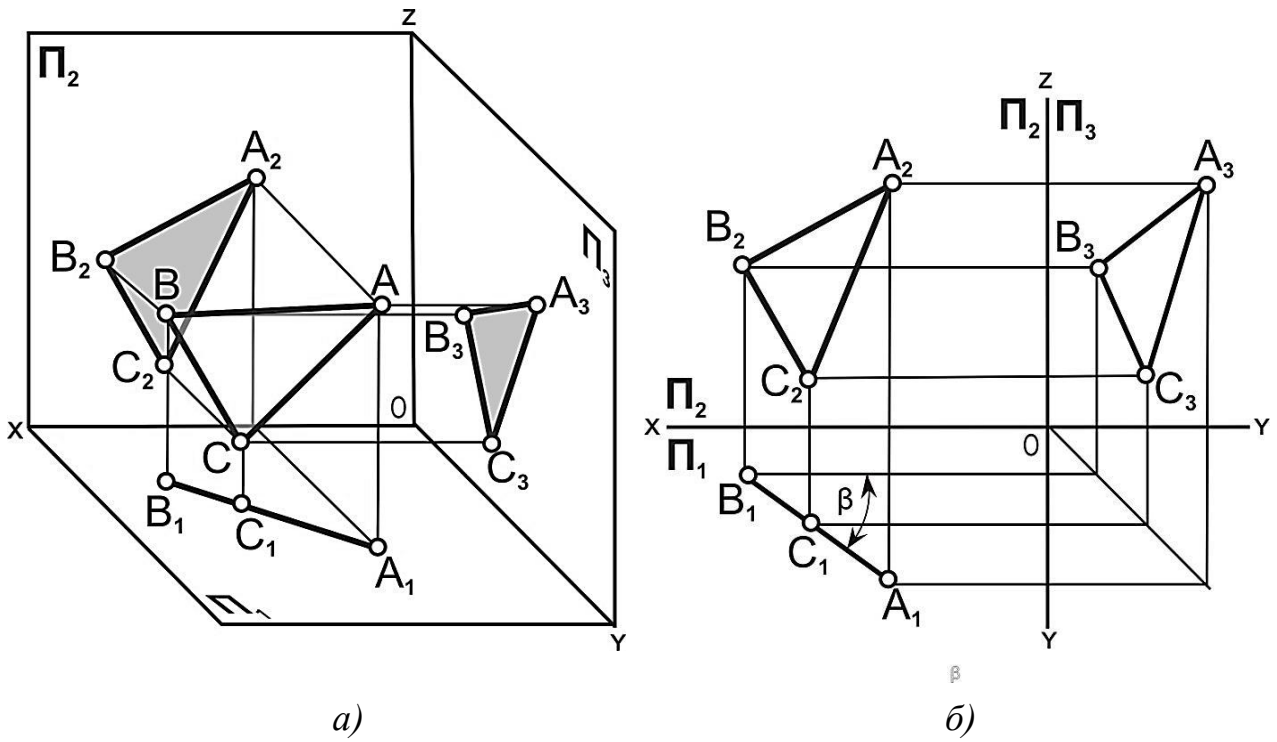


Рисунок 23 – Горизонтально-проецирующая плоскость:  
 а) наглядное изображение; б) комплексный чертёж (эпюр)

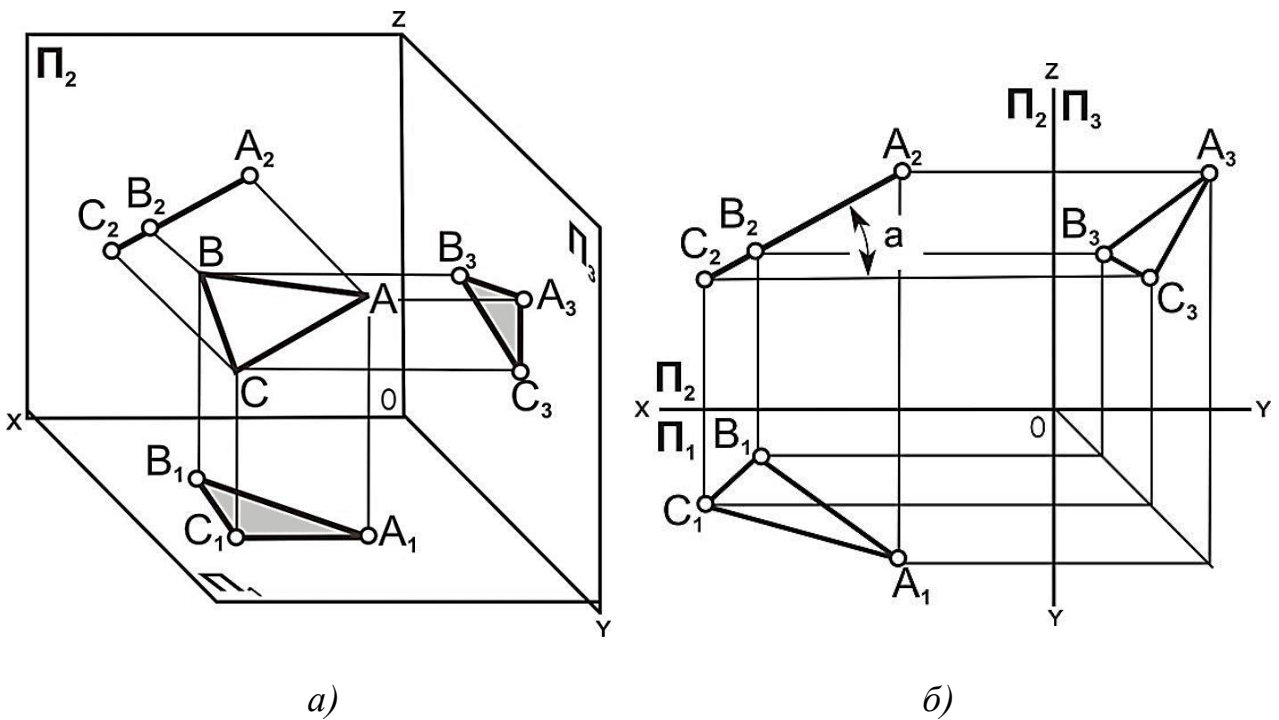


Рисунок 24 – Фронтально-проецирующая плоскость:  
 а) наглядное изображение; б) комплексный чертёж (эпюр)

Профильно-проецирующей плоскостью называется плоскость, перпендикулярная профильной плоскости проекций  $\Pi_3$  -  $\alpha(\Delta ABC) \perp \Pi_3$  (рис. 25).

Свойства проекций профильно-проецирующей плоскости:

- профильной проекцией плоскости  $\alpha$  является прямая линия, совпадающая со следом  $|A_3B_3C_3|$ ;
- угол  $\alpha$  – натуральная величина угла наклона горизонтально-проецирующей плоскости к плоскости проекций  $\Pi_1$ ;
- угол  $\beta$  – натуральная величина угла наклона горизонтально-проецирующей плоскости к плоскости проекций  $\Pi_2$ .

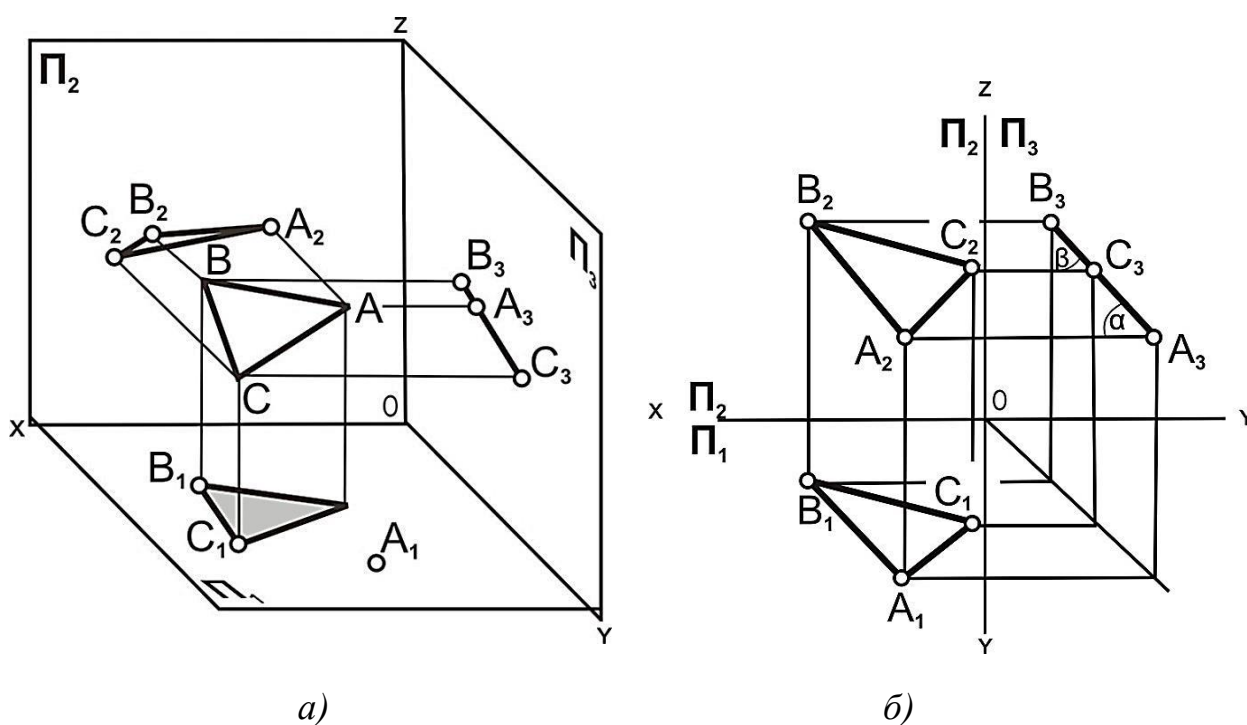


Рисунок 25 – Профильно-проецирующая плоскость:  
а) наглядное изображение; б) комплексный чертеж (эпюр)

### 3.1.2. Принадлежность и взаимное расположение точек, прямых, плоскостей

Некоторые теоретические положения из обозначенных тем:

1). Если точка принадлежит прямой линии, то ее проекции принадлежат одноименным проекциям этой прямой линии (рис. 26):

$$C \in l \Rightarrow C_1 \in l_1, C_2 \in l_2.$$

2). Если точка не принадлежит прямой, то хотя бы одна из ее проекций не принадлежит одноименной проекции прямой. На рисунке 26 точки  $A$ ,  $B$  и  $D$  не принадлежат прямой  $l$ , причем точка  $D$  расположена над прямой, точка  $A$  – за прямой, а точка  $B$  – перед прямой.

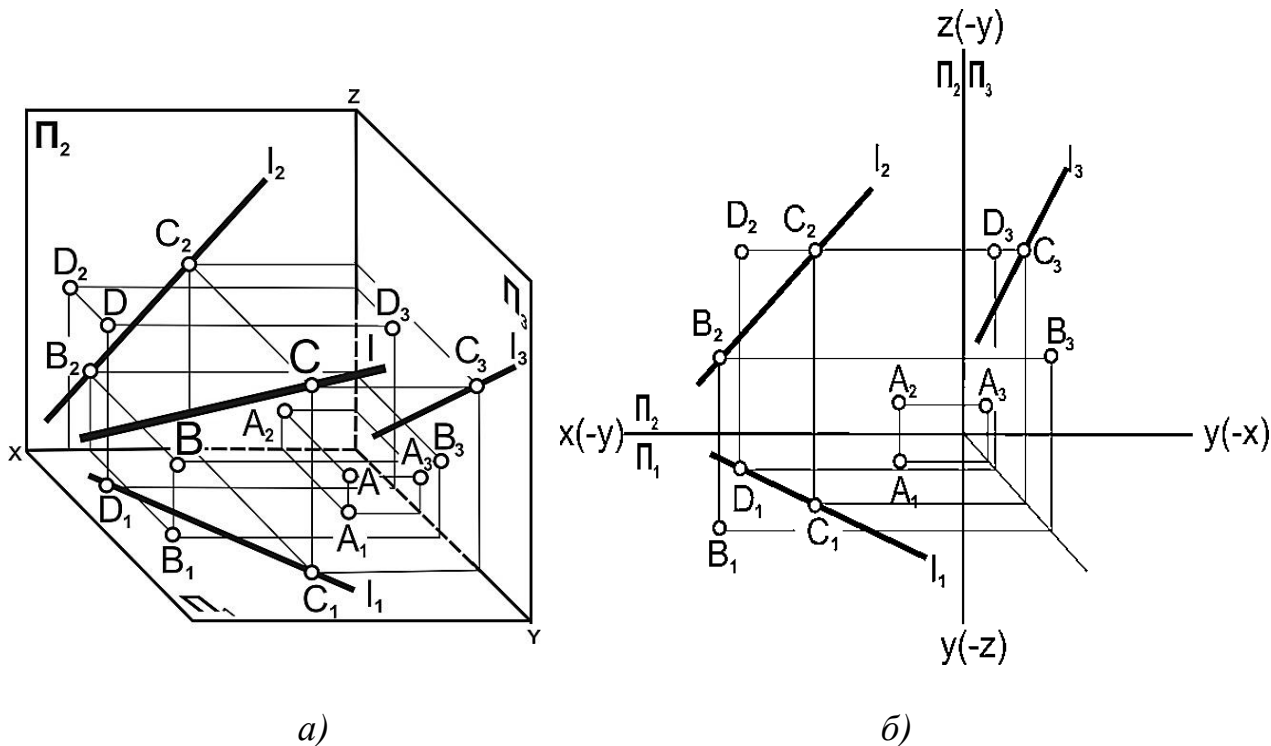


Рисунок 26 – Взаимное положение прямой линии и точек:  
 а) наглядное изображение; б) комплексный чертеж (эпюр)

3). Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через две точки плоскости (рис. 27).

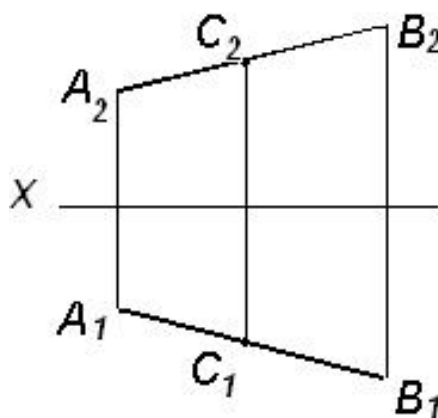


Рисунок 27 – Принадлежность точки прямой

4). Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости (рис. 28).



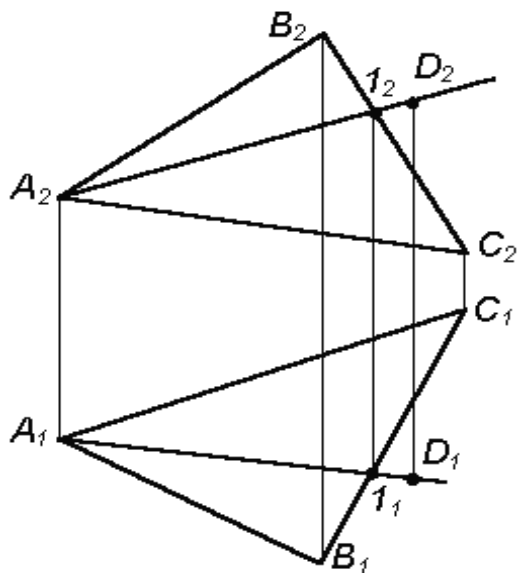


Рисунок 28 – Принадлежность точки плоскости

5). Прямая линия принадлежит плоскости, если две ее точки принадлежат этой плоскости (рис. 29):

$$B \in n, C \in m \Rightarrow |BC| \in \Sigma(m \cap n).$$

Прямая принадлежит плоскости, если имеет с плоскостью одну общую точку и параллельна какой-либо прямой, расположенной в этой плоскости. Пусть плоскость  $\alpha$  задана  $m \cap n$  (рис. 30):

$$m \cap k = C \Rightarrow C \in k, C \in m,$$

$$k \parallel n \Rightarrow k \in \alpha(m \cap n).$$

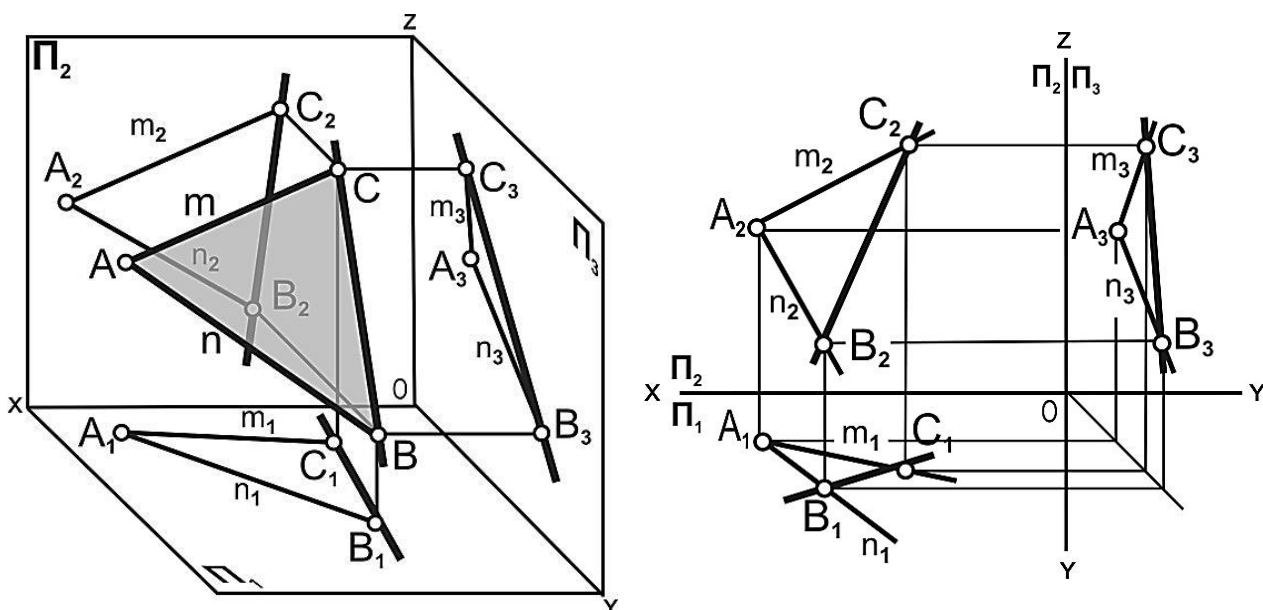


Рисунок 29 – Принадлежность прямой линии плоскости

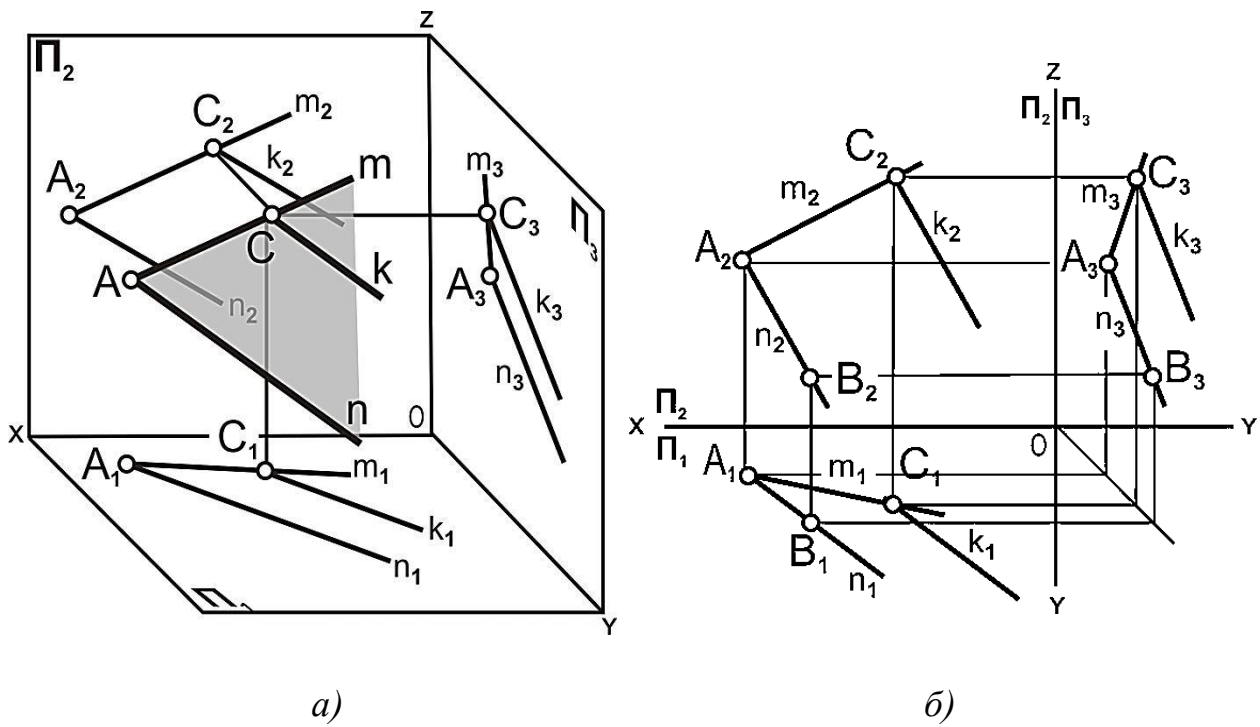


Рисунок 30 – Принадлежность прямой линии плоскости:  
 а) наглядное изображение; б) комплексный чертёж (эпюр)

б). Среди прямых линий, принадлежащих плоскости, особое значение имеют прямые, параллельные плоскостям проекций. Ими являются главные линии плоскости: горизонталь, фронталь и др. На рисунке 31 показано расположение проекций горизонтали и фронтали плоскости  $\Sigma$ , заданной пересекающимися прямыми  $l$  и  $m$ :

$$H \in \Sigma(l \cap m), H \parallel \pi_1;$$

$$F \in \Sigma(l \cap m), F \parallel \pi_2.$$

Горизонталь  $H$  - прямая, лежащая в данной плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций  $\pi_1(\Pi_1)$ :

всегда  $h_2 \parallel$  оси  $X$ .

Фронталь  $F$  - прямая, лежащая в данной плоскости и параллельная фронтальной плоскости проекций  $\pi_2(\Pi_2)$ :

всегда  $f_2 \parallel$  оси  $X$ .

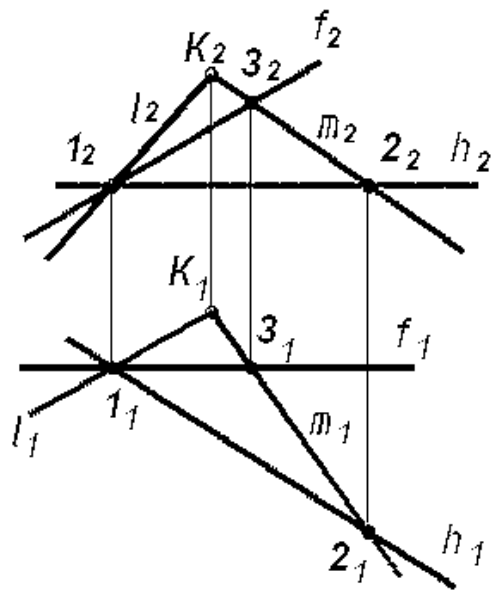


Рисунок 31 - Главные линии плоскости

7). Частный случай пересекающихся прямой и плоскости - это перпендикулярные прямая и плоскость. Согласно элементарной геометрии, *прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, принадлежащим этой плоскости.*

В качестве двух пересекающихся прямых при решении задач с взаимной перпендикулярностью прямой и плоскости обычно выбирают линии уровня – фронталь и горизонталь заданной плоскости. В этом случае основанием решения будут являться свойства проецирования прямого угла: *если хотя бы одна из сторон прямого угла параллельна плоскости проекций, а другая не перпендикулярна ей, то на эту плоскость прямой угол проецируется без искажения.*

Признак перпендикулярности прямой и плоскости можно сформулировать так: прямая перпендикулярна плоскости, если ее горизонтальная проекция перпендикулярна к горизонтальной проекции горизонтали плоскости, а фронтальная проекция прямой перпендикулярна к фронтальной проекции фронтали плоскости.

Построение перпендикуляра к плоскости  $Q$ , заданной  $\Delta ABC$ , показано на рисунке 32. Его этапы:

- строят фронталь и горизонталь в заданной плоскости  $Q(\Delta ABC)$ :  $h(h_1, h_2)$ ,  $f(f_1, f_2)$ ;

- определяют проекции их точки пересечения  $K$  ( $H \cap F = K$ ):  $K_1$  и  $K_2$ ;

- в проекции точки  $K_1$  восстанавливают перпендикуляр к горизонтальной проекции горизонтали  $h_1$ ;

- в проекции точки  $K_2$  проводят перпендикуляр к фронтальной проекции фронтали  $f_2$ ;

- на перпендикуляре берут точку  $D$ , проставляют ее проекции;

- в результате:  $K \in Q(\Delta ABC)$ ,  $[D_1 K_1] \perp \Delta A_1 B_1 C_1$ ,  $[D_2 K_2] \perp \Delta A_2 B_2 C_2$   
 $\Rightarrow [DK] \perp Q(\Delta ABC)$ .

Перпендикуляр к плоскости построен.

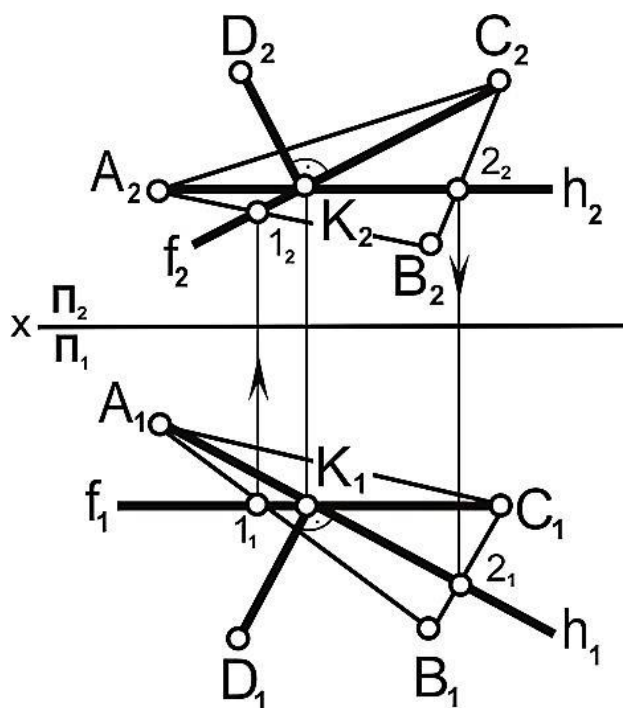


Рисунок 32 - Построение перпендикуляра к плоскости

8). Для построения *линии пересечения* двух плоскостей достаточно определения двух точек, общих для обеих плоскостей. Допустим, заданы пересекающиеся плоскости  $\alpha = m \parallel n$  и плоскость  $\beta = \triangle ABC$  (рис. 33). Для нахождения линии пересечения этих плоскостей, используют две вспомогательные плоскости частного положения, в нашем примере они такие:  $\sigma \parallel \tau$ ;  $\sigma \perp \pi_2$ ;  $\tau \perp \pi_2$ .

Так как  $\sigma \parallel \tau$ , то введенные плоскости пересекают каждую из заданных плоскостей по прямым линиям, параллельным друг другу:

- результатом пересечения плоскостей  $\alpha$ ,  $\sigma$  и  $\tau$  являются прямые (45) и (67);
- результатом пересечения плоскостей  $\beta$ ,  $\sigma$  и  $\tau$  являются прямые (32) и (18).

Прямые (45) и (32) лежат в плоскости  $\sigma$ . Точка их пересечения – это точка  $M$ , которая одновременно лежит и в плоскости  $\alpha$  и в плоскости  $\beta$ . Аналогично находят вторую точку  $N$ , общую для плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$ .

Соединив точки  $M$  и  $N$ , строят линию пересечения плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$ .

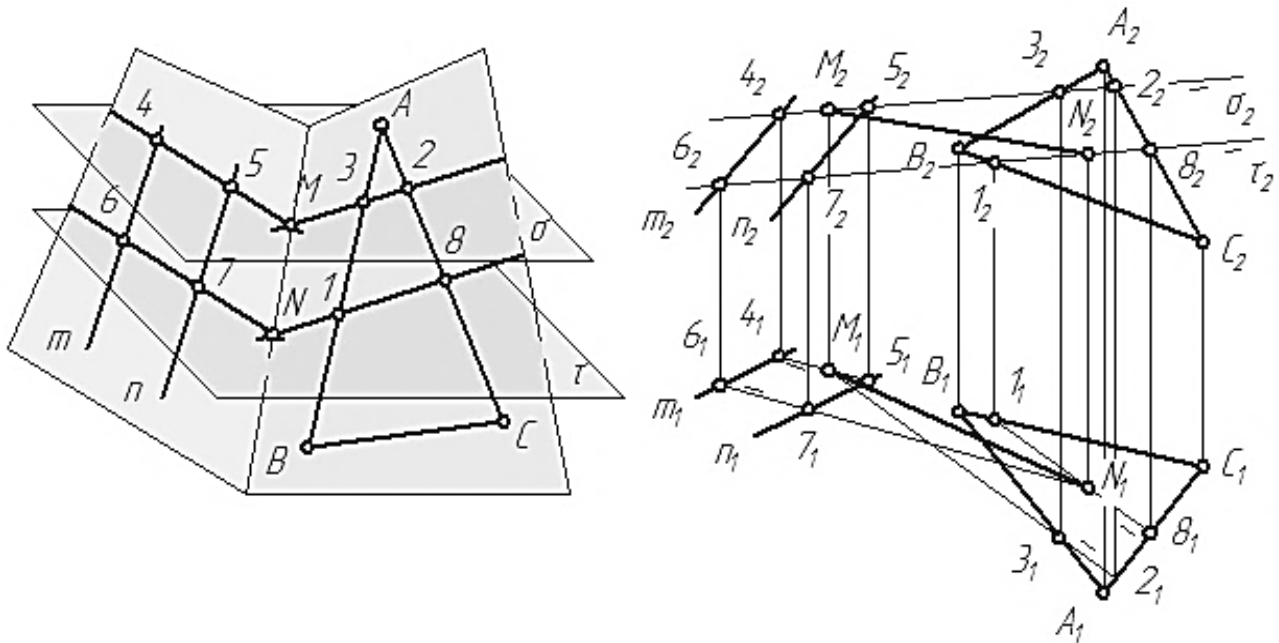


Рисунок 33 - Пересечение двух плоскостей общего положения

9). Взаимно перпендикулярные плоскости – частный случай пересекающихся плоскостей. Условие перпендикулярности двух плоскостей: *две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через прямую, перпендикулярную к другой.* Заданы плоскость  $\alpha$  ( $\triangle ABC$ ) и точка  $K$  вне плоскости  $\alpha$ . Требуется построить плоскость  $\beta$ , перпендикулярную заданной плоскости и проходящую через точку  $K$ .

Алгоритм построения перпендикулярных плоскостей (рис. 34):

- строят горизонталь  $H$  и фронталь  $F$  в заданной плоскости  $\alpha = \triangle ABC$ ;

- через точку  $K$  проводят перпендикуляр  $b$  к плоскости  $\alpha$  (по теореме о перпендикуляре к плоскости: если прямая перпендикулярна плоскости, то ее проекции перпендикулярны к наклонным проекциям горизонтали и фронтали, лежащих в плоскости):  $b_2 \perp f_2$ ;  $b_1 \perp h_1$ ;

- плоскость  $\beta$  задают любым способом, например, двумя пересекающимися прямыми  $a \cap b$ . Таким образом, плоскость, перпендикулярная к заданной, построена:  $\alpha \perp \beta$ .

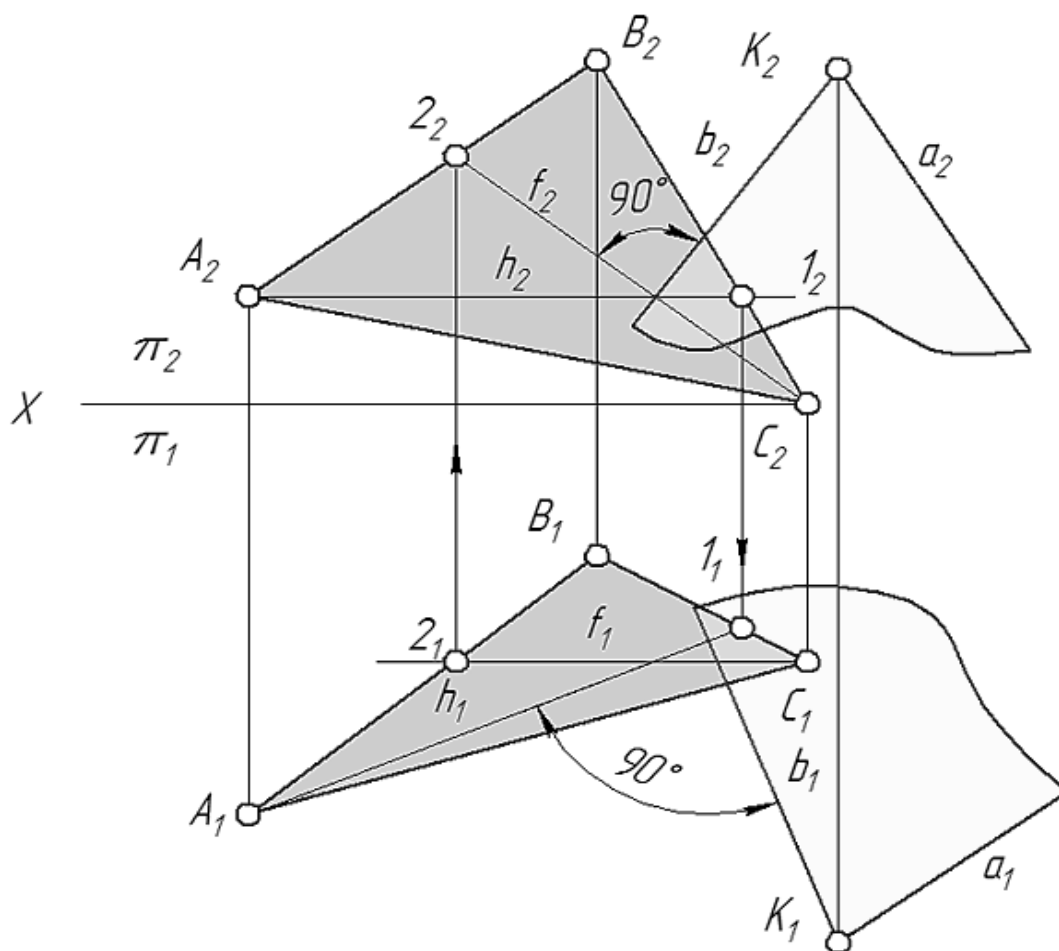


Рисунок 34 - Построение плоскости, перпендикулярной к  $\Delta$

### 3.1.3. Метод конкурирующих точек

Известно, что для определения видимости объектов относительно плоскостей проекции используют *конкурирующие точки* (см. стр. 18). Рассмотрим видимость и на примерах комплексных чертежей скрещивающихся прямых  $a$  и  $b$ . Из рисунка 35,а следует, что относительно плоскости  $\pi_1$  при взгляде сверху по указанной стрелке проекция  $C_2$  выше проекции  $D_2$ .

Следовательно, точка  $C$ , принадлежащая прямой  $a$ , будет видима, а точка  $D$ , принадлежащая прямой  $b$ , будет не видима. Из двух конкурирующих точек  $M$  и  $N$ , принадлежащих скрещивающимся прямым  $a$  и  $b$  (рис. 35,б), относительно плоскости  $\pi_2$ , видимой будет точка  $M$ , так как проекция  $M_1$  расположена ближе к наблюдателю, что видно при взгляде по стрелке, а точка  $N$  будет не видима.

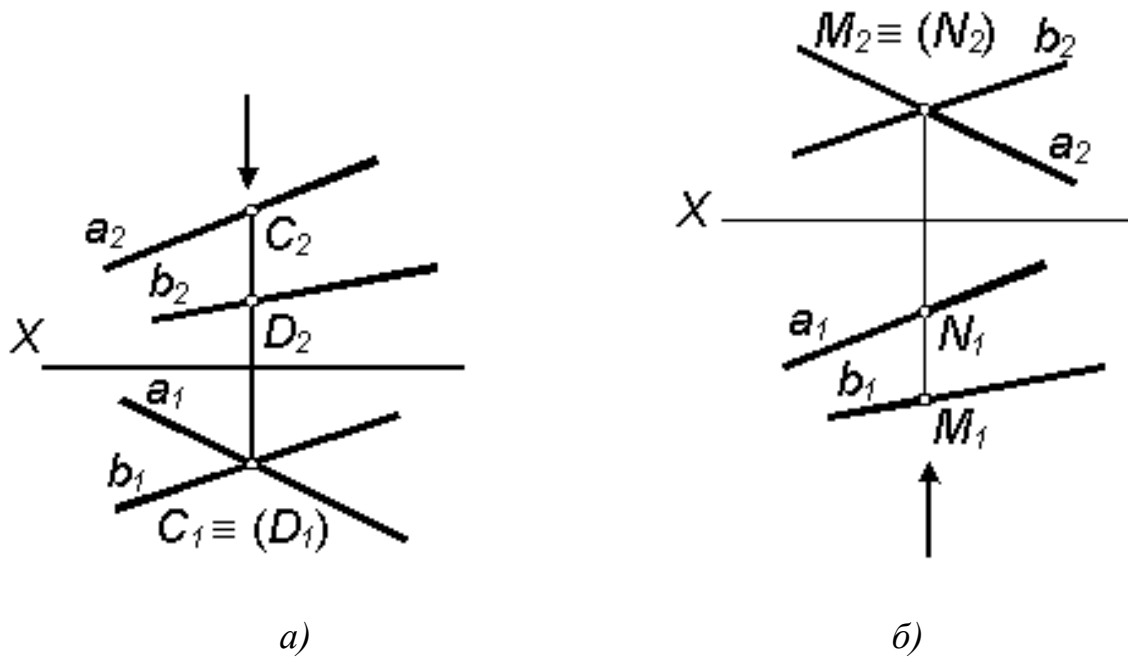


Рисунок 35 - Видимость на  $\pi_1$  и  $\pi_2$

### 3.2. Задание на выполнение эюра 1

*Пример выполнения эюра 1 (чертежа) показан на рисунке 36.*

Целью задания является закрепление знаний студентов по темам о задании, взаимном расположении и принадлежности точек, прямых и плоскостей в пространстве.

Эюр 1: *Построение плоскости, перпендикулярной плоскости, заданной треугольником  $ABC$ . Условие задачи в том, что плоскость должна проходить через точку  $B$  и быть перпендикулярной стороне  $AC$  заданной плоскости.*

Необходимо:

1. Изучить вышеизложенный теоретический материал.
2. По заданным координатам (табл. 8) построить проекции треугольника  $ABC$ .

3. Через точку В задать плоскость, перпендикулярную стороне АС.
4. Построить линию пересечения плоскости треугольника с перпендикулярной плоскостью.
5. Определить видимость частей плоскостей, используя метод конкурирующих точек.

### 3.3. Рекомендации к выполнению эпюра 1

*Плоскости перпендикулярны, если одна плоскость проходит через перпендикуляр другой плоскости.*

Значит, чтобы построить плоскость, перпендикулярную другой плоскости, надо провести её через перпендикуляр к этой плоскости. Кроме того, в нашем случае перпендикуляр должен проходить через точку В. Искомую плоскость, перпендикулярную к стороне треугольника АС, целесообразно задать двумя главными линиями плоскости - горизонталью Н ( $h_1, h_2$ ) и фронталью F ( $f_1, f_2$ ), перпендикулярных к АС и пересекающихся между собой в точке В. Секторы плоскости на  $\Pi_2$  и  $\Pi_1$  ограничить волнистой линией. Точка В - общая для обеих плоскостей.

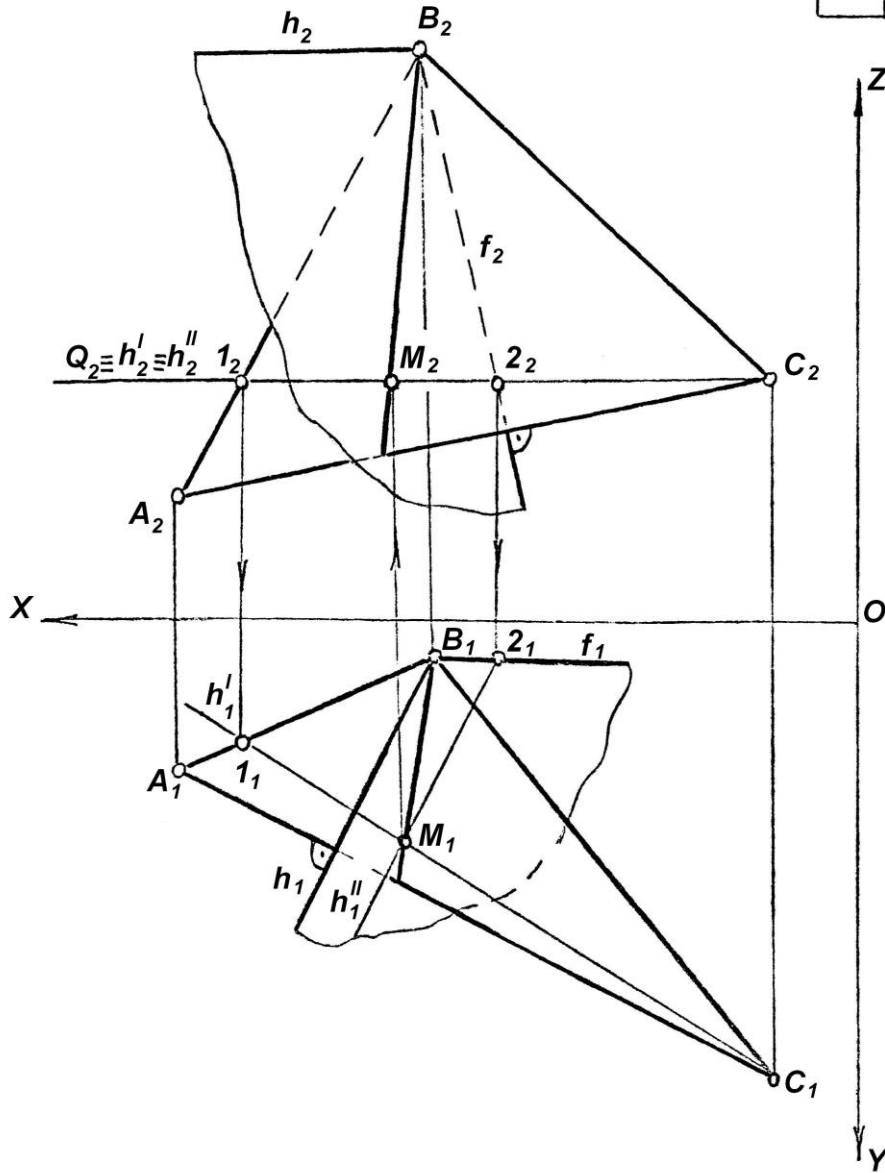
Другую точку, принадлежащую обеим плоскостям, определить с помощью вспомогательной плоскости уровня Q ( $Q_2$ )  $\parallel$   $\Pi_1$ , которая пересекает обе плоскости по горизонталям Н' и Н''. На пересечении этих горизонталей находится вторая общая точка - точка М. ВМ - линия пересечения двух плоскостей. Видимость определить методом конкурирующих точек, которые должны принадлежать АС и Н, АС и F.

При обводке чертежа необходимо соблюдать следующие цвета: то, что дано по условию задачи выполнить черным цветом, вспомогательные построения - синим или зеленым цветом, искомые величины (ответ) - красным цветом. Все линии построения и обозначения на чертеже сохранить.

Формат чертежа А3. Масштаб выполнения эпюра - 1:1 или 2:1.

*В основной надписи в шифре чертежа вместо «ХХ» следует написать свой вариант.*

	X	Y	Z
A	90	20	15
B	65	5	75
C	10	60	30



				НГ 01 XX 00			
Изм. лист	№ докум.	Подпись	Дата	<b>Построение перпендикулярных плоскостей</b>	Литер.	Масса	Масшт.
Разраб.	Маркова				у		
Провер.					Лист	Листов 1	
Т. контр.					НХТИ гр.		
Н. контр.							
Утв.							



Таблица 8

## Задание к эссе I

Номер варианта	А			В			С		
	х	у	z	х	у	z	х	у	z
1	5	50	10	45	5	25	70	20	0
2	70	0	20	45	30	5	5	10	50
3	75	0	18	55	30	50	5	15	10
4	0	25	5	45	55	15	60	10	60
5	65	20	0	10	0	10	0	60	50
6	80	10	45	45	70	10	0	40	45
7	60	20	65	45	60	10	5	20	10
8	5	10	25	35	35	60	60	5	30
9	0	10	50	40	20	5	65	0	20
10	75	50	25	35	0	10	10	20	45
11	75	30	10	20	20	10	0	70	30
12	10	20	35	45	35	70	70	15	40
13	0	20	10	45	60	30	60	30	65
14	75	0	25	30	50	15	10	20	50
15	70	30	75	55	70	20	15	50	30
16	70	20	73	55	75	35	10	30	20
17	60	10	35	40	60	25	20	30	70
18	80	20	30	55	80	0	0	50	55
19	70	20	60	60	65	25	10	35	15
20	70	0	30	50	55	15	0	20	60
21	0	10	25	10	70	65	60	35	55
22	80	55	20	40	0	5	15	25	45
23	10	55	15	50	10	35	70	25	5
24	0	60	60	10	20	0	35	70	5
25	20	20	30	65	20	10	90	70	30
26	45	50	10	20	50	55	0	20	20
27	0	20	70	30	45	0	70	35	65
28	0	45	10	40	0	55	65	15	0
29	0	25	10	50	30	50	60	55	0
30	0	25	0	35	55	65	65	45	10

### 3.4. Теоретические положения к выполнению эпюра 2

При решении метрических задач на определение расстояний и углов между различными объектами, а также действительных величин плоских фигур часто используют *способ замены плоскостей*.

Некоторые положения способа:

1). Сущность способа замены (перемены) плоскостей проекций заключается в следующем: положения точек, линий, плоскостей, поверхностей в пространстве не изменяются, а привычная система  $\pi_1\pi_2$  ( $\Pi_1\Pi_2$ ) дополняется плоскостями, образующими с  $\pi_1$  или  $\pi_2$  (или между собой) новые системы плоскостей проекций. Дополнительные плоскости проекций вводятся таким образом, чтобы на них интересующие объекты изображались в наиболее удобном для конкретной задачи положении.

2). На рисунке 37 введена новая плоскость  $\Pi_4$  перпендикулярно плоскости  $\Pi_1$ , новая проекция –  $A_4$ . Так как положение точки в пространстве определяется двумя ее проекциями, например  $A_1$  и  $A_2$ , то из рисунка видно, что и другая пара проекций –  $A_1$  и  $A_4$  также определяет положение точки в пространстве. Системы плоскостей  $\Pi_1\Pi_2$  и  $\Pi_1\Pi_4$  равноправны, обе плоскости  $\Pi_2$  и  $\Pi_4$  перпендикулярны  $\Pi_1$ . Свойства, установленные ранее для системы плоскостей  $\Pi_1\Pi_2$ , распространяются и на новую систему  $\Pi_1\Pi_4$ .

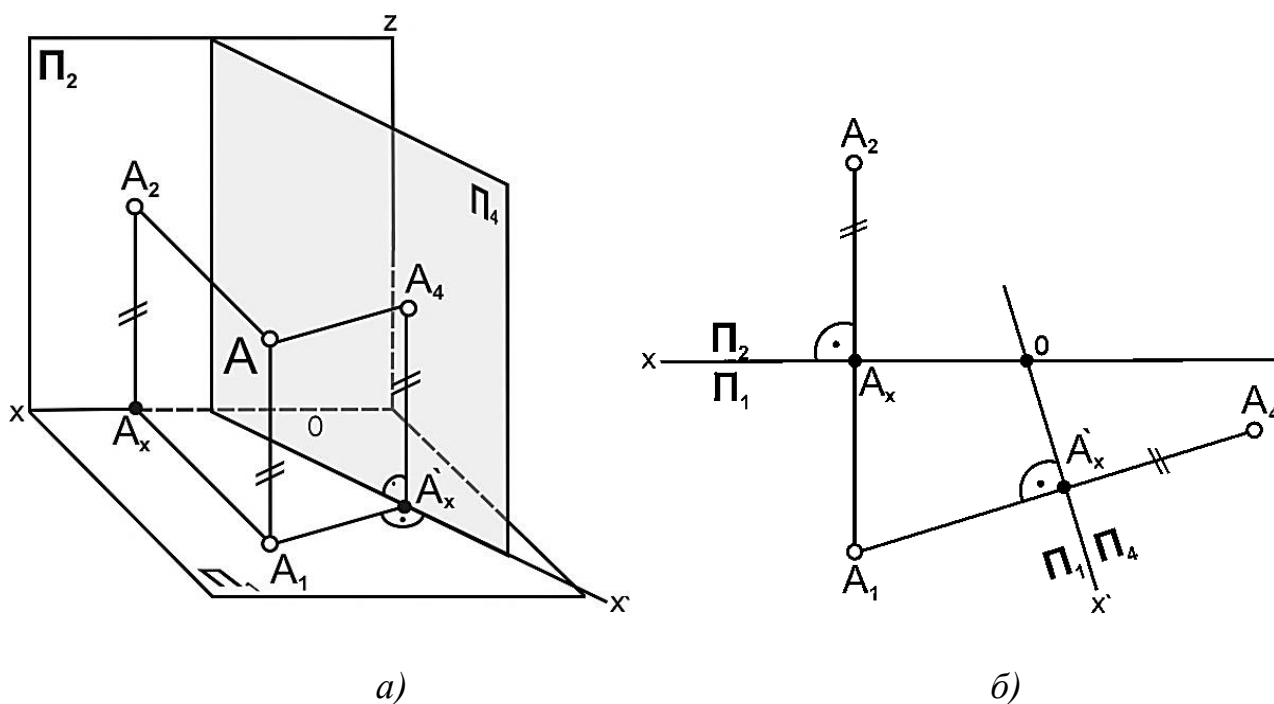


Рисунок 37 - Способ замены плоскостей:

а) наглядное изображение; б) комплексный чертеж (эпюр)

Неизменными остаются свойства:

- положение горизонтальной проекции  $A_1$  точки  $A$ ;
- высота точки  $A$ :  $|A_1A| = |A_XA_2| = |A'_XA_4| = Z_A$ .

3). На рисунке 38 показано преобразование прямой линии общего положения в линию уровня:

- параллельно горизонтальной проекции отрезка  $AB$  прямой линии проводят новую ось проекций  $X'$ , которая определяет положение новой плоскости  $\Pi_4$ : ось  $X' \parallel [A_1B_1]$ ;

- проводят линии связи из проекций точек  $A_1$  и  $B_1$  перпендикулярно к новой оси  $X'$ ;

- от оси  $X'$  на этих перпендикулярах откладывают расстояния, равные удалению точек  $A$  и  $B$  от плоскости  $\Pi_1$ , то есть значения координат  $Z$  для точек  $A$  и  $B$ ;

- соединяют проекции точек  $A_4$  и  $B_4$  прямой линией.

В новой системе плоскостей  $\Pi_1\Pi_4$  прямая, заданная отрезком  $AB$  заняла положение уровня:  $[AB] \parallel \Pi_4$ . Отрезок  $AB$  проецируется на плоскость  $\Pi_4$  в истинную величину, то есть  $[A_4B_4] = |AB|$ , а  $\alpha$  – величина угла наклона заданной прямой к плоскости проекций  $\Pi_1$ .

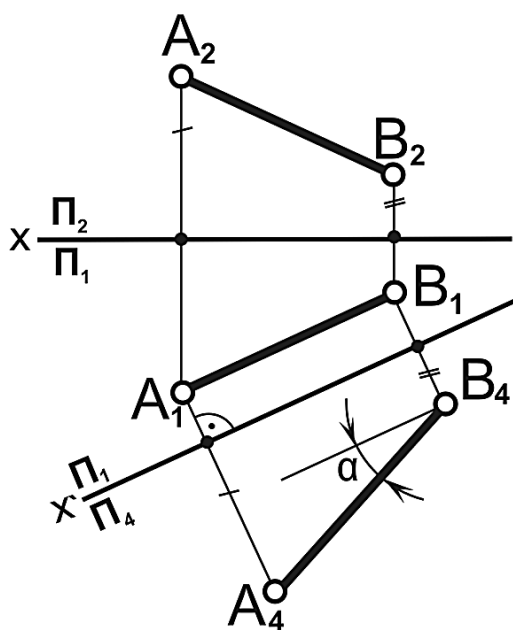


Рисунок 38 - Преобразование прямой общего положения в линию уровня

4). На рисунке 39 изображено преобразование линии уровня (горизонталь  $H$  - отрезок  $AB$ ) в проецирующую прямую:

- проводят новую ось проекций -  $X'$ , которая определяет положение новой плоскости  $\Pi_4$  перпендикулярно горизонтальной проекции отрезка  $AB$ ,  $X' \perp [A_1B_1]$ ;

- проводят линии связи из точки  $A_1$  и  $B_1$  перпендикулярно к новой оси  $X'$ ;

- на перпендикуляре от оси  $X'$  откладывают расстояния, равное удалению точек  $A$  и  $B$  от плоскости  $\Pi_1$ , то есть значения координат  $Z$  для точек  $A$  и  $B$ ,  $A_Z = B_Z$ , получают  $A_4 \equiv B_4$ .

В системе плоскостей  $\Pi_1\Pi_4$  прямая заняла проецирующее положение по отношению к плоскости  $\Pi_4$ :  $[AB] \perp \Pi_4$ .

5). Для того чтобы прямую общего положения привести в проецирующее положение, необходимо выполнить две последовательные замены плоскостей проекций:

- первая замена преобразовывает прямую в линию уровня (рис. 38);
- вторая - линию уровня в проецирующую прямую (рис. 39).

6). На рисунке 40 показано определение способом замены плоскостей натуральной величины треугольника, задающего плоскость общего положения.

Вначале заданную плоскость общего положения необходимо привести в проецирующую, а затем проецирующую плоскость в плоскость уровня. Для этого:

- Вводят в систему плоскостей проекций  $\pi_1\pi_2$  дополнительную плоскость так, чтобы она была перпендикулярна одновременно и одной из плоскостей проекций и плоскости, заданной треугольником. Последний отобразится на новую плоскость отрезком прямой, то есть плоскость треугольника станет проецирующей.

- В новую систему плоскостей вводят вторую дополнительную плоскость так, чтобы она была параллельна плоскости треугольника, тогда новая плоскость треугольника станет плоскостью уровня и треугольник спроецируется на вторую дополнительную плоскость в действительную величину.

Построение:

- в проекциях  $\Delta ABC$  проводят проекции горизонтали  $H - h_2, h_1$  (рис. 40, этап I);

- вводят в систему плоскостей проекций  $\pi_1\pi_2$  дополнительную плоскость  $\pi_4$  так, чтобы  $\pi_4$  была перпендикулярна и к  $\pi_1$  и к  $\Delta ABC$ , тогда новая ось  $X_1$  пройдет перпендикулярно  $h_1$  (рис. 40, этап I);

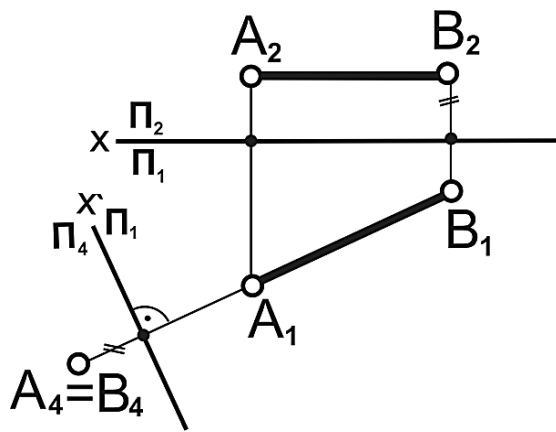


Рисунок 39 - Преобразование прямой уровня в проецирующую

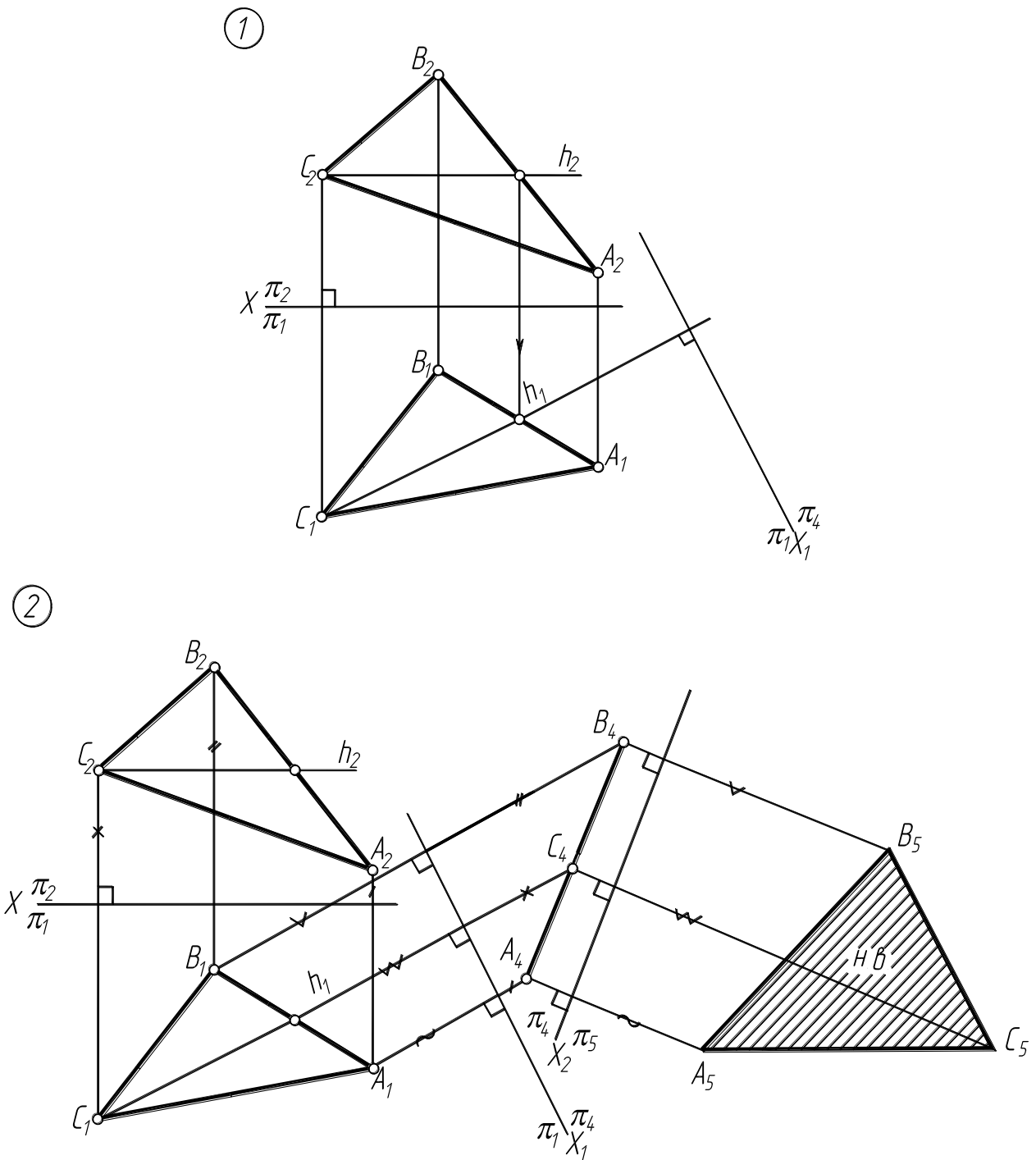


Рисунок 40 - Определение натуральной величины треугольника

- на эюре на плоскости  $\pi_4$  находят проекции вершин треугольника  $A_4, B_4, C_4$ ;
- от оси  $X_1$  откладывают для каждой точки координату  $Z$ , треугольник спроецируется в прямую -  $|A_4C_4B_4|$  (рис. 40, этап 2);
- вводят в систему плоскостей вторую дополнительную плоскость  $\pi_5$  параллельно треугольнику и перпендикулярно к плоскости  $\pi_4$ , вторая новая ось  $X_2$  пройдет параллельно проекции прямой  $|A_4C_4B_4|$  (рис. 40, этап 2);

- на плоскость  $\pi_5$  треугольник спроецируется в натуральную величину:  $\Delta A_5B_5C_5 = \Delta ABC$  (рис. 40, этап 2).

### 3.5. Задание к выполнению эюра 2

Целью данного задания является освоение решения метрических задач способом замены плоскостей.

Эпюр 2: *Определение истинных величин элементов пирамиды  $SABC$ : основания  $ABC$ , высоты  $SK$ , двугранного угла при ребре  $AB$ . Координаты точек  $S, A, B$  и  $C$  даны в таблице 9.*

*Пример выполнения эюра 2 показан на рисунке 41. Необходимо изучить теоретический материал по лекциям, пособиям, учебникам.*

### 3.6. Рекомендации к выполнению эюра 2

Для определения истинных величин геометрических элементов пирамиды располагают эти элементы параллельно какой-либо плоскости проекций с помощью способа замены плоскостей проекций. Вводить новые плоскости проекций надо так, чтобы на чертеже не было наложения проекций.

При решении каждой конкретной задачи необходимо изображать только те элементы, которые указаны в условии задачи. Чтобы определить натуральную величину основания  $ABC$ , необходимо с помощью горизонтали  $H$  и дополнительной плоскости  $\Pi_4$  преобразовать плоскость  $ABC$  в проецирующую

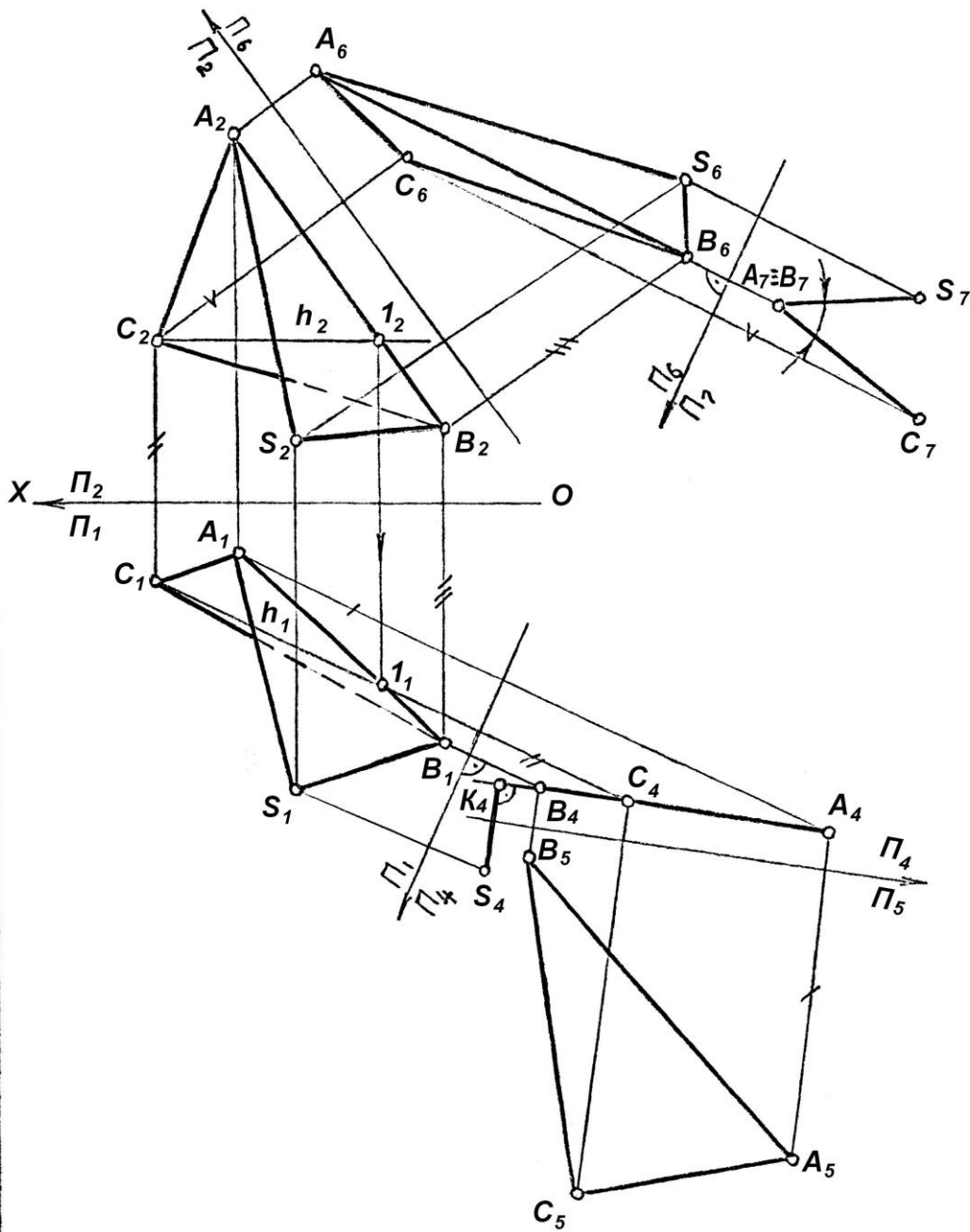
плоскость (ось  $\frac{\Pi_1}{\Pi_4} \perp h_1$ ). Затем, вводя новую плоскость  $\Pi_5$ , (ось  $\frac{\Pi_4}{\Pi_5} // A_4B_4C_4$ ),

преобразуем плоскость  $ABC$  в плоскость уровня – это натуральная величина основания пирамиды. На плоскости  $\Pi_4$  определяем высоту пирамиды ( $S_4K_4$ ), опустив перпендикуляр из точки  $S_4$  на  $A_4B_4C_4$  (или на продолжение). Для определения двугранного угла при ребре  $AB$  необходимо выполнить два

преобразования: ось  $\frac{\Pi_6}{\Pi_2} // A_2B_2$ ; ось  $\frac{\Pi_6}{\Pi_7} \perp A_6B_6$ , тогда на новой плоскости  $\Pi_7$

прямая  $AB$  спроецируется в точку и угол при ребре  $AB$  отобразится в натуральную величину.

Формат чертежа А3. Масштаб выполнения эюра - 1:1 или 1:2.



				<b>НГ 02 XX 00</b>			
				Определение истинных величин элементов пирамиды			
				НХТИ, гр.			

## Задание к этюру 2

Номер варианта	S			A			B			C		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z
1	70	72	5	10	55	20	55	10	65	80	25	10
2	45	70	25	75	10	30	20	20	0	10	60	70
3	65	20	40	10	35	20	45	70	45	70	40	15
4	20	0	25	90	30	20	55	10	70	75	30	10
5	80	75	65	0	60	20	50	15	65	75	30	10
6	30	60	55	20	30	20	55	50	15	70	0	50
7	80	60	15	85	25	60	45	10	0	20	55	25
8	70	55	65	75	25	0	40	25	40	20	60	30
9	75	20	25	0	20	30	55	15	55	65	60	20
10	75	35	35	60	55	20	40	20	50	5	20	30
11	60	30	30	5	0	25	45	15	55	50	50	5
12	65	65	40	5	45	10	45	5	55	70	15	0
13	55	0	30	65	15	0	30	40	45	5	20	25
14	65	45	55	0	20	40	35	45	0	55	10	10
15	60	35	0	70	0	10	30	30	50	10	5	20
16	55	40	55	5	10	45	35	45	0	65	0	5
17	75	25	45	60	65	20	45	10	60	5	10	20
18	10	0	15	80	20	10	45	0	70	0	45	45
19	60	45	55	75	25	0	30	15	50	10	50	20
20	35	60	20	65	0	20	10	10	0	0	50	60
21	75	20	50	0	10	20	45	20	60	60	65	30
22	55	10	40	5	25	10	35	60	35	60	30	5
23	70	50	5	75	15	50	35	0	10	10	45	20
24	65	0	40	75	20	0	55	50	30	5	10	15
25	60	10	40	0	5	25	45	15	55	60	60	10
26	70	65	55	0	50	10	40	5	45	65	20	0
27	20	50	45	10	20	10	55	50	25	80	0	60
28	70	45	0	80	0	20	60	30	50	10	15	10
29	10	45	50	20	10	20	55	10	30	80	60	0
30	65	50	65	5	10	45	45	55	5	70	0	15



### 3.7. Теоретические положения к выполнению эюра 3

Многие детали приборов имеют отдельные участки поверхности, представляющие собой плоские фигуры сечений. Их необходимо изображать на чертежах (эпюрах) по правилам начертательной геометрии.

#### 3.7.1. Поверхности

Для построения проекций поверхности (или тела) обычно не строят всех ее точек, а определяют только очерк поверхности (рис. 42).

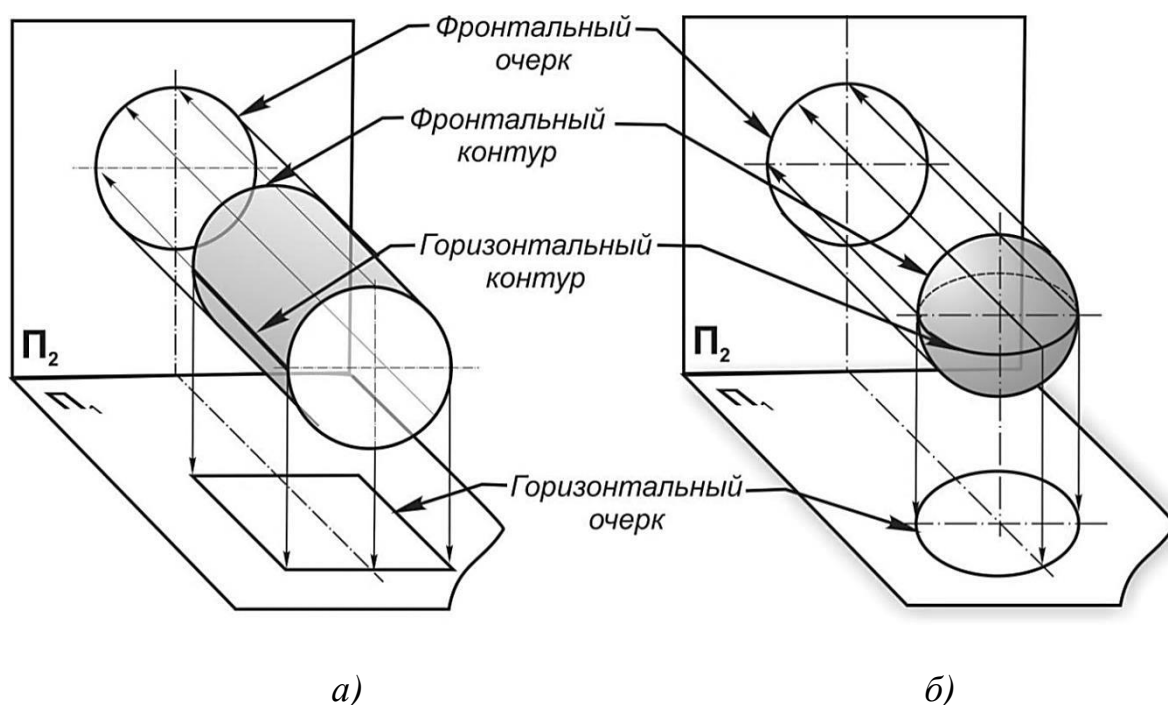


Рисунок 42 - Построение проекций поверхностей:

а) цилиндрической; б) сферической

Очерком поверхности называют линию, ограничивающую проекцию фигуры на плоскости проекций. Если линией контура поверхности служит образующая поверхности, то ее называют *контурной образующей*, а ее проекцию – *очерковой образующей*.

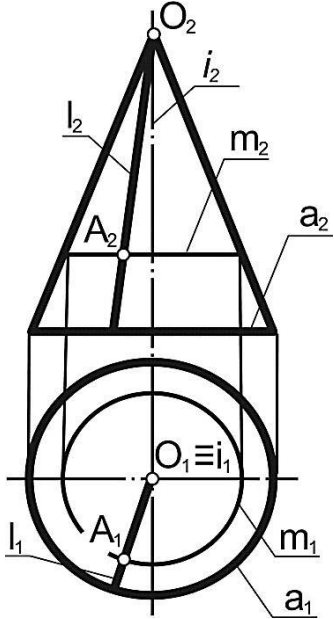
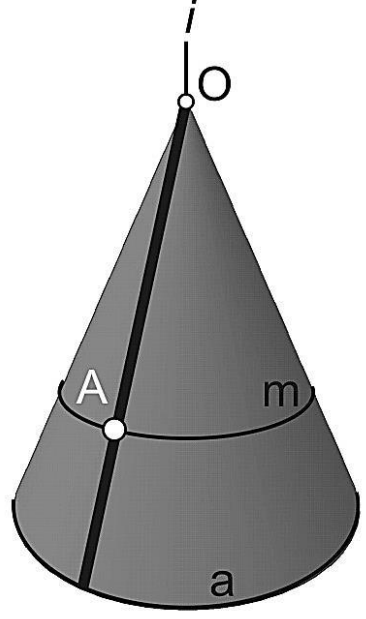
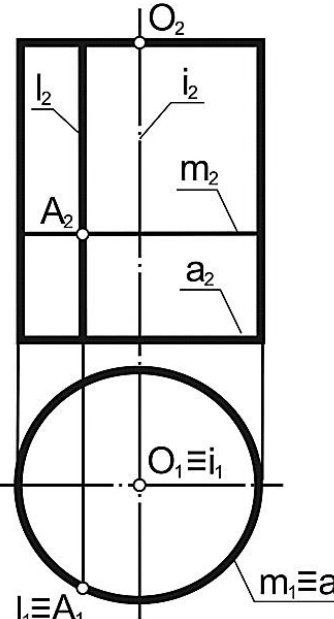
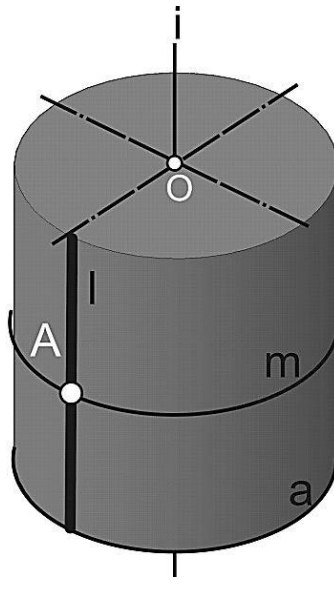
При построении эпюра поверхности направление проецирования совпадает с направлением взгляда наблюдателя, поэтому контурная линия является границей видимости поверхности: та ее часть, которая расположена перед линией контура – видима, за линией контура – невидима. Проекции

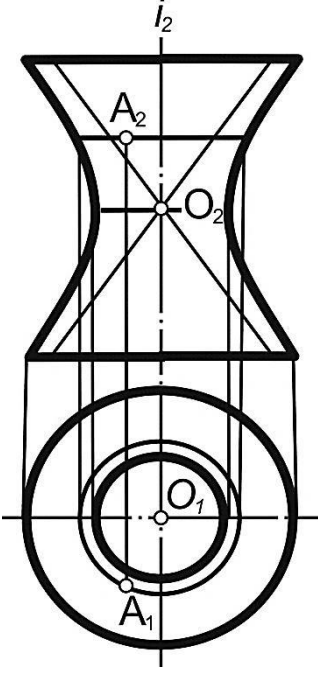
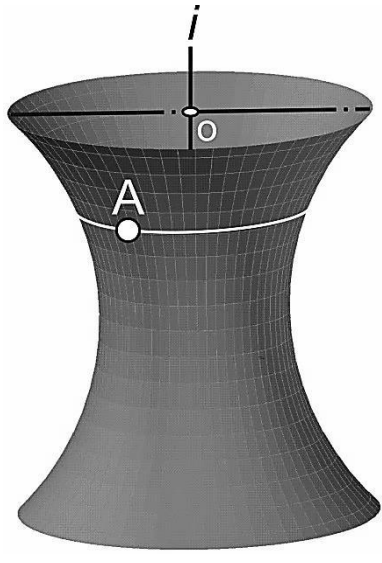
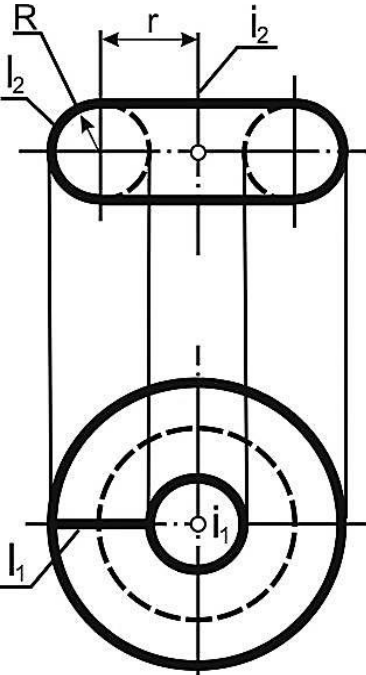
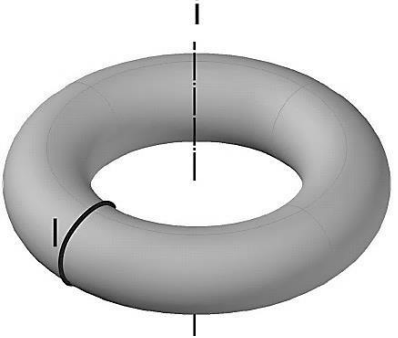
точек поверхности, расположенные на очерках, будем называть точками перемены (границы) видимости. *Невидимые точки принято обозначать в скобках.*

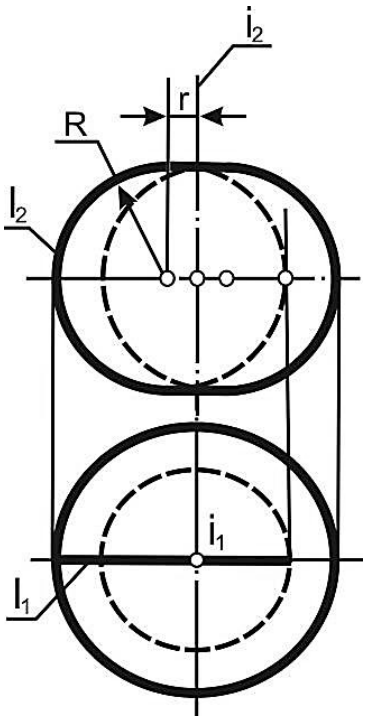
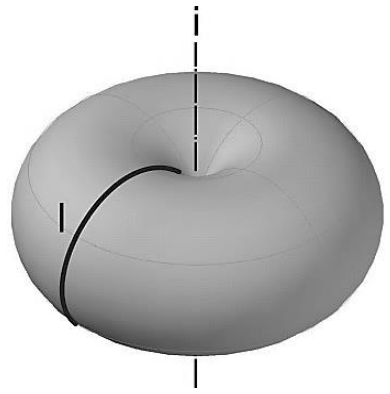
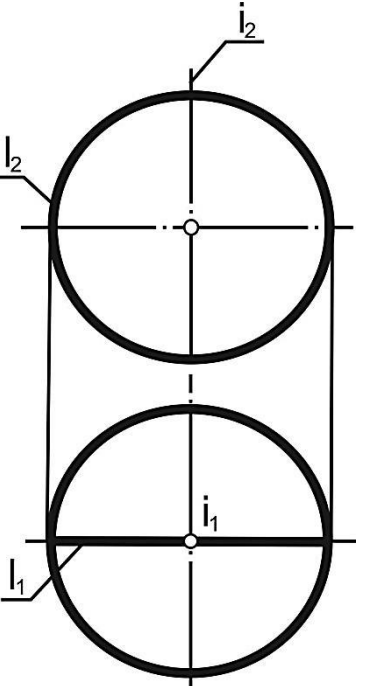
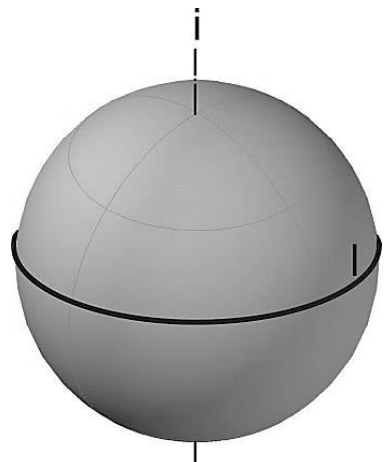
Изображения, наименование и характеристика основных поверхностей вращения представлены в таблице 10.

Таблица 10

*Основные поверхности вращения*

Наименование и характеристика поверхности	Комплексный чертеж	3D модель
<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>
<i>Линейчатые развращиваемые поверхности вращения</i>		
<p><i>Конус вращения</i></p> <p>Поверхность, образованная движением прямолинейной образующей <math>l</math>, проходящей через неподвижную точку – вершину <math>O</math> по криволинейной направляющей <math>m</math>, называется <i>конической</i>.</p>		
<p><i>Цилиндр вращения</i></p> <p>Поверхность, образованная параллельным перемещением прямолинейной образующей <math>l</math> по кривой направляющей <math>m</math>, называется <i>цилиндрической</i>.</p>		

I	II	III
<p><i>Гиперболоид одноплостный</i> Поверхность, образованная вращением прямолинейной образующей <math>l</math> по криволинейной направляющей <math>m</math> вокруг оси <math>i</math> (образующая <math>l</math> и ось <math>i</math> скрещиваются), называется <i>одноплостным гиперболоидом вращения.</i></p>		
<p><i>Нелинейчатые неразвертываемые поверхности вращения</i></p>		
<p>Поверхность, образованная вращением окружности (образующей <math>l</math>) вокруг оси <math>i</math>, не проходящей через ее центр, но расположенной в плоскости окружности. В зависимости от соотношения значений радиуса образующей <math>R</math> и расстояния <math>r</math> от центра окружности до оси вращения <math>i</math> возможны три разновидности поверхностей:</p>		
<p><i>1. Тор открытый</i> Если <math>R &lt; r</math>, то образующая окружность <math>l</math> не пересекает ось вращения <math>i</math>, поверхность называется <i>кольцом или открытым тором.</i></p>		

I	II	III
<p>2. <i>Тор закрытый</i>            Если <math>R \geq r</math>, то окружность касается оси <math>i</math> или пересекает ее, поверхность называется <i>закрытым тором</i>.</p>		
<p>3. <i>Сфера</i>            Если центр окружности принадлежит оси вращения <math>r = 0</math>, то образуется <i>сфера</i>.</p>		

На рисунке 43 изображены линейчатые развертываемые гранные поверхности. *Гранной* называется поверхность, образованная частями пересекающихся плоскостей. Элементами гранных поверхностей являются грани, ребра и вершины. Грань – это отсек плоскости, ребро – линии пересечения плоскостей (граней), вершина – точки пересечения ребер.

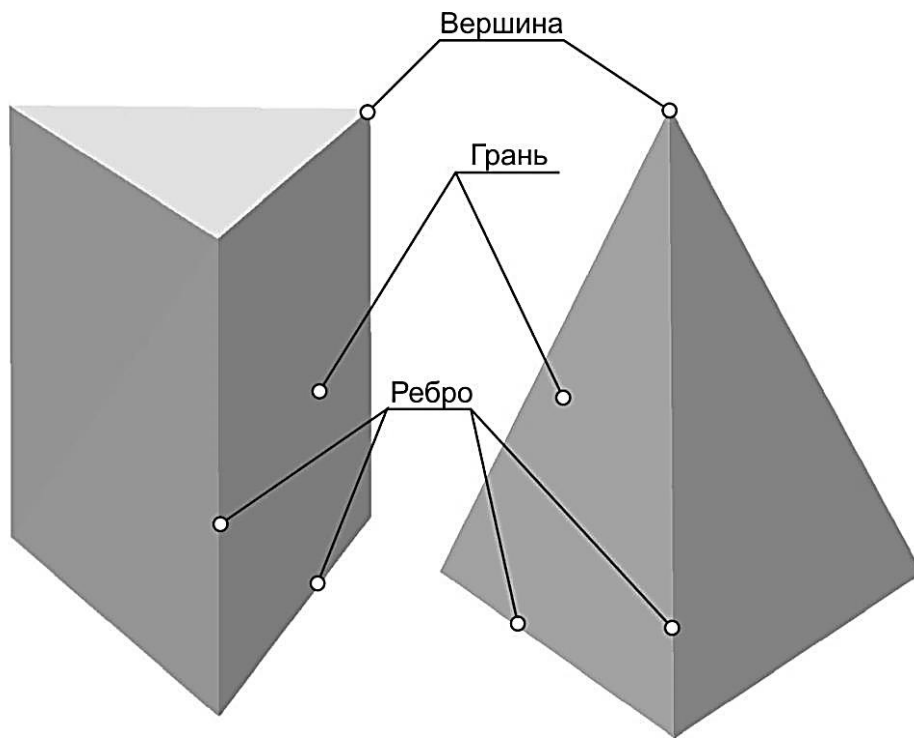


Рисунок 43 - Элементы гранных поверхностей: призмы и пирамиды

Гранная поверхность называется *призматической*, если все ее ребра параллельны между собой (рис. 44,а). Гранная поверхность называется *пирамидальной*, если все ее ребра пересекаются в одной точке – вершине (рис. 44,б).

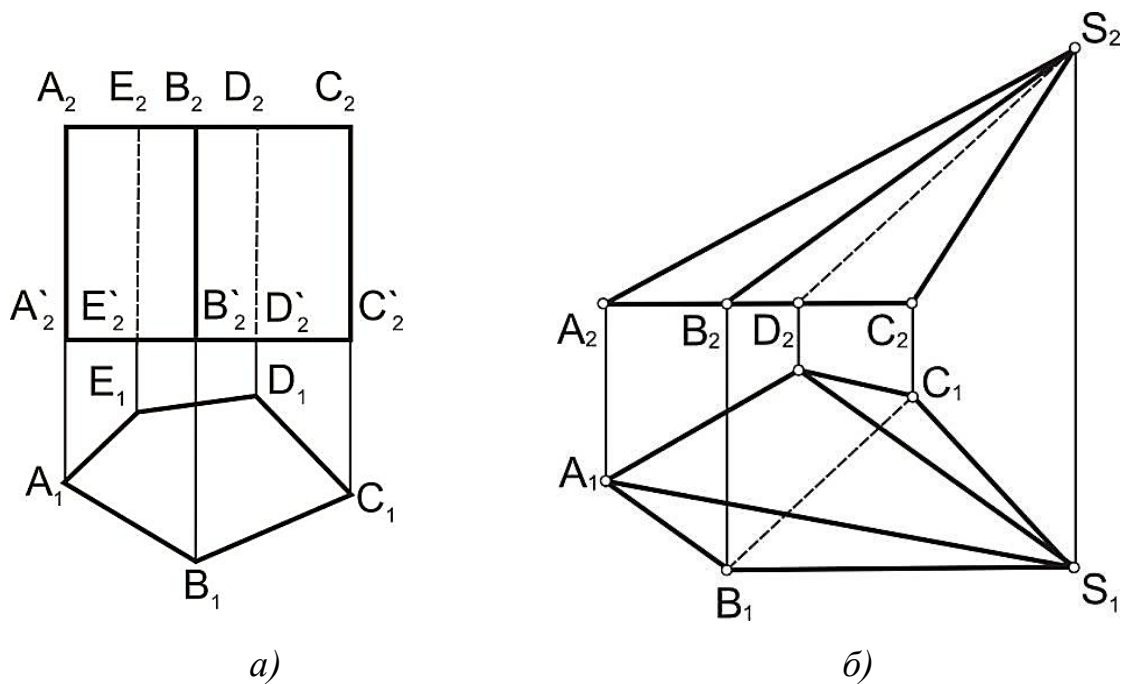


Рисунок 44 - Комплексные чертежи гранных поверхностей:  
а) призма; б) пирамида

Из школьной геометрии известны следующие факты:

- Замкнутые *гранные поверхности*, образованные некоторым числом (не менее четырех) граней, называются многогранниками.

- Из числа многогранников выделяют группу правильных многогранников, у которых все грани правильные и конгруэнтные многоугольники, а многогранные углы при вершинах выпуклые и содержат одинаковое число граней. На рисунке 45 изображены: гексаэдр (куб) - *а*), тетраэдр (правильный четырехугольник) - *б*), октаэдр - *в*).

- *Пирамида* - многогранник, в основании которого лежит произвольный многоугольник, а боковые грани - треугольники с общей вершиной. *Призма* - многогранник, у которого основание - два одинаковых и взаимно параллельных многоугольника, а боковые грани - параллелограммы. Если ребра призмы перпендикулярны плоскости основания, такую призму называют прямой.

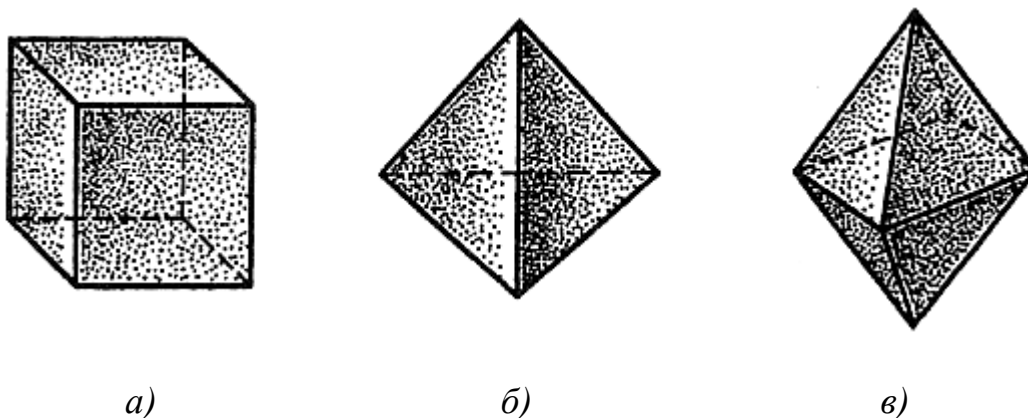


Рисунок 45 - Правильные многогранники

### 3.7.2. Взаимное расположение точек, прямых, плоскостей и поверхностей

Некоторые теоретические положения темы:

1). *Точка принадлежит поверхности*, если она принадлежит какой-нибудь линии этой поверхности. *Линия принадлежит поверхности*, если все ее точки принадлежат поверхности. Следовательно, если точка принадлежит поверхности, то ее проекции принадлежат одноименным проекциям некоторой линии этой поверхности.

2). Для построения точек, лежащих на поверхностях, пользуются графически простыми линиями этой поверхности - *прямыми* или *окружностями*.

На рисунке 46 показано *построение горизонтальных проекций точек A, B и C, принадлежащих цилиндрической поверхности* (фронтальные проекции точек известны). Все образующие цилиндра перпендикулярны к  $\Pi_1$ , горизонтальные проекции всех точек, расположенных на этой поверхности, находятся на горизонтальной проекции цилиндрической поверхности.

Построение:

- опускают линии связи на  $\Pi_1$ ;
- отмечают проекции точек -  $A_1, B_1$  и  $C_1$ , учитывая, что точка B находится на невидимой части поверхности при взгляде на плоскость  $\Pi_2$ .

В подобном случае, если заданы только горизонтальные проекции точек на данной поверхности, положение их фронтальных проекций не определить.

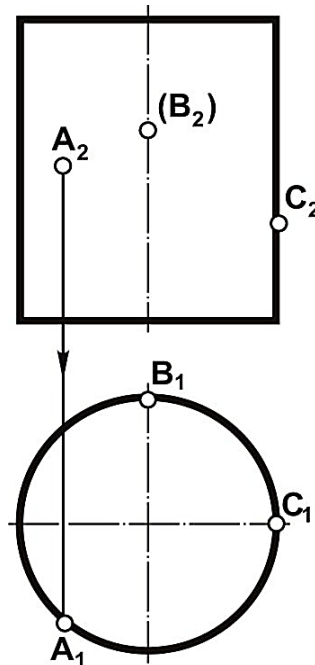


Рисунок 46 - Точки на поверхности цилиндра

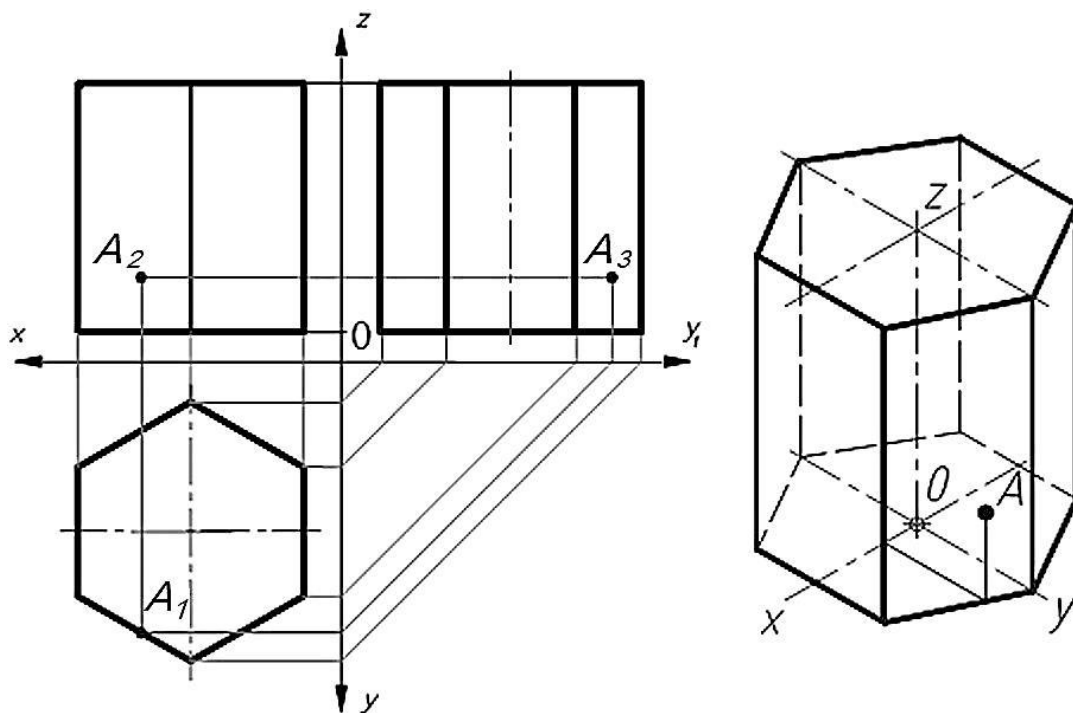


Рисунок 47 - Построение проекций точек на поверхности призмы

На рисунке 47 изображено *построение точек на поверхности прямой шестиугольной призмы*. В данном примере горизонтальной проекцией основания является правильный шестиугольник. Фронтальной и профильной проекцией призмы являются прямоугольники. Нахождение проекций точек на поверхности призмы подобно нахождению проекций точек на поверхности цилиндра (см. рис. 46).

На рисунке 48 показано *построение точек на поверхности конуса вращения*. Известны проекции точек  $F(F_2)$ ,  $E(E_1)$ ,  $C(C_2)$ , строят проекции точек  $F(F_1)$ ,  $E(E_2)$ ,  $C(C_1)$ .

Построение:

1. Точка  $F$  принадлежит фронтальной очерковой образующей конуса  $SB - S_2B_2$ :

- опускают линию связи на горизонтальную проекцию образующей  $S_1B_1$ ;
- определяют недостающую проекцию точки  $F - F_1$ .

2. Для построения проекции точки  $E(E_2)$ :

- через заданную проекцию  $E_1$  проводят горизонтальную проекцию образующей -  $S_1A_1$ ;

- строят проекцию образующей на  $\Pi_2 - 1_2S_2$ ;

- на проекции линии  $1_2S_2$  отмечают проекцию точки -  $E_2$ , она невидима наблюдателю на  $\Pi_2$ .

3. Для построения проекции точки  $C(C_1)$ :

- через проекцию  $C_2$  проводят параллель параллельно  $A_2B_2$ ;

- строят проекцию параллели на  $\Pi_1$  - это окружность радиусом  $R$ , величину радиуса  $R$  определяют по фронтальной проекции;

- на горизонтальной проекции параллели отмечают недостающую проекцию точки  $C - C_1$ .

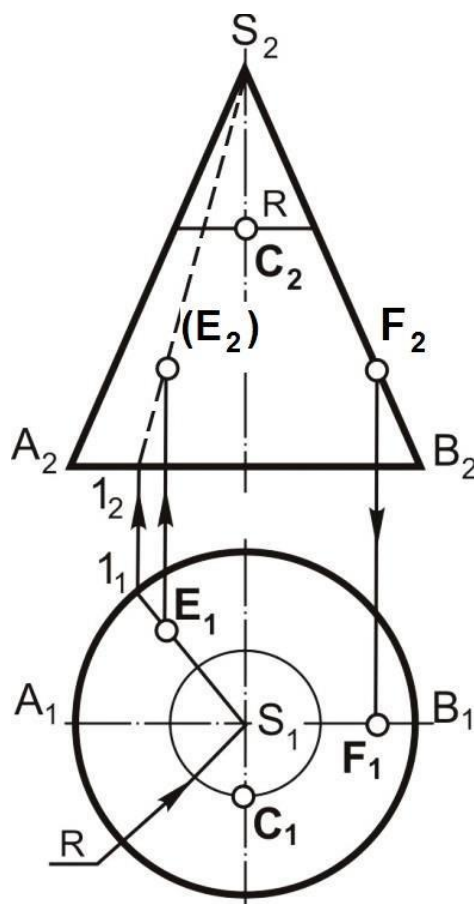


Рисунок 48 - Точки на поверхности конуса вращения



На рисунке 49 выполнено *построение недостающих проекций точек на поверхности сферы*. Проекции точек  $A(A_1)$ ,  $B(B_2)$  и  $C(C_2)$  известны, необходимо найти проекции точек  $A(A_2)$ ,  $B(B_1)$  и  $C(C_1)$ .

Построение:

1. Точка  $A$  принадлежит экватору сферы, фронтальную проекцию точки отмечают на проекции одноименной линии.

2. Точка  $B$  принадлежит главному меридиану сферы, горизонтальную проекцию точки отмечают на проекции одноименной линии.

3. Построение проекции точки  $C(C_1)$ :

- через проекцию  $C_2$  проводят параллель (параллельную экватору);

- строят проекцию параллели на  $\Pi_1$  – окружность радиуса  $R$  (величину радиуса  $R$  определяют по фронтальной проекции);

- отмечают проекцию  $C_1$  на горизонтальной проекции параллели.

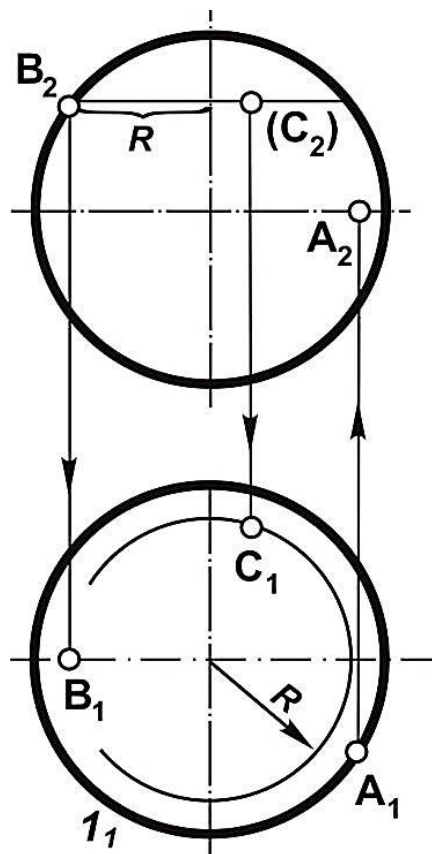


Рисунок 49 - Точки на поверхности сферы

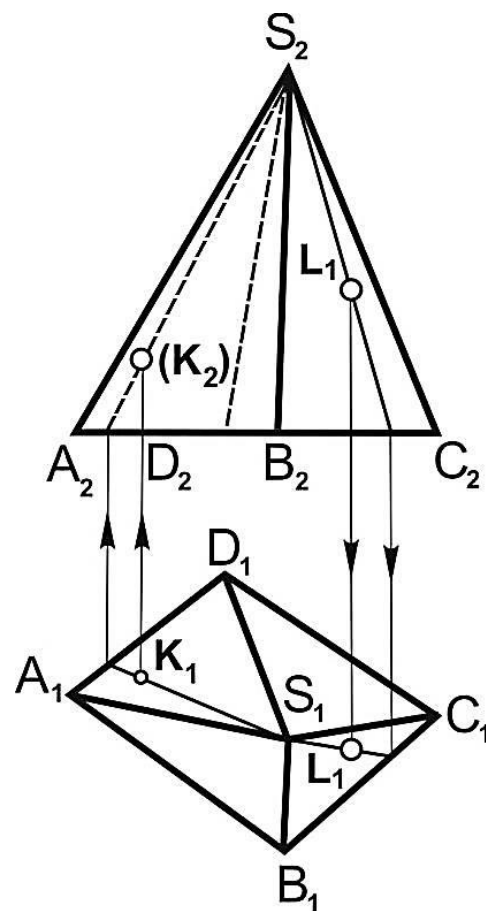


Рисунок 50 - Точки на поверхности пирамиды

На рисунке 50 показано *построение недостающих проекций точек на поверхности пирамиды*. По известным проекциям точек  $K(K_1)$  и  $L(L_2)$  строят проекции точек  $K(K_2)$  и  $L(L_1)$ .

Построение:

1. Для построения проекции точки  $K - K_2$ :

- через проекцию  $K_1$  от проекции вершины  $S_1$  проводят линию связи;
- строят проекцию линии связи на  $\Pi_2$ ;
- отмечают проекцию на  $\Pi_2$  точки  $K - K_2$ .

2. Для построения проекции точки  $L - L_1$ :

- через проекцию  $L_2$  от проекции вершины  $S_2$  проводят линию связи;
- строят проекцию линии связи на  $\Pi_1$ ;
- отмечают проекцию на  $\Pi_1$  точки  $L - L_1$ .

3). *Линия пересечения поверхности с плоскостью представляет собой линию, называемую сечением.* Точки этой линии можно рассматривать как точки пересечения линий поверхности с плоскостью или прямых плоскости с поверхностью.

На рисунке 51 изображены наглядные изображения вариантов пересечений плоскостями конических поверхностей вращения. В результате пересечения конуса плоскостью, перпендикулярной оси конуса, получается окружность - *а*). Эллипс получается в том случае, если секущая плоскость пересекает все образующие поверхности, но не перпендикулярна оси конуса - *б*). Плоскость, параллельная одной из образующих конуса, пересекает его по параболе - *в*). Плоскость, параллельная двум образующим, пересекает обе половины конической поверхности и в сечении видна гипербола - *г*). Плоскость проходит через вершину конической поверхности, в сечении получают две пересекающиеся прямые - *д*).

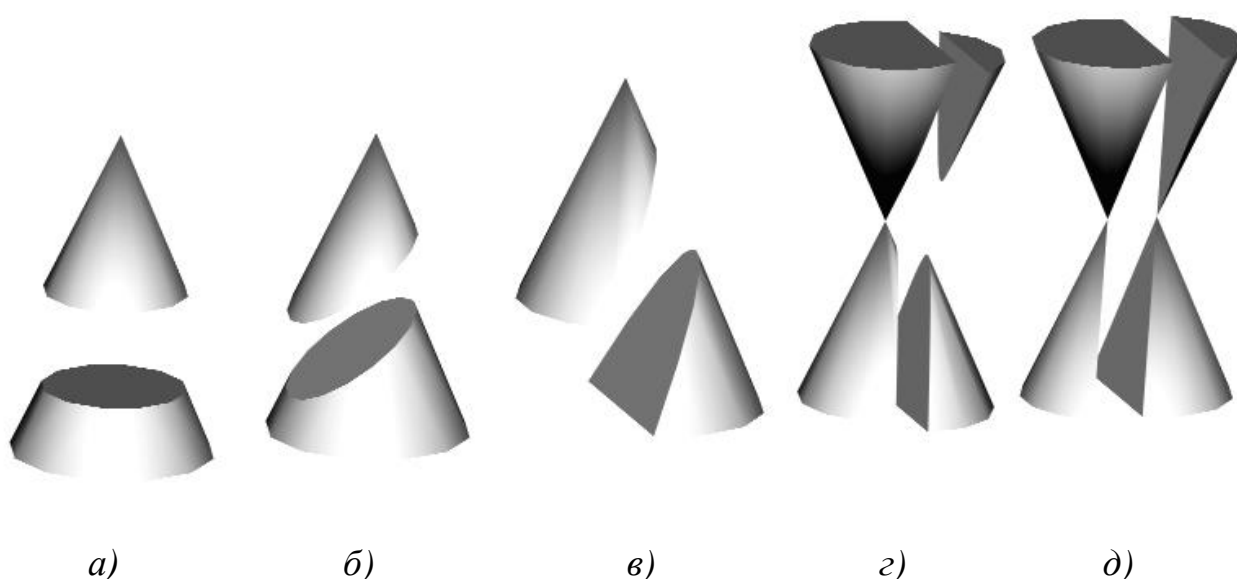


Рисунок 51 - Сечения конуса плоскостями

Сечения пирамиды плоскостями, проходящими через ее вершину, представляют собой треугольники (рис. 52).

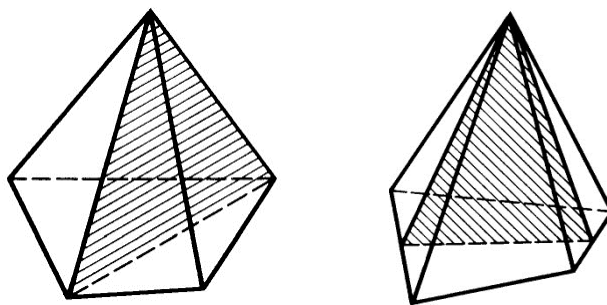


Рисунок 52 - Сечения пирамиды

4). При пересечении многогранника плоскостью в сечении получают *плоский многоугольник*, число сторон которого равно числу граней, пересеченных плоскостью, а число вершин - количеству ребер, пересеченных плоскостью. При пересечении тела вращения плоскостью контур пересечения представляет собой *замкнутую кривую линию*, форма которой зависит от формы тела вращения и положения секущей плоскости относительно оси вращения.

На рисунке 53 выполнено *построение сечения прямого цилиндра секущей фронтально-проецирующей плоскостью* (секущая плоскость не перпендикулярна оси вращения цилиндра).

Построение:

1. Линия пересечения цилиндра – эллипс, который на плоскости  $\Pi_2$  проецируется в отрезок  $A_2B_2$ , на плоскости  $\Pi_1$  в окружность, совпадающую с проекцией цилиндрической поверхности, а на плоскости  $\Pi_3$  в эллипс.

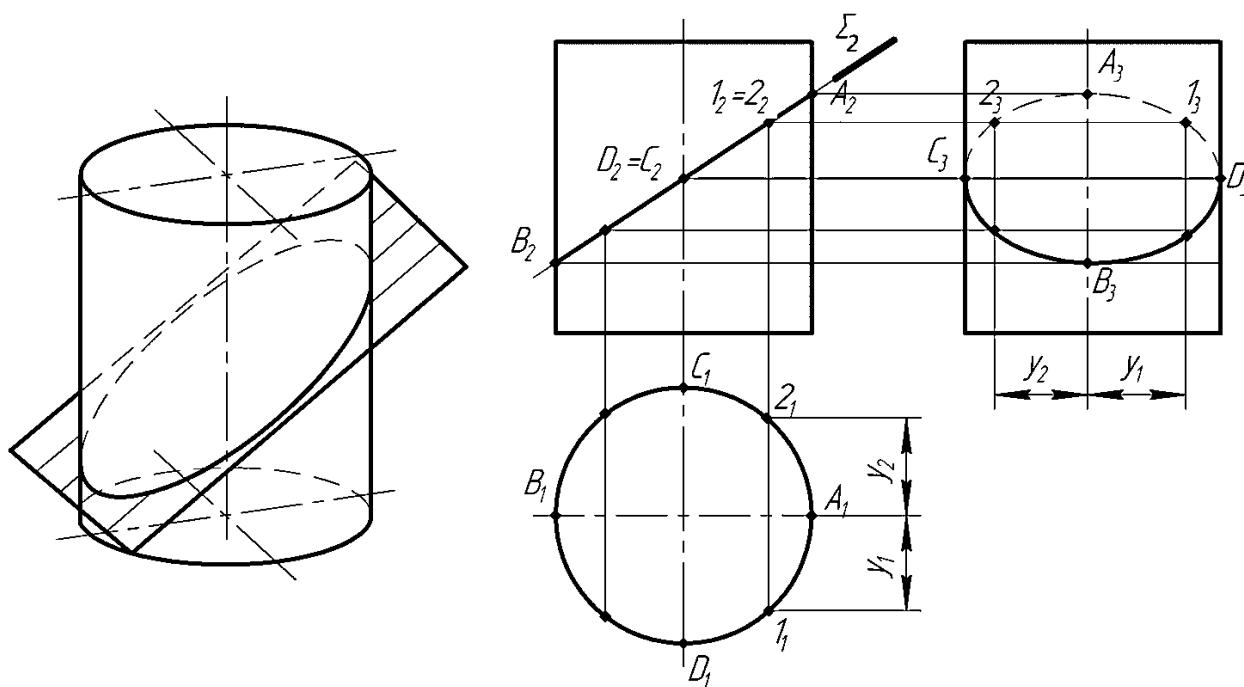


Рисунок 53 - Сечение цилиндра проецирующей плоскостью

2. Профильные проекции точек, принадлежащих эллипсу, строят по двум проекциям - горизонтальной и фронтальной:

- определяют проекции высшей  $A$  и низшей  $B$  точек;
- находят проекции очерковых точек относительно  $\Pi_3$  -  $C$  и  $D$ ;
- определяют проекции промежуточных точек -  $1$  и  $2$ .

3. Соединяют полученные точки плавной кривой с учетом видимости, получают эллипс, являющийся профильной проекцией фигуры сечения. Точки  $C$  и  $D$  являются точками смены видимости на  $\Pi_3$ .

На рисунке 54 показано построение фигуры сечения пирамиды фронтально-проецирующей плоскостью. Для построения плоской фигуры пересечения определяют точки пересечения ребер многогранника и секущей плоскости и соединяют построенные точки с учетом их видимости.

Секущая плоскость  $\beta(\beta_2)$  занимает фронтально-проецирующее положение, поэтому точки пересечения ребер определяют как точки пересечения прямой общего положения и плоскости частного положения:

$$AS \cap \beta = 1(1_2, 1_1);$$

$$BS \cap \beta = 2(2_2, 2_1);$$

$$CS \cap \beta = 3(3_2, 3_1).$$

Видимость определяют методом конкурирующих точек. Грань  $ACS$  относительно плоскости  $\Pi_1$  невидима, следовательно, и линия  $(1_1 3_1)$  также невидима. Видимость на  $\Pi_2$ , в данном случае, не определяется.

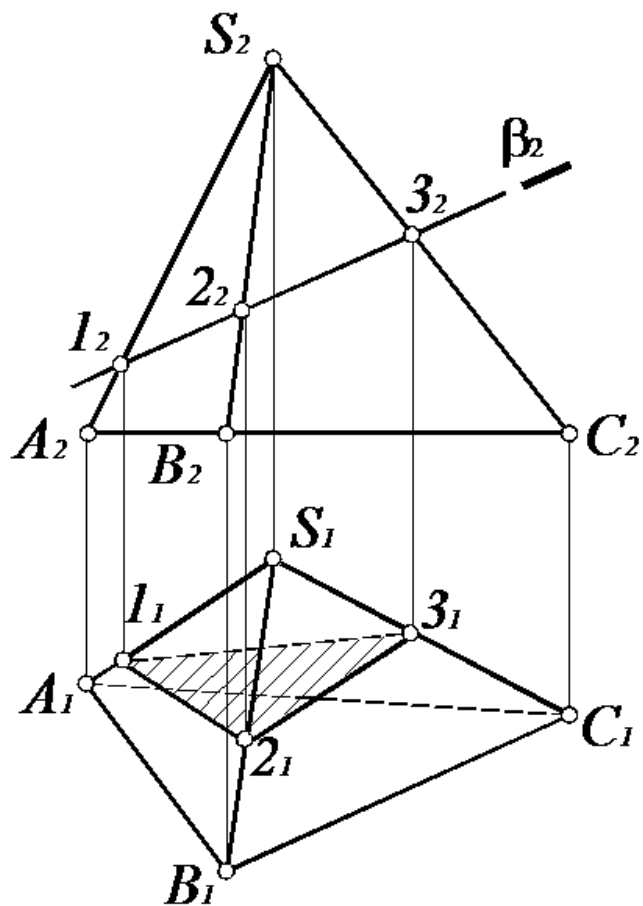


Рисунок 54 - Сечение пирамиды фронтально-проецирующей плоскостью

5). На практике встречаются поверхности с отверстиями и вырезами цилиндрической, прямоугольной или какой-либо другой формы. При пересечении отверстий с поверхностями образуются линии пересечения, форму которых в ряде случаев необходимо воспроизвести на чертеже (эпюре).

На рисунке 55 представлен цилиндр (поверхность), ось вращения которого перпендикулярна горизонтальной плоскости. Перпендикулярно фронтальной плоскости выполнено сквозное отверстие, образованное несколькими секущими плоскостями. Участок CD образован горизонтальной плоскостью, параллельной основанию, он является частью окружности. Участки ED и BC образованы плоскостями, параллельными профильной плоскости, их профильные проекции являются частями прямоугольника. На фронтальной и горизонтальной проекциях - это прямые линии. EA и AB не параллельны ни одной из плоскостей, и они являются частью эллипса.

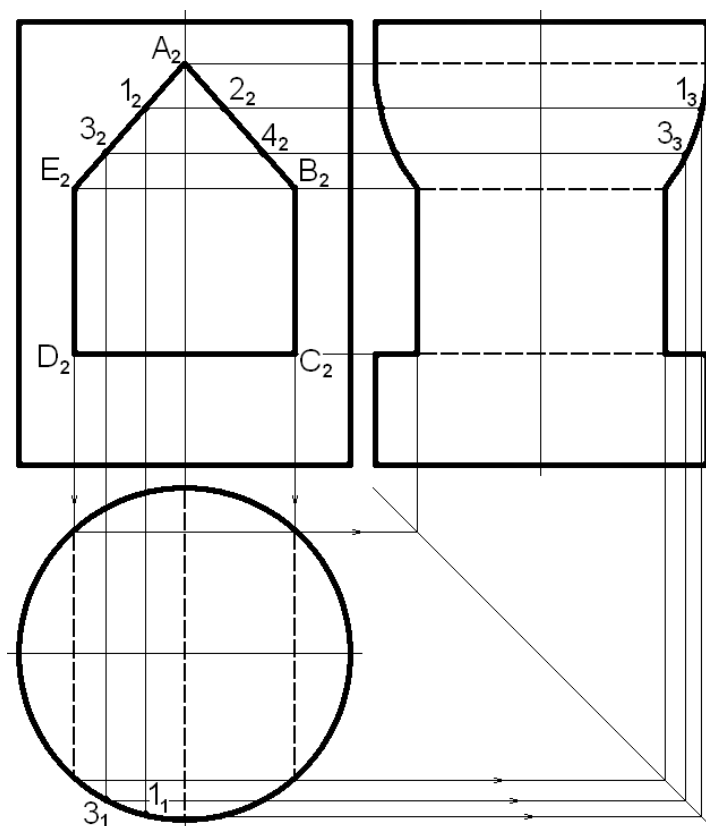


Рисунок 55 – Проекция цилиндра с отверстием

На рисунке 56 показаны проекции геометрических тел с отверстиями, представляющими собой поверхности вращения. На рисунке 56,а изображен цилиндр со сквозным цилиндрическим отверстием, фронтальная проекция которого является окружностью, горизонтальная проекция совпадает с горизонтальной проекцией вертикального цилиндра. Достроив профильную проекцию по двум заданным, видим, что это кривая линия, точки которой соединяют лекалом. Отверстие в конусе также строится по точкам, из которых А, В, С и D – обязательны (рис. 56,б). Для точности построения

берут промежуточные точки. Принципиально аналогично строятся отверстия в призме и пирамиде (рис. 56,в; 56,г).

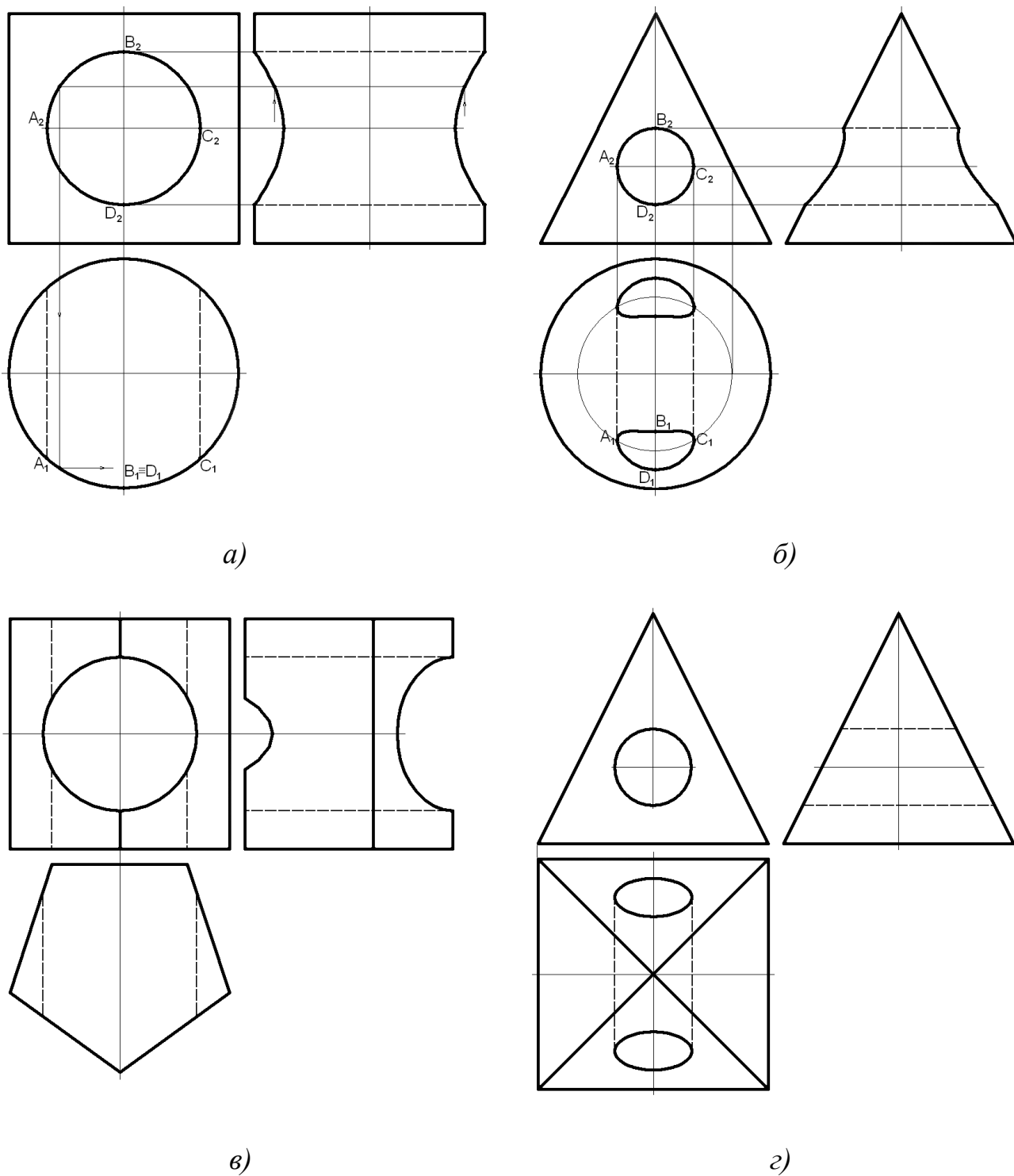


Рисунок 56 – Проекции поверхностей с отверстиями

б). Построение натуральной величины фигуры сечения фронтально-проецирующей плоскостью  $\alpha$  шестиугольной призмы выполнено на рисунке 57. Фронтальная проекция сечения – прямая, совпадающая с главным следом

плоскости. Обозначив фронтальные проекции точек пересечения ребер пирамиды с плоскостью ( $1_2, 2_2, 2'_2, 3_2, 3'_2, 4_2, 4'_2$ ), находят их горизонтальные и профильные проекции на одноименных проекциях ребер. Плоскость  $\alpha$  пересекает основание призмы по фронтально-проецирующей прямой ( $44'$ ).

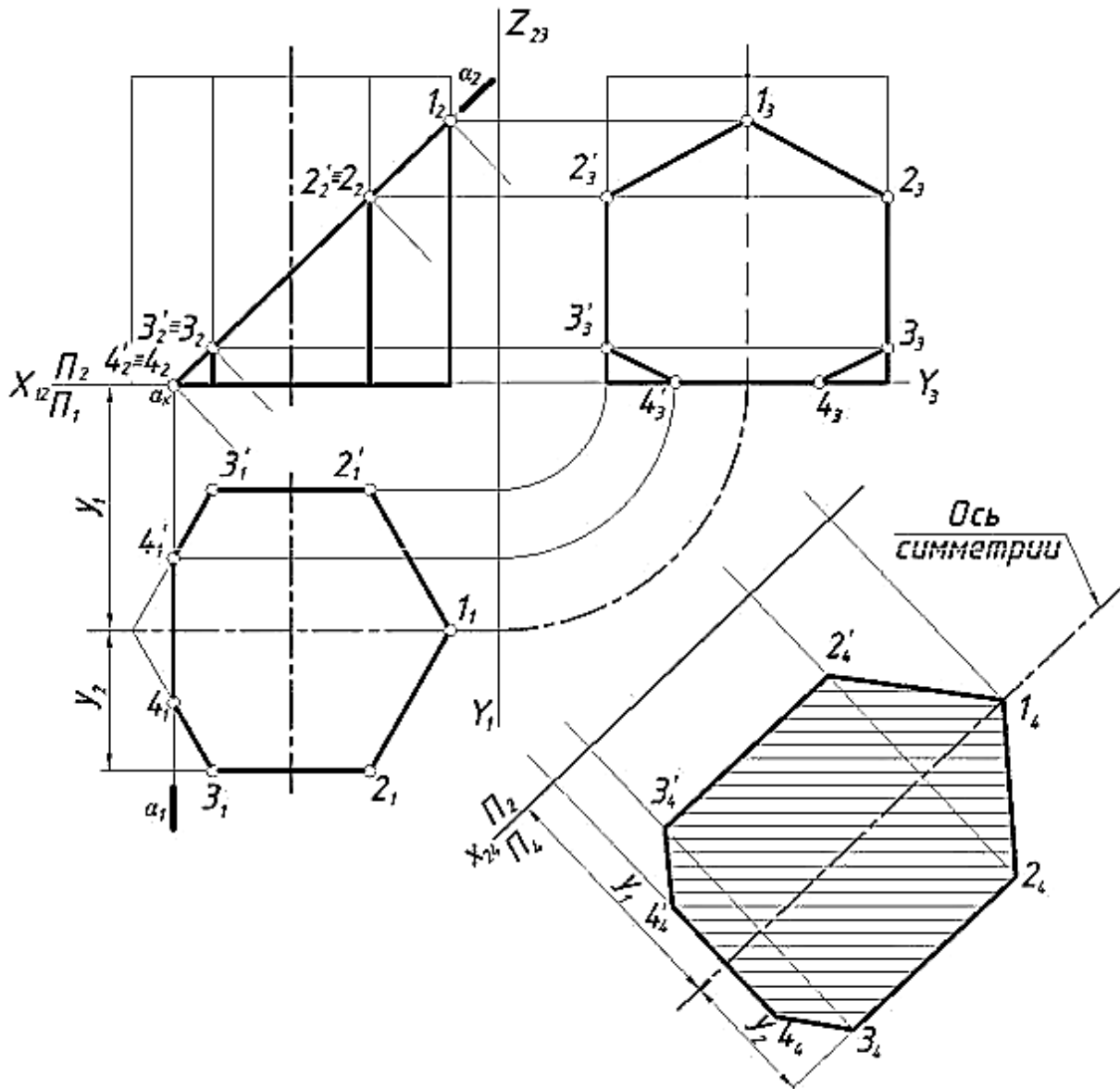


Рисунок 57 – *Натуральная величина фигуры сечения призмы*

Соединив одноименные проекции точек  $1, 2, 3, 4, 4', \dots, 1$  получают плоскую замкнутую линию (фигуру сечения). Для определения натуральной величины фигуры сечения применяют способ замены плоскостей проекций, заменив горизонтальную плоскость проекций  $\Pi_1$  на новую  $\Pi_4$ , параллельную плоскости  $\alpha$ :  $\Pi_4 \perp \Pi_2$ ;  $\Pi_4 \parallel \alpha$ ;  $X_{24} \parallel \alpha_2$ .

При построении натуральной величины используют ось симметрии, удаленную от новой оси  $X_{24}$  на расстояние равное координате  $Y_1$ . Точка  $1_4$

принадлежит оси симметрии. Используя координаты  $U$  точек, строят проекции точек  $2_4, 2'_4, 3_4, 3'_4, 4_4, 4'_4$ . Обводят проекции усеченной призмы с учетом видимости ребер и натуральную величину сечения сплошной толстой основной линией, отсеченную часть призмы – тонкой сплошной линией.

Построение натуральной величины фигуры сечения цилиндра фронтально-проецирующей плоскостью  $\alpha$  изображено на рисунке 58. Для определения натуральной величины фигуры сечения заменяют горизонтальную плоскость проекций  $\Pi_1$  на новую  $\Pi_4$ , параллельную плоскости  $\alpha$ :  $\Pi_4 \perp \Pi_2$ ;  $\Pi_4 \parallel \alpha$ ;  $X_{24} \parallel \alpha_2$ .

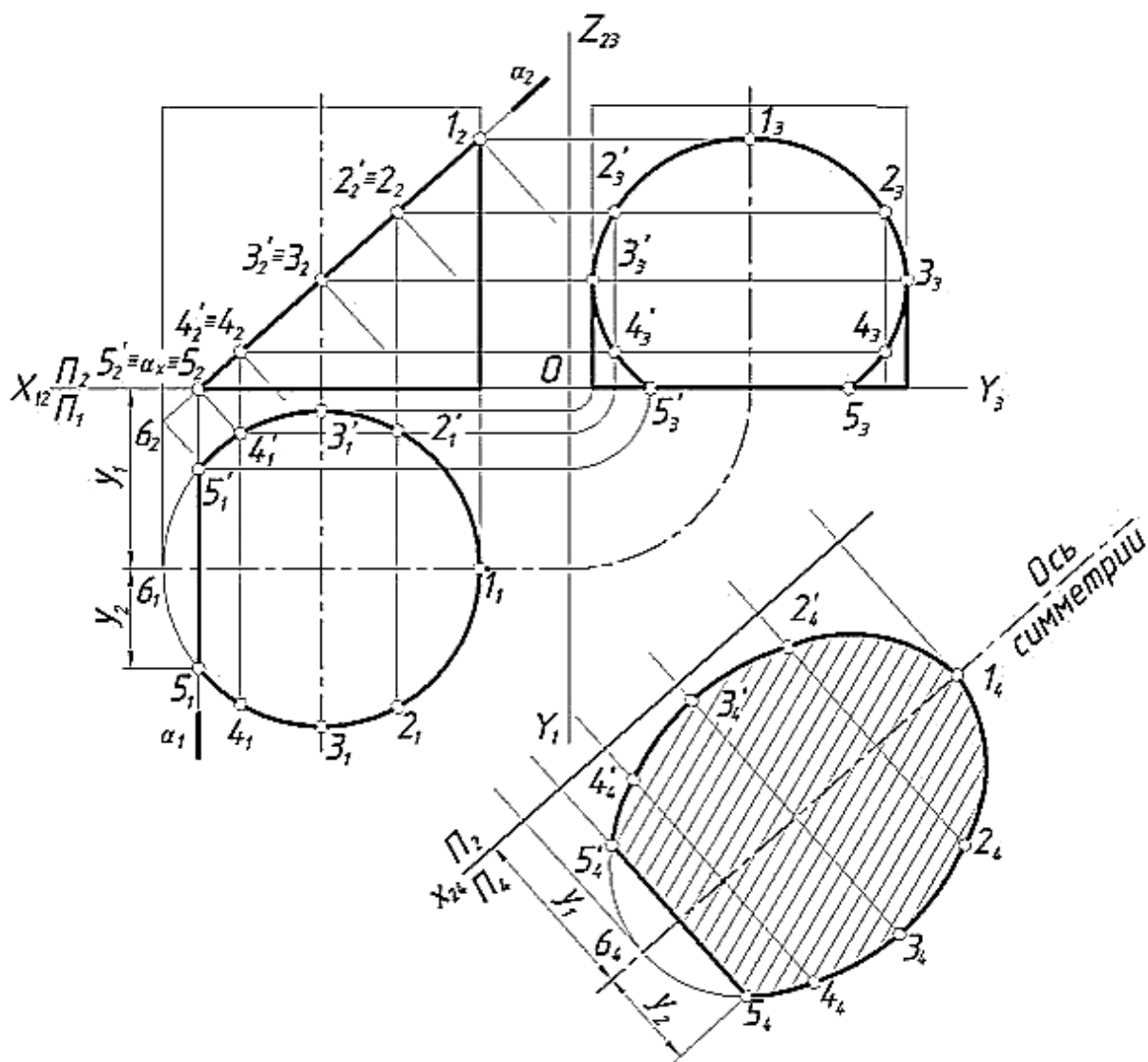


Рисунок 58 – Натуральная величина фигуры сечения цилиндра

При построении дополнительной проекции эллипса (натуральной величины) используют ось симметрии, положение которой определяет координата  $U_1$ . Точка  $1_4$  принадлежит оси симметрии. Проекции точек  $5_4, 5'_4$



строят, используя координату  $U_2$ . Остальные точки строят по аналогии. Обводят проекции усеченного цилиндра и натуральную величину сечения сплошной толстой основной линией, отсеченную часть цилиндра – тонкой сплошной линией.

### 3.8. Задание к выполнению эюра 3

*Целью задания* является отработка умения строить сечения поверхности проецирующей плоскостью.

Эпюр 3: *Построение сечения поверхности проецирующей плоскостью и определение натуральной величины сечения.* Варианты задания размещены на страницах 66-68 данного учебного пособия. Образец выполнения эюра 3 показан на рисунке 59. Необходимо по двум заданным проекциям поверхности построить третью - профильную проекцию.

### 3.9. Рекомендации к выполнению эюра 3

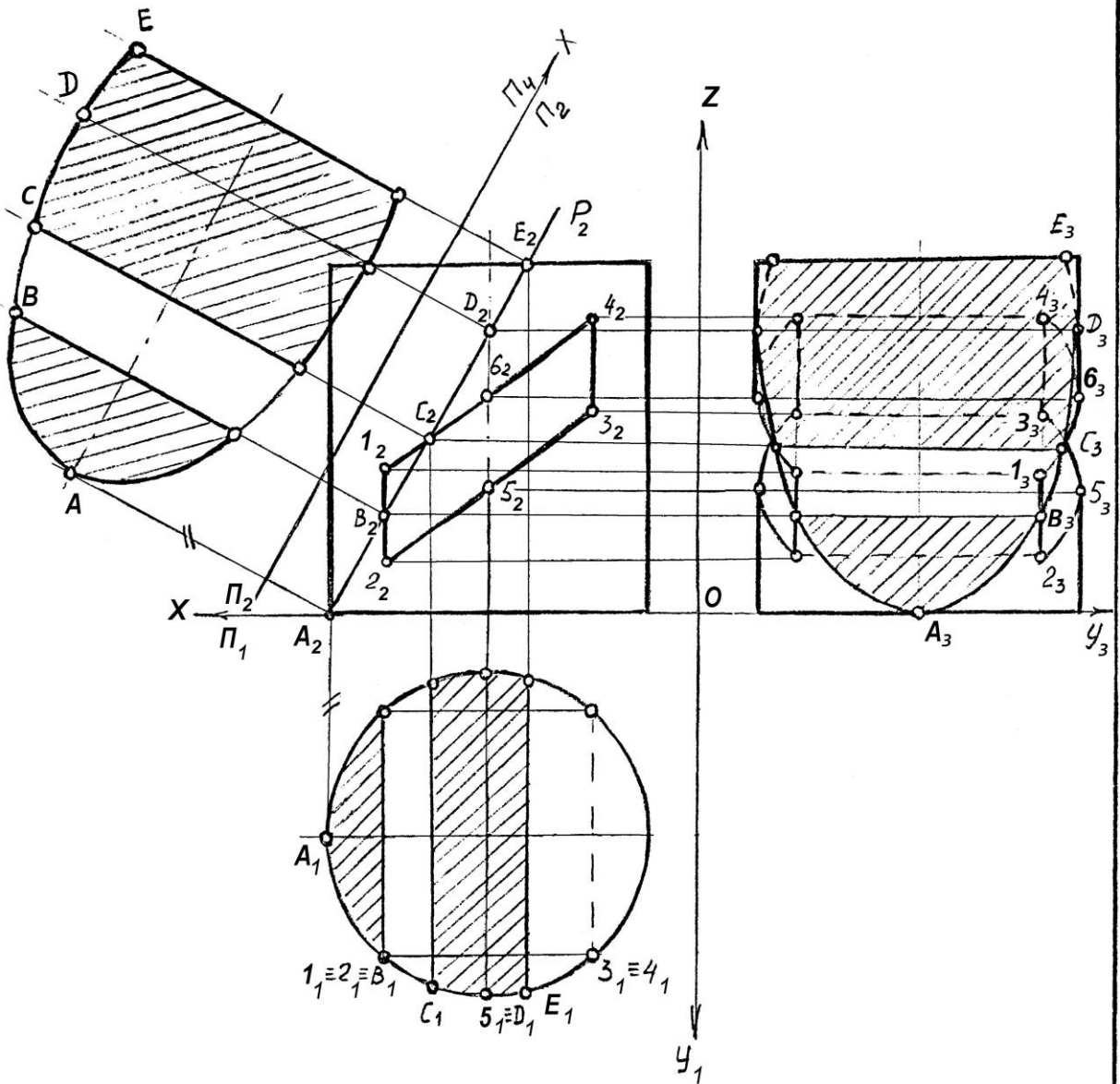
По контуру сквозного отверстия в поверхности на фронтальной проекции наметить характерные точки - высшую, низшую, точки смены видимости, промежуточные точки. По линиям проекционной связи построить проекции этих точек на всех проекциях заданной поверхности. Полученные проекции точек соединить по образующим и кривым линиям, определить видимость.

На образце секущая плоскость  $P(P_2)$  пересекает цилиндрическую поверхность по эллиптической кривой. Построение сечения следует начать с характерных точек на фронтальном следе этой плоскости: точки  $A(A_2)$ ,  $B(B_2)$ ,  $C(C_2)$ ,  $D(D_2)$  и  $E(E_2)$ . Определить проекции этих точек на плоскостях  $\Pi_1$ ,  $\Pi_3$  и соединить их красным цветом (гелевой ручкой) линией толщиной  $S/3$ .

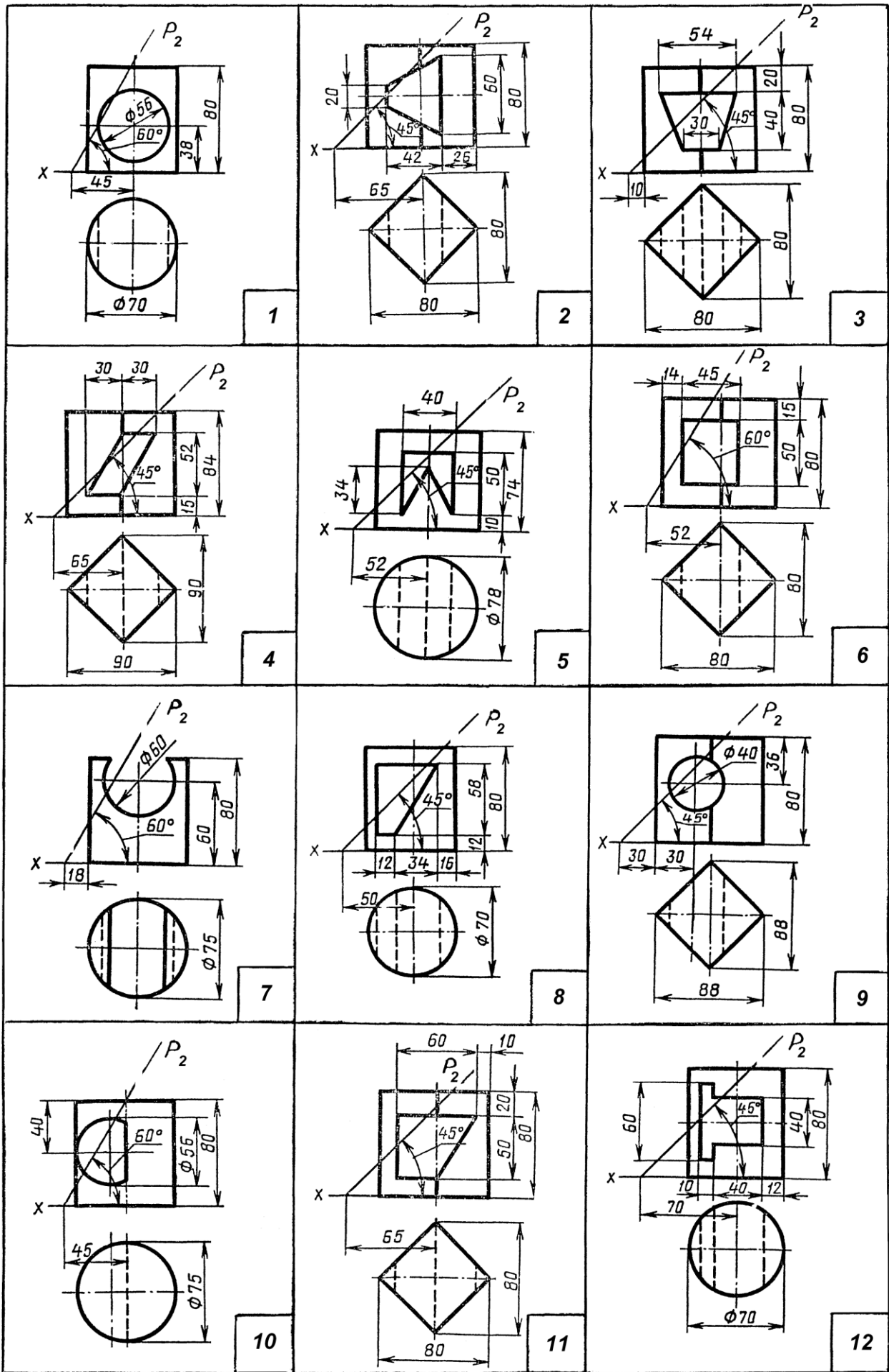
Выбрать новую ось  $\frac{\Pi_4}{\Pi_2} // P_2$  и методом перемены плоскостей проекций

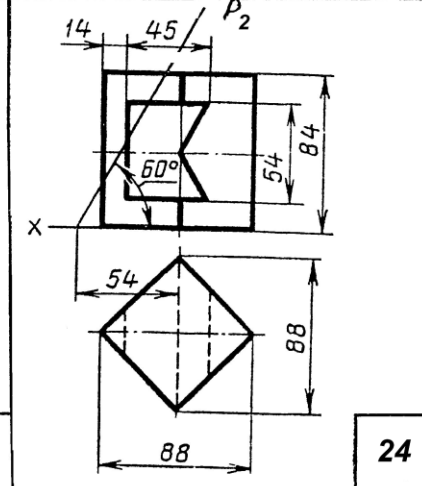
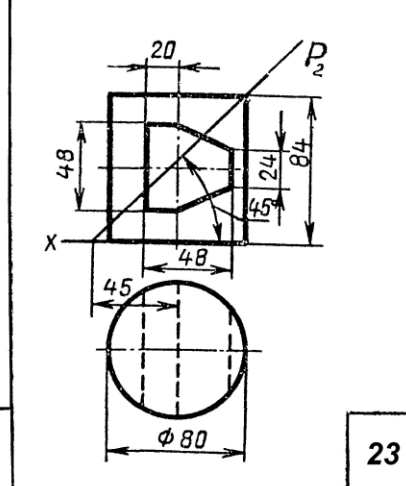
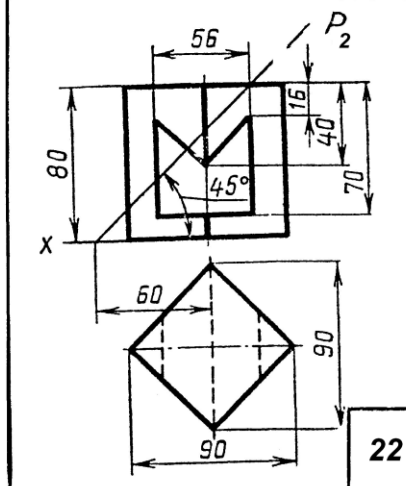
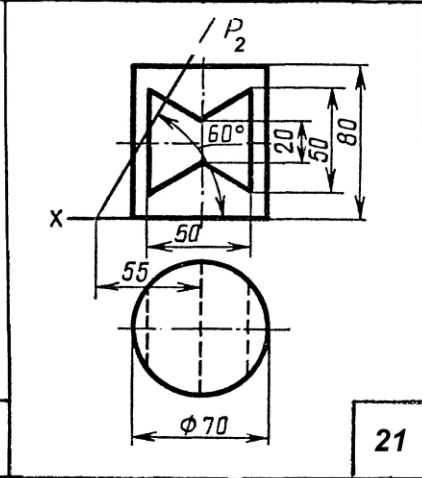
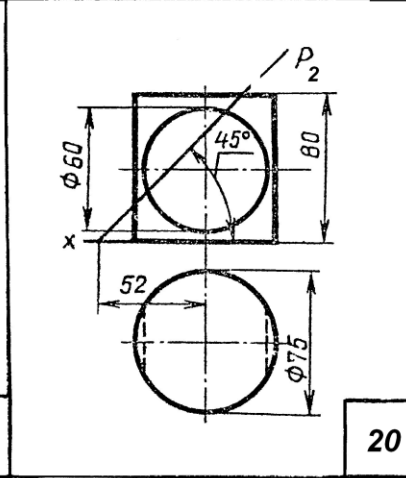
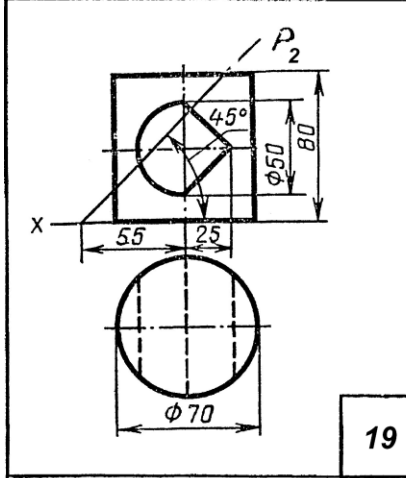
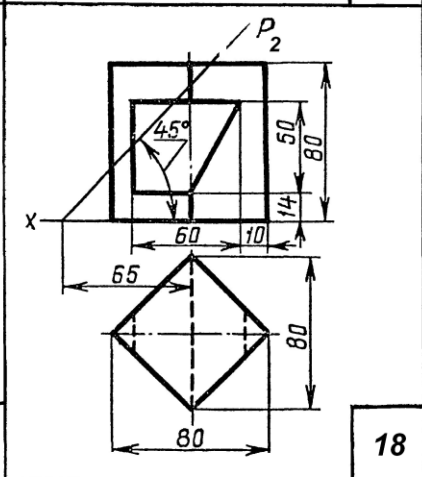
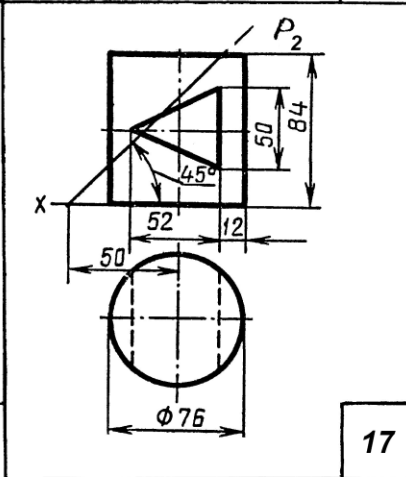
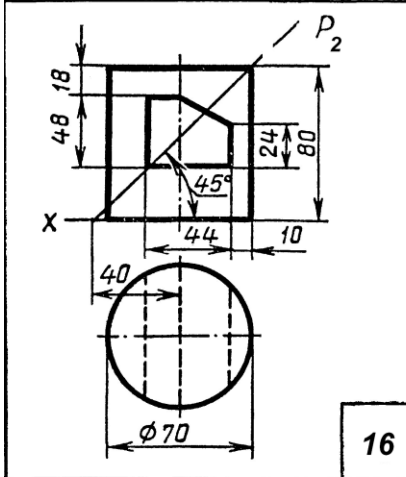
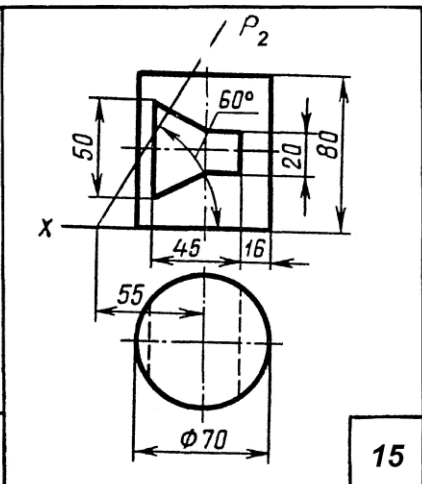
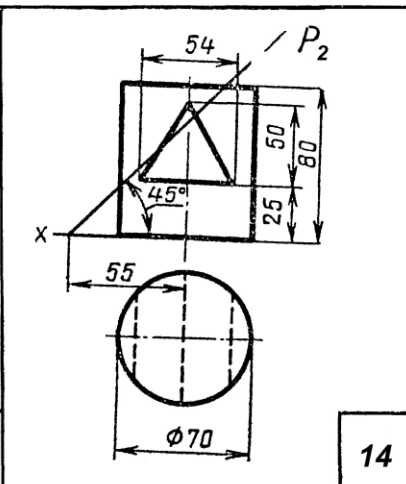
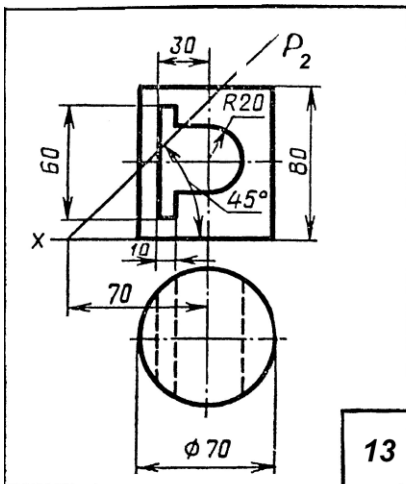
определить натуральную величину сечения. Контур сечения обвести красным цветом сплошной основной линией толщиной  $S$ . Проекция фигуры сечения и натуральную величину сечения заштриховать под углом  $45^\circ$  красным цветом линиями толщиной  $S/3$ .

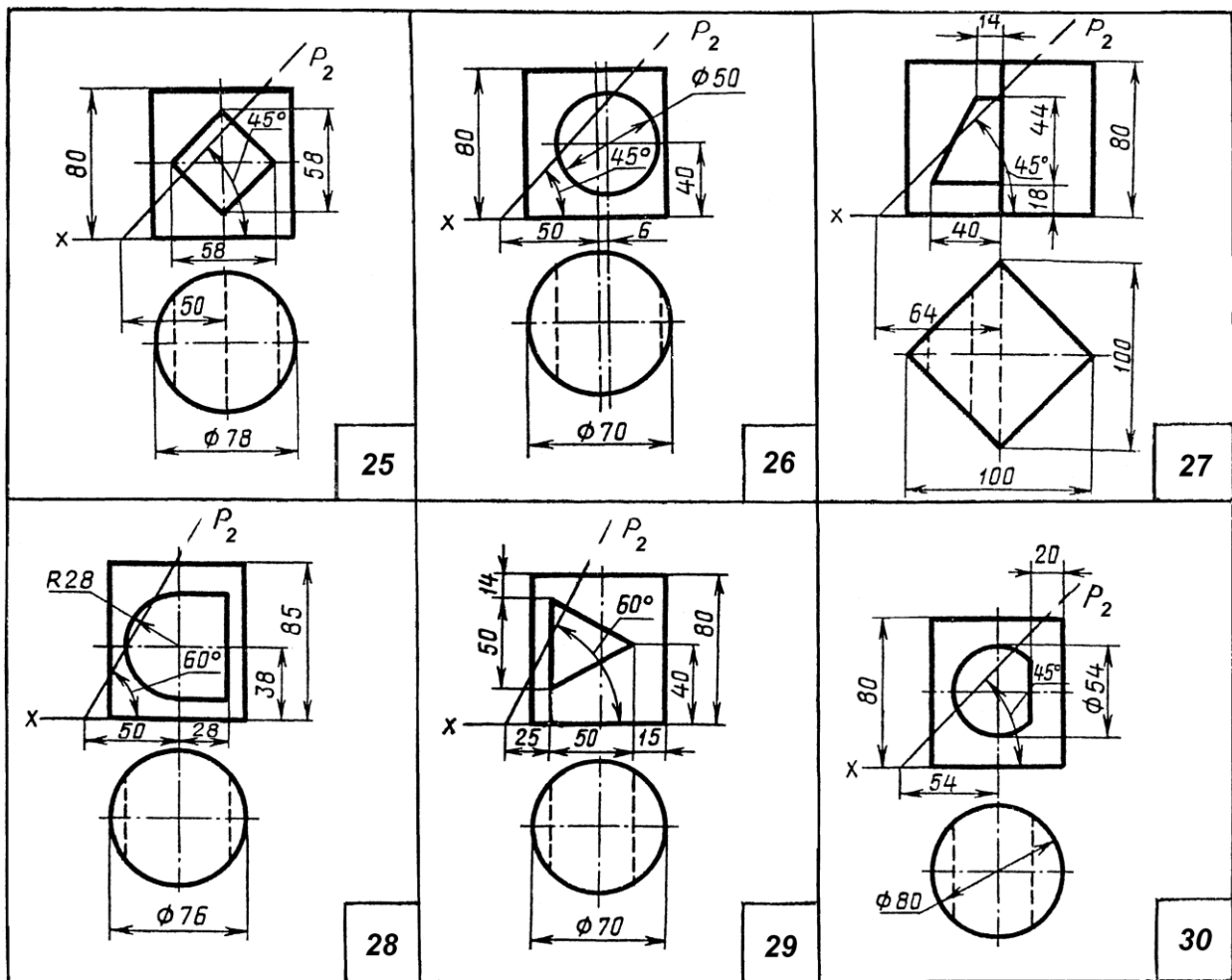
Формат эюра А3. Масштаб выполнения чертежа - 1:1 или 1:2.



<b>НГ 03 XX 00</b>	
Сечение поверхности плоскостью	НХТИ, гр.







### 3.10. Теоретические положения к выполнению эшюра 4

#### 3.10.1. Взаимное пересечение поверхностей

Линия пересечения двух поверхностей представляет собой в общем случае пространственную кривую. *Линия пересечения двух поверхностей есть линия, принадлежащая обеим поверхностям*, то есть любая точка этой линии принадлежит как первой, так и второй поверхности. Иногда ее называют линией перехода, форма этой линии зависит от взаимного расположения поверхностей. Существуют различные способы ее построения. В качестве вспомогательных поверхностей (посредников) наиболее часто используются секущие плоскости и сферические поверхности.

Примеры построения линий перехода и теоретические положения темы:

1). На рисунке 60 показано *построение линии пересечения пирамиды и призмы*:

1. Все ребра призмы пересекают грани пирамиды. Призма занимает проецирующее положение на  $\Pi_3$ .

2. Линия пересечения распадается на две замкнутые ломаные линии: пространственную  $1-6-8-9-4-3-1$  и плоскую  $2-5-10-7-2$ . Профильная проекция линии пересечения совпадает с проекцией призмы.

3. Опорные точки пересечения ребер призмы с гранями пирамиды определяют при помощи горизонтальных плоскостей уровня  $\Gamma$  и  $\Gamma'$ , а точки пересечения ребра пирамиды с гранями призмы - из условия принадлежности.

4. Определять промежуточные точки нет необходимости.

5. Вершины ломаной линии, которые принадлежат одной паре пересекающихся граней пирамиды и призмы, соединяют отрезками прямых с учетом видимости. Видимыми относительно той или иной плоскости проекций считаются те участки ломанной, которые являются линией пересечения двух видимых относительно этой плоскости проекций граней многогранников. Участки  $6_1-8_1-9_1$  и  $7_1-10_1$  ломанной на  $\Pi_1$  невидимы, так как являются результатом пересечения невидимой грани призмы с поверхностью пирамиды.

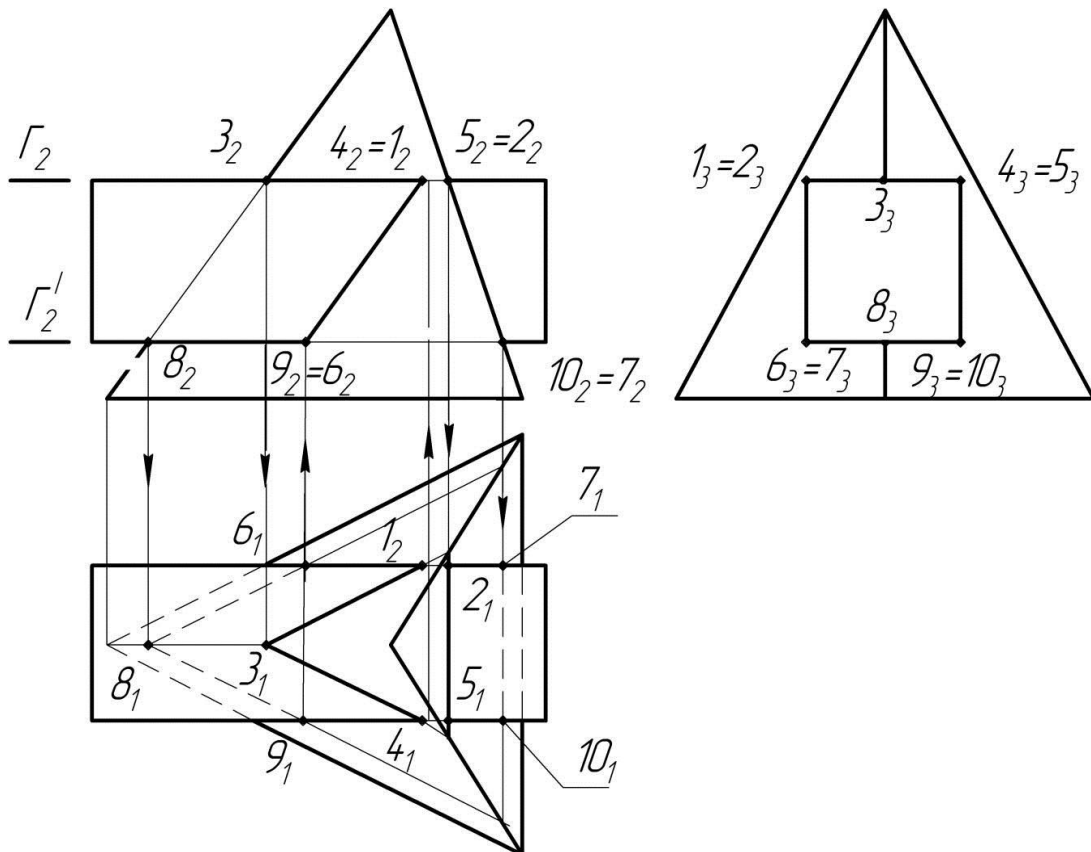


Рисунок 60 – Пересечение пирамиды и призмы

2). На рисунке 61 показано построение линии пересечения конуса и призмы:

1. Линия состоит из совокупности дуги окружности, части гиперболы и части эллипса.

2. Так как призма фронтально-проецирующая, то фронтальная проекция линии пересечения совпадает с фронтальной проекцией призмы.
3. Горизонтальная и профильная проекции линии пересечения построены из условия принадлежности конусу.
4. Полученные точки соединим плавными кривыми с учетом видимости.

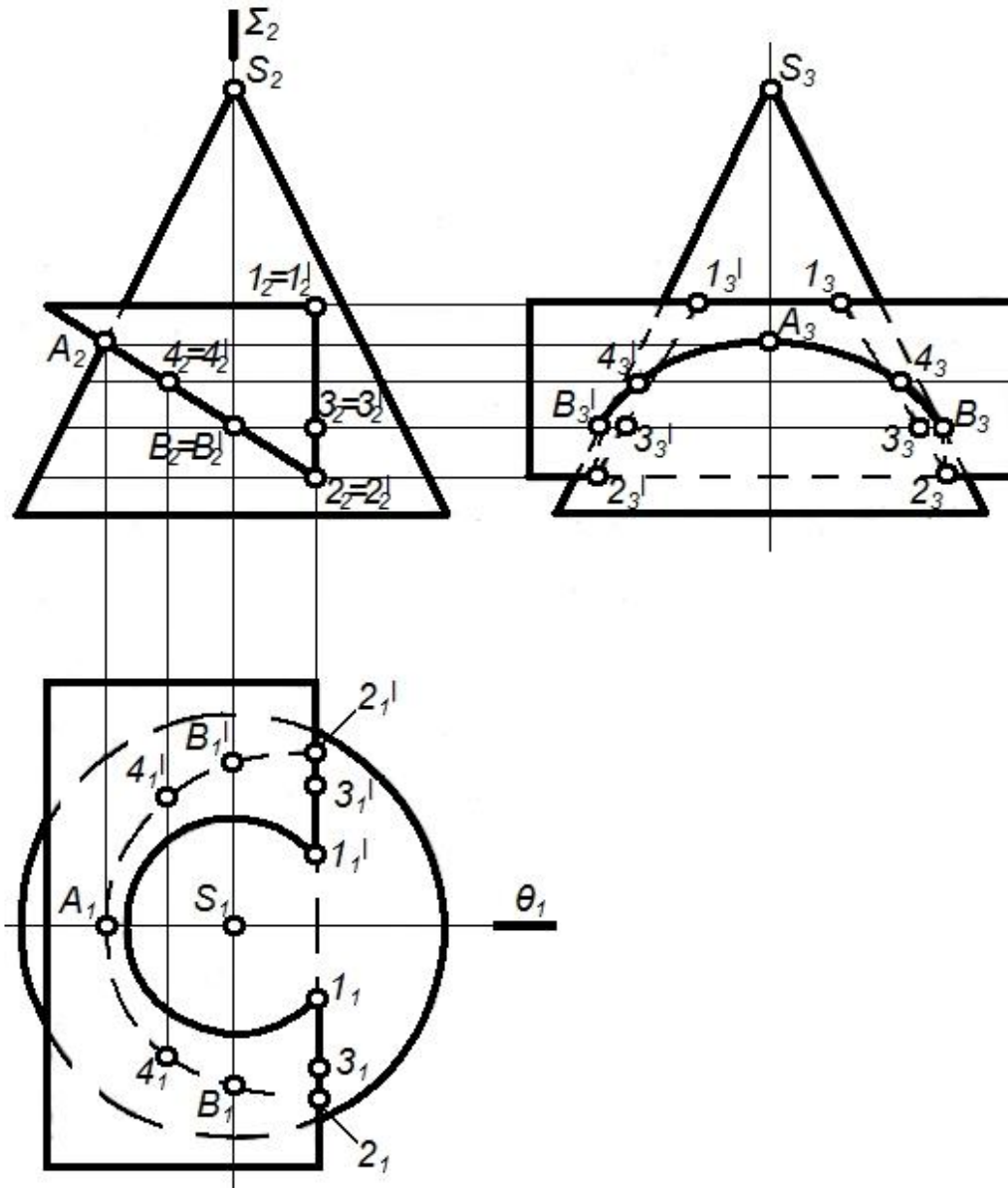


Рисунок 61 – Пересечение конуса и призмы

3). Задачу определения линии перехода поверхностей на рисунке 62 решают путем проведения параллельных плоскостей. Сначала находят характерные точки. Левая грань призмы как плоскость рассекает сферу по окружности. Эта окружность спроецируется на фронтальную плоскость проекций в виде эллипса, находят малую и большую оси эллипса. Точку *1*

определяют непосредственно по горизонтальной проекции, а точку 2 - после проведения плоскости  $\sigma$  через левую грань призмы.

Для нахождения большой оси эллипса 3-4 опускают из центра сферы  $O$  перпендикуляр на плоскость  $\sigma$ . Отрезок  $3_1 4_1$  есть горизонтальная проекция большой оси. Фронтальную проекцию находят с помощью фронтальной плоскости  $\lambda$ . Плоскость  $\lambda$  пересечет сферу по окружности радиуса  $9_1 O_1$ . Этим радиусом из центра сферы  $O_2$  делаем засечки для получения точек  $3_2$  и  $4_2$ . Иначе точки  $3_2$  и  $4_2$  можно найти, откладывая от малой оси эллипса  $1_2 2_2$  вверх и вниз отрезки, равные  $1_1 3_1$  или  $2_1 3_1$ . Очень важно найти точки  $5_2$  и  $6_2$ , в которых эллипс касается контура сферы. В этих точках видимая часть эллипса переходит в невидимую. Определить их легко, поскольку они лежат на большой окружности, параллельной плоскости  $\Pi_2$ . Точки 7 и 8 находят с помощью фронтальной плоскости  $\lambda'$  или путем непосредственного проецирования с профильной проекции.

С помощью фронтальных плоскостей определяют любое количество промежуточных точек. На чертеже получились две отдельные замкнутые линии пересечения: линия, состоящая из двух неполных эллипсов, и невидимая линия в виде окружности, построенной радиусом  $O_2 11_2$ .

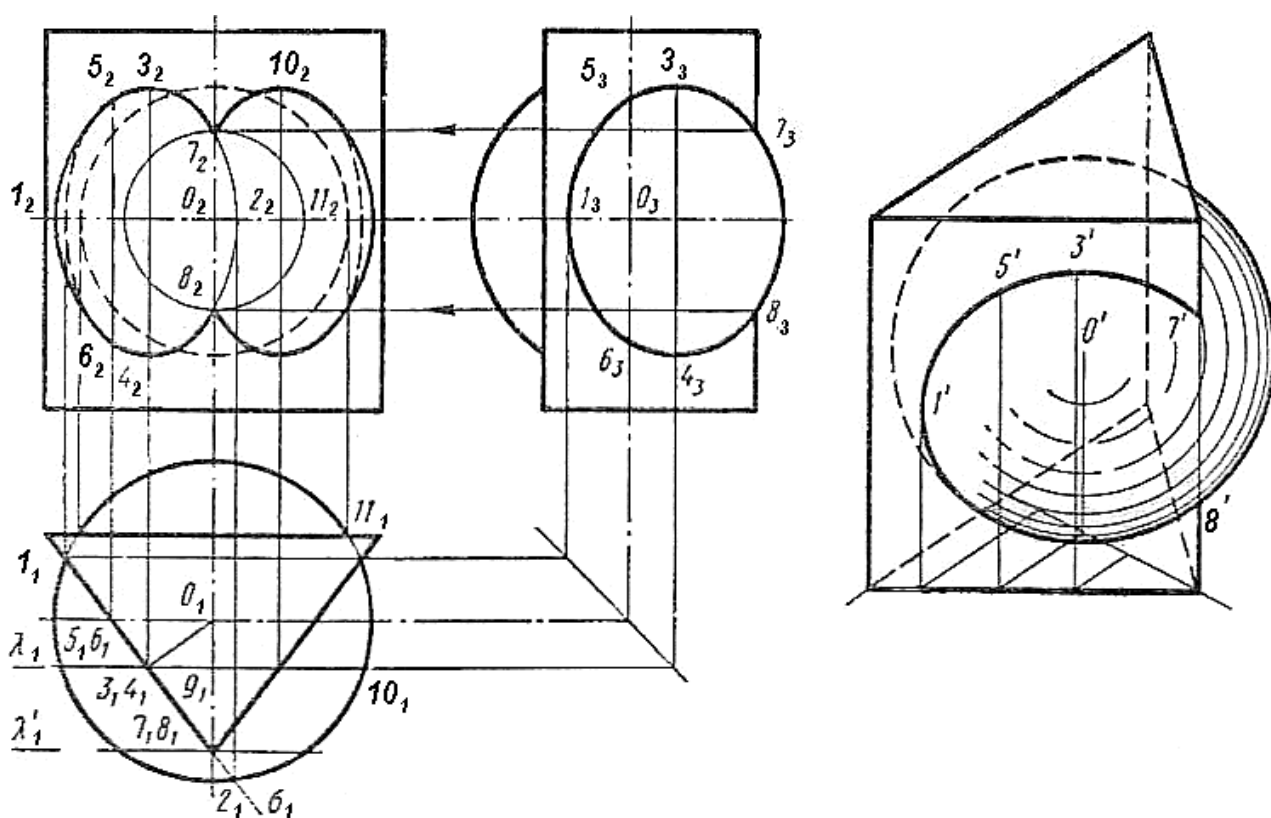


Рисунок 62 – Пересечение сферы и призмы



4). На рисунке 63 приведён пример применения горизонтальных плоскостей в качестве посредников при построении линии пересечения. Последовательность такого построения:

1. Выбрать посредники-плоскости, которые пересекают заданные поверхности по самым простым по форме и построению линиям.

2. Пересечь поверхности посредниками, с помощью которых определяются опорные точки искомой линии (точки, принадлежащие очеркам проекций поверхностей; крайние правые и левые, самые высокие и низкие точки).

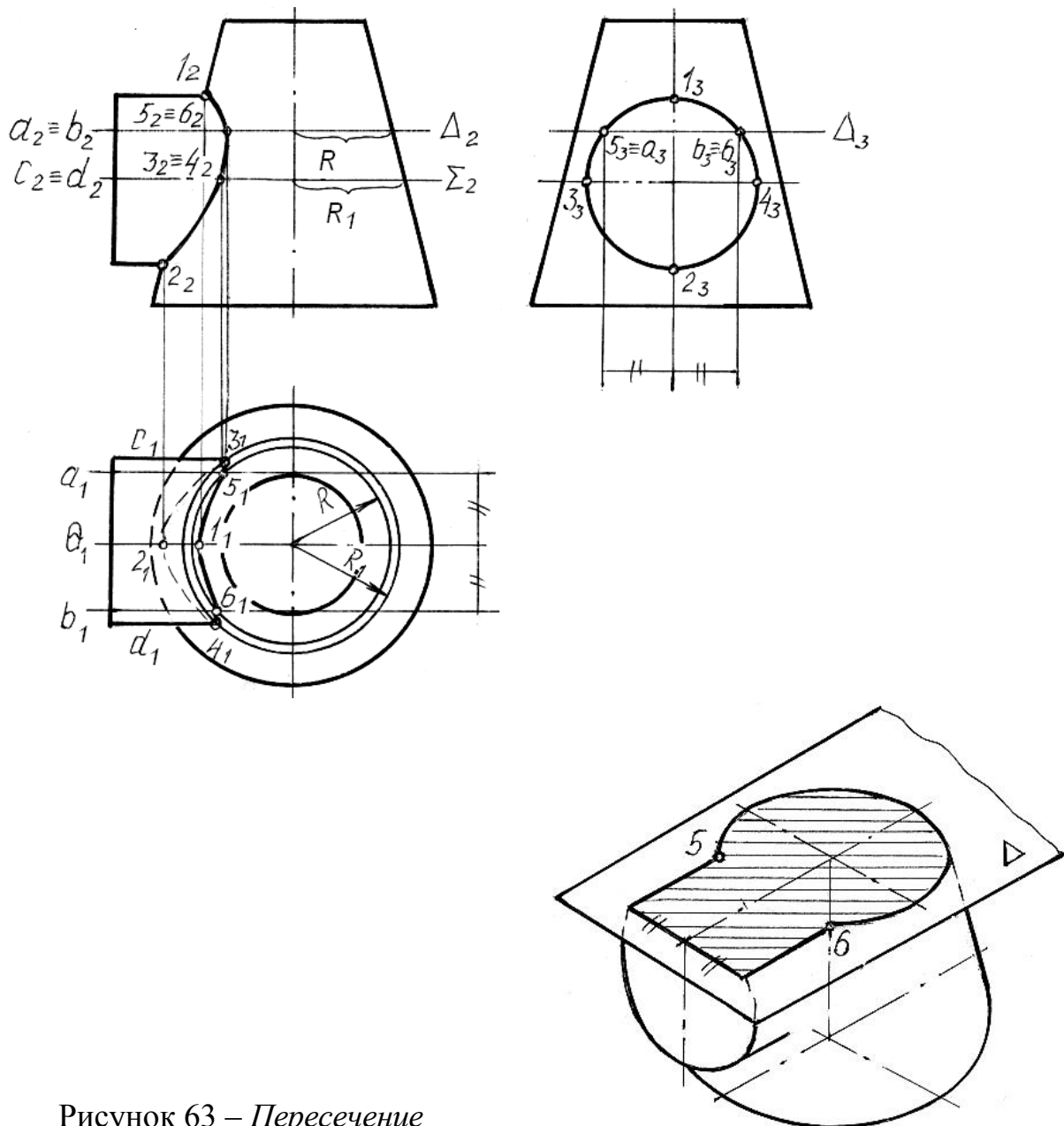


Рисунок 63 – Пересечение цилиндра и усеченного конуса

3. Построить линии пересечения поверхностей указанными посредниками и найти точки пересечения построенных линий в каждом посреднике.

4. Пересечь поверхности посредниками, с помощью которых определяются промежуточные точки, и определить эти точки.

5. Последовательно соединить точки с учётом видимости.

5). На рисунке 64 приведен еще один пример построения линии пересечения цилиндра и конуса:

1. Цилиндр занимает проецирующее положение на фронтальной плоскости проекций.

2. Линия пересечения – пространственная замкнутая кривая, фронтальная проекция которой совпадает с проекцией цилиндра на  $\Pi_2$  в пределах очерка конуса.

3. Опорные точки:

$A$ ,  $C$  и  $C'$  являются экстремальными относительно  $\Pi_1$ :  $A$  – высшая точка,  $C$  и  $C'$  – низшие.  $D$  и  $D'$  – очерковые (точки смены видимости относительно  $\Pi_1$ ). Точки  $1$ ,  $1'$  и  $2$ ,  $2'$  – очерковые относительно  $\Pi_3$ . Точки  $3$  и  $3'$  – точки касания образующих конуса и цилиндра также являются экстремальными.

4. Промежуточные точки  $4$ ,  $4'$  и  $5$ ,  $5'$ . Опорные и промежуточные точки найдены по принципу принадлежности точки поверхности конуса (с помощью параллелей).

5. Соединив полученные точки плавной кривой с учетом видимости, получим горизонтальную проекцию линии пересечения заданных поверхностей.

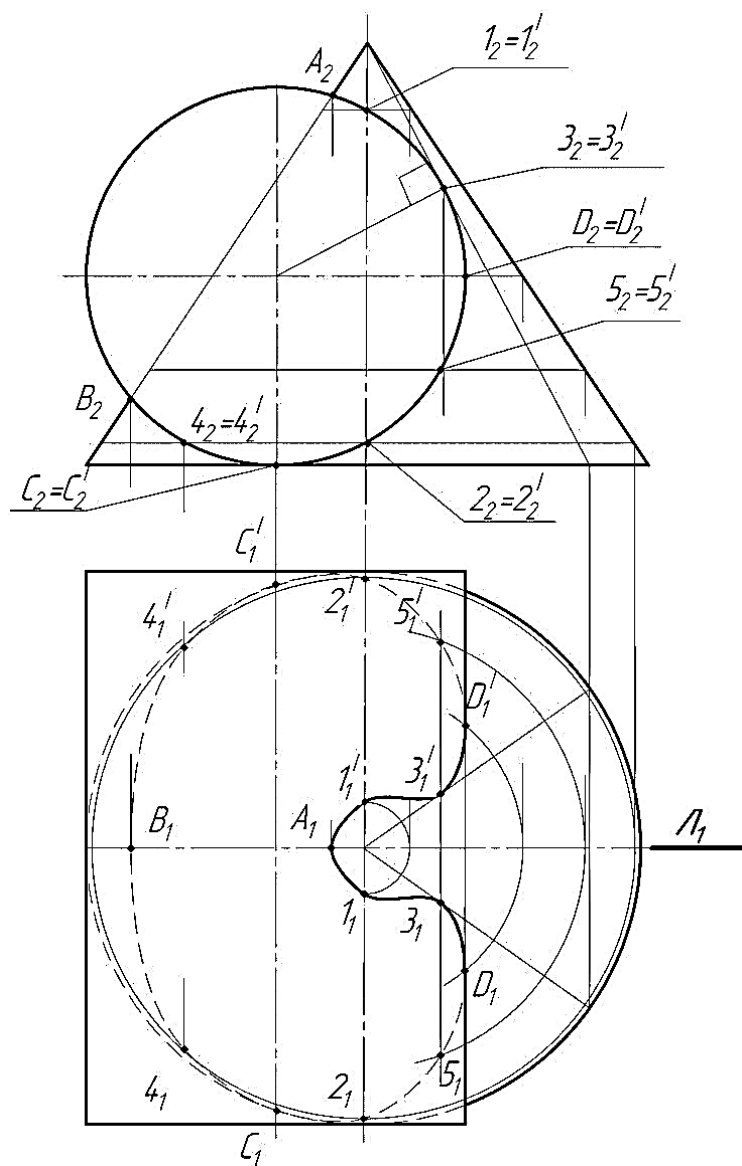


Рисунок 64 – Линия пересечения цилиндра и усеченного конуса

б). Условия для использования концентрических сфер в качестве посредников:

1. Обе поверхности должны быть поверхностями вращения.

2. Оси поверхностей должны пересекаться (точка пересечения - центр сфер).

3. Оси обеих поверхностей должны быть параллельны одной и той же плоскости проекций. В этом случае окружности, по которым вспомогательные сферы пересекают поверхности, будут проецироваться на плоскость проекций в виде отрезков прямых.

4. Решение начинают с определения опорных точек и радиусов максимальной и минимальной сфер. Радиус максимальной сферы равен расстоянию от центра сфер до наиболее удаленной точки пересечения линий очерков поверхностей. Радиус минимальной сферы определяется из условия касания этой сферы одной поверхности (вписывается в поверхность) и пересечения второй.

5. Особенностью способа секущих поверхностей является то, что при его применении требуется повышенная точность построений, так как окружности, изображающие шаровые поверхности, приходится проводить на очень близком расстоянии друг от друга (это является недостатком способа).

7). На рисунке 65 показано пересечение двух цилиндров. Оси цилиндров взаимно перпендикулярны, пересекаются в точке  $O$  и параллельны плоскости  $\Pi_2$ . Через точки пересечения контурных образующих проводят окружность - проекцию вспомогательной сферы. Эта сфера пересекает поверхности цилиндров по окружностям, проекции которых выявляются отрезками прямых:  $a_2$  - пересечение поверхности малого цилиндра со сферой;  $b_2$  - большого цилиндра со сферой. Пересечения этих отрезков в точках  $A_2$  и  $B_2$  дают проекции крайних точек линии пересечения. Эта сфера является наибольшей.

Пересечения проекций контурных образующих всегда определяют проекции крайних точек линии перехода поверхностей. Проводят вторую окружность (проекцию второй сферы) так, чтобы она касалась проекций образующих одного тела и пересекала проекции образующих другого тела; эта сфера в данном примере является наименьшей. Проекция пересечения наименьшей сферы с поверхностями цилиндров выявляются отрезками прямых  $c_2$  и  $d_2$ . Их пересечение - проекция  $C_2$  точки  $C$ , принадлежащая линии пересечения.

Для получения большого количества точек линии пересечения вводят промежуточные сферы. Пересечение проекций  $e_2$  и  $f_2$  дают точки  $D_2$  и  $E_2$  - проекции промежуточных точек линии пересечения фигур. Соединив плавной кривой найденные точки, получают фронтальную проекцию линии пересечения.

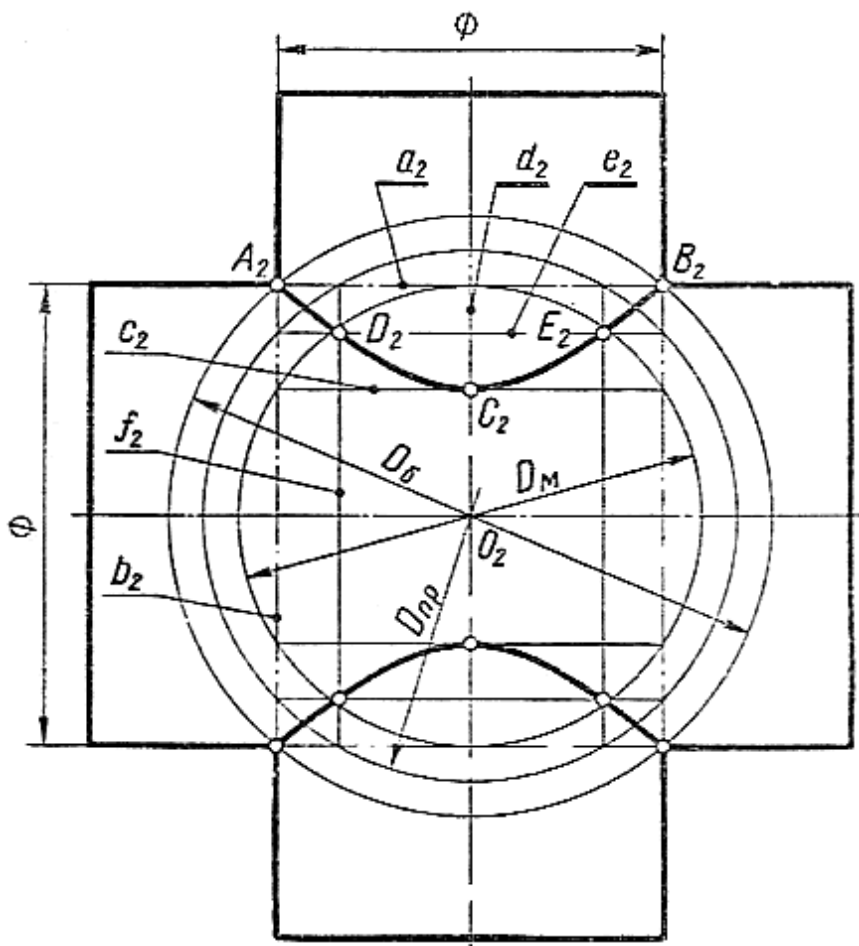


Рисунок 65 – Пересечение двух цилиндров

8). На рисунке 66 приведен пример построения линии пересечения цилиндра и конуса, оси которых пересекаются в точке  $O$ . Прежде всего отмечают фронтальные проекции  $1_2$  и  $2_2$  крайних левой и правой точек линии пересечения; затем находят фронтальные проекции  $3_1$  и  $4_2$  нижних точек кривой. Для их определения проводят из центра  $O_2$  окружность, являющуюся фронтальной проекцией шара, вписанного в цилиндр. Касание шара к цилиндру произойдет по окружности, фронтальная проекция которой изобразится прямой, проходящей через точку  $O_2$ .

С конусом шар пересечется по окружности, параллельной основанию конуса; фронтальная проекция этой окружности спроецируется в прямую линию, перпендикулярную к первой прямой; их пересечение определит фронтальные проекции  $3_2 4_2$  искомых точек. При наличии профильной

проекция, проекции точек  $3_2$  и  $4_2$  могут быть получены непосредственным проецированием с использованием проекций точек  $3_3$  и  $4_3$ . Для построения промежуточных точек 5, 6 и 7, 8 необходимо провести концентрическую шаровую поверхность несколько большего диаметра. Эта сферическая поверхность пересечет конус по окружности несколько меньшего диаметра, а цилиндр - по двум окружностям равных диаметров. Все три окружности проецируются на фронтальную плоскость проекций  $\Pi_2$  в виде прямых, пересечение которых определяет фронтальные проекции  $5_2 6_2$  и  $7_2 8_2$  промежуточных точек 5, 6, 7 и 8. Так как направление проецирования перпендикулярно к фронтальной плоскости, то точки 5 и 6, 7 и 8 спроецируются на нее, сливаясь попарно.

Построение горизонтальной проекции линии пересечения не вызывает затруднений, поскольку имеются фронтальные и профильные проекции точек. При отсутствии профильной проекции горизонтальные проекции точек находят также достаточно легко в связи с тем, что точки лежат на окружностях, которые проецируются на горизонтальную плоскость проекций  $\Pi_1$  без искажения.

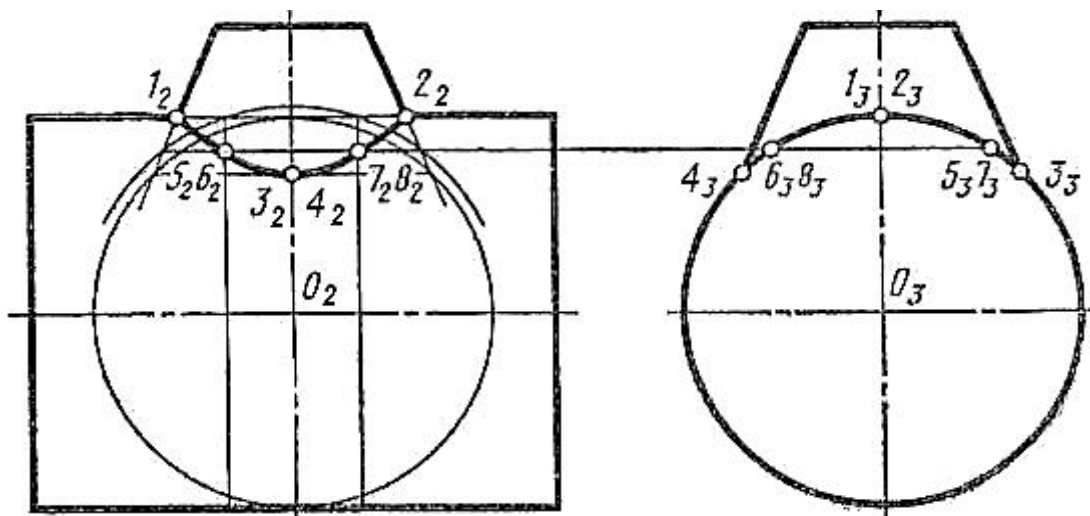


Рисунок 66 – Линия пересечения цилиндра и усеченного конуса

9). На рисунке 67 определены проекции линии пересечения двух поверхностей вращения (оси поверхностей пересекаются).

1. Имеется общая плоскость симметрии  $L$ , параллельная  $\Pi_2$ . Проекция линии пересечения на  $\Pi_1$  совпадает с очерком цилиндра в пределах очерка конуса.

2. Линия пересечения – пространственная замкнутая кривая  $1 - 4 - 3 - 5 - 2 - 5' - 3' - 4' - 1$ .

3. Опорные точки:  $1, 2$  – экстремальные, найдены с помощью общей плоскости симметрии  $L$ . Очерковые относительно  $\Pi_1$  точки  $3$  и  $3'$  определены из условия принадлежности очерковым образующим.

4. Промежуточные точки:  $4, 4', 5, 5'$  найдены с помощью вспомогательной сферы ( $\Phi$ ) с центром в точке  $O$ , соосной с заданными поверхностями, по алгоритму:

- $\Phi(O, R_{min} < R < R_{max})$ ,  $\Phi$  - сфера;
- $\Phi \cap \Gamma = a$  и  $\Phi \cap \Psi = b$ ,  $a, b$  – окружности;
- $a \cap b = 4, 4'$ .

5. Найденные точки на рисунке соединены плавной кривой с учетом видимости.

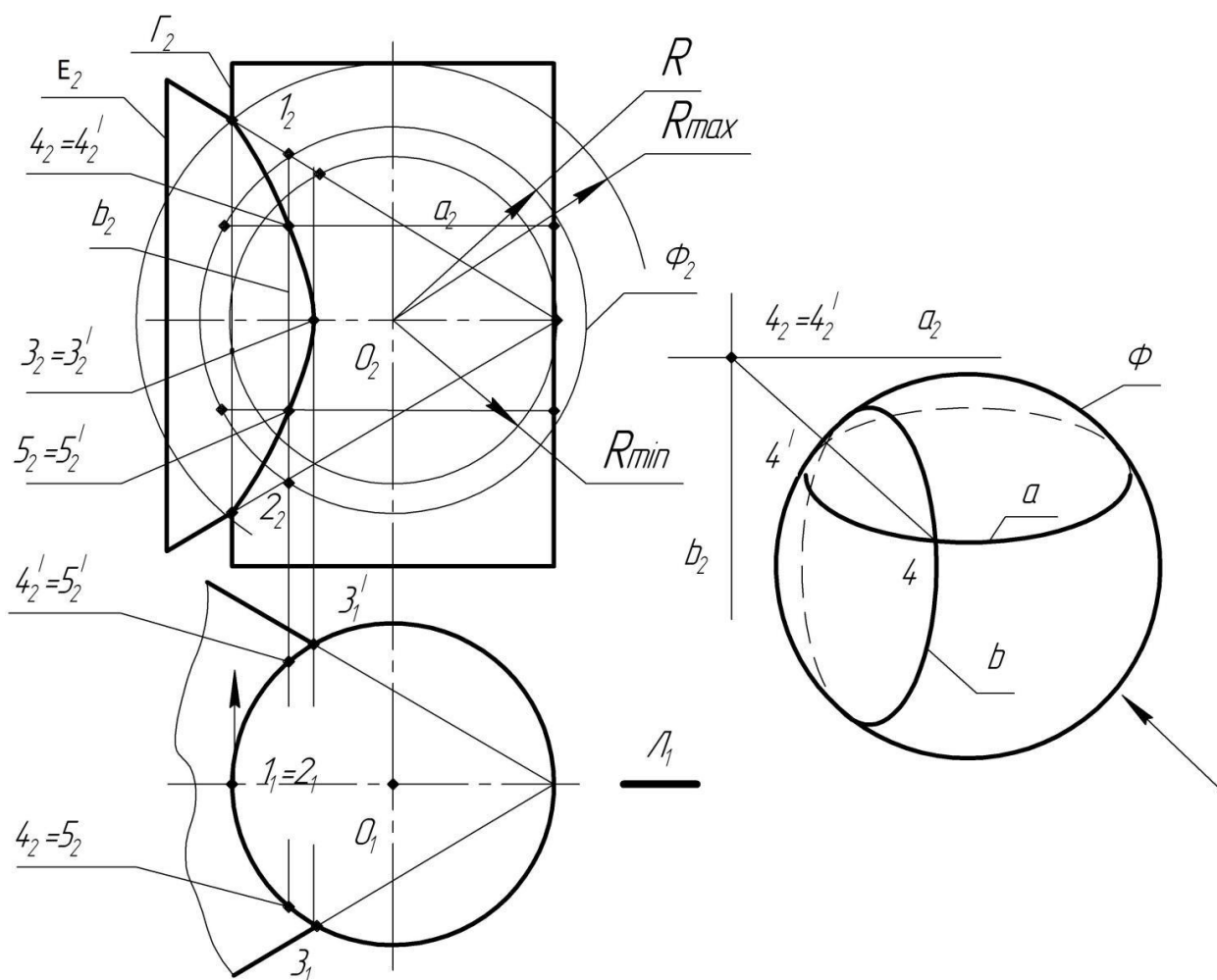


Рисунок 67 – Линия пересечения цилиндра и конуса

10). Еще один пример применения сфер в качестве посредников приведён на рисунке 68.

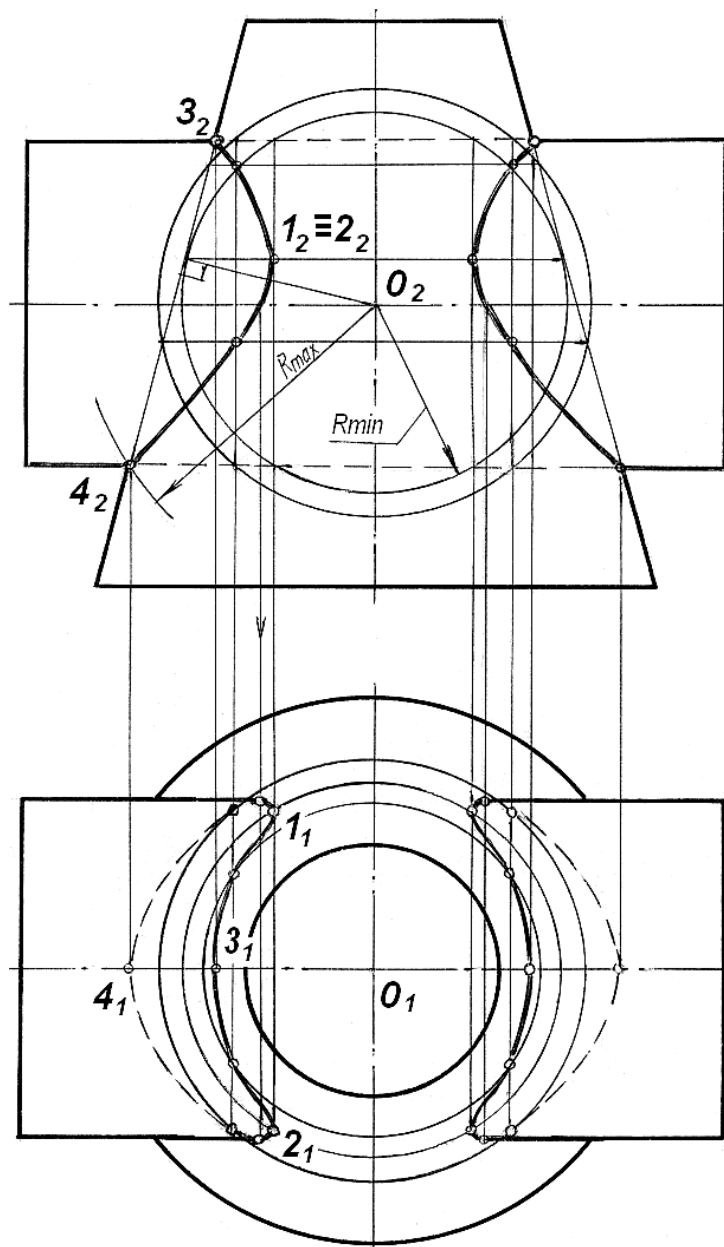


Рисунок 68 – Применение метода сфер

### 3.10.2. Развертка поверхностей

*Развертка поверхности - это фигура, получающаяся в плоскости при таком совмещении точек данной поверхности с этой плоскостью, при котором длины линий остаются неизменными. При этом каждой точке поверхности соответствует единственная точка на развертке.*

Примеры построения линий перехода и положения темы:

1). При изготовлении ограждений станков, вентиляционных труб и некоторых других изделий из листового материала имеет большое значение

построение разверток поверхностей. Если представить себе поверхность как гибкую нерастяжимую пленку, то некоторые из них путем изгиба можно совместить с плоскостью без разрывов и деформаций. Такие поверхности относятся к *развертываемым*. Полученная в результате развертывания (раскатки) плоская фигура и есть развертка поверхности.

2). Теоретически точно развертываются только гранные поверхности, торсы, конические или цилиндрические поверхности.

3). Поверхности, которые нельзя совместить без разрывов и деформаций, относятся к *неразвертываемым* (сферы, торы).

4). При развертывании сложных поверхностей их аппроксимируют (заменяют) вписанными гранными развертывающимися поверхностями, и чем больше граней содержит вписанная поверхность, тем точнее ее развертка. Построенные таким образом развертки поверхностей называют *приближенными* или *условными*.

5). *Разверткой поверхности многогранника* называют плоскую фигуру, полученную при совмещении с плоскостью чертежа всех граней многогранника в последовательности их расположения на многограннике. Чтобы построить развертку поверхности многогранника, определяют натуральную величину граней и вычерчивают на плоскости последовательно все грани. Истинные размеры ребер граней, если они спроецированы не в натуральную величину, находят способами вращения или перемены плоскостей проекций.

6). *Способ триангуляции* (треугольников) применяют прежде всего для развертки пирамид, находят натуральную величину каждого треугольника - боковой грани и основания, после чего строят последовательно эти треугольники и основание на плоском чертеже. В случае построения развертки призм при использовании способа триангуляции разбивают боковые грани диагоналями на треугольники, а затем находят их натуральную величину.

7). На рисунке 69 изображено *построение полной развертки поверхностей цилиндра*. Развертка поверхностей цилиндра состоит из прямоугольника и двух кругов. Одна сторона прямоугольника равна высоте цилиндра, другая - длине окружности основания. На чертеже развертки к прямоугольнику пристраивают два круга, диаметр которых равен диаметрам оснований цилиндра.



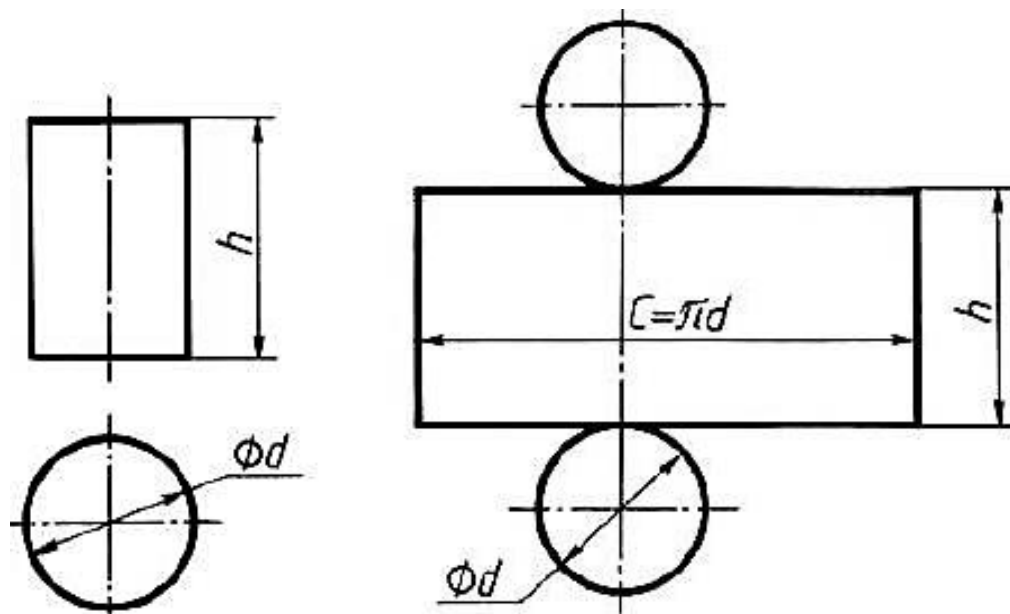


Рисунок 69 – Полная развертка поверхностей цилиндра

На рисунке 70 выполнено построение точки на развертке боковой поверхности цилиндра.

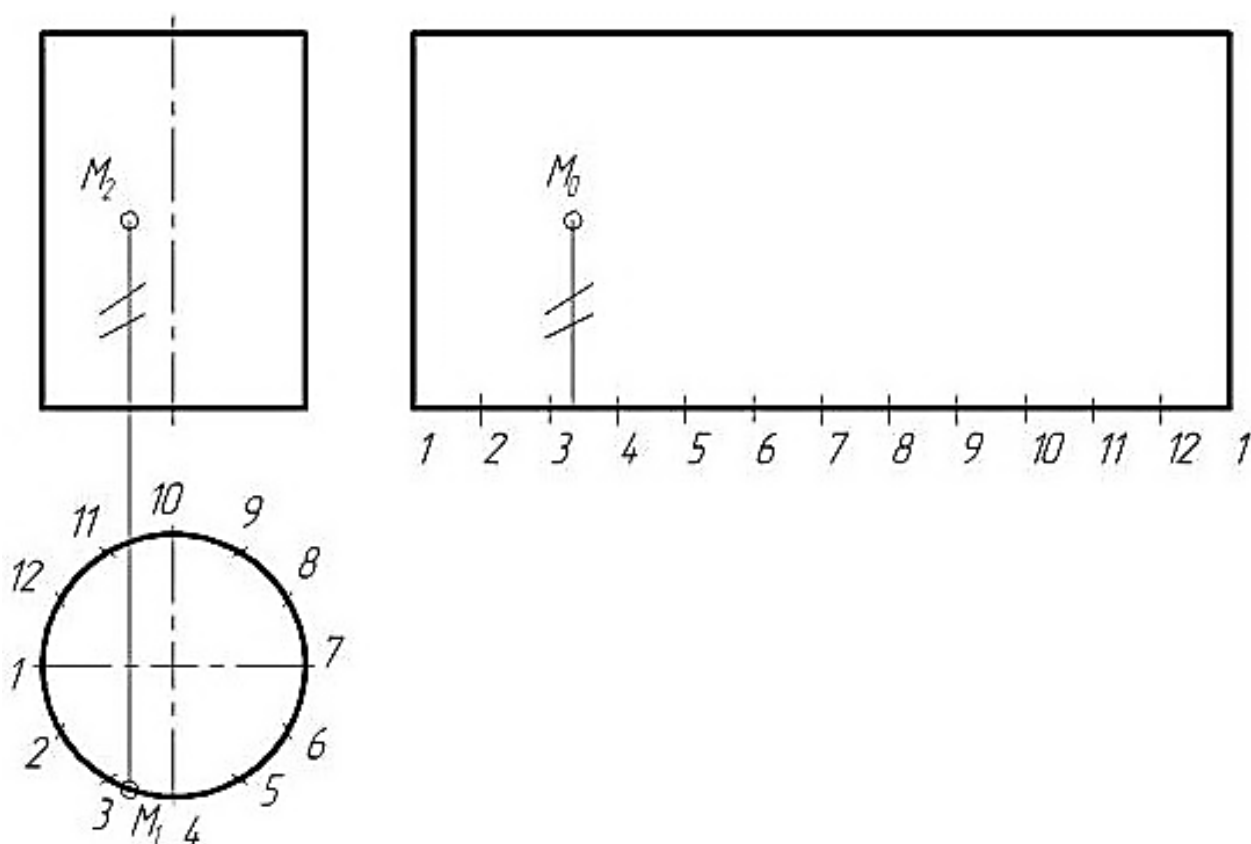


Рисунок 70 – Построение точки  $M$  на развертке цилиндра

Построение:

1. Развертку боковой цилиндрической поверхности строим способом триангуляции, для чего окружность делим на 12 частей, заменяя отрезки дуг хордами. Развертка боковой поверхности цилиндра представляет собой прямоугольник высотой заданного цилиндра и длиной равной сумме двенадцати отрезков хорд, взятых с окружности цилиндра.

2. Положение точки  $M$  на развертке цилиндрической поверхности определяется обычным способом. На горизонтальной проекции цилиндра проекция точки  $M (M_1)$  находится между точками 3 и 4. Переносим горизонтальную проекцию точки на развертку между точками 3 и 4, сохраняя расположение точки в этом отрезке. Проводим вертикальную линию, на которой откладываем высоту точки  $M$  с фронтальной проекции.

8). Развертка поверхностей любой прямой призмы представляет собой плоскую фигуру, составленную из боковых граней - прямоугольников и двух оснований - многоугольников.

На рисунке 71,а показаны две проекции правильной прямой шестигранной призмы. Все боковые грани призмы - прямоугольники, равные между собой по ширине  $a$  и высоте  $H$ , основания призмы - правильные шестиугольники со стороной, равной  $a$ .

Истинные размеры граней известны, выполнение построения развертки следующее (рис. 71,б):

- на произвольной горизонтальной прямой последовательно откладывают шесть отрезков, равных стороне основания шестиугольника, то есть  $6a$ ;
- из полученных точек проводят перпендикуляры, равные высоте призмы  $H$ ;
- конечные точки перпендикуляров соединяют второй горизонтальной прямой.

Полученный прямоугольник ( $H \times 6a$ ) является разверткой боковой поверхности призмы. Затем пристраивают фигуры оснований - два шестиугольника со сторонами, равными  $a$ . Контур развертки обводят сплошной основной линией, линии сгиба - штрихпунктирной с двумя точками. Подобным образом строят развертки прямых призм с любым многоугольником в основании.

На рисунке 72 выполнено построение развертки поверхностей шестигульной призмы по заданным размерам. Полная развертка поверхностей правильной шестигульной призмы состоит из боковых граней – прямоугольников и двух шестигульных оснований.

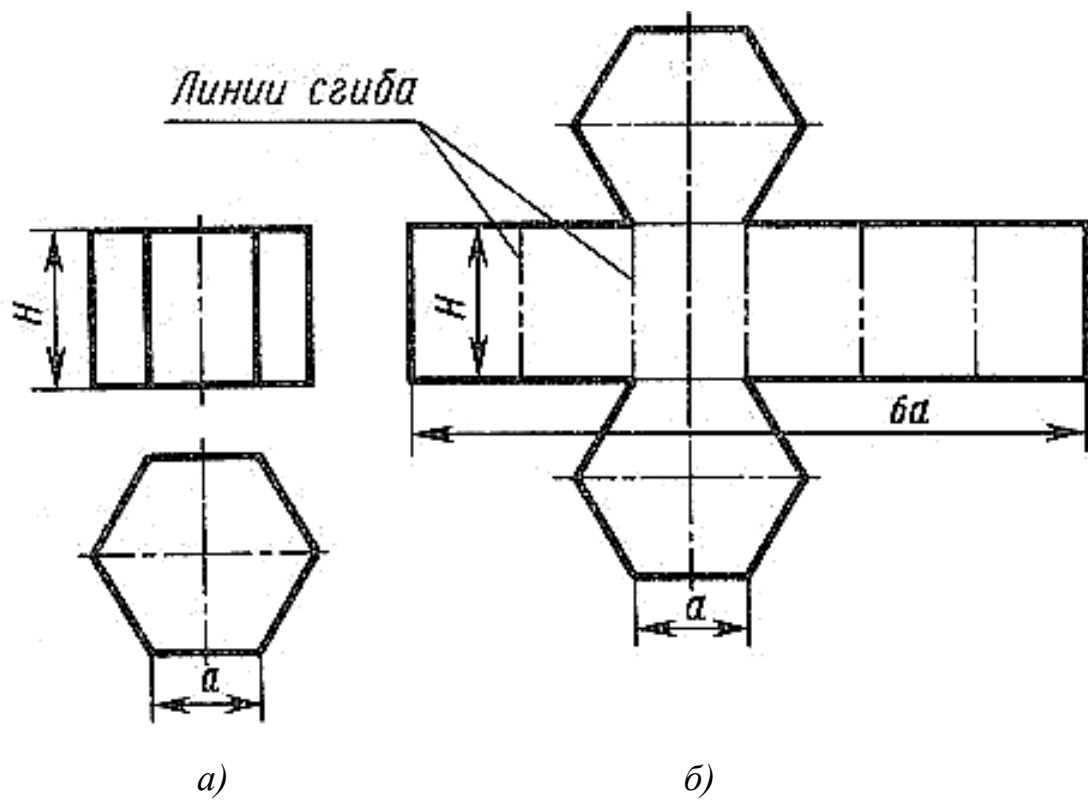


Рисунок 71 – Построение развертки поверхностей призмы

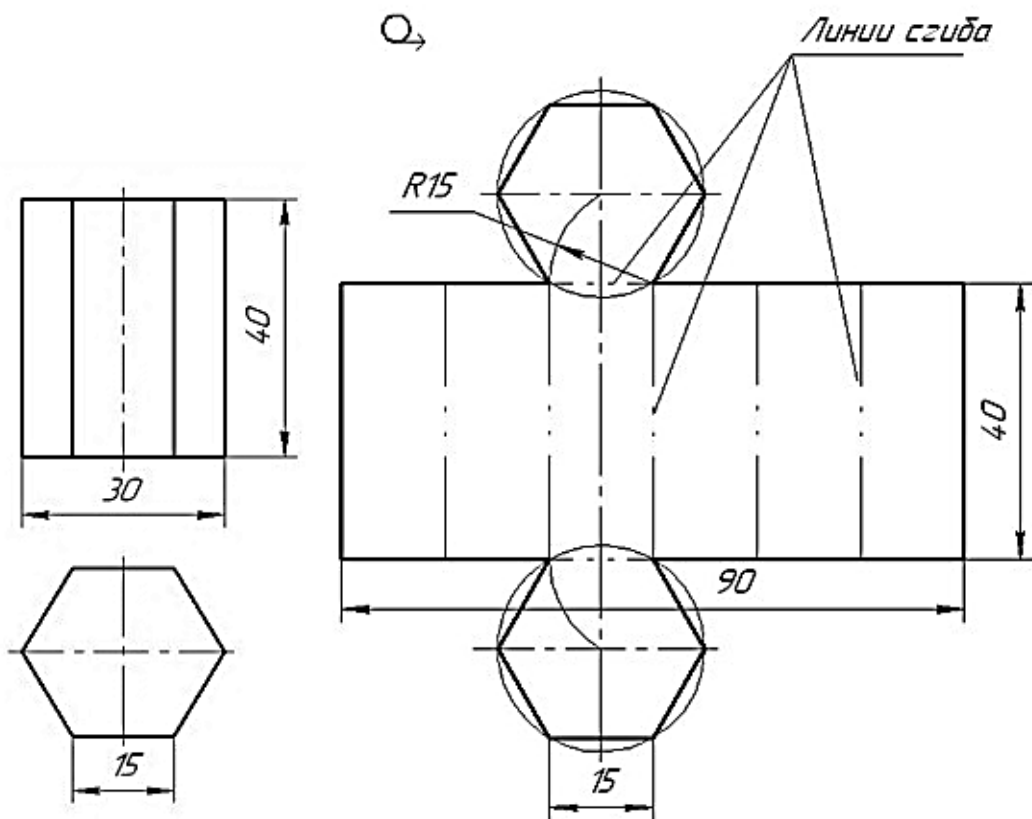


Рисунок 72 – Построение полной развертки призмы

Над изображением развертки часто помещают знак: 

9). На рисунке 73 выполнено *построение полной развертки поверхности прямого конуса* («математический подход»).

Построение:

1. Развертка поверхности прямого кругового конуса представляет собой плоскую фигуру, состоящую из кругового сектора и круга. Чтобы ее построить, проводят осевую линию, и из точки, взятой на ней, как из центра, радиусом равным образующей конуса, очерчивают дугу окружности. На рисунке образующая, подсчитанная по теореме Пифагора, равна приблизительно 38 мм ( $L = \sqrt{15^2 + 35^2} = \sqrt{1450} \approx 38$  мм).

2. Затем подсчитывают угол сектора по формуле:  $\alpha = \frac{360^\circ R}{L}$ , где  $R$  - радиус окружности основания конуса;  $L$  - длина образующей боковой поверхности конуса. В данном примере  $\alpha = 360^\circ \times 15/38 \approx 142,2^\circ$ . Этот угол строят симметрично относительно осевой линии с вершиной в точке  $S$ . К полученному сектору пристраивают круг с центром на осевой линии и диаметром, равным диаметру основания конуса.

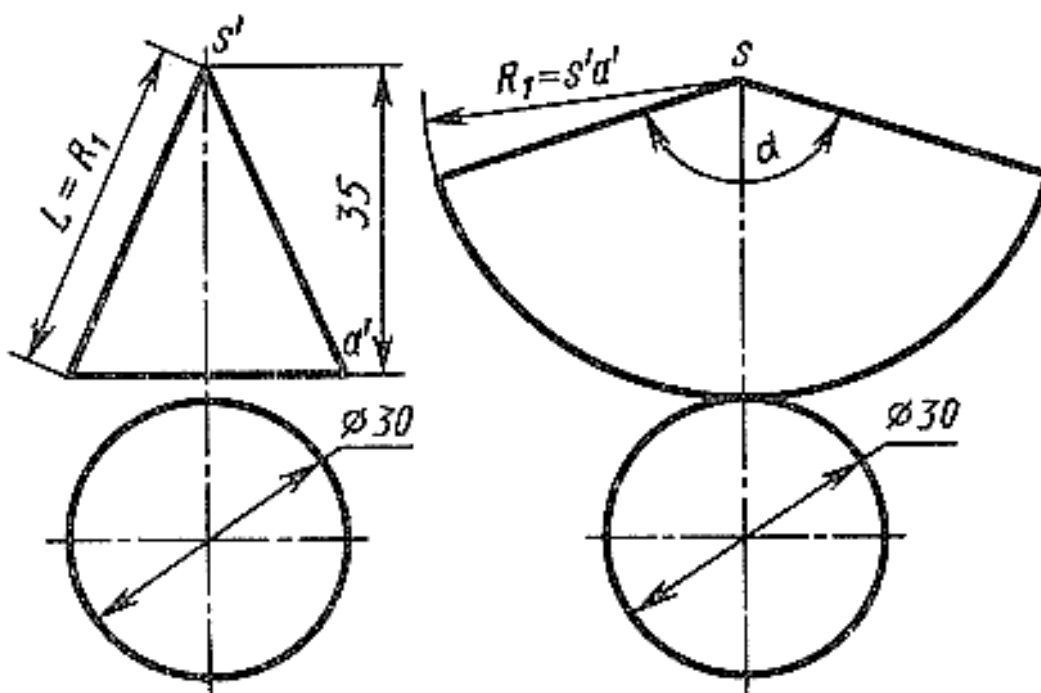


Рисунок 73 – Полная развертка прямого конуса

На рисунке 74 показано *построение развертки боковой поверхности конуса и нанесение на нее точки В* («графический подход»).

Построение:

1. Делят окружность основания конуса на достаточное количество частей (чем больше, тем точнее развертка), например, на двенадцать.
2. Строят соответствующие образующие конуса.
3. Находят образующую  $S_2$ , которой принадлежит точка  $B$ .
4. Выполняют развертку:
  - строят образующую  $S_1$ , длина которой равна длина очерковой образующей на  $\Pi_2$ ;
  - из точки  $S$  радиусом  $S_1$  проводят дугу и откладывают на ней длину хорды  $|a|$  двенадцать раз;
  - строят образующую  $S_2$ .
5. Поворачивают точку  $B$  вокруг оси конуса до совмещения ее фронтальной проекции с очерковой образующей.
6. Замеряют длину отрезка  $L_B$  и, отложив его на образующей  $S_2$ , получают изображение точки  $B$  на развертке.

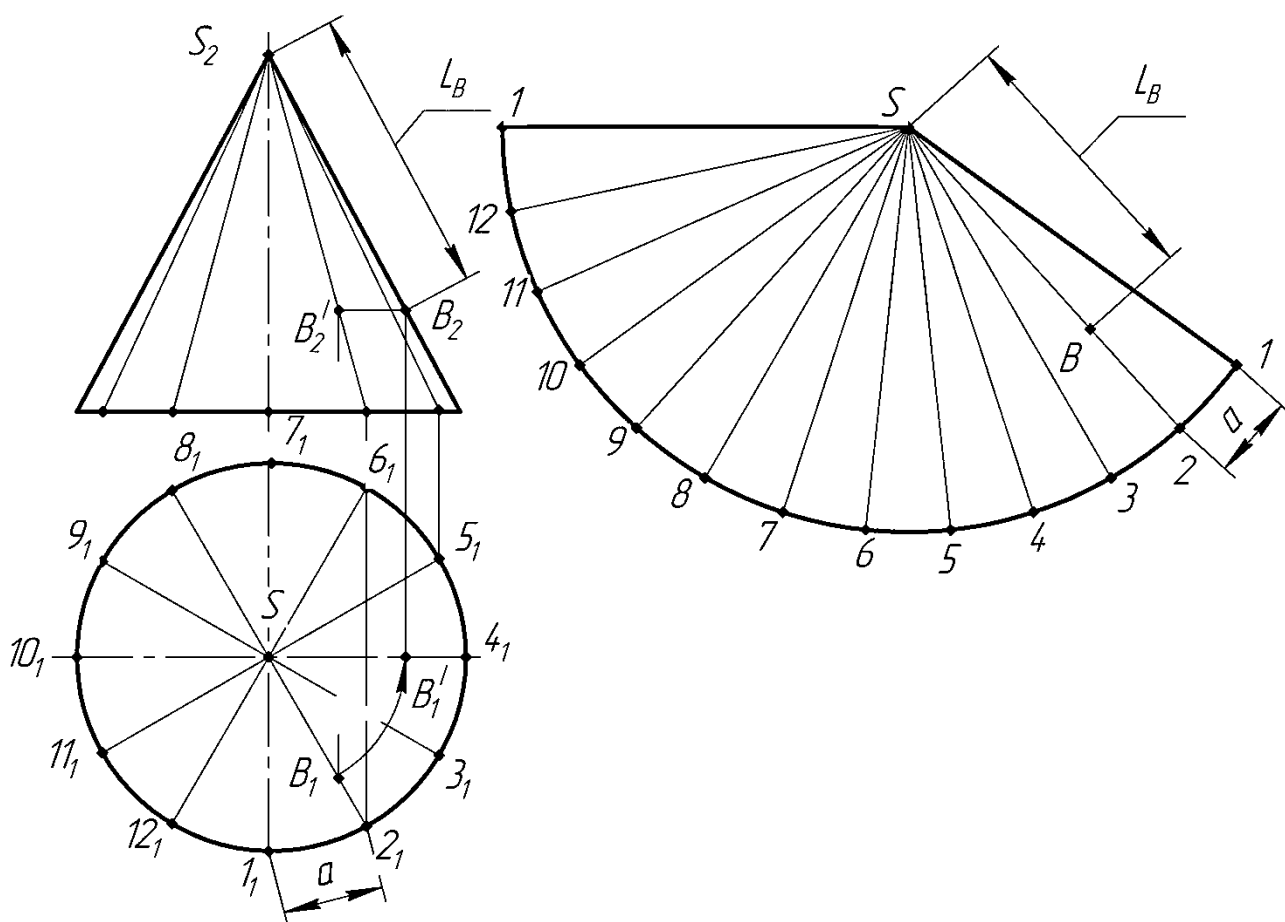


Рисунок 74 - Развертка боковой поверхности конуса

9). На рисунке 75 выполнено построение полной развертки поверхностей пирамиды.

Построение:

- из произвольной точки  $O$  описывают дугу радиуса  $L$ , равного длине бокового ребра пирамиды;
- на этой дуге откладывают четыре отрезка, равные стороне основания;
- крайние точки соединяют прямыми с точкой  $O$ ;
- пристраивают квадрат, равный основанию пирамиды.

Контур развертки поверхностей пирамиды обводят сплошной основной линией, а линии сгиба - штрихпунктирной с двумя точками. Подобным образом можно построить развертки прямых пирамид с любым многоугольником в основании.

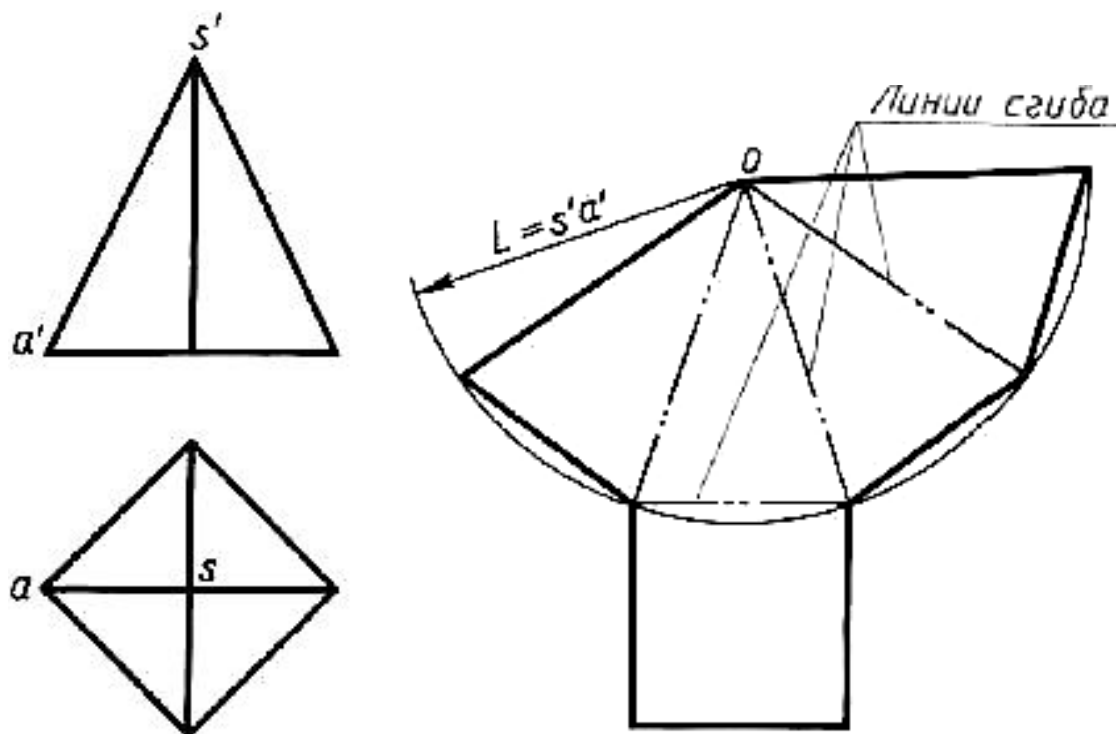


Рисунок 75 - Полная развертка поверхностей пирамиды

Построение развертки боковой поверхности пирамиды способом триангуляции показано на рисунке 76.

Развертка боковой поверхности пирамиды  $SABC$  представляет собой плоскую фигуру, состоящую из треугольников, являющимися гранями пирамиды.

Построение:

1. Определение длин ребер пирамиды выполняют с помощью вращения их вокруг оси  $i \in S$  и  $i \perp \Pi_1$ . Путем вращения ребра пирамиды совмещаются с плоскостью  $P$  - плоскость  $P \parallel \Pi_2$  и  $i \in P$ .

2. После определения натуральных длин ребер  $S_2A_0$ ,  $S_2B_0$ ,  $S_2C_0$ , приступают к построению развертки. Через произвольную точку  $S_0$  проводят прямую  $D$ . Откладывают на ней от точки  $S_0$  -  $|S_0A_0| \cong |S_2A_0|$ . Из точки  $A_0$  проводят дугу радиусом  $r_1 = |A_1B_1|$ , а из точки  $S_0$  - дугу радиусом  $R_1 = |S_2B_0|$ . Пересечение дуг указывает положение вершины  $B_0$ .  $\Delta S_0A_0B_0 \cong \Delta SAB$  - грани пирамиды. Аналогично находят точки  $C_0$  и  $A_0$ .

3. Соединив проекции точек  $A_0, B_0, C_0, A_0$ , получают развертку боковой поверхности пирамиды  $SABC$ .

Полную развертку пирамиды получают, если пристроят к развертке боковой поверхности на стороне основания фигуру -  $\Delta A_0B_0C_0$ .

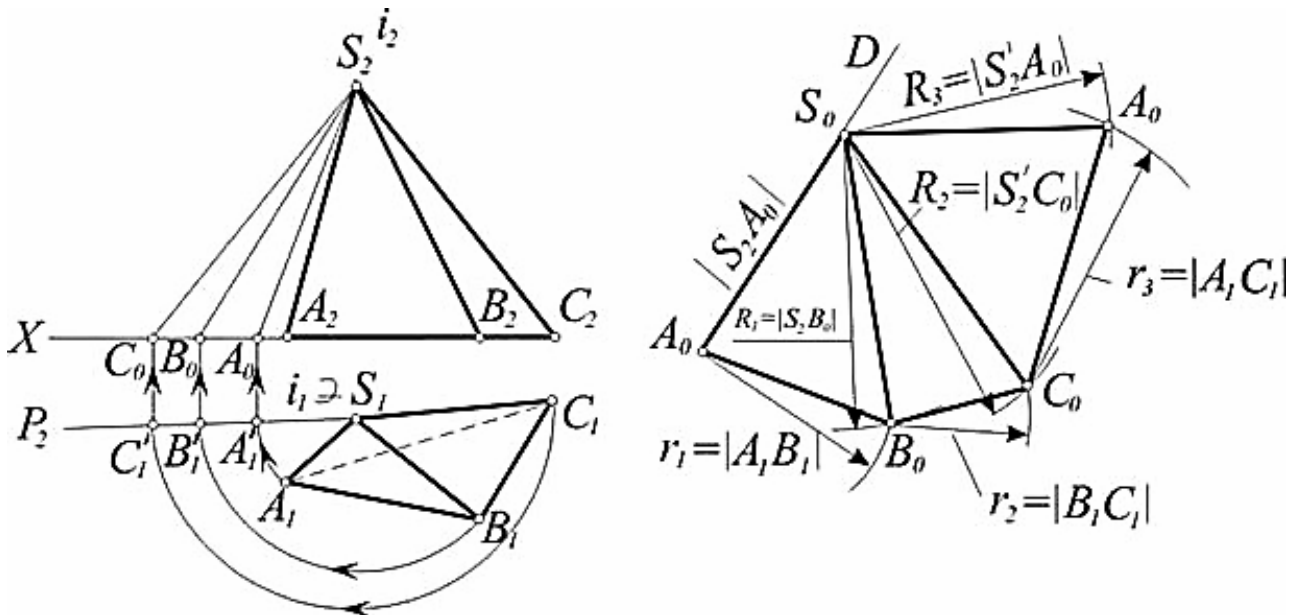


Рисунок 76 - Развертка боковой поверхности пирамиды

### 3.11. Задание на выполнение эюра 4

Цели выполнения эюра 4: 1). Определение на чертежах линий взаимного пересечения поверхностей, характерных, например, для многих корпусов, крышек и других деталей сложной конфигурации. 2). Построение разверток, имеющее большое значение при конструировании различных изделий из листового материала.

Эпюр 4: Построение линии пересечения заданных поверхностей и выполнение развертки одной из поверхностей с обязательным нанесением линии пересечения. Варианты заданий размещены на страницах 89 и 90. Пример выполнения задания приведен на рисунке 77.

### 3.12. Рекомендации к выполнению эпюра 4

Секущие плоскости для нахождения линии пересечения необходимо выбирать так, чтобы обе поверхности пересекались по наиболее простым линиям - окружностям или образующим. На чертеже должны быть сохранены все линии построения, следы вспомогательных плоскостей, обозначены все точки. Проекция линии пересечения лучше обвести линиями красного цвета с учетом видимости.

Разверткой конуса вращения является круговой сектор с углом  $\varphi = \frac{R}{l} \cdot 360^\circ$ , где  $R$  - радиус основания конуса,  $l$  - длина образующей (рис. 77).

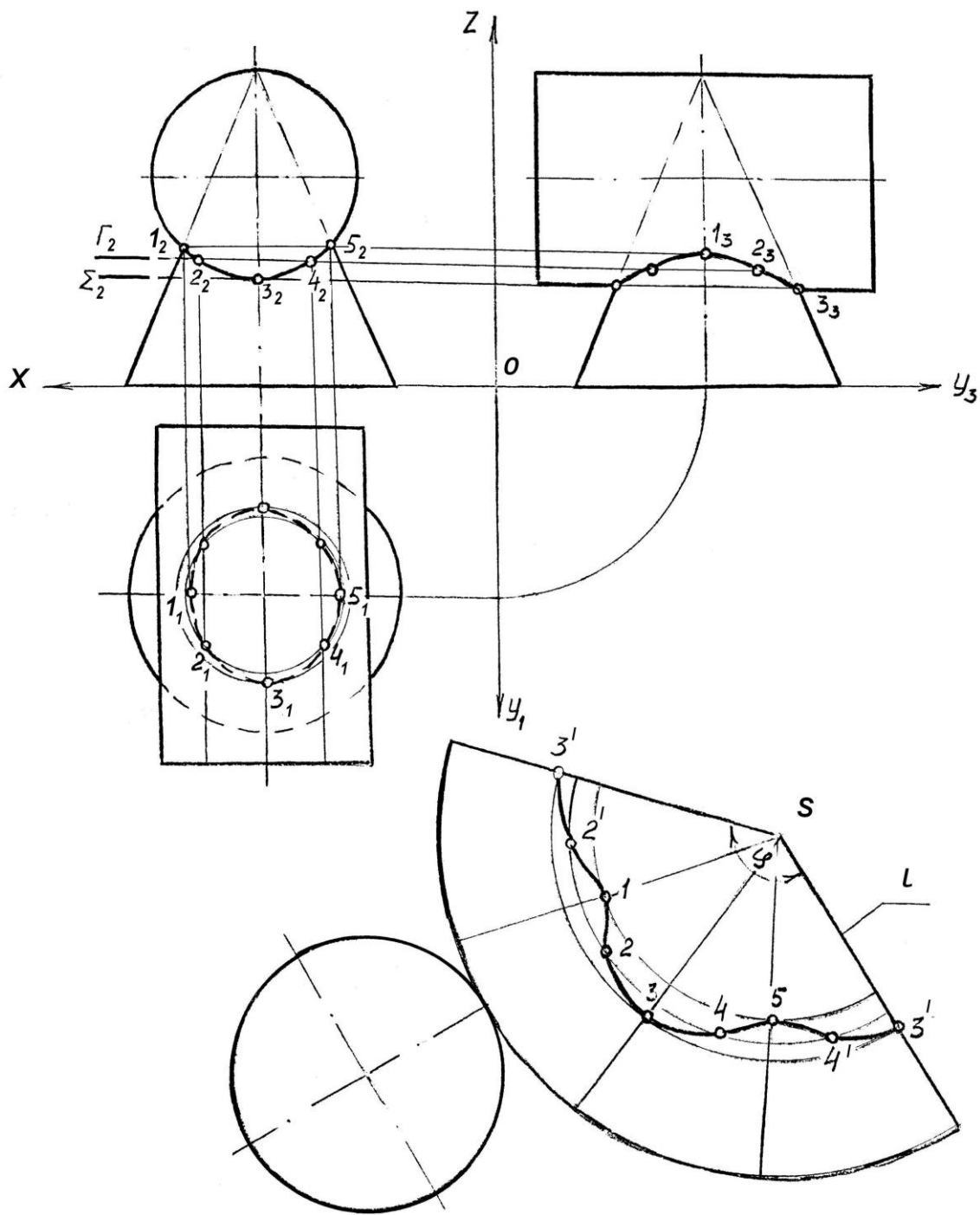
На развертке строят прямолинейные образующие или параллели, проходящие через характерные точки линии пересечения. Построенные точки соединяют плавной линией красным цветом.

При построении развертки цилиндра проводят горизонтальную линию длиной  $2\pi R$ , где  $R$  - радиус основания цилиндра. Строят развертку боковой поверхности, где отмечают прямолинейные образующие, проходящие через характерные точки линии пересечения, которые соединяют плавной кривой линией.

Для полной развертки в обоих случаях к боковой поверхности пристраивают основание.

Формат чертежа А3. Масштаб эпюра 1:1.

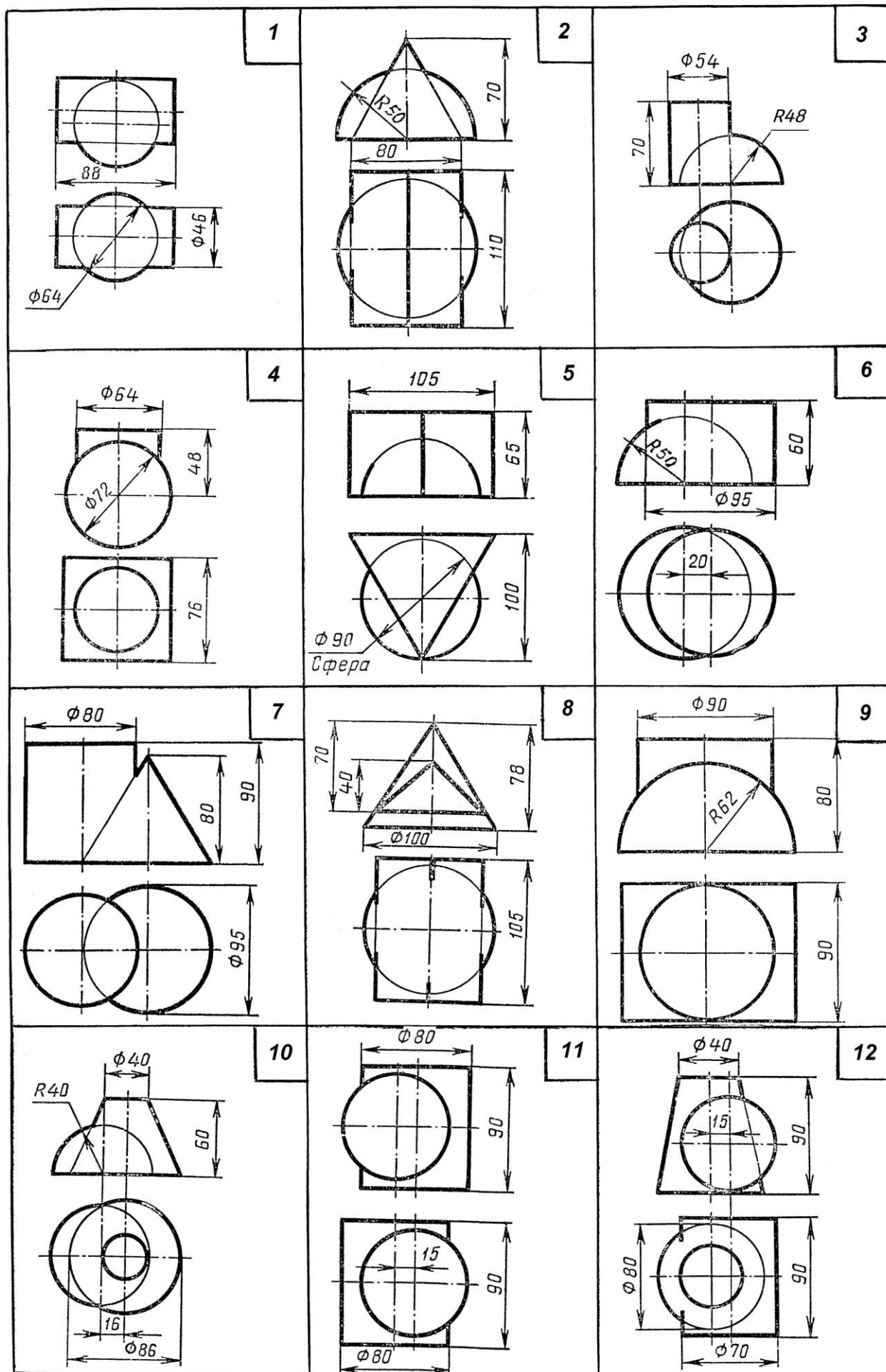


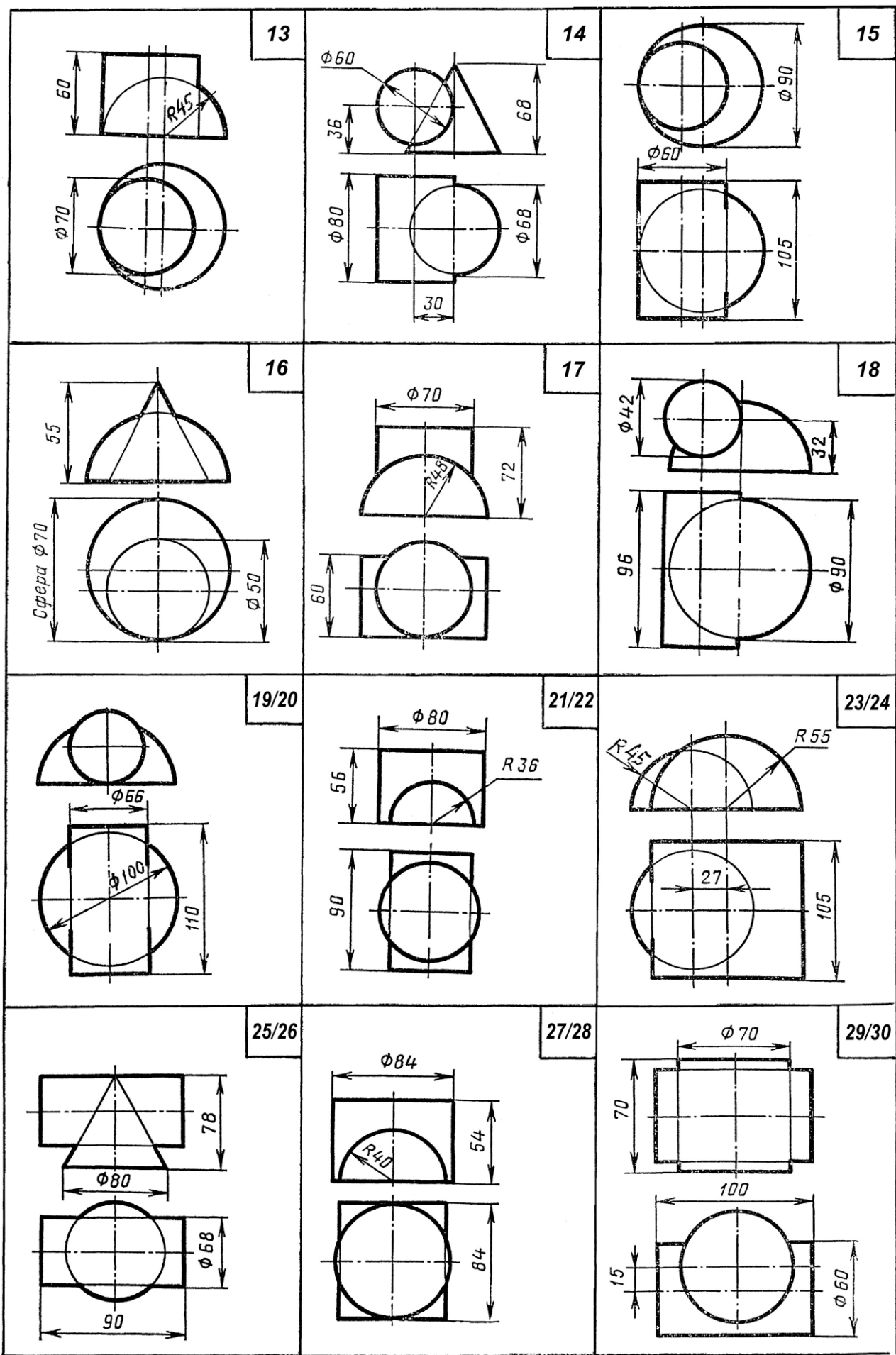



НГ 04 XX 00

Пересечение  
поверхностей.  
Развертка


НХТИ, гр.





#### 4. Вопросы для самопроверки усвоения материала

*К эюру 1:*

1. Повторите наименования плоскостей проекций, координатных осей, линий связи.
2. Покажите построение точек в трёх проекциях.
3. Какие точки называют точками общего, а какие частного положения?
4. Каким образом можно задать прямую линию на чертеже?
5. Укажите частные положения отрезков прямых линий.
6. Какие прямые называют линиями уровня, проецирующими прямыми?
7. Как выглядит проекция прямого угла в общем случае?
8. При каких условиях прямой угол проецируется в натуральную величину?
9. Перечислите и покажите способы задания плоскости на эюре.
10. Дайте определение плоскостям общего и частного положения.
11. Поясните особенности проецирующих плоскостей.
12. Как определяется принадлежность прямой линии и точки данной плоскости?
13. Покажите способы построения проекций горизонтали и фронтали на плоскости общего положения.
14. Какое положение могут занимать прямая линия и плоскость или две плоскости относительно друг друга?
15. Какое условие определяет взаимную перпендикулярность двух плоскостей?
16. Укажите последовательность построения линии пересечения двух плоскостей общего положения.
17. Чем отличается определение линии пересечения плоскостей, если одна из них проецирующая?
18. Как определяют видимость элементов геометрических объектов?

*К эюру 2:*

19. Как на чертеже определить истинное расстояние от точки до прямой линии?
20. Каким образом можно на эюре определить действительное расстояние от точки до проецирующей плоскости или до плоскости общего положения?
21. В чём заключается принцип преобразования чертежа способом замены плоскостей проекций?
22. Что определяет положение новой плоскости проекций при планируемых преобразованиях эюра?
23. Какова последовательность решения задач по определению натуральных величин геометрических объектов, углов их наклона и расстояний при использовании способа замены плоскостей проекций?

24. В чем сущность метрических задач?

*К эпюру 3:*

25. Какое определение даётся поверхности?

26. Каким образом можно задать поверхность на эпюре? Назовите многогранники и их определители.

27. Перечислите кривые поверхности и способы их задания на чертеже.

28. Укажите основные свойства поверхностей вращения.

29. Каким образом можно убедиться в принадлежности точки или линии изображенной на эпюре поверхности?

30. Сформулируйте общий алгоритм определения точек линии пересечения поверхности плоскостью.

31. Какие точки линии пересечения поверхности плоскостью называют характерными (главными, опорными)?

32. Изложите сущность способов построения линии пересечения многогранника плоскостью, - поверхности вращения плоскостью.

33. Укажите условия, при которых в сечении конуса вращения плоскостью получается окружность, эллипс, гипербола, парабола, пересекающиеся прямые.

34. Сформулируйте алгоритм определения точек пересечения прямой линии с поверхностью.

35. Перечислите последовательность графических построений при определении точек пересечения прямой линии с многогранными и кривыми поверхностями.

36. Как определить натуральную величину сечений поверхности плоскостью?

*К эпюру 4:*

37. Что называется разверткой геометрического тела?

38. Какие развертки знаете?

39. Как построить развертку прямого кругового цилиндра и конуса?

40. Что называется линией пересечения двух поверхностей?

41. Основной способ построения линии пересечения поверхностей.

42. Особые случаи пересечения поверхностей.

43. Какие выбираются вспомогательные секущие плоскости для многогранников и сфер?

44. Алгоритм построения линии пересечения поверхностей.

45. Как определяется видимость линии пересечения и поверхностей на плоскостях проекций?

46. Что представляет собой линия пересечения многогранников в общем случае?

47. Какие точки линии пересечения двух поверхностей называют характерными?

48. Что такое точка перехода видимости?

*Примечание: Желательно прилагать «черновики» к контрольной работе.*

## 5. Принятые графические обозначения и символы

Обозначения, символы и сокращения, применяемые в данном пособии, сведены в таблицу 11.

Таблица 11

<i>Обозначения геометрических объектов в различных системах</i>				
<i>I</i>	<i>II</i>		<i>III</i>	
Плоскости проекций:				
- горизонтальная	$\Pi_1$	$\pi_1$	$\Pi_1$	$\pi_1$
- фронтальная	$\Pi_2$	$\pi_2$	$\Pi_2$	$\pi_2$
- профильная	$\Pi_3$	$\pi_3$	$\Pi_3$	$\pi_3$
Дополнительные плоскости	$\Pi_4, \Pi_5, \dots$	$\pi_4, \pi_5, \dots$	$\Pi_4, \Pi_5, \dots$	$\pi_4, \pi_5, \dots$
Оси проекций	$X, Y, Z$	$x, y, z$	$X, Y, Z$	$x, y, z$
	$OX, OY, OZ$	$Ox, Oy, Oz$	$OX, OY, OZ$	$Ox, Oy, Oz$
Точки в пространстве	$A, B, \dots, 1, 2, \dots$		$A, B, \dots, 1, 2, \dots$	
Координаты точек	$X_A, Y_A, Z_A$	$A_X, A_Z, A_Y$	$X_A, Y_A, Z_A$	$A_X, A_Z, A_Y$
Проекции точек:				
- горизонтальная	$A_{1, \dots}, A'_{1, \dots}, A''_{1, \dots}, I_{1, \dots}$		$A_{1, \dots}, A'_{1, \dots}, A''_{1, \dots}, I_{1, \dots}$	
- фронтальная	$A_{2, \dots}, A'_{2, \dots}, A''_{2, \dots}, I_{2, \dots}$		$A_{2, \dots}, A'_{2, \dots}, A''_{2, \dots}, I_{2, \dots}$	
- профильная	$A_{3, \dots}, A'_{3, \dots}, A''_{3, \dots}, I_{3, \dots}$		$A_{3, \dots}, A'_{3, \dots}, A''_{3, \dots}, I_{3, \dots}$	
Прямые линии	$AB, \dots, a, \dots, (AB), \dots, (12), \dots,  AB , \dots,  12 , \dots$		$AB, \dots, a, \dots, (AB), \dots, (12), \dots,  AB , \dots,  12 , \dots$	
Проекции линий	проекциями точек			
Горизонталь (проекция горизонтали)	$H$ $(h_1, h_2)$		$H$ $(h_1, h_2)$	
Фронталь (проекция фронтали)	$F$ $(f_1, f_2)$		$F$ $(f_1, f_2)$	
Отрезки	$[AB], \dots, [12], \dots$		$[AB], \dots, [12], \dots$	

Продолжение таблицы 11

Проекции отрезков	$[A_1B_1], \dots, [1_12_1], \dots$	$[A_1B_1], \dots, [1_12_1], \dots$
Углы	$\alpha, \beta, \dots$	$\alpha, \beta, \dots$
Плоскости	$P, \Sigma, \dots, \alpha, \gamma, \dots$	$P, \Sigma, \dots, \alpha, \gamma, \dots$
Следы плоскостей: - горизонтальные - фронтальные - профильные	$P_{1,\dots}, \alpha_{1,\dots},  C_1B_1A_1 , \dots$ $P_{2,\dots}, \alpha_{2,\dots},  C_2B_2A_2 , \dots$ $P_{3,\dots}, \alpha_{3,\dots},  C_3B_3A_3 , \dots$	$P_{1,\dots}, \alpha_{1,\dots},  C_1B_1A_1 , \dots$ $P_{2,\dots}, \alpha_{2,\dots},  C_2B_2A_2 , \dots$ $P_{3,\dots}, \alpha_{3,\dots},  C_3B_3A_3 , \dots$
<i>Символы геометрических объектов в различных системах</i>		
Треугольник, разность	$\Delta$	$\Delta$
Прямой угол	$\lrcorner, \llcorner$	$\lrcorner, \llcorner$
<i>Символы отношений между геометрическими объектами</i>		
Равенство, результат	$=$	$=$
Совпадение	$\equiv$	$\equiv$
Конгруэнтность	$\cong$	$\cong$
Взаимная принадлежность	$\in$	$\in$
Пересечение	$\cap, \cup$	$\cap, \cup$
Перпендикулярность	$\perp$	$\perp$
Параллельность	$\parallel$	$\parallel$
Логическое следствие	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$
Сравнение «больше»	$>$	$>$
Сравнение «меньше»	$<$	$<$
Сравнение «больше или равно»	$\geq$	$\geq$
Сравнение «меньше или равно»	$\leq$	$\leq$

## 6. Словарь графических терминов

*Геометрическая фигура* - любое множество точек. К фигурам относится точка (множество, состоящее из одного элемента), прямая либо кривая линия, плоскость, поверхность, тело.

*Горизонталь* (горизонтальная прямая уровня) параллельна плоскости проекций  $\Pi_1$ .

*Гранная поверхность* образуется перемещением прямолинейной образующей  $l$  по ломаной направляющей  $m$ .

*Конкурирующие точки* - точки, проекционно-совпадающие на одной из плоскостей проекций. *Горизонтально-конкурирующие точки* имеют

совпадающие проекции на горизонтальной плоскости проекций; *фронтально-конкурирующие точки* имеют совпадающие проекции на фронтальной плоскости проекций.

*Линия проекционной связи (линия связи)* - линия, перпендикулярная к оси проекций. На линии связи расположена пара проекций точки.

*Меридианы* - это линии, которые получаются при сечении поверхности плоскостями, включающими ось. Меридиан, параллельный фронтальной плоскости проекций, называется *главным*.

*Многогранник* - замкнутая гранная поверхность, имеющая не менее 4-х граней (пирамида, призма, тетраэдр и т.д.).

*Направляющая* поверхности  $m$  определяет закон перемещения образующей  $l$ .

*Образующая поверхности* - линия  $l$ , перемещающаяся в пространстве при образовании поверхности.

*Опорные точки* - это крайние точки (верхняя, нижняя, левая, правая, дальняя, ближняя) и точки перехода видимости.

*Определитель* - это совокупность геометрических элементов и условий, необходимых и достаточных для однозначного задания поверхности в пространстве и на чертеже.

*Ортогональное (прямоугольное) проецирование* - проецирование параллельными лучами из бесконечности под прямым углом к плоскости проекций.

*Ось проекций* - линия пересечения плоскостей проекций. Ось  $X_{12}$  разделяет плоскости  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ , ось  $Y_{13}$  разделяет плоскости  $\Pi_1$  и  $\Pi_3$ , ось  $Z_{23}$  разделяет плоскости  $\Pi_2$  и  $\Pi_3$ . Иногда ось проекций на чертеже не проводят, но ее расположение всегда известно. Так, ось  $X_{12}$  всегда горизонтальна.

*Очерковая линия* - это проекция контура на плоскости проекций.

*Параллель* - это окружность, по которой перемещаются точки образующей в процессе ее вращения.

*Плоскость общего положения* - плоскость, не параллельная и не перпендикулярная ни одной из плоскостей проекций.

*Плоскость уровня* - плоскость, параллельная одной из плоскостей проекций. Такие плоскости являются дважды проецирующими, так как на двух плоскостях проекций имеют вид прямой, расположенной под прямым углом к линиям связи.

*Поверхность вращения* образуется вращением образующей  $l$  вокруг оси вращения  $i$ .

*Проецирующая прямая* - прямая, перпендикулярная одной из плоскостей проекций. Например, фронтально-проецирующая прямая перпендикулярна



фронтальной плоскости проекций  $\Pi_2$ . На эту плоскость прямая спроецируется в виде точки.

*Проецирующая плоскость* - плоскость, перпендикулярная одной из плоскостей проекций. На комплексном чертеже имеет проекцию, вырожденную в прямую линию именно на той плоскости проекций, которой данная плоскость перпендикулярна. Так, горизонтально-проецирующая плоскость имеет проекцию в виде прямой на  $\Pi_1$ .

*Прямая общего положения* - прямая, не параллельная и не перпендикулярная ни одной из плоскостей проекций.

*Прямая уровня* - прямая, параллельная одной из плоскостей проекций.

*Фронталь* (фронтальная прямая уровня) параллельна плоскости  $\Pi_2$ .

*Экватор* - это наибольшая параллель.

## 7. Список используемых источников

1. <http://gk-drawing.ru/plotting/inscription.php>
2. Инженерная графика. Часть I/ Учебное пособие. О.А. Маркова - Нижнекамск: Нижнекамский химико-технологический институт (филиал) ФГБОУ ВПО "КНИТУ", 2012. - 83 стр.
3. Решение задач по начертательной геометрии. Учебно-методическое пособие / О.А. Маркова. - Нижнекамск: ИПЦ «Гузель», 2018. - 86 с.
4. <https://studfiles.net/preview>
5. <http://5fan.ru/wievjob.php?id=70323>
6. <http://helpiks.org/6-43104.html>

## Содержание

Введение .....	2
1. Выполнение контрольных работ .....	3
2. Основные правила оформления чертежей .....	4
2.1. Форматы. Основная надпись .....	4
2.2. Масштаб чертежа .....	8
2.3. Линии чертежа по ГОСТ 2.303 - 68 .....	8
2.4. Шрифты по ГОСТ 2.304 - 81 .....	10
3. Контрольные работы по начертательной геометрии .....	13
3.1. Теоретические положения к выполнению эюра 1 .....	13
3.1.1. Задание на чертеже точки, прямой, плоскости .....	13
3.1.2. Принадлежность и взаимное расположение точек, прямых, плоскостей .....	30
3.1.3. Метод конкурирующих точек .....	36
3.2. Задание на выполнение эюра 1 .....	37
3.3. Рекомендации к выполнению эюра 1 .....	38
3.4. Теоретические положения к выполнению эюра 2 .....	41
3.5. Задание к выполнению эюра 2 .....	45
3.6. Рекомендации к выполнению эюра 2 .....	45
3.7. Теоретические положения к выполнению эюра 2 .....	48
3.7.1. Поверхности .....	48
3.7.2. Взаимное расположение точек, прямых, плоскостей и поверхностей .....	53
3.8. Задание к выполнению эюра 3 .....	64
3.9. Рекомендации к выполнению эюра 3 .....	64
3.10. Теоретические положения к выполнению эюра 4 .....	68
3.10.1. Взаимное пересечение поверхностей .....	68
3.10.2. Развертка поверхностей .....	78
3.11. Задание на выполнение эюра 4 .....	86
3.12. Рекомендации к выполнению эюра 4 .....	87
4. Вопросы для самопроверки усвоения материала .....	91
5. Принятые графические обозначения и символы .....	93
6. Словарь графических терминов .....	94
7. Список используемых источников .....	96
Содержание .....	97

**Учебное издание**

**Маркова**

**Ольга Анатольевна**

кандидат педагогических наук

# **ИНЖЕНЕРНАЯ ГРАФИКА (начертательная геометрия)**

Подписано в печать 22.06.2018 г. Формат 60x84 1/16  
Печать офсетная. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 5,1515  
Тираж 100. Заказ № 82576

Отпечатано в ООО "ИПЦ "Гузель"  
Республика Татарстан, г. Нижнекамск,  
пр. Химиков, д. 18, тел.: 30-31-60

