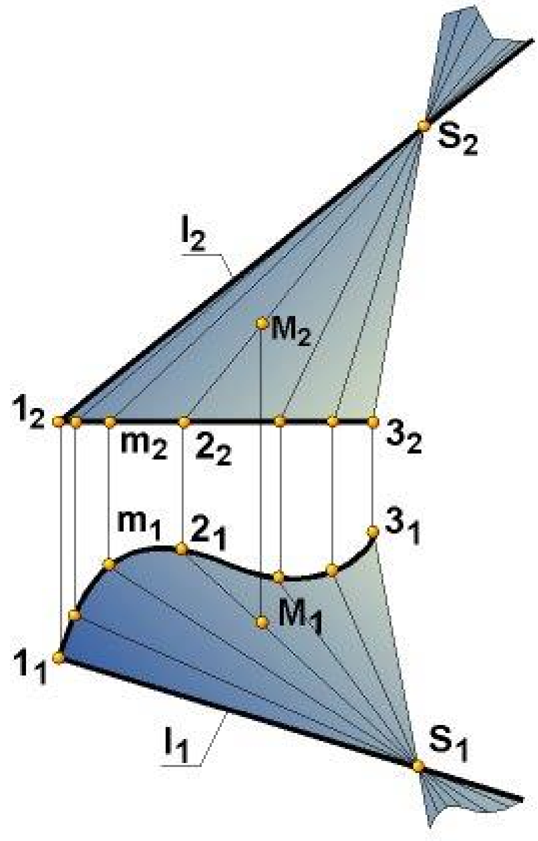
Министерство образования и науки Российской Федерации
Нижнекамский химико-технологический институт (филиал)
Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Казанский национальный исследовательский технологический университет»
(НХТИ ФГБОУ ВПО «КНИТУ»)

О.А. Маркова

АЗБУКА НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ
Часть II

Учебное пособие



2016

УДК 744
М 25

Маркова, О. А.
М 25 Азбука начертательной геометрии. Часть II. Учебное пособие/ О.А. Маркова. - Нижнекамск: ИПЦ «Гузель», 2016. - 90 с.

Учебное пособие предназначено в помощь студентам всех форм обучения технических направлений для самостоятельного изучения, а также при подготовки к тестовым процедурам и зачетным, экзаменационным сессиям.

Рассмотрены основные темы начертательной геометрии: деление отрезка, способ прямоугольного треугольника, взаимное расположение двух прямых, прямых и плоскостей, двух плоскостей и т.д.

Пособие подготовлено на кафедре «Техника и физика низких температур» НХТИ ФГБОУ ВПО «КНИТУ»

Рецензенты:
Закиров М.А., кандидат технических наук, доцент;
Макусева Т.Г., кандидат педагогических наук, доцент.

ВВЕДЕНИЕ

В первой части данного пособия подробно рассмотрены случаи проецирования точек, прямых, плоских фигур на две и три плоскости пространства. Автором были представлены правила построения изображений, основанные на методе проекций, даны базовые понятия, определения различных положений прямой линии и плоскости, взаимной принадлежности точек, прямых и плоскостей, приведены решения некоторых позиционных задач.

Публикация была ориентирована на тех, кто испытывал или испытывает затруднения в изучении и понимании учебного материала начертательной геометрии. Так как известно, что правильно построенные самостоятельные занятия положительно влияют на освоение любой дисциплины в целом, и нашей в том числе.

В первой части пособия в заключение отмечалось, что во второй части автором будут подробно и доступно рассмотрены следы прямой, деление отрезка в заданных отношениях, способ прямоугольного треугольника, взаимные положения двух прямых, прямой и плоскости и другое. Вот этим и займемся.

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И СИМВОЛЫ

Точки обозначаются прописными буквами латинского алфавита *A*, *B*, *C*, *D*…(A, B, C, D…) или цифрами *1*, *2*, *3*…(1, 2, 3…).

Прямые и кривые линии обозначаются строчными буквами латинского алфавита - *a*, *в*, *c*, *d*…(a, b, c, d…) или прописными буквами: *AB*, *СД*…(AB, СД…) или цифрами *12*, *34*…(12, 34…).

Отрезки прямых обозначаются [*AB*], [*СД*]…([AB], [СД]…) или цифрами [*12*], [*34*]…([12], [34]…).

Расстояние между двумя точками А и В обозначаются - |AB|.

Плоскости проекций обозначаются:

- горизонтальная $\mathit{П}_1$ ($П_1$) или π_1 (π_1);
- фронтальная $\mathit{П}_2$ ($П_2$) или π_2 (π_2);
- профильная $\mathit{П}_3$ ($П_3$) или π_3 (π_3);
- дополнительные плоскости проекций $\mathit{П}_4$, $\mathit{П}_5$…($П_4$, $П_5$…) или π_4, π_5…(π_4, π_5…).

Последовательность точек, линий или поверхностей обозначаются подстрочными индексами: A_1, A_2, A_3…, a_1, a_2, a_3...(A_1, A_2, A_3…, a_1, a_2, a_3…),

Линии уровня обозначаются:

- горизонталь *H* (*h*) или H (h);
- фронталь *F* (*f*) или F (f);
- профильная прямая *P* (*p*) или P (p).

Плоскости обозначаются прописными буквами греческого алфавита *Σ*, *Q*…(Σ, Q…) или *α*, *β*...(α, β …).

Оси проекций обозначаются строчными буквами X, Y, Z (X, Y, Z) или x, y, z (x, y, z); Π_2/Π_1 (Π_2/Π_1) или π_2/π_1 (π_2/π_1) и т.д.

Начало координат обозначается прописной буквой O (O).

Углы между элементами обозначаются строчными греческими буквами α, β, φ, γ, σ, δ, ω, λ, ε…(α, β, φ, γ, σ, δ, ω, λ, ε…).

Графические знаки – символы имеют значения:

|| - параллельность;

= - равенство, результат;

≡ - тождественность, совпадение;

∩ или ⌒ или X - пересечение;

⊥ - перпендикулярность;

∈ - принадлежность ($M \in \Sigma$ - обозначает, что точка M принадлежит плоскости Σ);

⊃ - включение ($\Sigma \supset M$ - обозначает, что плоскость Σ включает точку M);

⋃ - символ соединения;

∸ или ∸ - символ скрещивающихся прямых;

∧ - союз «и»;

∨ - союз «или»;

⊃/ - касание;

⇒ - логическое следование;

⇔ - эквивалентность;

Δ – треугольник;

∠ - угол;

∟ – прямой угол.

Многие из приведенных символов могут быть перечеркнуты наклонной чертой, что обозначает отрицание. Например, $A \notin l$ - точка A не принадлежит линии l; $a \nparallel b$ - прямые a и b не параллельны.

РАЗДЕЛ № 1. ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА ПРЯМОЙ

1.1. Деление отрезка прямой в заданном отношении

Известно из курса элементарной геометрии, что:

1. Точка, лежащая на прямой линии, имеет свои проекции на соответствующих проекциях прямой. На рисунке 1 C_1 лежит на A_1B_1, а C_2 лежит на A_2B_2.

2. *Если точка делит отрезок в каком-либо отношении, то проекции этой точки делят одноименные проекции данного отрезка в том же отношении:*

$$\frac{[AC]}{[CB]}=\frac{[A_1C_1]}{[C_1B_1]}=\frac{[A_2C_2]}{[C_2B_2]}$$

Справедливо и обратное утверждение.

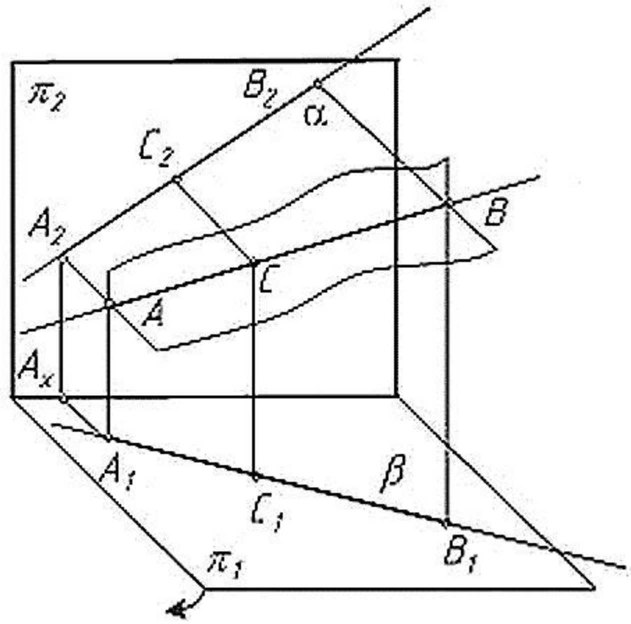


Рис. 1. Деление отрезка

Из этого следует: для того, чтобы разделить отрезок прямой в данном отношении, достаточно разделить в этом отношении одну из проекции заданного отрезка, а потом с помощью линии связи перенести делящую точку на другие проекции отрезка. Применим это при решении следующих задач.

1.2. Задачи на деление отрезка

Задача 1: Деление отрезка пополам.

Построение: На отрезке *AB* (рис. 2) из точки *A* откладывают дугу больше половине этого отрезка. Далее не меняя значения циркуля из точки *B* строят засечки, пересекающие дугу. Пересечение дуги и засечек образуют точки *E* и *D*, затем проводят прямую через эти точки, которая и делит отрезок *AB* ровно на две части. Если и дальше таким же способом продолжить деление получаемых частей пополам, то можно разделить отрезок на 4, 8, 16 и т. д., на число кратное 2.

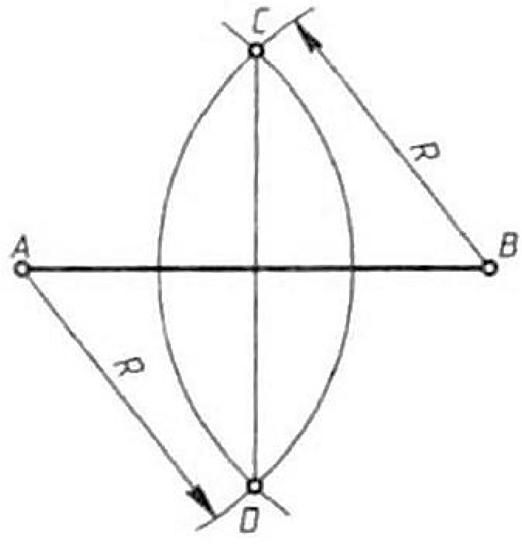


Рис. 2. Деление отрезка пополам

Задача 2: Деление отрезка прямой на 7 равных частей.

Построение: При решении задачи применяют:

1. *Теорема Фалеса*: «Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки».

2. *Признаки подобия треугольников*: Подобные треугольники – это треугольники, углы которых соответственно равны, а стороны одного пропорциональны сходственным сторонам другого треугольника.

На рисунке 3 показано деление отрезка АВ на семь равных частей. Через любой конец отрезка *AB* под произвольным углом к нему (лучше острым) проводят вспомогательную прямую *AC*. С помощью циркуля от точки *A* на прямой *AC* откладывают семь равных между собой отрезков (длину их выбирают произвольно). Последнюю точку *7* соединяют с точкой *B*, а через остальные точки *1*, *2*, …, *6* проводят прямые, параллельные прямой *B7* до пересечения с отрезком *AB*. Точки пересечения делят отрезок *AB* на семь равных частей.

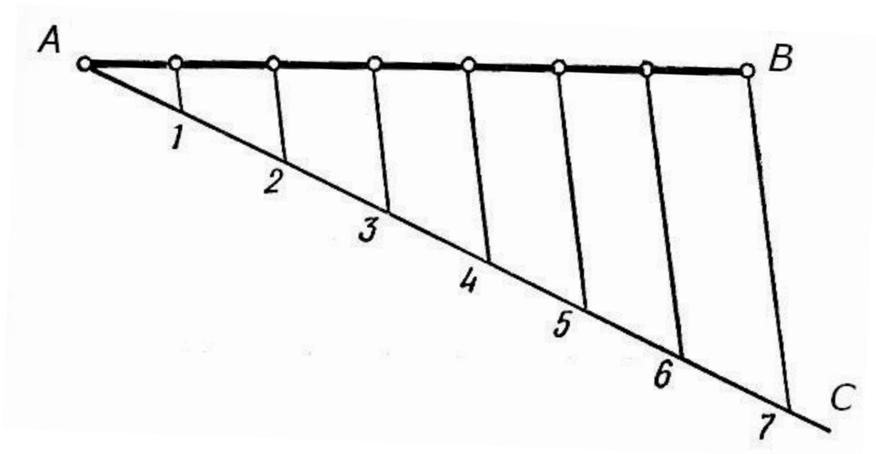


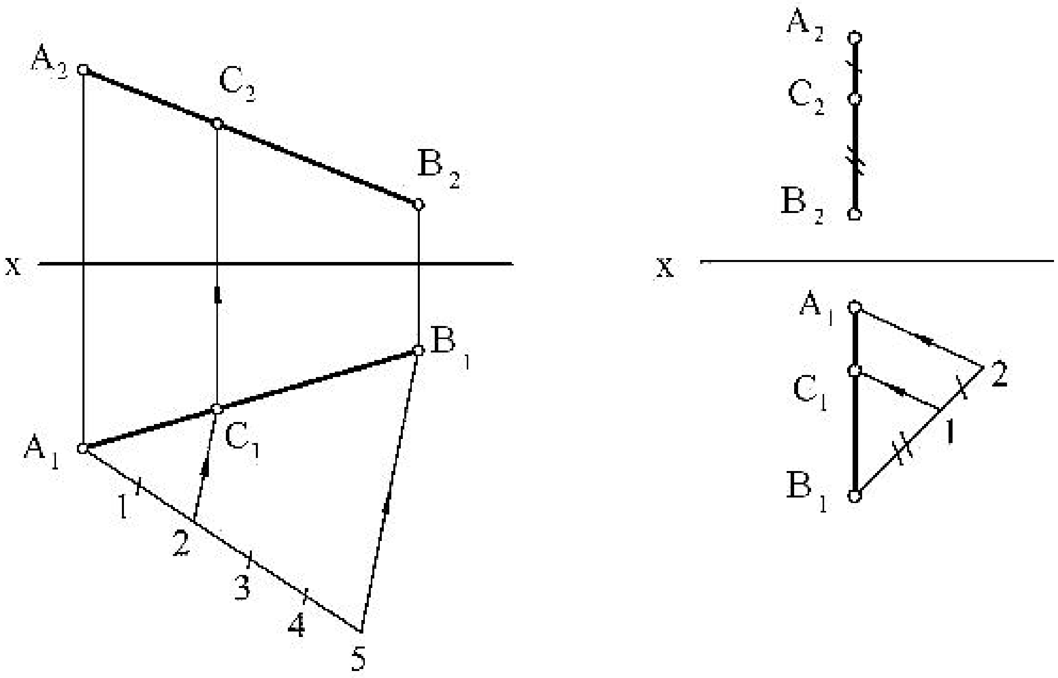
Рис.3. Деление отрезка на 7 равных частей

Задача 3: Деление отрезка АВ точкой С в отношении 2:3.

Построение: На рисунке 4,*а* точка С делит отрезок АВ в отношении 2:3. Для этого из точки А проведена вспомогательная прямая, на которой отложено 5 равных отрезков произвольной длины.

Задача 4: Деление отрезка профильной прямой АВ точкой С, заданной фронтальной проекцией C_2.

Построение: Для этого выполняют следующие построения: из точки B_1 проводят произвольную вспомогательную прямую, откладывают на ней отрезок $B_1 1$, который равен $[B_2C_2]$ и отрезок 12, равный $[C_2A_2]$. Соединяют точки 2 и A_1 и параллельно линии $2A_1$ через точку 1 проводят прямую до пересечения с отрезком A_1B_1 в точке C_1. Эта точка и будет искомой (рис. 4,*б*).



а) *б)*

Рис. 4. Деление отрезка точкой *C*

Задача 5: Деление отрезка *AB* на две части, находящиеся в отношении *m:n.*

Построение: На вспомогательной прямой *AD* вместо отрезков произвольной длины (см. выше) откладывают заданные отрезки *m* и *n* (рис. 5).

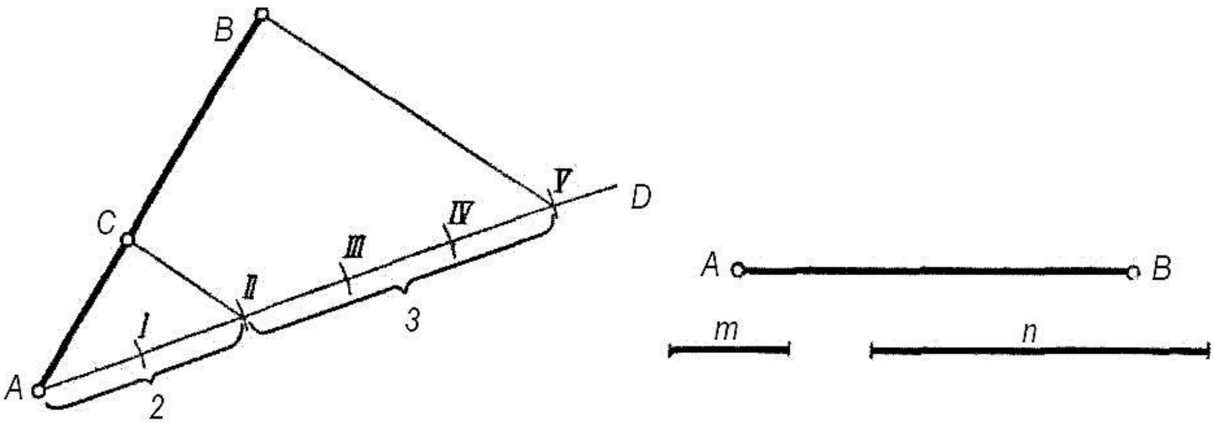


Рис. 5. Деление отрезка в отношении *m*:*n*

Задача 5: Деление отрезка *AB* в среднем и крайнем отношении (рис. 6).

Построение: Отрезок *AB* делят в точке *C* пополам и через один из его концов, например точку *B*, проводят прямую *BM*, ему перпендикулярную (рис. 6,*а*). От точки *B* на перпендикуляре откладывают отрезок *BD* = *BC.* Точки *A* и *D* соединяют прямой (рис. 6,*б*). На отрезке *AD* при помощи дуги радиуса *DB* с центром в точке *D* получают точку *E*. Из точки *A* как из центра проводят дугу радиусом *AE*, которая пересечет отрезок *AB* в точке *F*.

Точка F является точкой деления отрезка AB в среднем и крайнем отношении: $\frac{AF}{FB}=\frac{AB}{AF}$.

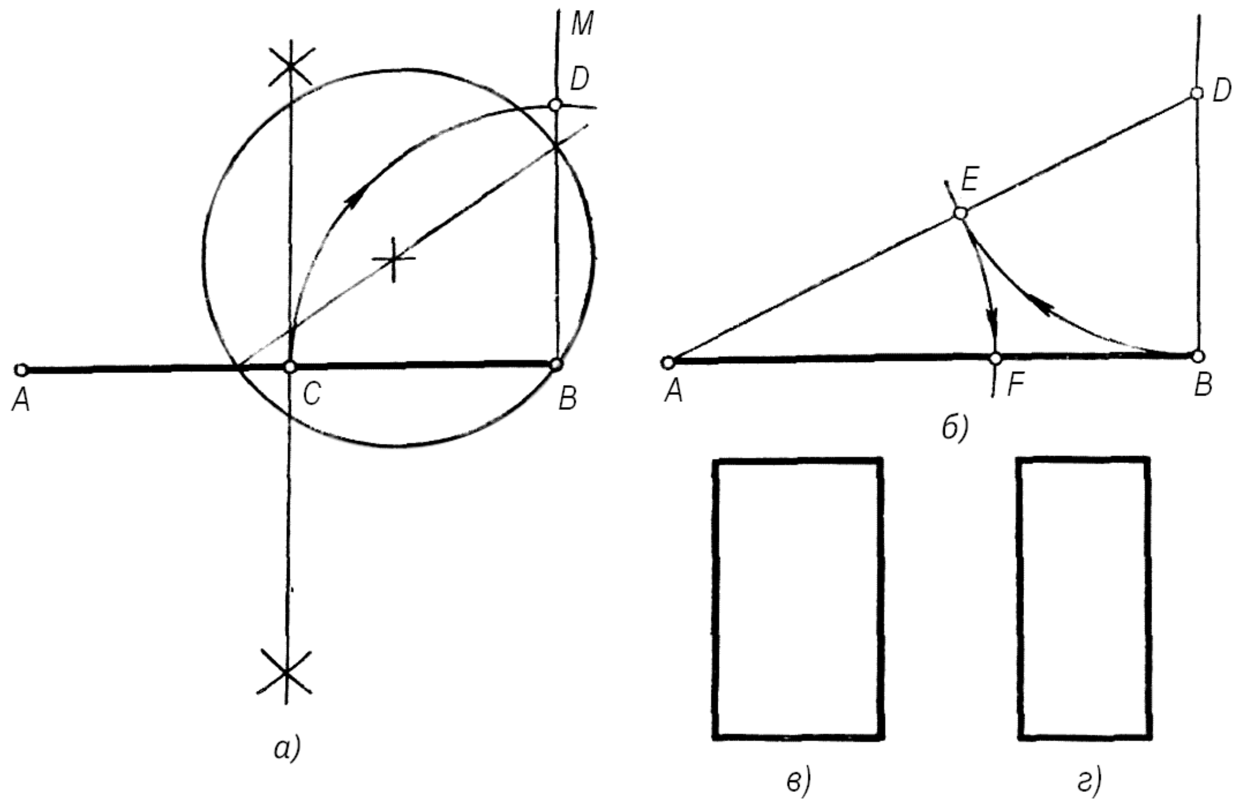


Рис. 6. Деление отрезка в среднем и крайнем отношении

Разобранную пропорцию называют «золотым сечением». Возьмем для примера прямоугольник с отношением сторон, равным построенной пропорции (рис. 6,*в*), и сравним его с другим прямоугольником (рис. 6,*г*), у которого эта пропорция нарушена. Нетрудно заметить, что пропорции первого прямоугольника более приятны для глаза. Простейшее применение пропорции «золотого сечения» можно наблюдать в форматах книг, альбомов, размерах открыток и т. д.

Золотое сечение или гармоническая пропорция – это пропорциональное деление отрезка на неравные части, при котором весь отрезок так относится к большей части, как сама большая часть относится к меньшей. Другими словами, меньший отрезок так относится к большему, как больший ко всему a:b = b:c или c:b = b:a (рис. 7).

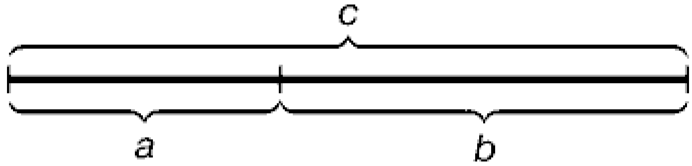
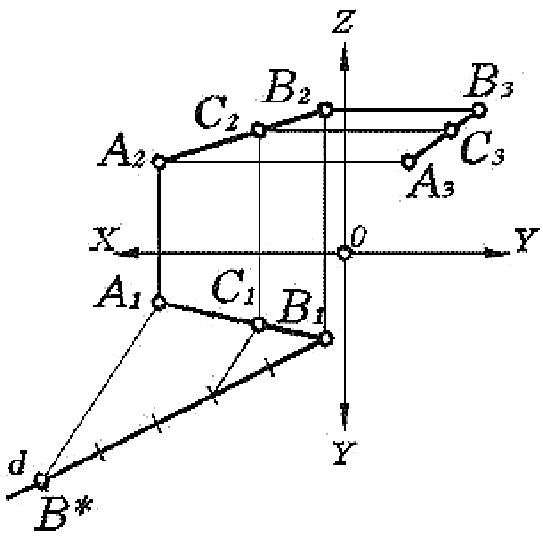


Рис. 7. Геометрическое изображение золотой пропорции

1.3. Контрольные вопросы для самоподготовки

1. Как звучит теорема Фалеса?
2. Признаки подобия треугольников.
3. Как разделить отрезок прямой в заданном отношении?
4. Каким способом делят отрезок пополам?
5. Под каким углом проводят вспомогательную прямую при делении по отношению к заданному отрезку?
6. Алгоритм деления отрезка на равные части.
7. Какие пропорции называют «золотым сечением»?

1.4. Тестовые задания



1. Линия B_1B^* является:

а) основной *б) базовой*

в) вспомогательной

2. Линия B_1B^* проводится под ___________ углом к горизонтальной проекции отрезка.

3. Точка C делит отрезок в отношении:____.

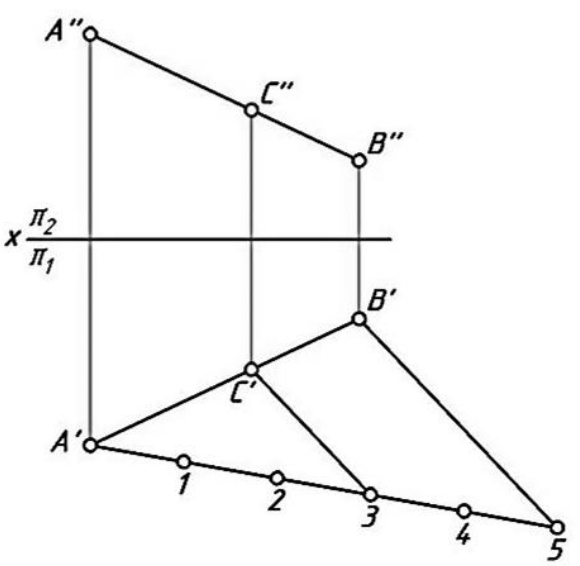
а) 3:2 *б) 2:5* *в) 2:3* *г) 1:5*

4. С помощью циркуля от точки B на прямой d откладывают пять ___________ между собой отрезков.

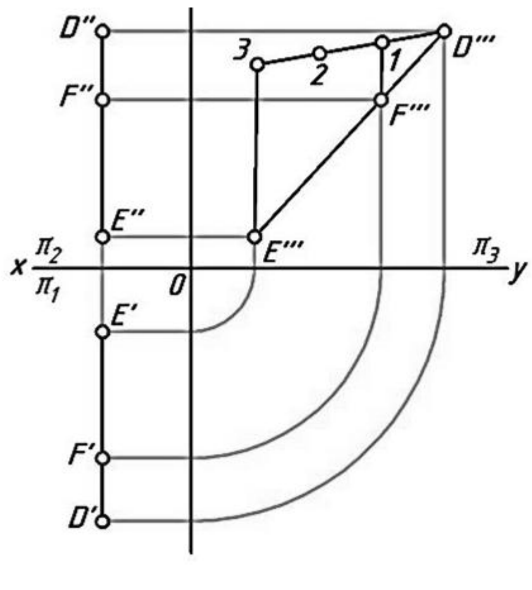
5. Теорема Фалеса:___________

____________________________.

6. В отношение 2:3 поделен отрезок на эпюре:____.



а)



б)

7. Если точка на отрезке делит его длину на 4 части, то проекция точки делит длину одноименных проекций отрезков в отношении:

а) 1 *б) 2* *в) 3* *г) 4*

8. Золотое сечение - ________________ пропорция.

а) основная *б) базовая* *в) гармоническая* *г) вспомогательная*

9. Установить правильную последовательность деления отрезка пополам:

1) не меняя значения циркуля из точки В строят засечки, пересекающие дугу;

2) пересечение дуги и засечек образуют точки С и C_1;

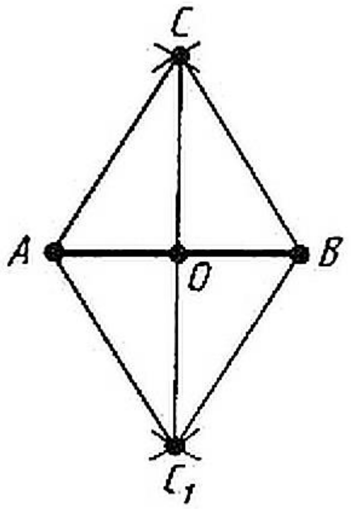
3) АВ - данный отрезок;

4) эта точка есть середина отрезка АВ;

5) из точки А откладывают дугу большую половине этого отрезка;

6) отрезок CC_1 пересекает прямую АВ в некоторой точке О;

7) они лежат в разных полуплоскостях относительно прямой АВ.



10. Установить правильную последовательность деления отрезка на четыре равные части:

1) для этого через точку А проводят произвольную полупрямую а;

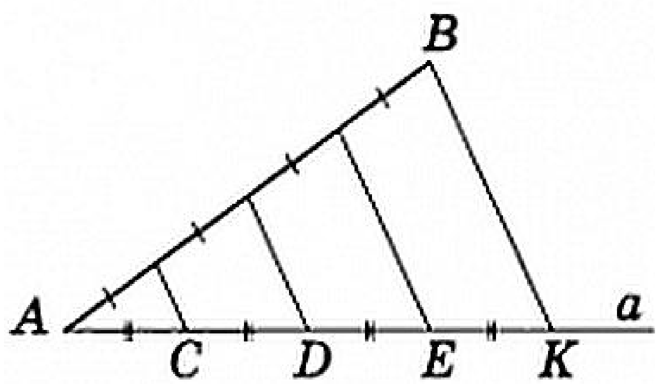
2) соединяют точки В и К отрезком;

3) АВ - данный отрезок, который делят на 4 равные части;

4) проводят через оставшиеся точки С, D, E прямые, параллельные прямой ВК, так, чтобы они пересекли отрезок АВ;

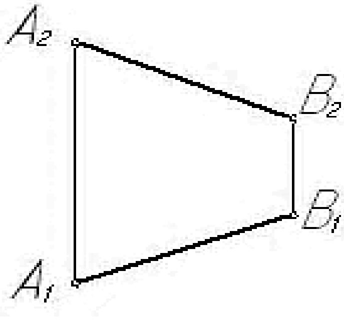
5) согласно теореме Фалеса отрезок АВ поделен на четыре равные части;

6) откладывают на а последовательно четыре равных между собой отрезка АС, CD, DE, EK.



11. Разделить отрезок *АВ* точкой *С* в отношении:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{3}{2}$$



РАЗДЕЛ № 2. СЛЕДЫ ПРЯМОЙ

2.1. Понятие следа прямой линии

Точки пересечения прямой с плоскостями проекций называются следами прямой. На рисунке 8 изображены три прямые частного положения *a*, *b* и *c*. Точку *M* пересечения прямой *a* с плоскостью $П_1$ называют *горизонтальным следом прямой*, точку *N* пересечения прямой *b* с плоскостью $П_2$ называют *фронтальным следом прямой*, точку *P* пересечения прямой *c* с плоскостью $П_3$ - *профильным следом прямой*.

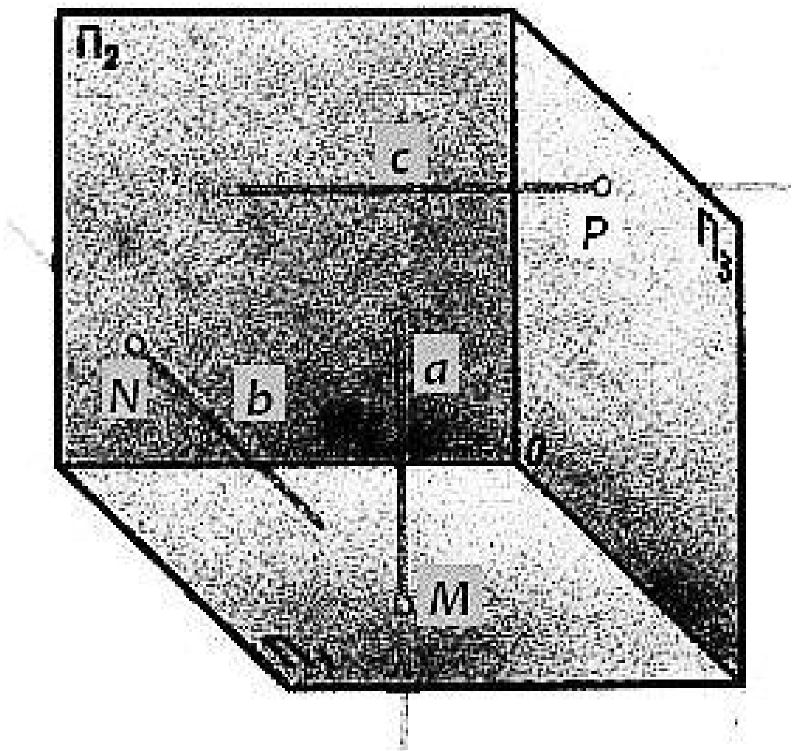


Рис. 8. Три прямые частного положения

Из рисунка видно, что прямая, перпендикулярная любой плоскости проекций, имеет один след на этой плоскости, и в тоже время, прямая, параллельная любой плоскости проекций, не имеет следа на этой плоскости.

Прямые общего положения наклонены ко всем плоскостям проекций и пересекают их. След прямой как точка, принадлежащая одновременно данной прямой и одной из плоскостей проекций, имеет одну из своих проекций, совпадающую с самим следом, а другие проекции, лежащие на осях проекций. На рисунке 9 прямая *a* пересекает плоскости $П_1$, $П_2$ и $П_3$. Проекция M_1 горизонтального следа M совпадает с самим следом, фронтальная проекция M_2 лежит на оси x, а профильная проекция M_3 на оси y. Проекция N_2 фронтального следа N совпадает с самим следом, горизонтальная проекция N_1 лежит на оси x, а профильная проекция N_3 на оси z. Проекция P_3 профильного следа P совпадает с самим следом, фронтальная проекция P_2 лежит на оси z, а горизонтальная проекция P_1 на оси y.

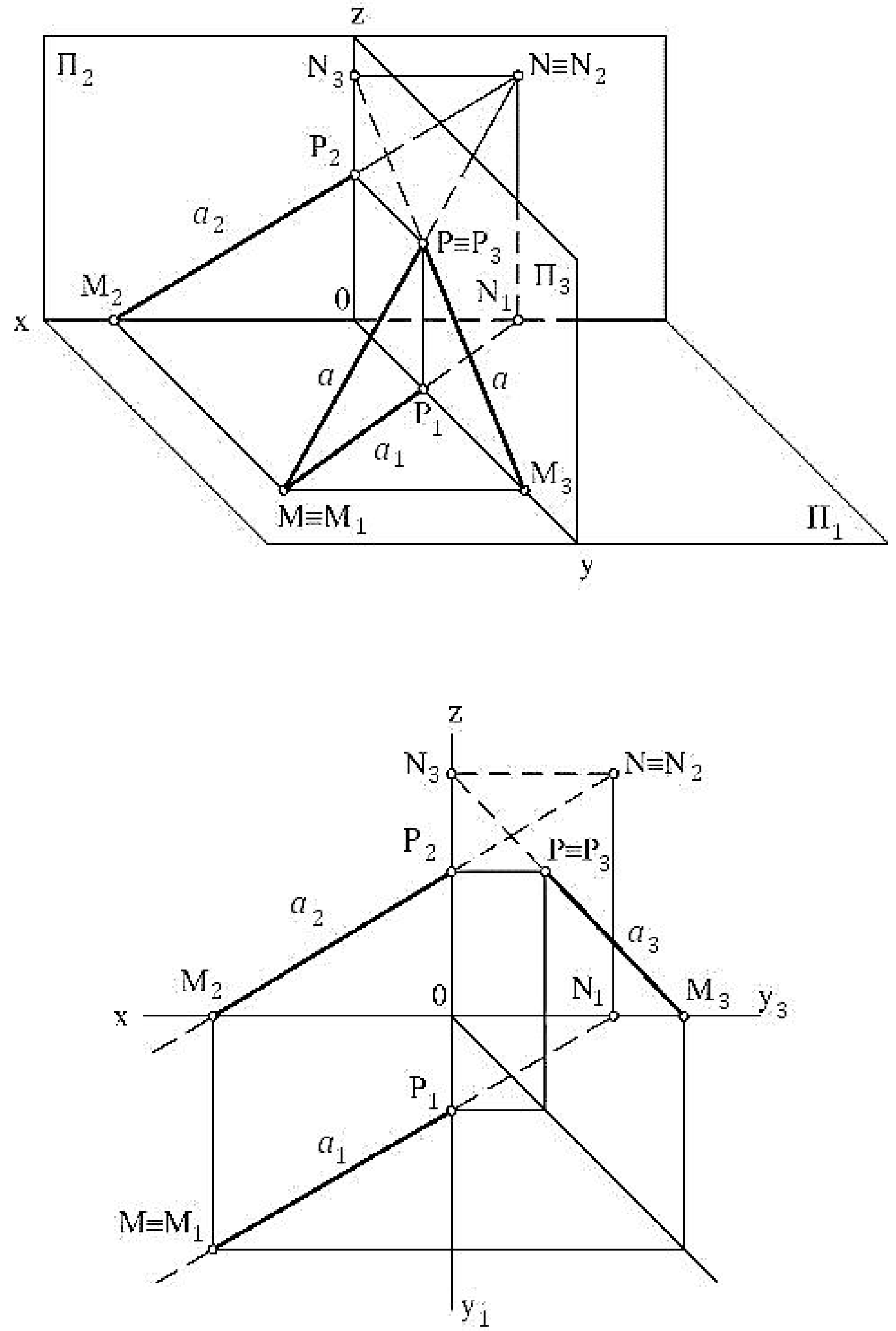


Рис. 9. Следы прямой общего положения

Следы прямой являются точками, одновременно принадлежащими как плоскости проекции, так и самой прямой.

2.2. Построение следов прямой линии

Иногда для решения задач необходимо знать местонахождение следов прямых. Рассмотрим их определение. Прямая линия на рисунке 10 задана отрезком *AB*, причем прямая занимает в пространстве общее положение. Для нахождения фронтальной проекции N_2 фронтального следа *N*, сначала находят его горизонтальную проекцию N_1. Затем продолжают горизонтальную проекцию отрезка A_1B_1 до пересечения с осью x и получают горизонтальную проекцию N_1 следа N. Из точки N_1 проводят линию связи до пересечения с продолжением фронтальной проекции A_2B_2, определяют точку N_2 - фронтальную проекцию фронтального следа.

Для нахождения горизонтального следа M_1 сначала надо найти его фронтальную проекцию M_2. С этой целью продолжают фронтальную проекцию A_2B_2 до пересечения с осью x, находят точку M_2 - фронтальную проекцию горизонтального следа M. Из точки проводят линию связи до пересечения с продолжением горизонтальной проекции A_1B_1, получают точку M_1 - горизонтальную проекцию горизонтального следа.

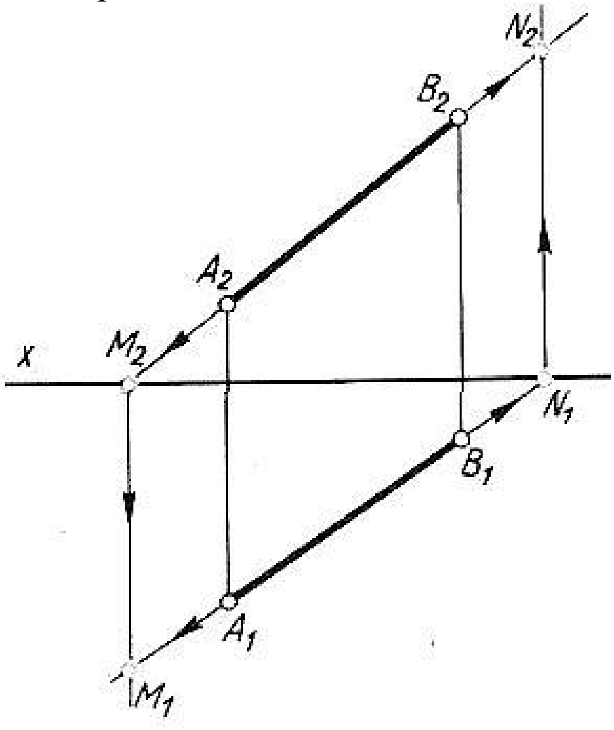


Рис. 10. Построение следов прямой

Построение иное, если прямая линия занимает в пространстве частное положение. Приведем для примера нахождение следов прямой, параллельной профильной плоскости проекций Π_3 (рис. 11). Чтобы построить эти следы, надо сначала построить профильную проекцию C_3D_3 отрезка данной прямой. Затем продолжить профильную проекцию C_3D_3 до пересечения с осями z_{23} и y_3 в точках N_3 и M_3. Для построения горизонтального следа из точки M_3 провести горизонтально-вертикальную линию связи до встречи с продолжением горизонтальной проекции C_1D_1 и получить точку M_1, которая явится горизонтальной проекцией горизонтального следа и совпадет с искомым следом M.

Для построения вертикального следа из точки N_3 проводят горизонтальную линию связи до встречи с продолжением фронтальной проекции C_2D_2 и получают точку N_2, которая явится фронтальной проекцией фронтального следа и совпадет с искомым следом N.

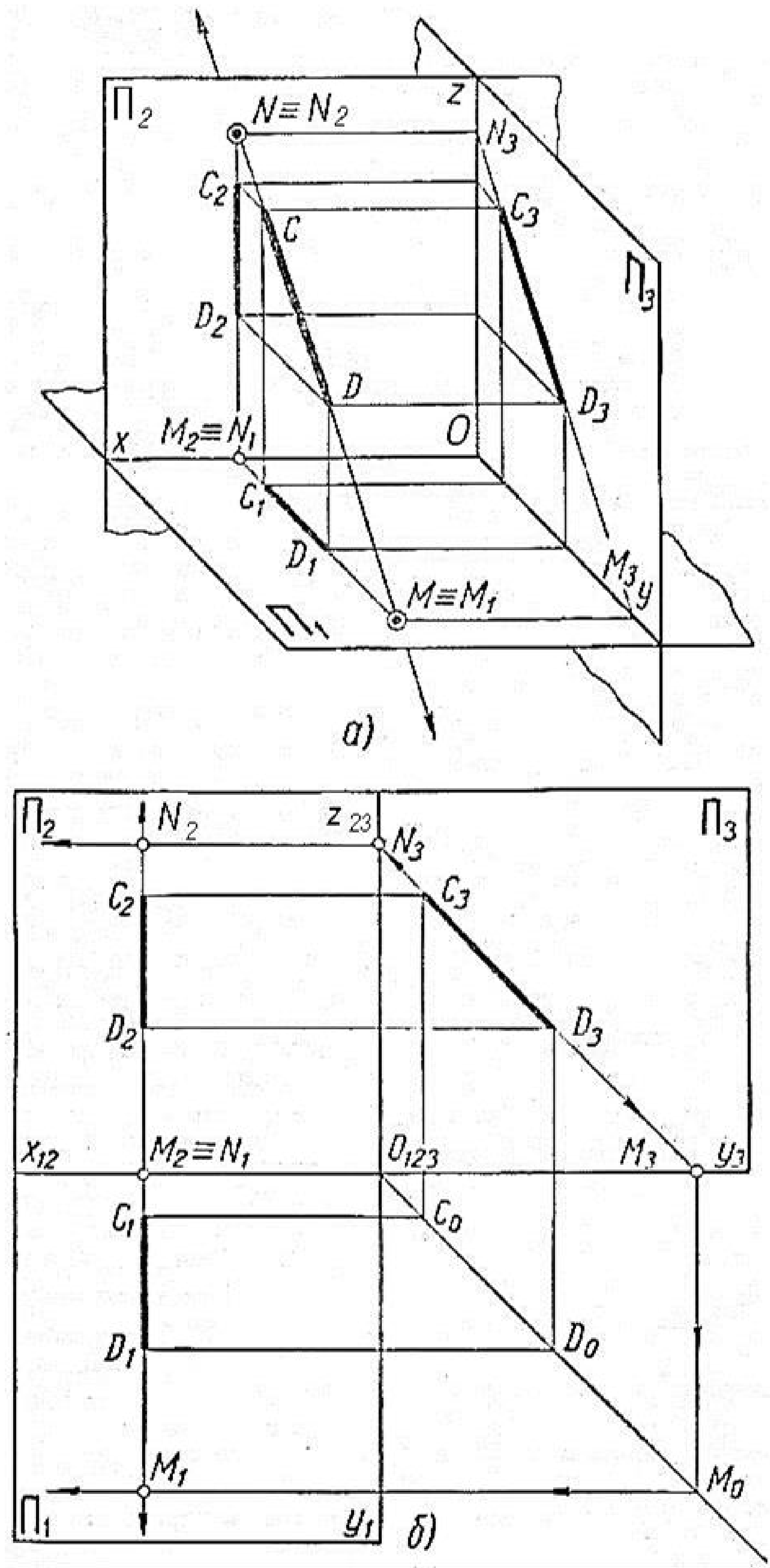


Рис. 11. Следы профильной прямой

2.3. Алгоритм построения следов прямой

На рисунке 12 приводим алгоритм построения следов отрезка прямой *AB*. На эпюре горизонтальный след находится в *I* октанте, фронтальный след в *V* октанте.

$A_1B_1 \cap xO = N_1$;	$Y_N=0$;	$N \in xOz\ (\pi_2) \Rightarrow$	$AB \cap xOz = N$
$A_2B_2 \cap xO = M_2$;	$Z_M=0$;	$M \in xOy\ (\pi_1) \Rightarrow$	$AB \cap xOy = M$
$A_1B_1 \cap yO = L_1$;	$X_L=0$;	$L \in yOz\ (\pi_3) \Rightarrow$	$AB \cap yOz = L$
$A_2B_2 \cap zO = L_2$;			

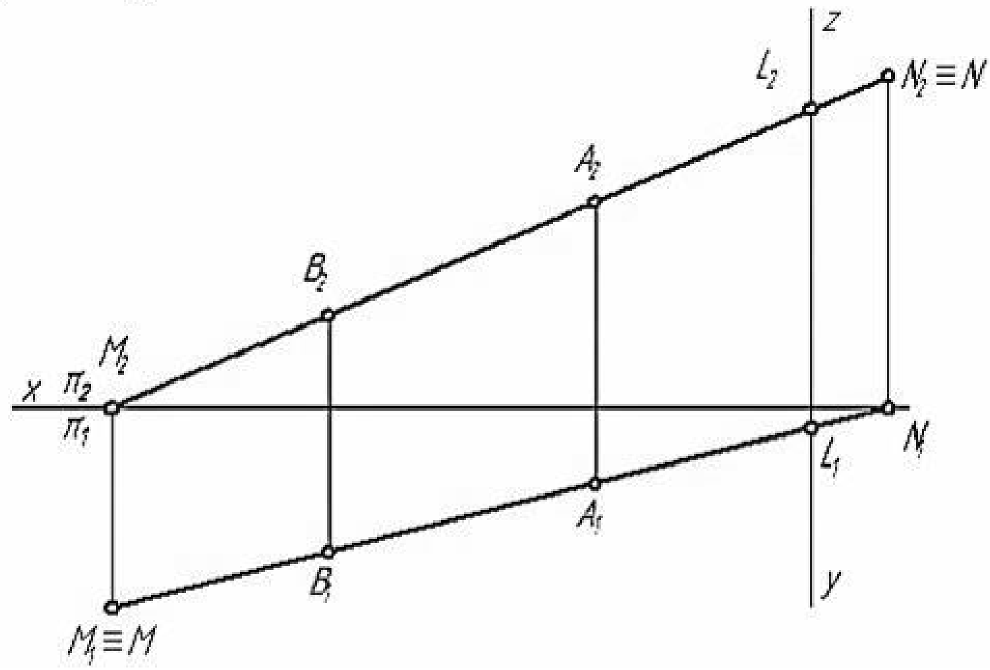


Рис. 12. Алгоритм построения следов прямой

2.4. Контрольные вопросы для самоподготовки

1. Что представляет собой след прямой линии на плоскости проекций?
2. Какая координата равна нулю:
а) для фронтального следа прямой;
б) для горизонтального следа прямой;
в) для профильного следа прямой?
3. С чем на чертеже совпадает:
а) фронтальный след прямой;
б) горизонтальный след прямой;
в) профильный след прямой?
4. Какая проекция следов прямых находится на: оси *x*, оси *y*, оси *z*?
5. Чему принадлежат следы прямой?
6. Каков алгоритм построения следов прямой на чертеже?
7. Сколько следов у горизонтали, фронтали, профильной прямой?
8. Сколько следов у прямой общего положения?

9. У каких прямых линий можно получить три следа, только два и у каких прямых только один след?

10. Постройте эпюр фронтальной линии уровня, пересекающей ось y.

11. Как располагаются на эпюре проекции: фронтального следа прямой, горизонтального следа прямой?

12. Как отличаются построения на чертеже следов для прямых общего положения от следов прямых частных положений?

13. Укажите алгоритм построения следов прямой линии.

2.5. Тестовые задания

1. Точки пересечения прямой с плоскостями проекций - это ________.

2. N_2 называется ______________________________.

3. P_3 является профильной проекцией ____________ следа прямой.

а) фронтального б) профильного в) горизонтального

4. Горизонтальный след прямой совпадает с:

а) N_1 б) N_2 в) M_1 г) M_2

5. Следы прямой обозначают и называют зависимости от того с какой плоскостью проекции происходит _________________ прямой.

6. Прямая, параллельная одной из плоскостей проекций, не имеет следа на плоскости, которой она ______________, и пересекает только две плоскости.

7. Прямая, параллельная двум плоскостям проекций (проецирующая прямая), имеет только ________ след, совпадающий с проекцией прямой на плоскость, к которой она перпендикулярна.

8. Прямая общего положения в общем случае имеет _____ следа.

9. Прямая, имеющая единственный профильный след параллельна:

а) оси x б) оси y в) оси z

10. Прямая, имеющая единственный фронтальный след, параллельна:

а) плоскости $П_1$ б) плоскости $П_2$ в) плоскости $П_3$

11. Прямая, имеющая единственный след M, перпендикулярна:

а) плоскости $П_1$ б) плоскости $П_2$ в) плоскости $П_3$

12. Прямая, имеющая только два следа M и N, параллельна:

а) плоскости $П_1$ б) плоскости $П_2$ в) плоскости $П_3$

13. Прямая, имеющая только два следа M и P, называется _______________.

14. Проекция M_2 располагается на оси __________.

15. Установить правильный алгоритм построения горизонтального следа прямой m на комплексном чертеже:

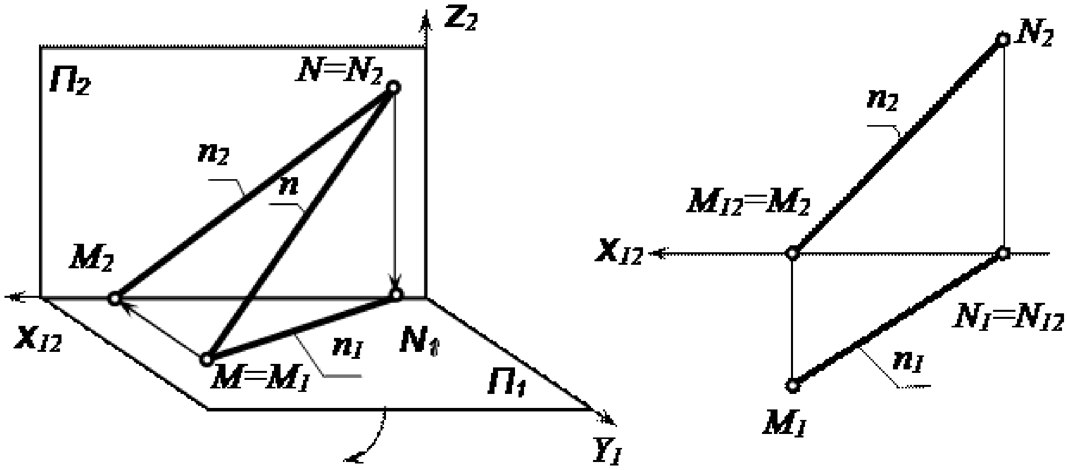
1) из M_2 проводят перпендикуляр к оси X до пересечения с продолжением горизонтальной проекции прямой m_1;

2) продолжают фронтальную проекцию прямой m_2 до пересечения с осью X;

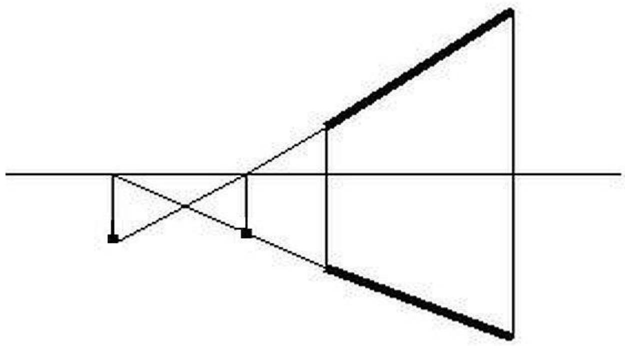
3) полученную точку обозначают M_1. Эта проекция называется горизонтальной проекцией горизонтального следа прямой. Горизонтальный след прямой M совпадает с M_1;

4) полученную точку обозначают M_2, называемой фронтальной проекцией горизонтального следа прямой.

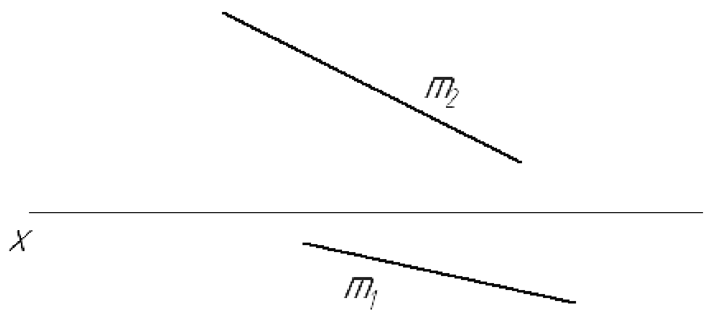
16. Для построения следов прямой общего положения на комплексном чертеже продлевают проекцию прямой до пересечения с осями ____________ ____. На рисунке показано построение горизонтального и фронтального следов прямой *n*. Для этого продолжали __________________ проекция n_1 и _________________ проекция n_2 до пересечения с осью X_{12}.



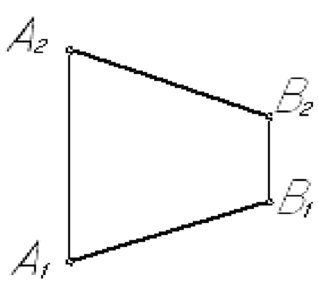
17. Обозначить ось *X* и следы прямой общего положения:



18. Построить следы прямой общего положения *m*:



19. Построить следы прямой общего положения *AB*:

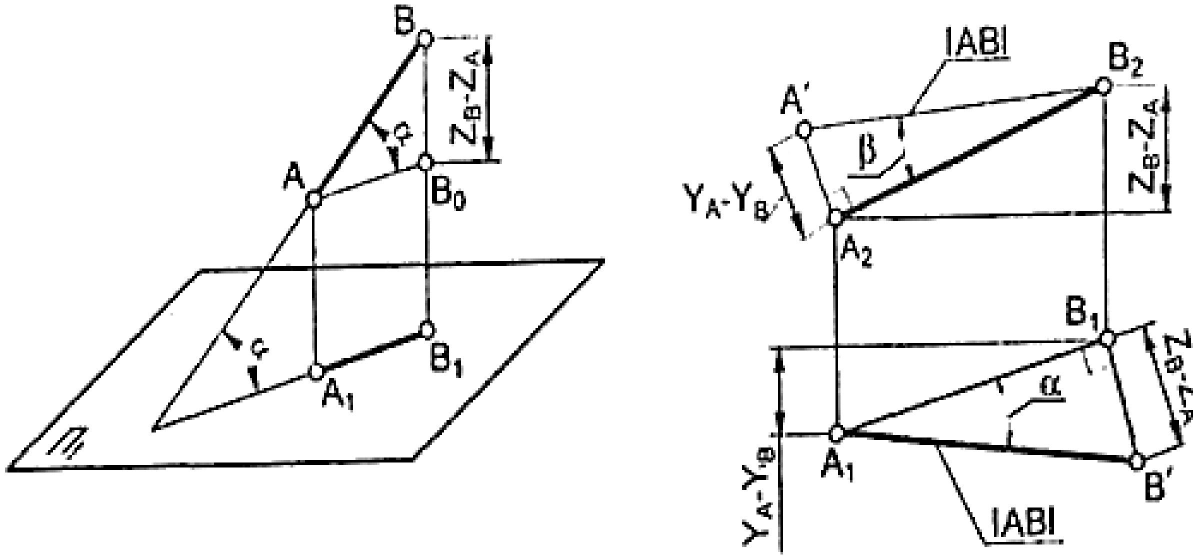


РАЗДЕЛ № 3. СПОСОБ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

3.1. Определение натуральной величины прямой общего положения и угла ее наклона к плоскости

Известно, что длина проекции отрезка прямой линии при ортогональном проецировании на плоскость равна длине отрезка лишь в том случае, когда отрезок является отрезком прямой уровня, то есть параллелен плоскости проекций. В случае, когда отрезок прямой занимает в пространстве общее положение, длина его проекций не равна истинной длине отрезка.

Для определения натуральной величины прямой общего положения и угла ее наклона к плоскости проекций пользуются способом прямоугольного треугольника. На рисунке 13 приведен пример этого.



а) *б)*

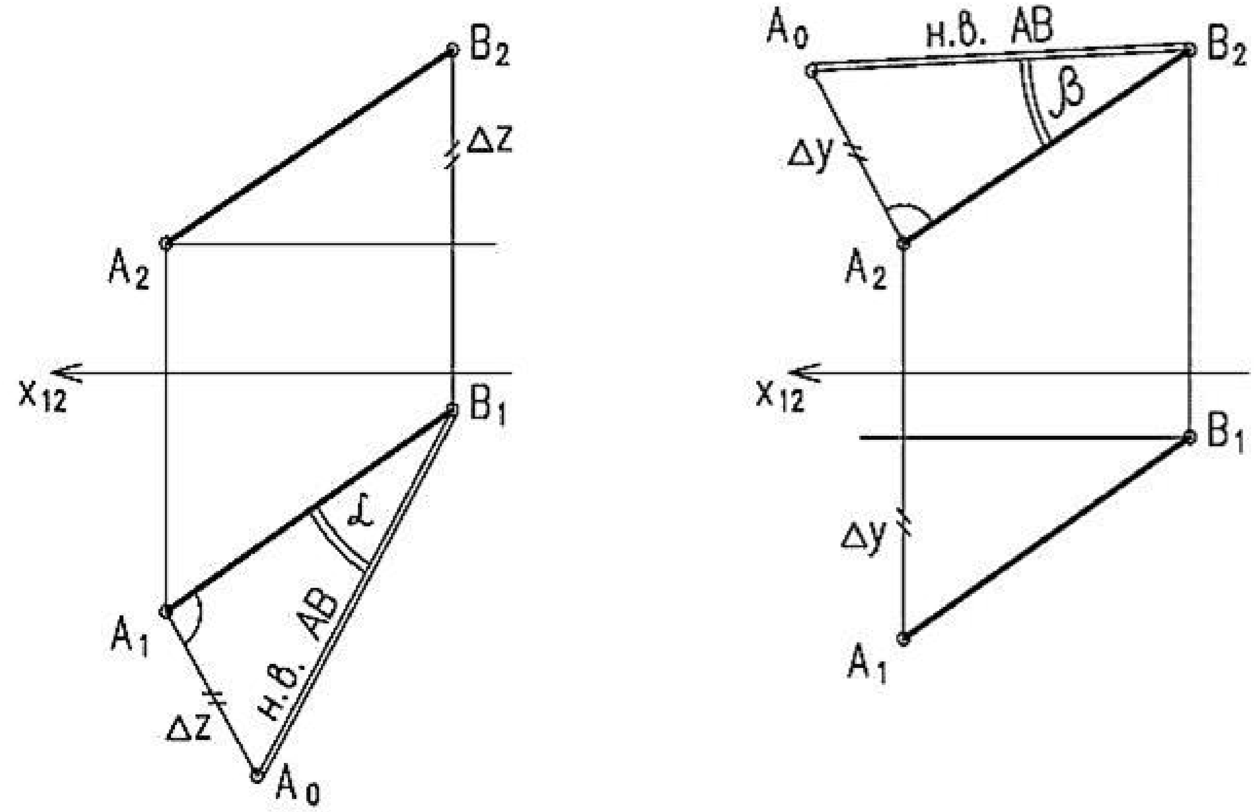
Рис. 13. Применение способа прямоугольного треугольника

Строят ортогональную проекцию A_1B_1 отрезка AB на плоскости $П_1$. Проводят AB_0 параллельную A_1B_1, образованный треугольник ABB_0 - прямоугольный (рис. 13,*а*), и длина одного его катета равна длине горизонтальной проекции отрезка AB, а второго - разности высот точек A и B. Отрезок AB является гипотенузой этого треугольника, а угол α - углом наклона AB к $П_1$.

Треугольник конгруэнтный треугольнику, рассмотренному выше, изображают на комплексном чертеже (эпюре) на рисунке 13,*б*. Приняв A_1B_1 за один катет, строят прямоугольный треугольник, вторым катетом которого является отрезок $B_1B' = Z_B - Z_A$, то есть разности высот (разности координат Z). Длина гипотенузы A_1B' равна натуральной величине отрезка AB, а угол $\alpha = B_1A_1B'$ - величине угла наклона его к плоскости проекций $П_1$.

В этом то и сущность способа (метода) прямоугольного треугольника.

Точно так же определены натуральная величина и угол наклона к $П_1$ отрезка прямой на рисунке 14,*а*, а на рисунке 14,*б* показано аналогичное решение, когда натуральная величина определена на фронтальной плоскости проекций. В этом случае угол β определяет угол наклона отрезка прямой к фронтальной плоскости проекций $П_2$.



а) *б)*

Рис. 14. Решения на плоскостях проекций $П_1$ и $П_2$

Если $\Delta Z = Z_B - Z_A$, то $\Delta Y = Y_A - Y_B$ – разность координат Y.

3.2. Решения задач с применением способа прямоугольного треугольника

Задача 1: Определить графически расстояние между двумя точками отрезка прямой A и B (рис. 15).

Построение: Расстояние между двумя точками прямой равнозначно действительной величине отрезка, концами которого и являются эти точки. Применение способа прямоугольного треугольника – это один из вариантов решения задачи. Результат достигнут путем построения прямоугольных треугольников $\Delta\ B_0B_1A_1$ или $\Delta\ A_0A_2B_2$. $|A_0B_2| = |B_0A_1|$ - расстояние между двумя точками отрезка прямой A и B, что является и истинной величиной отрезка AB.

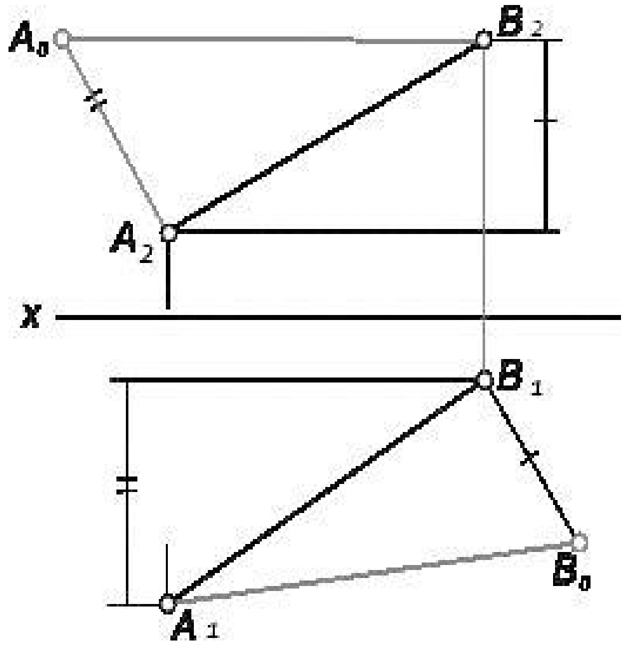


Рис. 15. Расстояние между двумя точками отрезка

Задача 2: Найти расстояние между двумя точками прямой A и B.

Построение: Задача такая же, как и на рисунке 15, но на рисунке 16 показан другой вариант ее решения. Ответ: $|A_1B_0| = 30$ мм - расстояние между двумя точками прямой A и B.

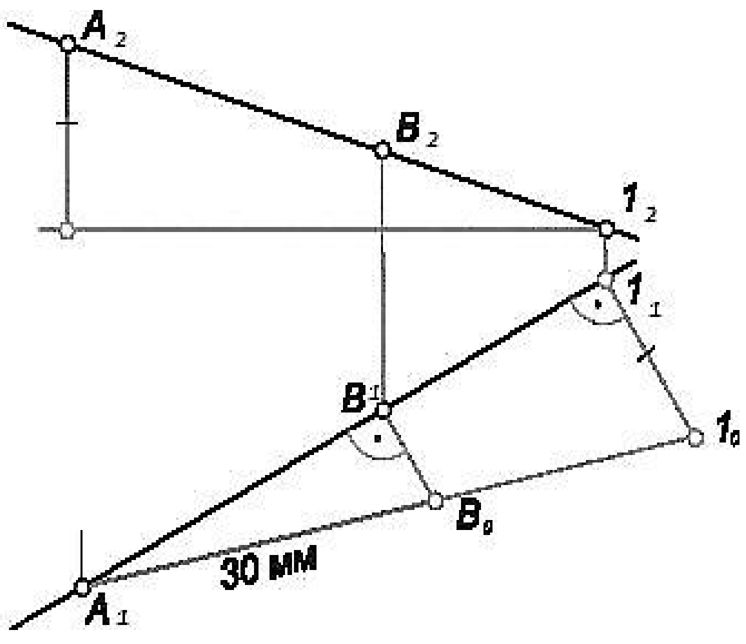


Рис. 16. Расстояние между двумя точками прямой

3.3. Контрольные вопросы для самоподготовки

1. Как определить натуральную величину отрезка прямой общего положения?

2. Как определить углы наклона прямой общего положения к плоскостям проекции?

3. В чем суть способа прямоугольного треугольника?

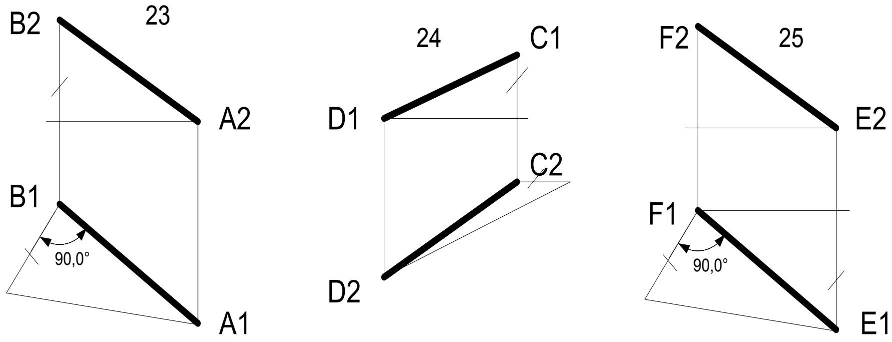
4. В каких случаях возможно применение способа прямоугольного треугольника?

5. Каков алгоритм определения натуральной величины отрезка способом прямоугольного треугольника?

3.4. Тестовые задания

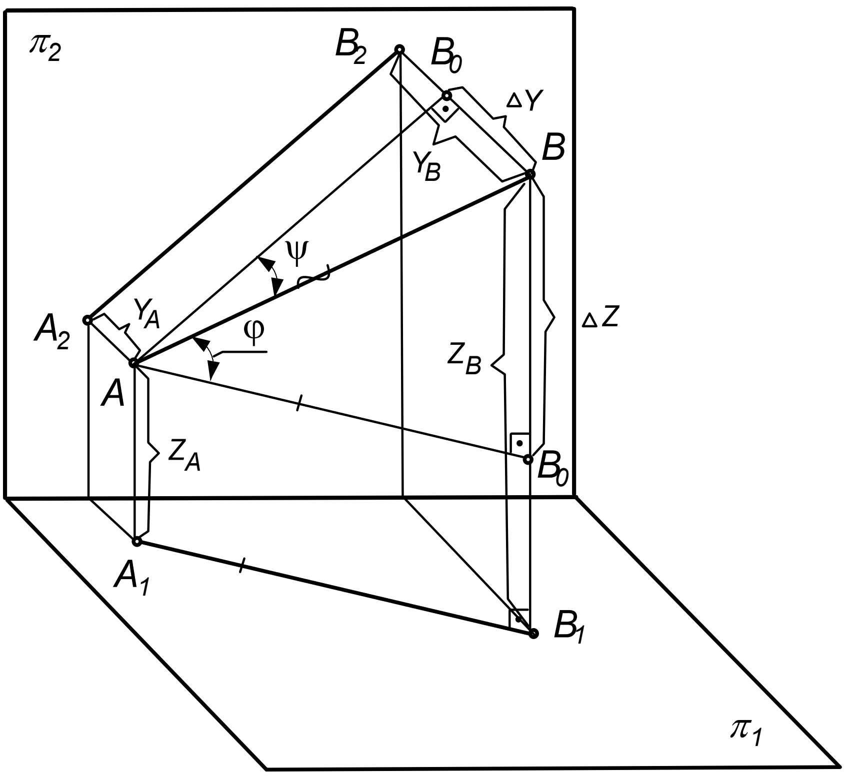
1. Натуральная величина отрезка прямой равна гипотенузе прямоугольного треугольника, в котором один катет равен проекции отрезка, а другой - разности расстояний концов отрезка от плоскости проекций, называется:___.

2. Истинная величина отрезка верно определена на рисунке:____.

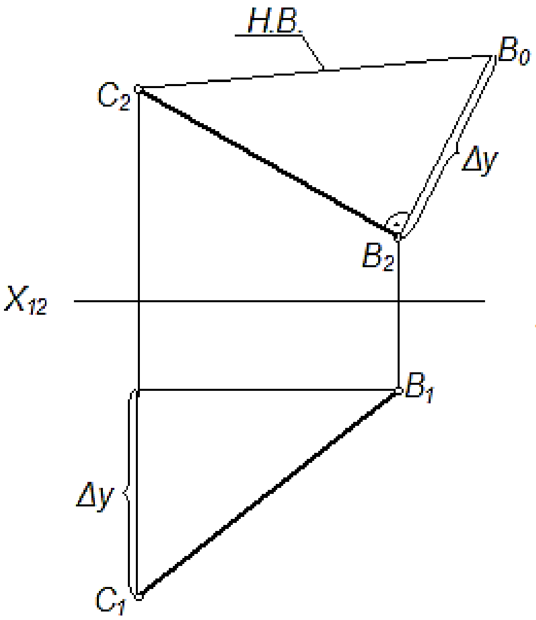


а) *б)* *в)*

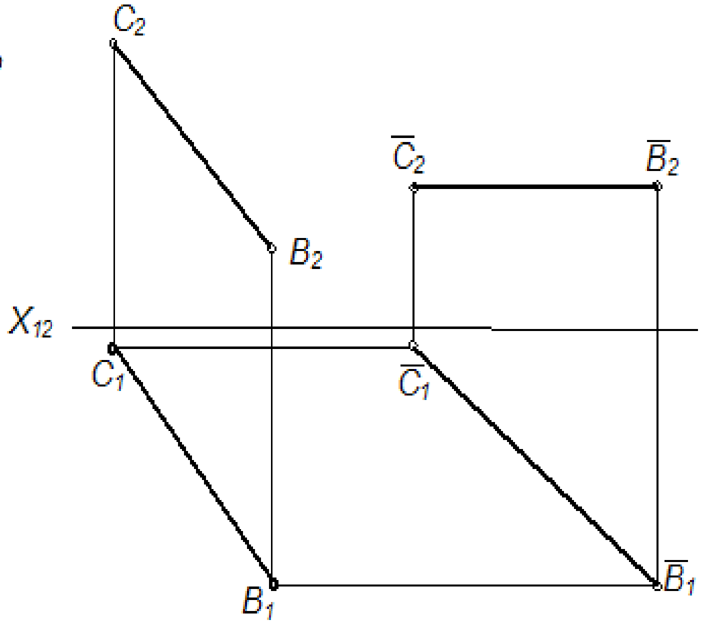
3. На наглядном чертеже угол φ является углом наклона отрезка прямой AB к ______________________________.



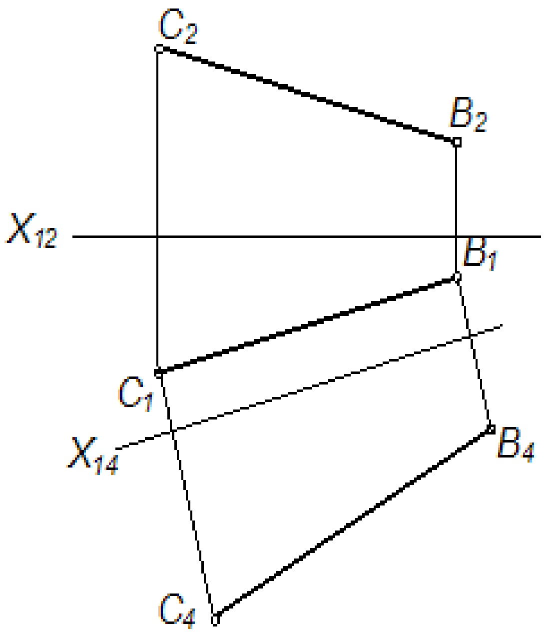
4. Натуральная величина отрезка прямой общего положения способом прямоугольного треугольника найдена на чертеже:___________.



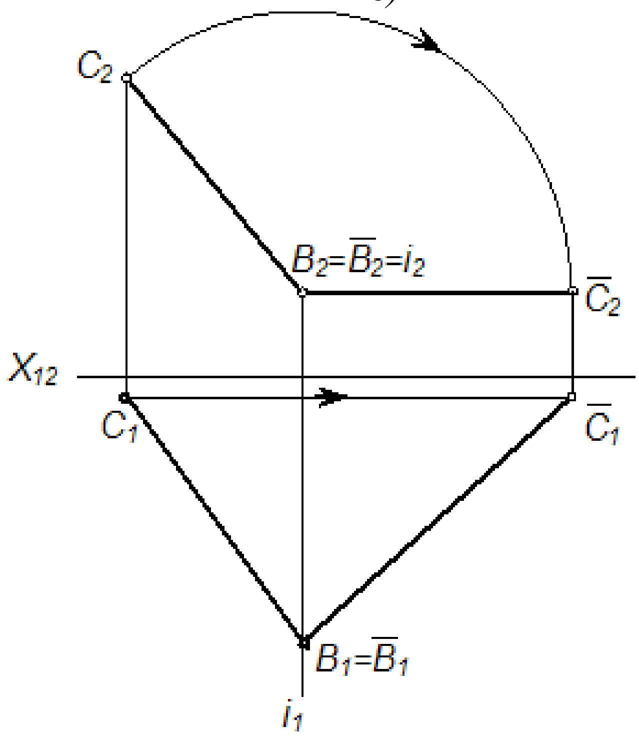
а)



б)

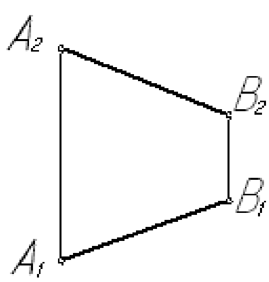


в)



г)

5. Определить натуральную величину отрезка *AB* способом прямоугольного треугольника:

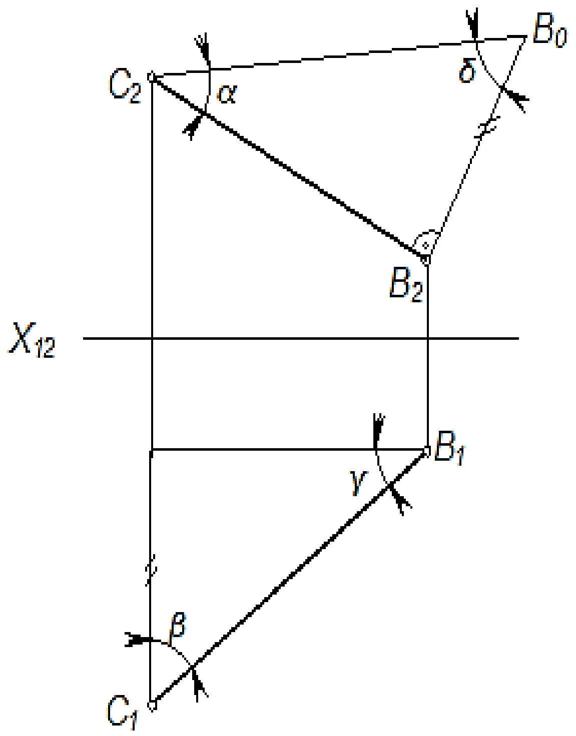


6. На эпюре $[B_0B_2]$ является ______________ прямоугольного треугольника.

а) гипотенузой

б) горизонтальным катетом

в) разностью координат



7. Угол α – это угол наклона отрезка прямой к плоскости проекций ________; угол β – угол наклона отрезка прямой к плоскости проекций _______; угол γ – угол наклона отрезка прямой к плоскости проекций ________; угол δ – угол наклона отрезка прямой к плоскости проекций _________.

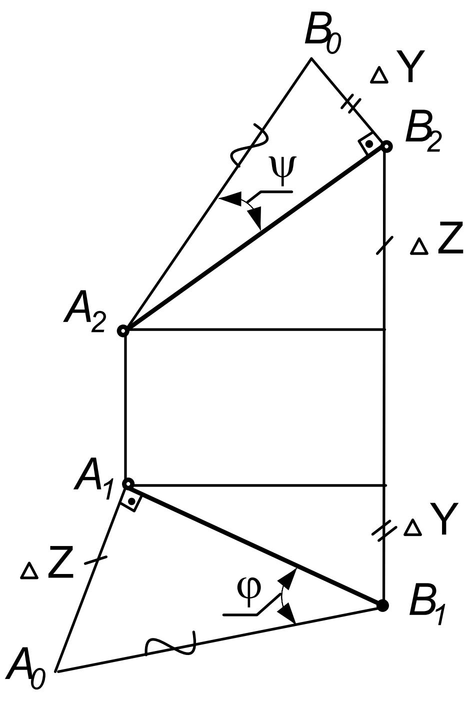
8. На эпюре натуральной величиной отрезка является проекция: _____.

а) A_2B_2 *б)* A_1B_1 *в)* A_2B_0 *г)* A_0A_1

9. ΔZ на эпюре расшифровывается как ___________________________.

10. На эпюре ΔY расшифровывается как __________________________.

11. На эпюре $[A_2B_0]$ является ____________________ прямоугольного треугольника.



12. Угол ψ на эпюре – это угол наклона отрезка прямой к плоскости проекций: _____.

а) π_0 *б)* π_1 *в)* π_2 *г)* π_3

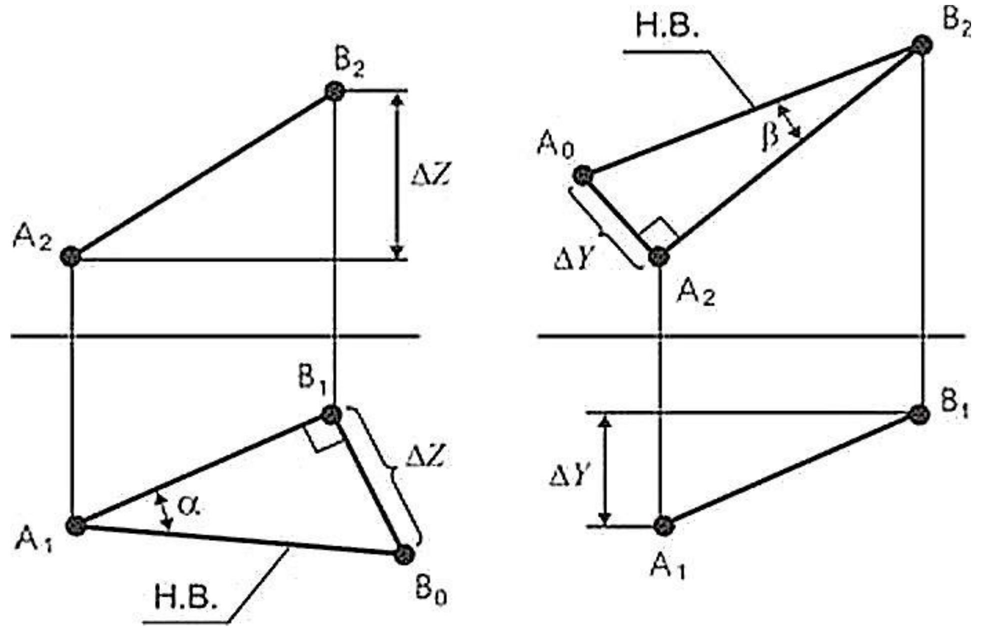
13. Угол φ на эпюре – это угол наклона отрезка прямой к плоскости проекций: _____.

а) π_0 *б)* π_1 *в)* π_2 *г)* π_3

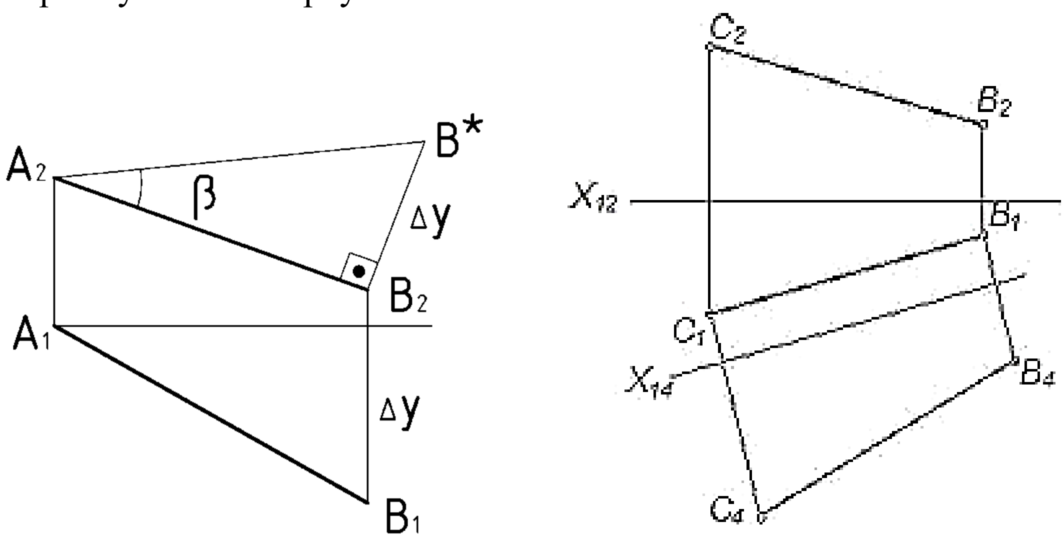
14. На эпюре ___ - истинное расстояние между двумя точками прямой A и B.

а) $|A_0B_1|$ *б)* $|A_1B_1|$ *в)* $|A_2B_2|$ *г)* $|A_0A_1|$

15. На рисунке «Н.В.» обозначает ________________________ отрезка AB прямой общего положения.



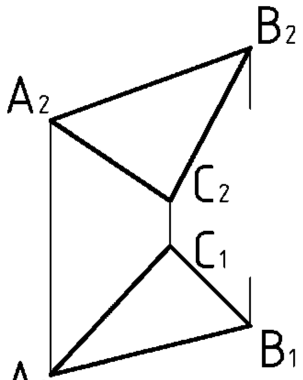
16. На рисунке ______ показано определение натуральной величины способом прямоугольного треугольника.



а) б)

17. Алгоритм определения натуральной величины отрезка способом прямоугольного треугольника следующий:______________________________
_____________________.

18. Определить способом прямоугольного треугольника натуральную величину каждой стороны треугольника, которая задает некую плоскость общего положения, и с помощью засечек на чертеже построить треугольник в натуральную величину ABC.



РАЗДЕЛ № 4. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ

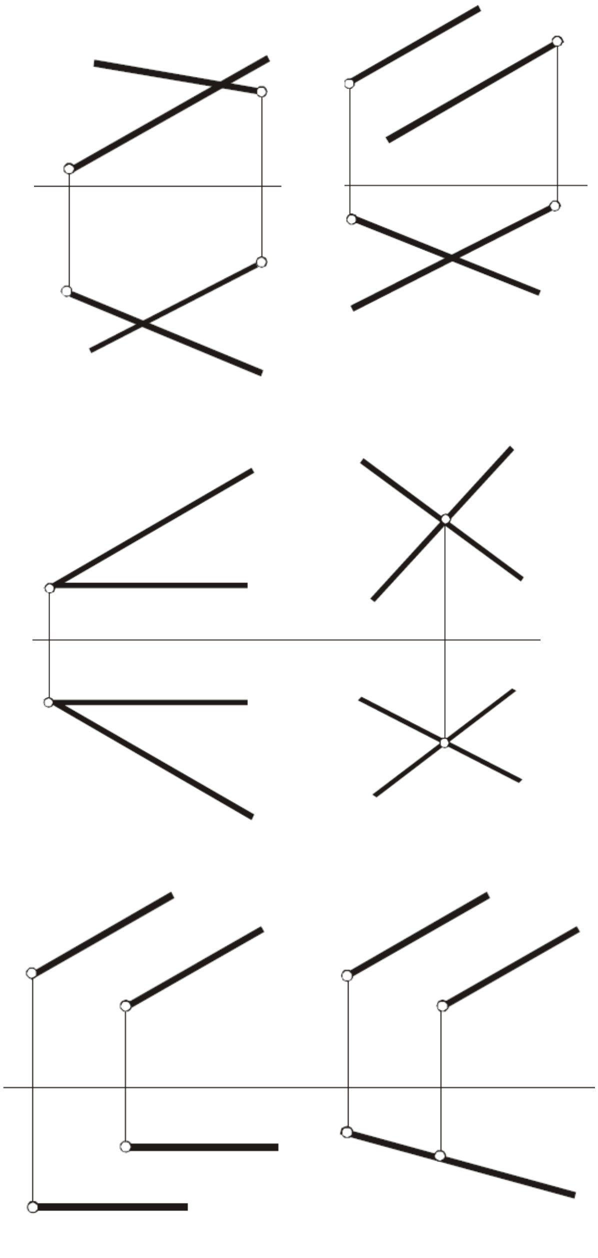
Возможны четыре различных случая расположения двух прямых в пространстве:

– прямые скрещивающиеся, они не лежат в одной плоскости (рис. 17,*а*);

– прямые пересекаются, они лежат в одной плоскости и имеют одну общую точку (рис. 17,*б*);

– прямые параллельные, они лежат в одной плоскости и не пересекаются (рис. 17,*в*);

– прямые совпадают, они имеют бесконечно много общих точек.



а)

б)

в)

Рис. 17. Расположения двух прямых в пространстве

4.1. Скрещивающиеся прямые

Если прямые не параллельны и не пересекаются, то они называются скрещивающимися прямыми. Эти прямые не имеют общей точки. Через скрещивающиеся прямые невозможно провести плоскость, так как если одна прямая будет принадлежать плоскости, то другая будет пересекать эту плоскость.

На рисунке 18 изображены две скрещивающиеся прямые общего положения m и l. Хотя одноименные проекции и пересекаются между собой, но точки их пересечения не лежат на одной линии связи. У этих точек горизонтальные или фронтальные проекции совпадают, а другие нет.

Точки, у которых совпадают одни проекции, а другие проекции не совпадают, называются конкурирующими. На эпюре конкурируют между собой две пары точек - *1* и *2*, *3* и *4*.

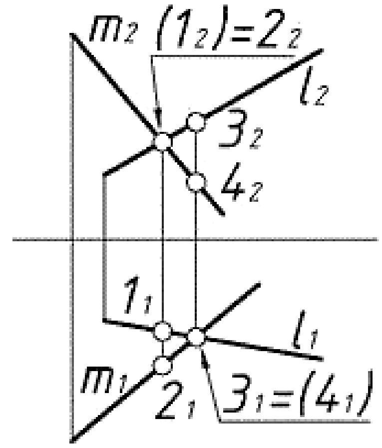


Рис. 18. Скрещивающиеся прямые

4.2. Пересекающиеся прямые

Прямые называются пересекающимися, если они имеют единственную общую точку и всегда лежат в одной плоскости.

Если прямые пересекаются, то их одноименные проекции пересекаются между собой в точке, которая является проекцией точки пересечения этих прямых: $c \cap d = 1$ (рис. 19).

Согласно свойству чертежа Монжа, обе проекции (1_1 и 1_2) точки пересечения *1* лежат на одной линии связи $1_1 1_2$ данного установленного направления.

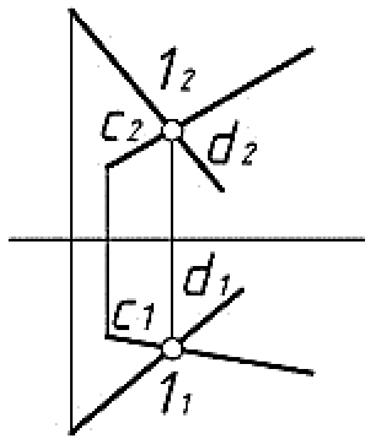


Рис. 19. Пересекающиеся прямые

4.3. Параллельные прямые

Прямые называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются, сколько бы их не продолжали. Однако, существует и такое определение: параллельные прямые - это прямые, пересекающиеся в несобственной точке.

Если в пространстве прямые параллельны, то их одноименные проекции параллельны между собой. И для того чтобы сделать вывод о взаимной параллельности двух прямых общего положения, достаточно параллельности их одноименных проекций на двух плоскостях проекций. На эпюре у прямых общего положения a и b горизонтальные и фронтальные проекции попарно параллельны, следовательно, эти прямые параллельны между собой (рис. 20).

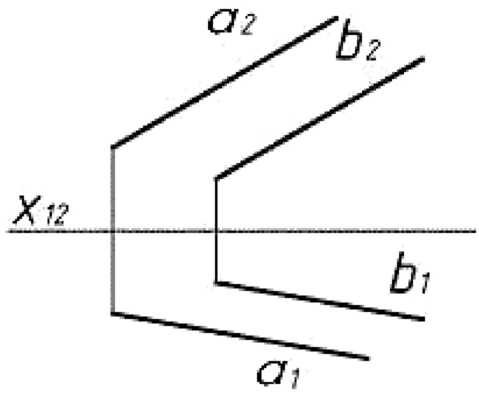
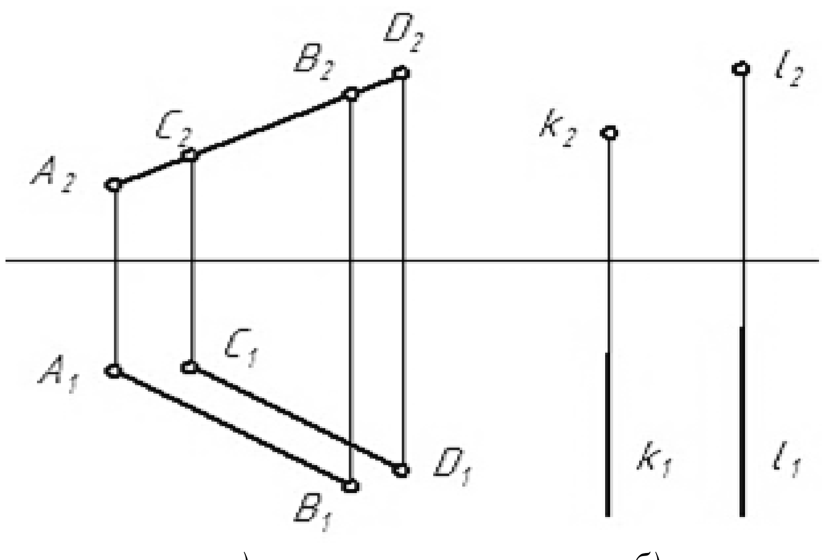


Рис. 20. Параллельные прямые

Если прямые в пространстве параллельны, то их ортогональные проекции взаимно параллельны (рис. 20), или сливаются (рис. 21,*а*), или представляют собой точки, на одной из плоскостей проекций (рис. 21,*б*).



а) *б)*

Рис. 21. Случаи параллельных прямых

4.4. Определение положения двух прямых

Выяснили выше условие параллельности для прямых общего положения. *Если одноименные проекции прямых общего положения параллельны в системе двух плоскостей проекций, то прямые параллельны и в пространстве.*

Однако особый случай представляют собой прямые уровня. Для оценки их взаимного положения необходимо обратиться к проекциям прямых именно на той плоскости проекций, которой они параллельны. Так, горизонтальные и фронтальные проекции профильных прямых *EF* и *GK* попарно параллельны (рис. 22,*а*), но эти прямые не параллельны, что следует из взаимного положения их профильных проекций.

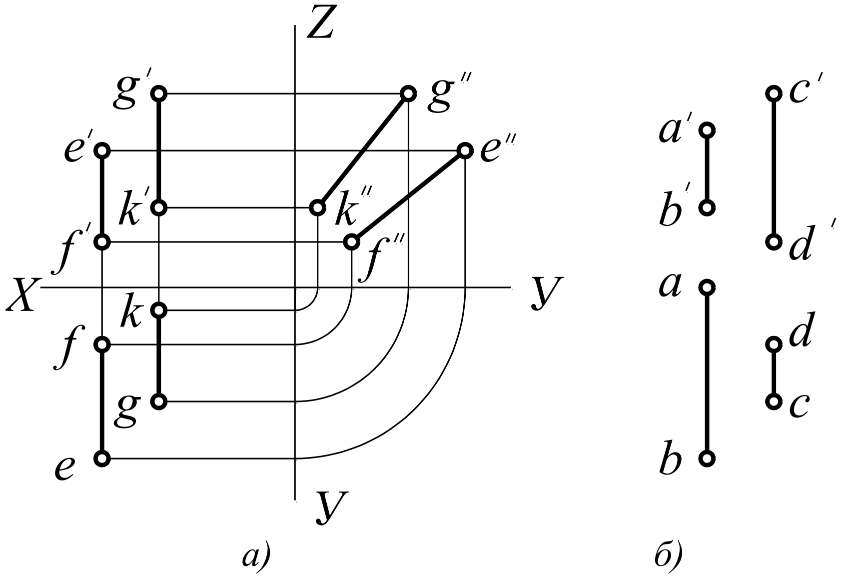


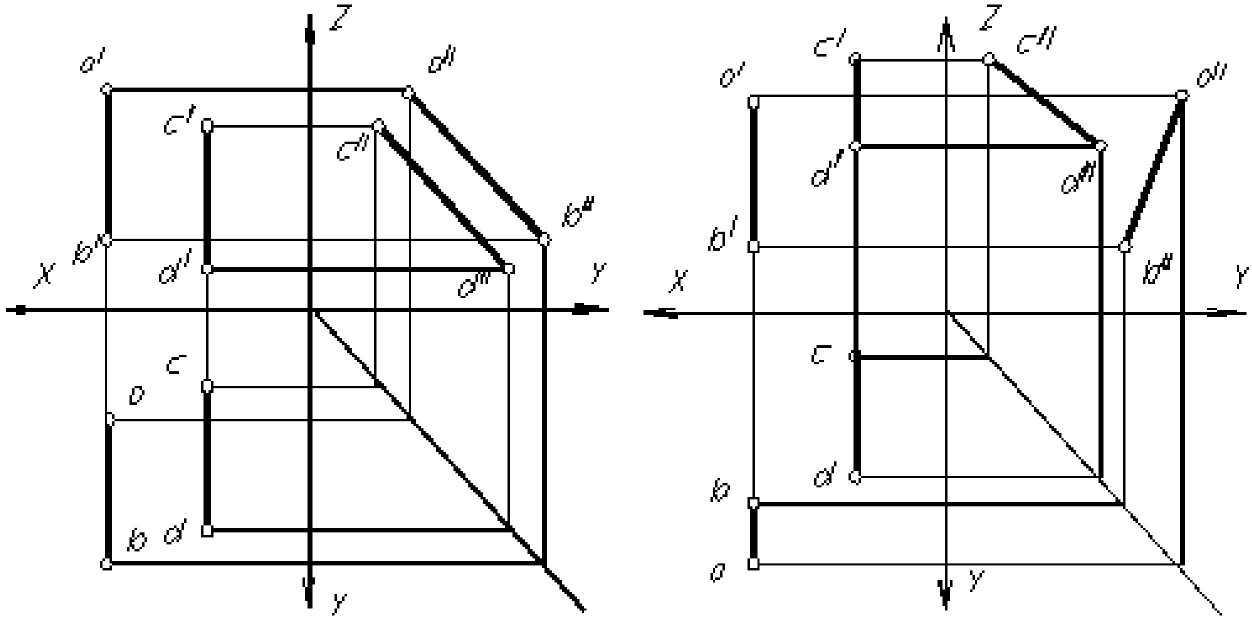
Рис. 22. Определение положения прямых

На рисунке 22,*б* показан случай, когда можно установить, что профильные прямые *АВ* и *СД* не параллельны между собой, даже не прибегая к построению третьей проекции. Достаточно обратить внимание на чередование буквенных обозначений и изменение величины проекций отрезков.

Значит, для прямых частного положения справедливо следующее высказывание. Если одноименные проекции прямых параллельны одной из осей проекций, то прямые в пространстве будут параллельны только при условии параллельности одноименных проекций на той плоскости проекций, которой они параллельны. Однозначно, *если параллельность одноименных проекций соблюдается на трех плоскостях проекций, то прямые в пространстве параллельны*. На рисунке 23,*а* приведены две параллельные прямые, а на рисунке 23,*б* две пересекающиеся прямые. Все прямые на рисунках 22 и 23 профильные.

Чтобы определить на эпюре (комплексном чертеже), пересекаются ли данные прямые в пространстве, достаточно провести линию связи из одной точки пересечения проекций к другой. Если проекции точки пересечения прямых будут лежать на одной линии связи, то прямые пересекаются (рис. 19).

Если же одна из прямых *b* параллельна, например, профильной плоскости проекций, то для определения положения точки пересечения прямых в пространстве *K* необходимо построить и третью (профильную) проекцию (рис. 24).



а) *б)*

Рис. 23. Определение положения профильных прямых

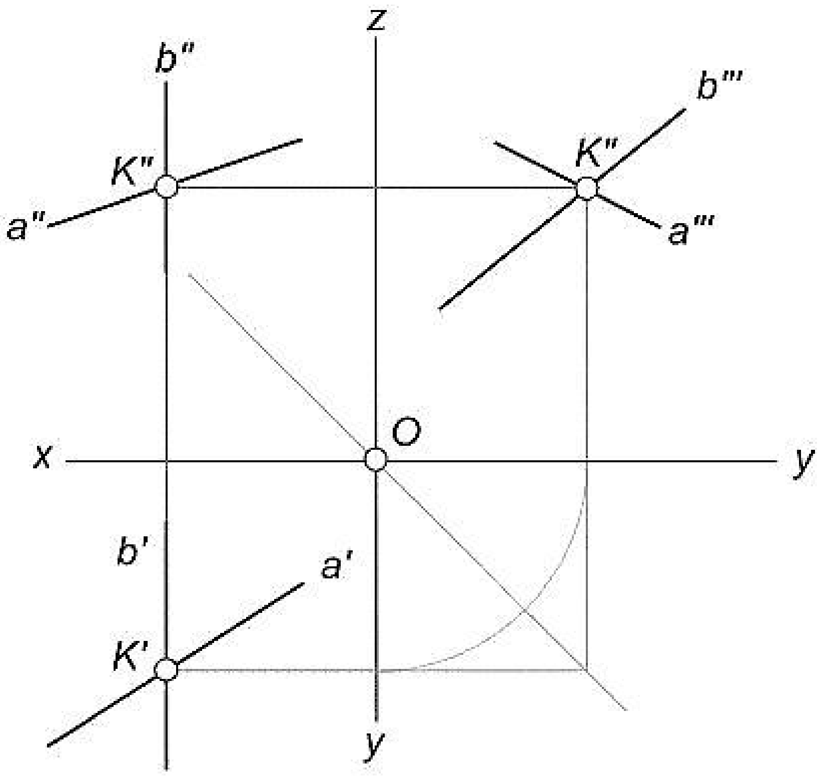


Рис. 24. Определение положения двух прямых

4.5. Контрольные вопросы для самоподготовки

1. Как изображаются на чертеже параллельные, пересекающиеся и скрещивающиеся прямые линии?

2. Как следует истолковывать точку пересечения проекций двух скрещивающихся прямых?

3. Могут ли проекции скрещивающихся прямых быть параллельны?

4. Могут ли проекции двух пересекающихся прямых изображаться одной линией?

5. Имеют ли две скрещивающиеся прямые общую точку, а их проекции?

6. Какие точки являются конкурирующими?

7. Определение параллельных прямых.

8. Какова особенность пересекающихся прямых?

9. Можно ли провести одну плоскость через скрещивающиеся прямые?

10. Каков графический признак скрещивающихся прямых?

11. Как располагаются на чертеже проекции точки пересечения двух пересекающихся прямых?

12. Каковы условия полного совпадения двух прямых в пространстве?

4.6. Тестовые задания

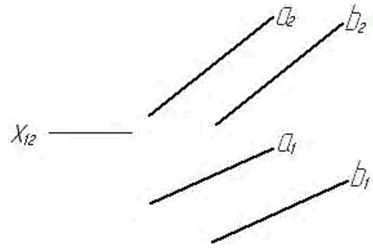
1. Две прямые в пространстве могут занимать положение:_____________ ______________________.

2. Если прямые пересекаются, то существует __________________ точка пересечения.

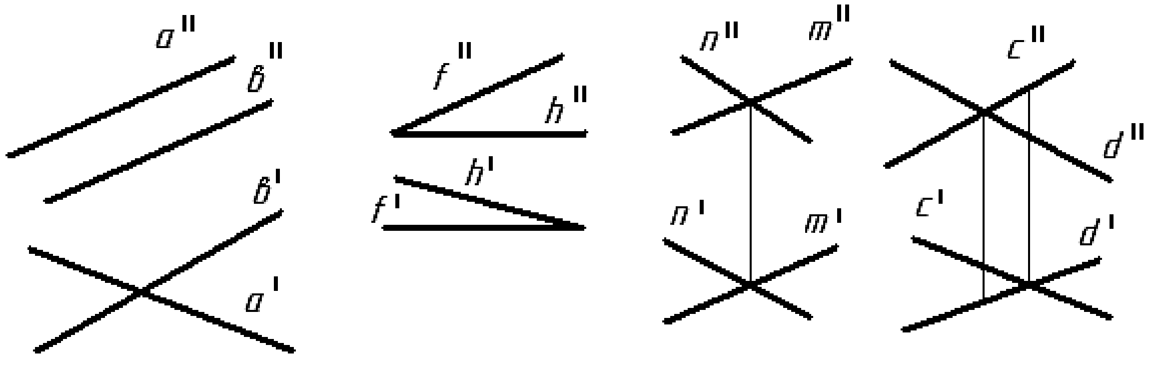
3. Если одноименные проекции прямых общего положения параллельны в системе _____ плоскостей проекций, то прямые параллельны и в пространстве.

4. Прямые a и b в пространстве: ___________.

а) пересекаются
б) параллельны
в) скрещиваются



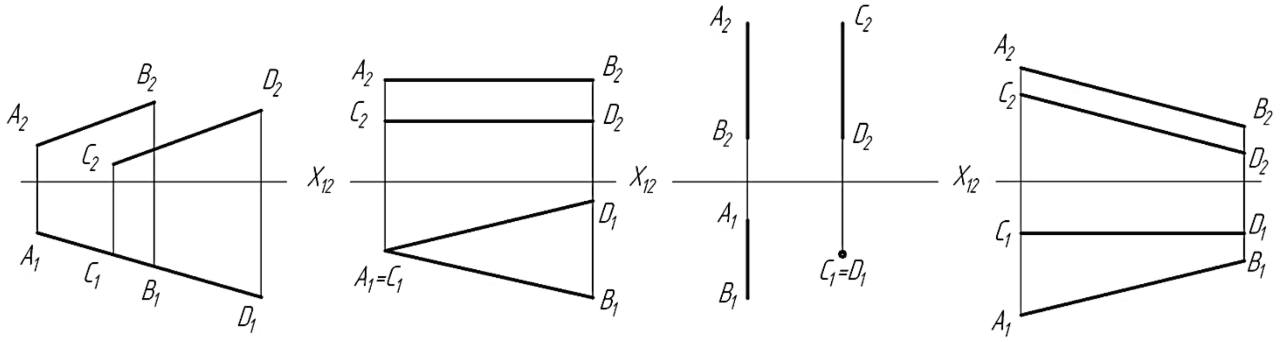
5. Чертеж пересекающихся прямых изображен на рисунке: ____.



а) б) в) г)

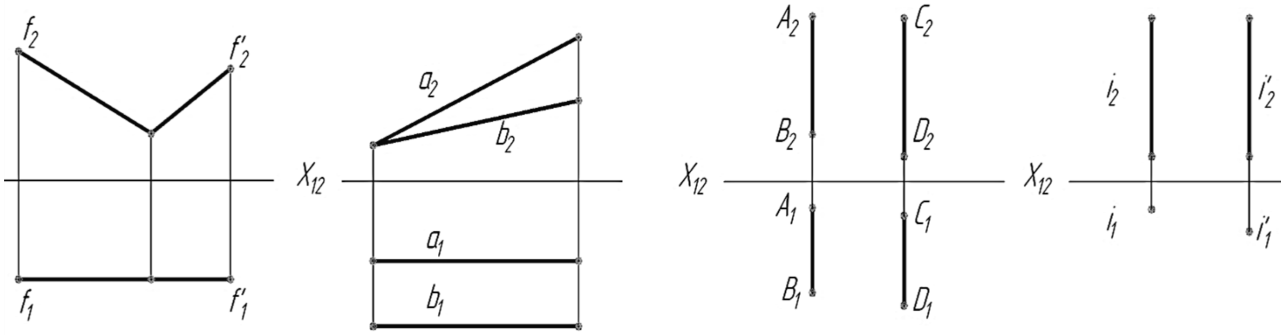
6. Графический признак скрещивающихся прямых: ___________________ одноименных проекций прямых никогда не находятся на одной линии связи.

7. Параллельные прямые расположены на эпюре: ____.



а) *б)* *в)* *г)*

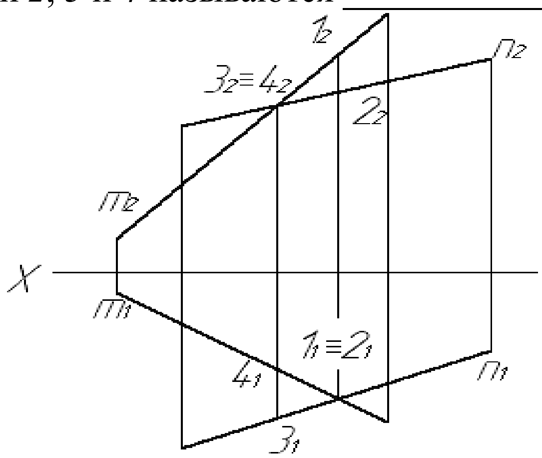
8. Скрещивающиеся прямые расположены на рисунке: ____.



а) *б)* *в)* *г)*

9. Если параллельность ____________ проекций соблюдается на трех плоскостях проекций, то прямые частного положения в пространстве параллельны.

10. На эпюре точки *1* и *2*, *3* и *4* называются ____________________.



11. Точки *1*, *2*, *3*, *4*, принадлежащие двум скрещивающимся прямым m и n, служат для определения ________________ этих прямых.

12. Через скрещивающиеся прямые m и n _____________ провести одну плоскость.

13. Двумя параллельными прямыми можно задать ________плоскость(и).

а) две *б) одну* *в) три* *г) четыре*

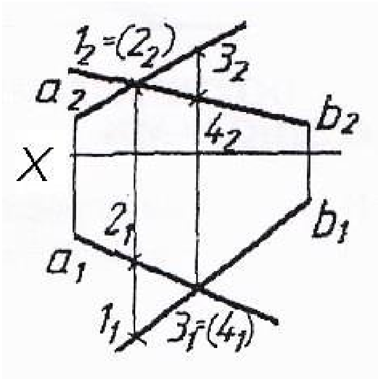
14. Использование пересекающихся прямых на чертежах относят к способам ______________ плоскостей.

15. Оценить взаимное положение двух прямых уровня поможет исследование отображений прямых именно на той плоскости проекций, которой они:______.

а) параллельны *б) перпендикулярны*

16. Для определения на чертеже пересечения данных прямых в пространстве достаточно провести _____________ из одной точки пересечения проекций к другой.

17. Порядок доказательства скрещивания прямых *a* и *b*: ______________________________ ________________.

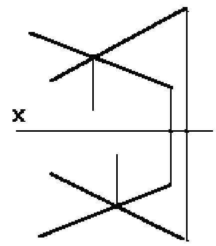


18. Установить соответствие между текстом и рисунками:

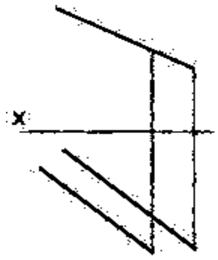
1) *Параллельные прямые*

2) *Пересекающиеся прямые*

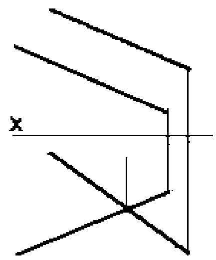
а)



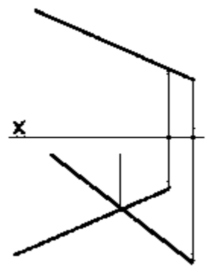
б)



в)



г)



РАЗДЕЛ № 5. О ПРОЕКЦИЯХ ПЛОСКИХ УГЛОВ
5.1. Свойства проекций плоских углов

Свойства ортогональных проекций плоских углов:

1. *Если стороны угла не параллельны плоскости проекции, то угол проецируется на эту плоскость с искажением* (рис. 25).

Пусть стороны AB и BC угла ABC равнонаклонены к плоскости α. Угол $AB^{\alpha}C$ – это проекция $\angle ABC$ на плоскость α. Совместим $\angle ABC$ с плоскостью α путем вращения вокруг отрезка прямой AC ($AC \subset \alpha$). В этом случае угол $AB^{\alpha}C$ окажется внутри угла AB_0C, а их вершины B^{α} и B_O на одной прямой ($DB_O \perp AC$). Следовательно, $\angle AB^{\alpha}C \neq \angle AB_OC$

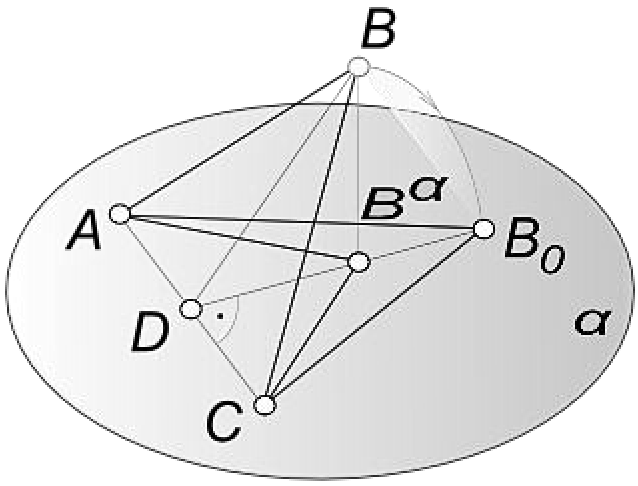


Рис. 25. Проецирование угла

2. *Если хотя бы одна сторона тупого, прямого или острого угла параллельна плоскости проекции, то проекцией угла на эту плоскость будет угол с тем же названием, что и сам угол (тупой, прямой или острый).*

На рисунке 26 видно, что $[AB] \parallel \alpha$. Строим тупой $\angle ABC$ и острый $\angle ABD$. Сторону BD угла $\angle ABD$ проводим так, чтобы $[BD]$ принадлежал плоскости, определяемой точками A, B и C: $[BD] \subset (A, B, C)$. Проводим в плоскости (A, B, C), $[BE] \perp [AB]$. Так как $\angle ABE$ прямой, а сторона угла $[AB] \parallel \alpha$, то проекция этого угла на плоскость α также будет равна 90°.

$[(\angle ABC = 90°)] \wedge [AB] \parallel \alpha \Rightarrow \angle A^{\alpha}B^{\alpha}E = 90°$

Из чертежа видно, что $\angle A^{\alpha}B^{\alpha}D < 90°$, $\angle A^{\alpha}B^{\alpha}C > 90°$. при этом:

а) проекция острого угла будет меньше проецируемого угла.

б) прямой угол проецируется без искажений.

в) проекция тупого угла больше проецируемого угла.

3. *Если плоскость, в которой расположен некоторый угол, перпендикулярна к плоскости проекций, то он проецируется на эту плоскость проекций в виде прямой линии.*

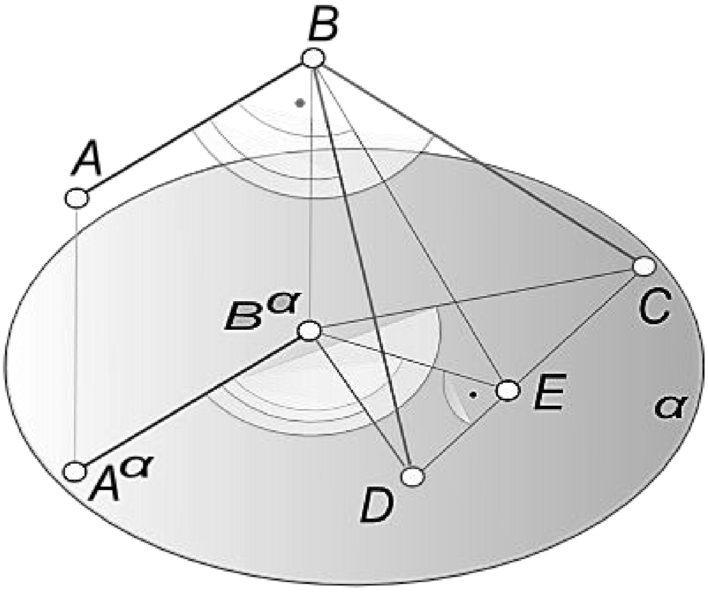


Рис. 26. Проецирование углов на плоскость α

4. *Если обе стороны любого угла параллельны плоскости проекции, то угол проецируется на эту плоскость без искажения.*

5. *Проекции острого и тупого углов могут проецироваться на плоскость проекции без искажения не только при условии параллельности сторон угла плоскости проекций.*

Из чертежа видно (рис. 27), все углы с вершинами, лежащими на прямой (MN), стороны которых расположены в проецирующих плоскостях β и γ, проецируются в угол KNL. При этом все проецируемые углы BAD и BAC могут изменяться в пределах от 0° до 180°, среди них будет и угол, равный $\angle KNL$.

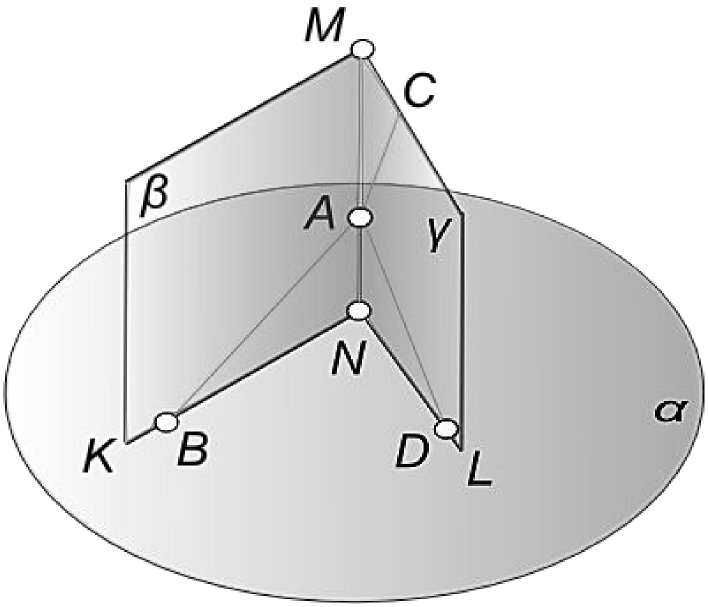


Рис. 27. Проецирование углов со сторонами в проецирующих плоскостях

5.2. Теоремы прямого угла

Различные трактовки теоремы прямого угла:

1. Прямой угол проецируется без искажения, если одна сторона угла параллельна плоскости проекций, а вторая не перпендикулярна к ней.

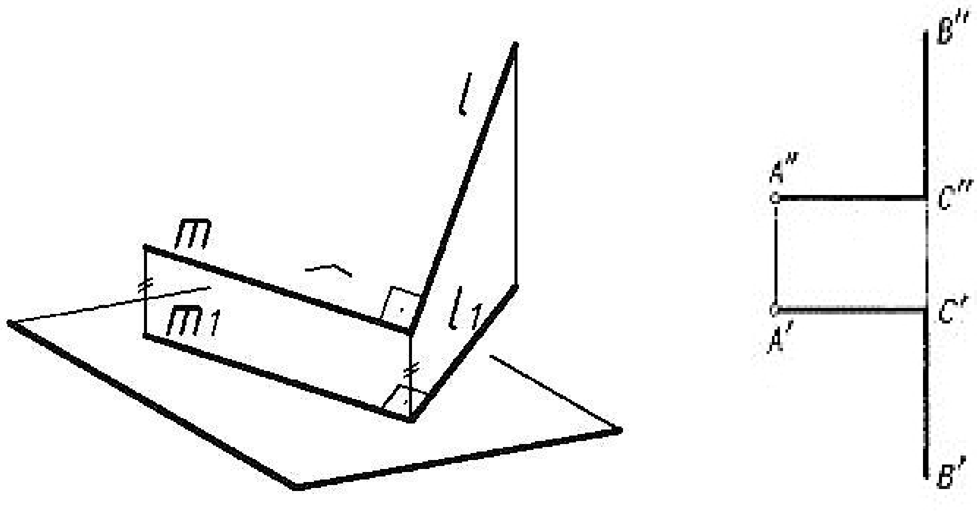
2. Если плоскость прямого угла не перпендикулярна к плоскости проекций и хотя бы одна его сторона параллельна этой плоскости, то прямой угол проецируется на нее в виде прямого же угла.

Теореме о проецировании прямого угла соответствуют две обратные теоремы:

1. Если проекция плоского угла представляет собой прямой угол, то проецируемый угол будет прямым лишь при условии, что, по крайней мере, одна из сторон этого угла параллельна плоскости проекций.

2. Если проекция некоторого угла, у которого одна сторона параллельна плоскости проекций, представляет собой прямой угол, то проецируемый угол тоже прямой.

Одна сторона *m* прямого угла параллельна плоскости (рис. 28,*а*), другая сторона *l* не параллельна и не перпендикулярна оной. Согласно теореме прямого угла, данный угол проецируется на плоскость прямым.



а) *б)*

Рис. 28. Проецирование прямого угла

На рисунке 28,*б* показан случай, когда проекции прямого угла представляют собой прямые углы на двух плоскостях проекций. Это бывает, когда одна сторона прямого угла перпендикулярна к третьей плоскости проекций. Тогда другая его сторона параллельна этой плоскости. Сторона *AC* перпендикулярна к профильной плоскости проекций π_3, а сторона *BC* параллельна π_3.

Следующий пример объединяет в себе две темы начертательной геометрии, а именно «Пересекающиеся прямые» и «Терема прямого угла».

Пример: Построение проекций перпендикуляра, опущенного из точки С на горизонталь *AB* (рис. 29).

Решение: Горизонтальная проекция C_1D_1 искомого перпендикуляра составит прямой угол с горизонтальной проекцией A_1B_1 заданной прямой.

Фронтальную проекцию D_2 точки D найдем на A_2B_2 и соединим ее с C_2. Искомыми проекциями перпендикуляра будут C_1D_1 и C_2D_2.

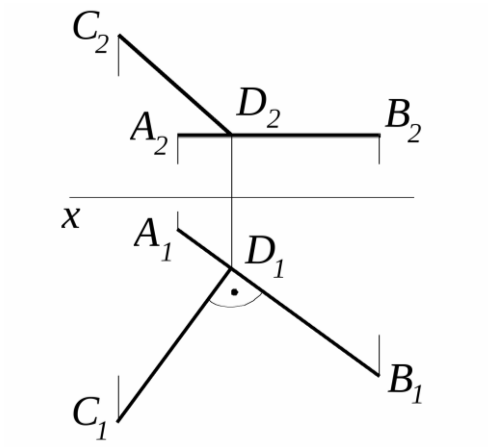


Рис. 29. Перпендикуляр к прямой

5.3. Контрольные вопросы для самоподготовки

1. Сформулируйте теорему о проецировании прямого угла?
2. Докажите теорему о прямом угле.
3. В каком случае проекции прямого угла на двух плоскостях проекций представляют собой прямые углы?
4. В каком случае прямой угол проецируется без искажения?
5. В каком случае любой угол проецируется без искажения?
6. При каком условии острый угол проецируется на плоскость острым?

5.4. Тестовые задания

1. Если одна из сторон острого угла параллельна плоскости проекции, то угол проецируется в ____________________.

2. Если одна из сторон тупого угла параллельна плоскости проекции, то угол проецируется в ______________________.

3. Сторона *CD* прямого угла *ABC* занимает в пространстве __________ положение.

4. Сторона *CD* прямого угла *ABC* является __________ .

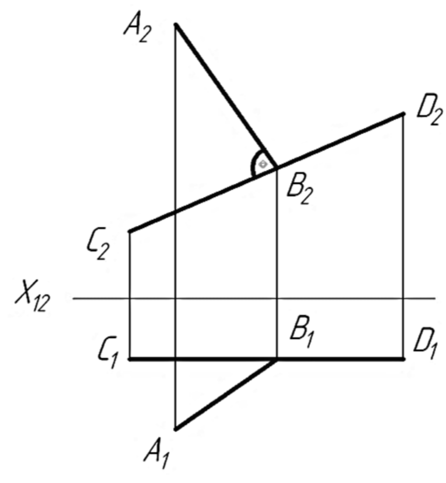
а) фронталью *б) горизонталью*

в) прямой общего положения

5. Сторона *CD* прямого угла *ABC* __________ плоскости проекции π_2.

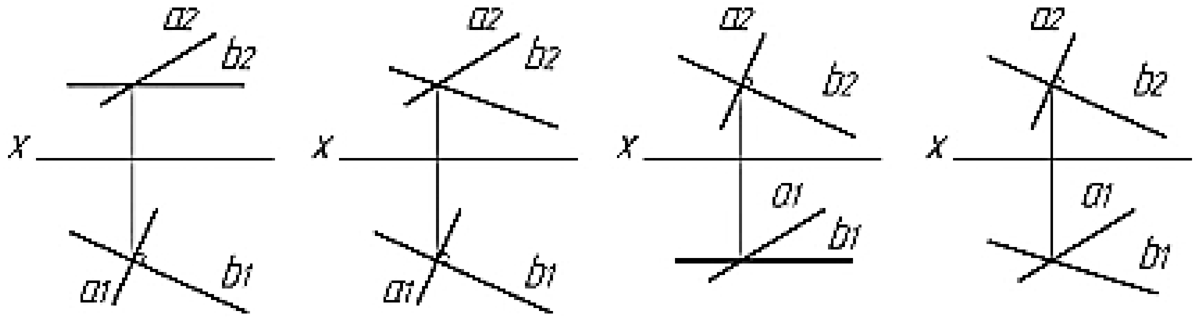
6. Угол *ABC* является _______.

а) острым *б) прямым* *в) тупым*



7. Если проекция плоского угла представляет собой прямой угол, то проецируемый угол будет прямым лишь при условии, что одна из сторон этого угла ___________ плоскости проекций.

8. Проекции прямого угла приведены на эпюрах:_______.



а) б) в) г)

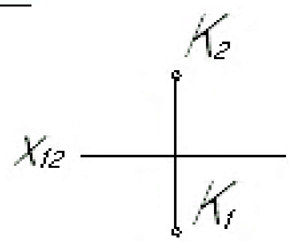
9. Теореме о проецировании прямого угла соответствуют две обратные теоремы:

1) Если проекция плоского угла представляет собой прямой угол, то проецируемый угол будет прямым лишь при условии, что, по крайней мере, одна из сторон этого угла _______________________.

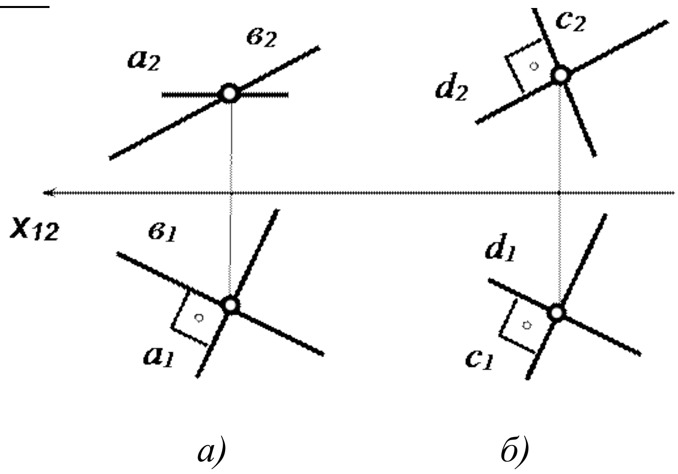
2) Если проекция некоторого угла, у которого одна сторона параллельна плоскости проекций, представляет собой прямой угол, то проецируемый угол __________________.

10. Две взаимно перпендикулярные прямые сохраняют свою перпендикулярность в горизонтальной, фронтальной или профильной ______________, когда хотя бы одна из этих прямых соответственно является _____________, фронталью или __________________.

11. Через точку K (K_1, K_2) провести горизонталь h (h_1, h_2) под углом 30° к плоскости проекций $П_2$ и фронталь f (f_1, f_2) под углом 45° к плоскости проекций $П_1$.



12. Доказать на каком рисунке угол между двумя прямыми в пространстве 90°:___________________.



а) б)

РАЗДЕЛ № 6. СЛЕДЫ ПЛОСКОСТЕЙ

6.1. Следы плоскости общего положения

Следом плоскости называют линию пересечения плоскости с плоскостью проекций. В зависимости, от того с какой из плоскостей проекций пересекается данная плоскость, различают: горизонтальный, фронтальный и профильный следы плоскости. У плоскости общего положения три следа (рис. 30).

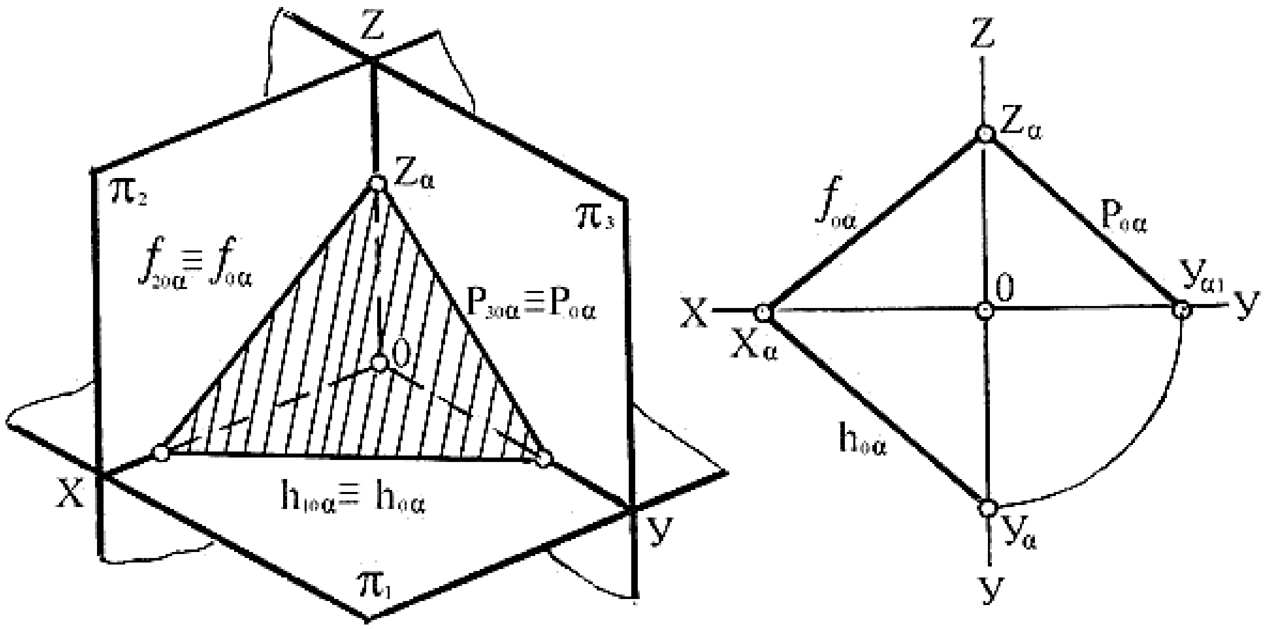


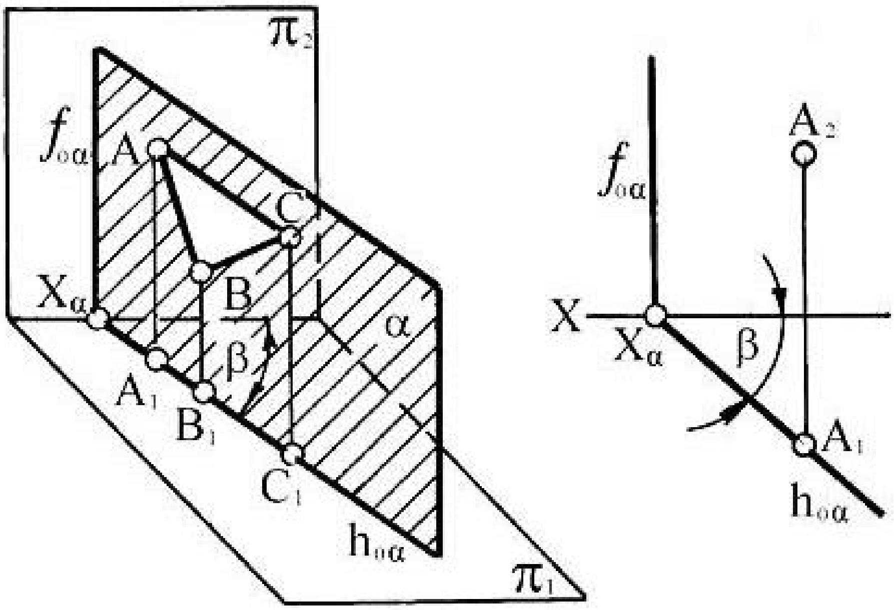
Рис. 30. Следы плоскости общего положения

Плоскость общего положения α пересекает каждую из осей x, y, z. Следы плоскости общего положения никогда не перпендикулярны к этим осям. Прямая $h_{o\alpha}$ является горизонтальным следом плоскости α, $f_{o\alpha}$ - фронтальным следом плоскости α, $P_{o\alpha}$ - профильным следом плоскости α. Каждая пара следов сходится в точке, которая называется точкой схода следов плоскости. В этих точках плоскость пересекает оси координат. Точки схода обозначаются X_α, Y_α, Z_α.

6.2. Следы плоскостей частного положений

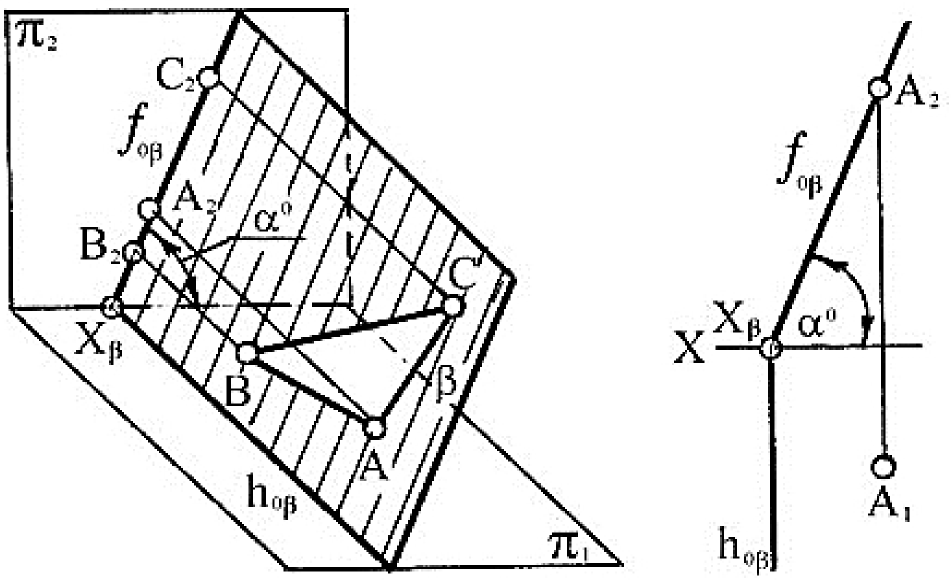
Плоскости частного положения рассмотрены в I части пособия. На рисунке 31 даны наглядный чертеж и эпюр горизонтально-проецирующей плоскости α: $h_{o\alpha}$ - горизонтальный след плоскости, $f_{o\alpha}$ - фронтальный след плоскости. Фронтальный след плоскости $f_{o\alpha}$ как линия пересечения плоскости α и плоскости проекций π_2 перпендикулярен к плоскости π_1 и к оси X. Горизонтальный след $h_{o\alpha}$ расположен произвольно. Угол β служит линейным углом двугранного между плоскостью α и плоскостью проекций π_2 , проецируется на плоскость π_1 без искажения своей величины.

Если в горизонтально-проецирующей плоскости расположена точка, например, точка A, то ее горизонтальная проекция A_1 должна быть на горизонтальном следе плоскости $h_{o\alpha}$. Это относится к любой системе точек, расположенных в горизонтально-проецирующей плоскости. Горизонтальный след плоскости можно рассматривать как горизонтальную проекцию плоскости.



а) *б)*

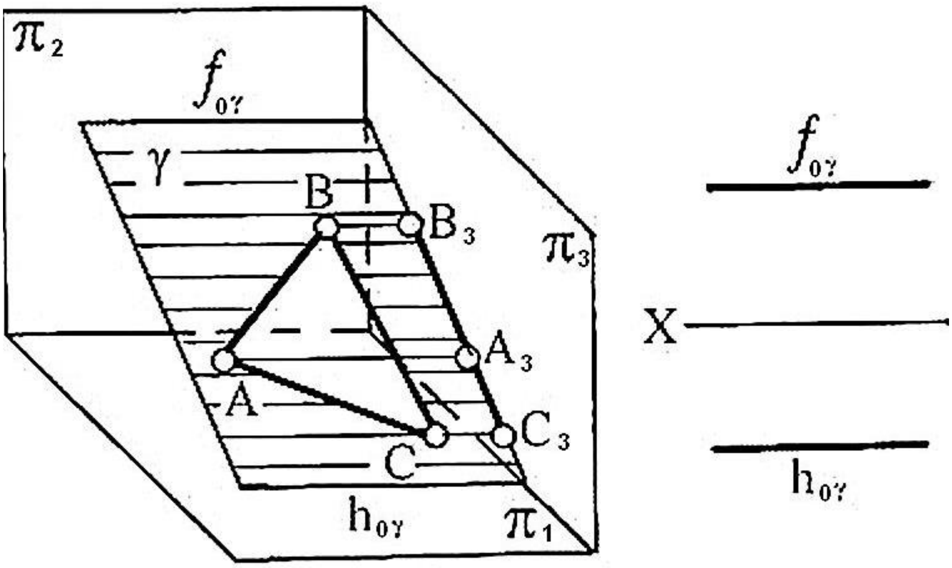
Рис. 31. Следы горизонтально-проецирующей плоскости



а) *б)*

Рис. 32. Следы фронтально-проецирующей плоскости

На рисунке 32 горизонтальный след фронтально-проецирующей плоскости $h_{0\beta}$ перпендикулярен к оси X, а фронтальный ее след $f_{0\beta}$ расположен произвольно. Если в фронтально-проецирующей плоскости расположена точка A, то ее фронтальная проекция A_2 должна быть на фронтальном следе плоскости $f_{0\beta}$. Это относится к любой системе точек. След $f_{0\beta}$ можно рассматривать как фронтальную проекцию плоскости. Угол α, образованный плоскостями β и π_1, проецируется на плоскость π_2 без искажения своей величины.



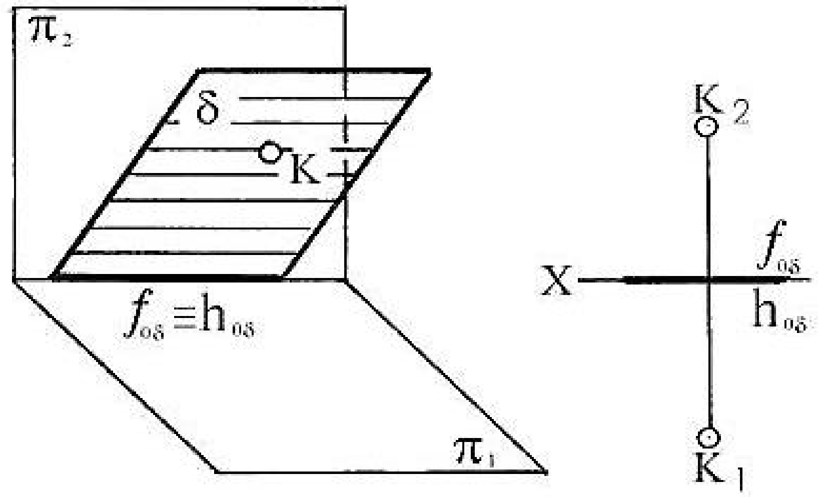
а) *б)*

Рис. 33. Следы профильно-проецирующей плоскости

На рисунке 33 горизонтальный $h_{0\gamma}$ и фронтальный $f_{0\gamma}$ следы профильно-проецирующей плоскости параллельны оси X. Профильная проекция любой точки, принадлежащей этой плоскости, совпадает с профильным следом ($B_3A_3C_3$), то есть профильные проекции любой фигуры, лежащей в этой плоскости, и самой плоскости есть прямая.

Плоскость, перпендикулярная к одной из плоскостей проекций, может, в частности, проходить через ось проекций. Такую плоскость дополнительно называют осевой плоскостью. Рассмотрим осевую профильно-проецирующую плоскость δ (рис. 34), которая проходит через ось X и перпендикулярна к плоскости π_3. Фронтальный и горизонтальный следы плоскости совпадают с осью X и поэтому не определяют положение плоскости. Чтобы положение плоскости определялось, необходимо, кроме ее следов, задать в ней какую-либо точку.

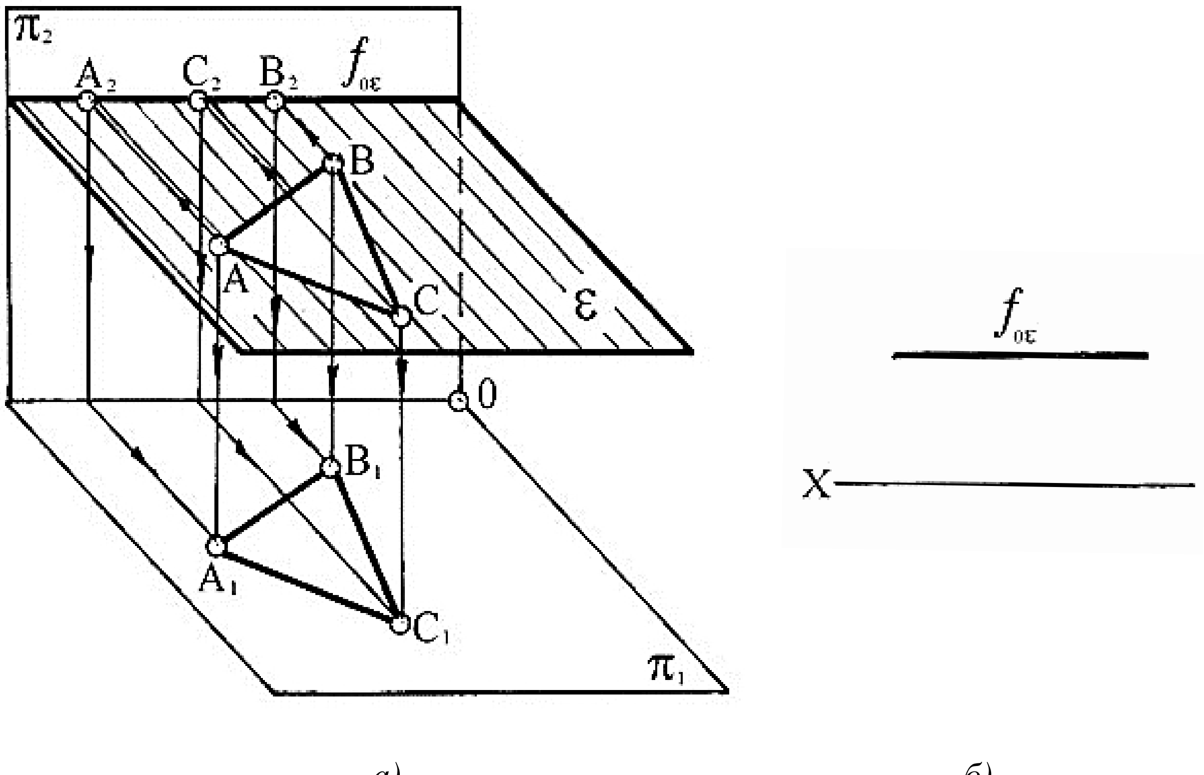
В частном случае эта плоскость может быть плоскостью биссектора. Тогда взятая в ней любая точка, например, точка K будет равноудалена от плоскостей проекций π_1 и π_2.



а) *б)*

Рис. 34. Следы осевой плоскости

У проецирующей плоскости на комплексном чертеже (эпюре) одна проекция есть прямая, на которой располагается проекции всех точек, линий и фигур, лежащих в этой плоскости. Это вырожденная в прямую линию проекция плоскости вполне определяет положение плоскости относительно основных плоскостей проекций. Проецирующая плоскость на комплексном чертеже может быть задана только одной «вырожденной» проекцией.



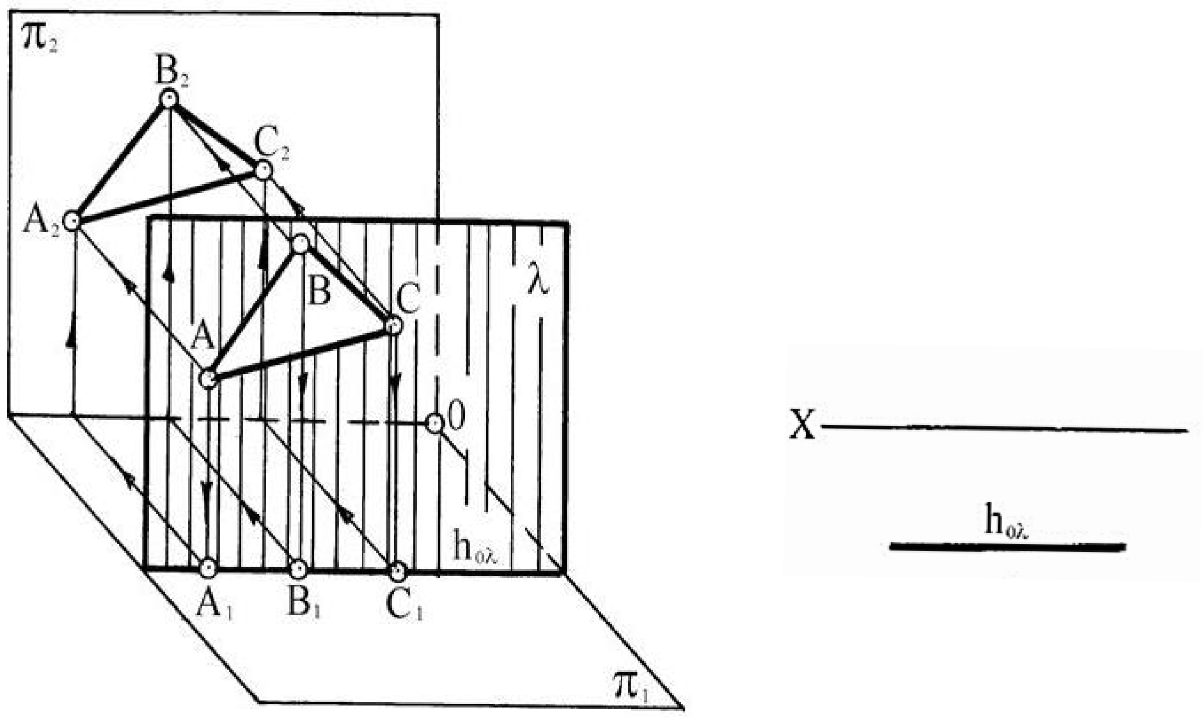
а) *б)*

Рис. 35. Следы горизонтальной плоскости

На рисунке 35,*а* изображена горизонтальная плоскость уровня ε. Фронтальный след $f_{0\varepsilon}$ ее параллелен оси X. Горизонтального следа плоскость ε не имеет, так как с плоскостью π_1 она не пересекается ($\varepsilon \parallel \pi_1$). Любая фигура, расположенная в горизонтальной плоскости, проецируется на горизонтальную плоскость проекций в натуральную величину: $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$.

Фронтальный след $f_{0\varepsilon}$ можно рассматривать как фронтальную проекцию горизонтальной плоскости. На рисунке 35,*б* плоскость, параллельная π_1, задана только фронтальным следом ($f_{0\varepsilon} \parallel$ оси X).

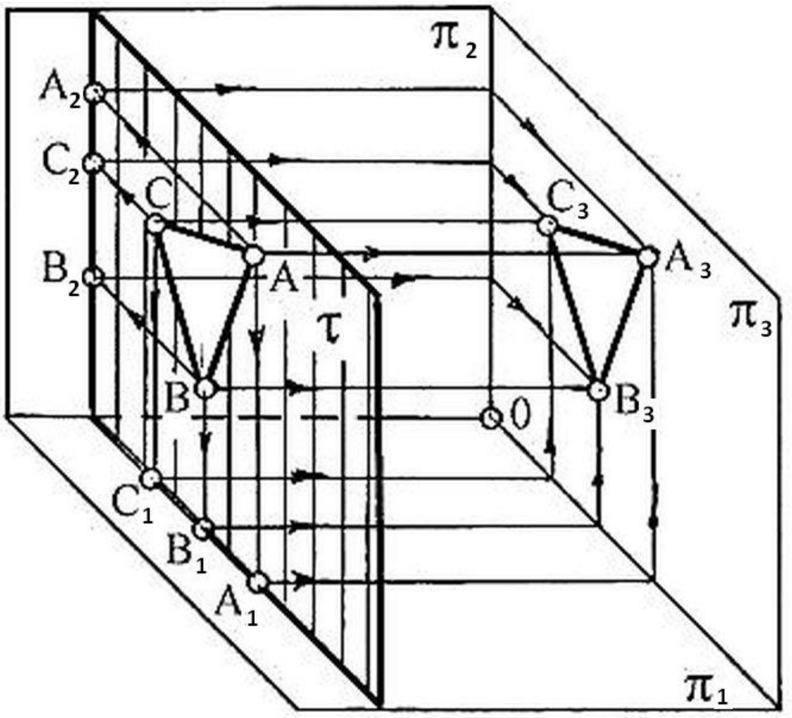
Горизонтальный след $h_{0\lambda}$ фронтальной плоскости уровня λ на рисунке 36,*а* параллелен оси X. Фронтального следа фронтальная плоскость не имеет, так как она не пересекает плоскость π_2. Любая фигура, расположенная во фронтальной плоскости, проецируется на фронтальную плоскость проекций в натуральную величину: $\Delta\ A_2B_2C_2 = \Delta\ ABC$. След $h_{0\lambda}$ можно рассматривать как проекцию этой плоскости на плоскость π_1 (рис. 36,*б*).

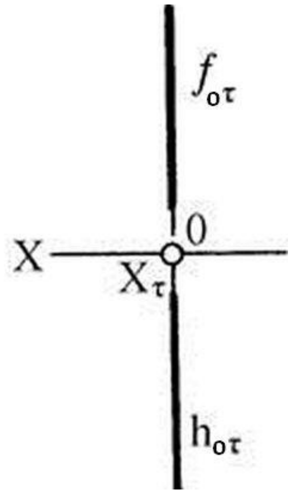


а) *б)*

Рис. 36. Следы фронтальной плоскости

На рисунке 37 изображена профильная плоскость уровня τ. Следы плоскости $f_{0\tau}$ и $h_{0\tau}$ перпендикулярны к оси X и пересекают ее в точке X_τ. Любая фигура, расположенная в профильной плоскости, проецируется на профильную плоскость проекций в натуральную величину: $\Delta\ A_3B_3C_3 = \Delta\ ABC$. Профильного следа профильная плоскость не имеет, она не пресекает плоскость проекций π_3. Профильная плоскость сочетает в себе свойства фронтально- и горизонтально-проецирующей плоскостей.





а) *б)*

Рис. 37. Следы профильной плоскости

6.3. Построение следов плоскостей

Чтобы построить следы плоскости, достаточно построить следы любых двух прямых, лежащих в этой плоскости, и соединить их между собой.

Соответствующий след плоскости будет однозначно определен, поскольку через две точки на плоскости (в данном случае этими точками будут следы прямых) можно провести прямую, и при том, только одну.

Основанием для такого построения служит свойство принадлежности прямой плоскости: *если прямая принадлежит заданной плоскости, то ее следы лежат на одноименных следах этой плоскости* (рис. 38).

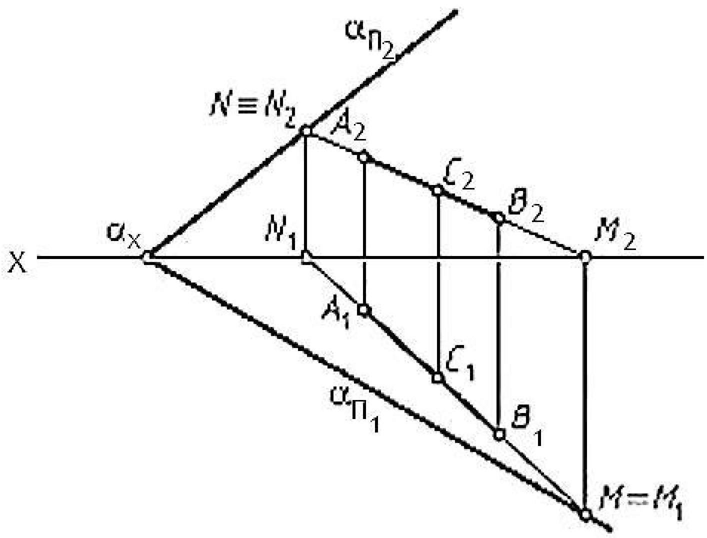


Рис. 38. Следы прямой и плоскости

Задача 1: Построение следов плоскости, заданной ΔBCD (рис. 39).

Построение: По заданным координатам точек *B, C* и *D* выполняют горизонтальную и фронтальную проекции плоскости, заданной ΔBCD. Для этого строят горизонтальные и фронтальные проекции вершин ΔBCD, а затем одноименные проекции вершин соединить.

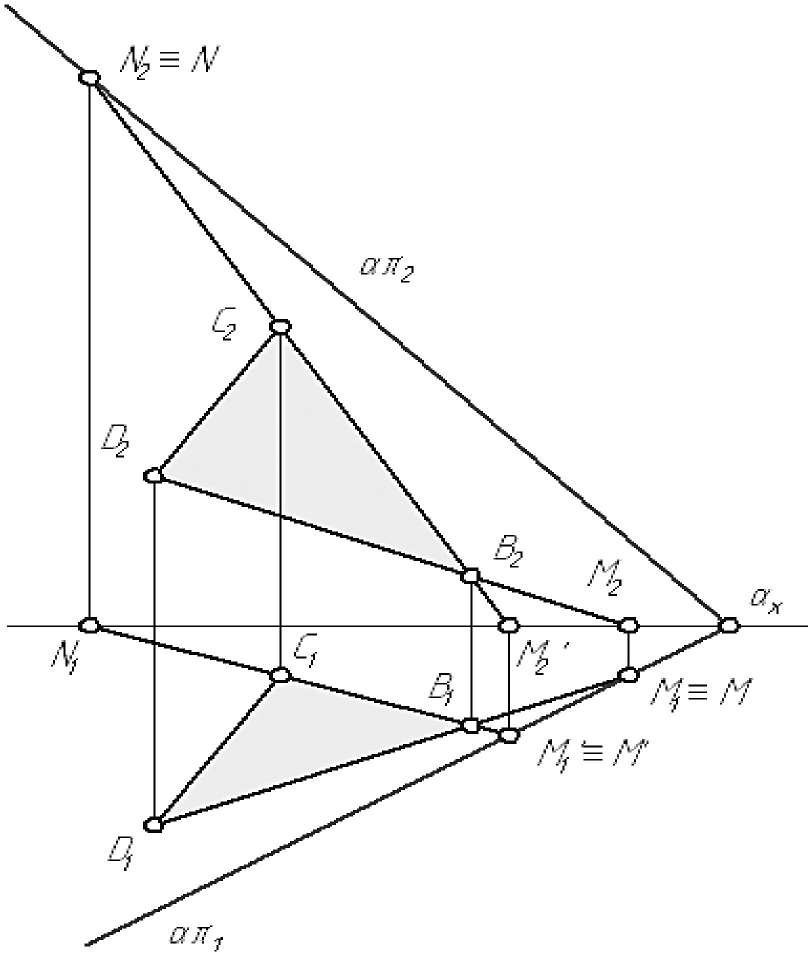


Рис. 39. Построение следов плоскости треугольника

Подробно рассмотрим построение горизонтального следа прямой *DB*, для чего необходимо:

1. продолжить фронтальную проекцию прямой *DB* до пересечения с осью *X*, точка пересечения M_2 является фронтальной проекцией горизонтального следа;

2. из точки M_2 восстановить перпендикуляр (линию проекционной связи) до его пересечения с горизонтальной проекцией прямой *DB* или ее продолжением. Точка пересечения M_1 и будет являться горизонтальной проекцией горизонтального следа, которая совпадает с самим следом *M*.

Аналогично выполняют построение горизонтального следа отрезка *CB* прямой: точка *M’*.

Чтобы построить фронтальный след отрезка *CB* прямой, необходимо:

1. продолжить горизонтальную проекцию прямой CB до пересечения с осью X, точка пересечения N_1 является горизонтальной проекцией фронтального следа;

2. из точки N_1 восстановить перпендикуляр (линию проекционной связи) до его пересечения с фронтальной проекцией прямой CB или ее продолжением. Точка пересечения N_2 и будет являться фронтальной проекцией фронтального следа, которая совпадает с самим следом N.

Соединив точки M'_1 и M_1 отрезком прямой, получим горизонтальный след плоскости $\alpha\pi_1$. Точка пересечения $\alpha\pi_1$ с осью X - точка схода следов α_x. Для построения фронтального следа плоскости $\alpha\pi_2$ необходимо соединить фронтальный след N_2 с точкой схода следов α_x.

Алгоритм решения этой задачи следующий:

1. $(D_2B_2 \cap OX) = M_2$;
2. $(MM_1 \cap D_1B_1) = M_1 = M$;
3. $(C_2B_2 \cap OX) = M'_2$;
4. $(M'_2M'_1 \cap C_1B_1) = M'_1 = M'$;
5. $(CB \cap \pi_2) = N_2 = N$;
6. $(MM') \equiv \alpha\pi_1$;
7. $(\alpha_x N) \equiv \alpha\pi_2$.

Задача 2: Построение следов плоскости, заданной пересекающимися прямыми CD и AB (рис. 40).

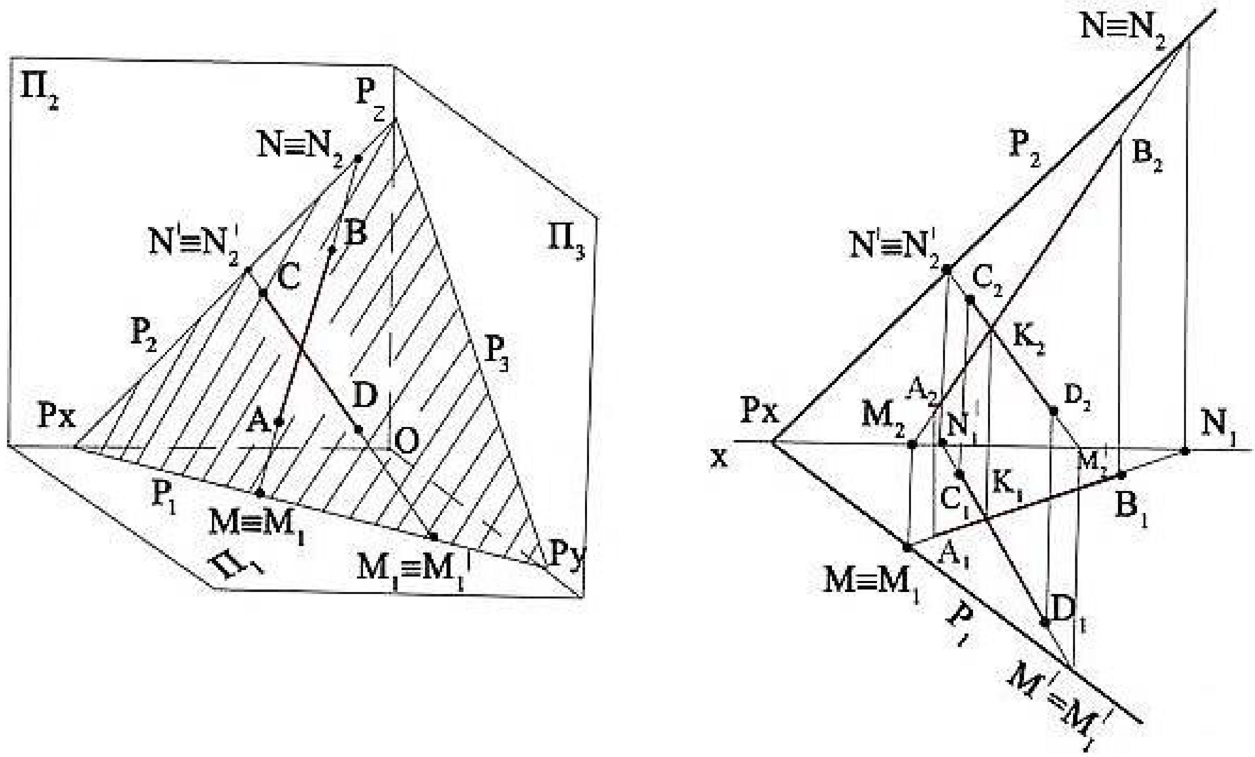


Рис. 40. Построение следов плоскости

Построение: Для построения горизонтального следа плоскости находят горизонтальный след прямой АВ – точку М и след прямой CD – точку M_1. Горизонтальный след плоскости проходит через точки М и M_1.

Фронтальный след плоскости P_2 строят аналогично. Для построения следа P_2 достаточно иметь фронтальный след только одной прямой, так как второй точкой, определяющей положение следа P_2, служит точка Px схода следов, то есть точка пересечения ранее построенного следа P_1 с осью x.

6.4. Контрольные вопросы для самоподготовки

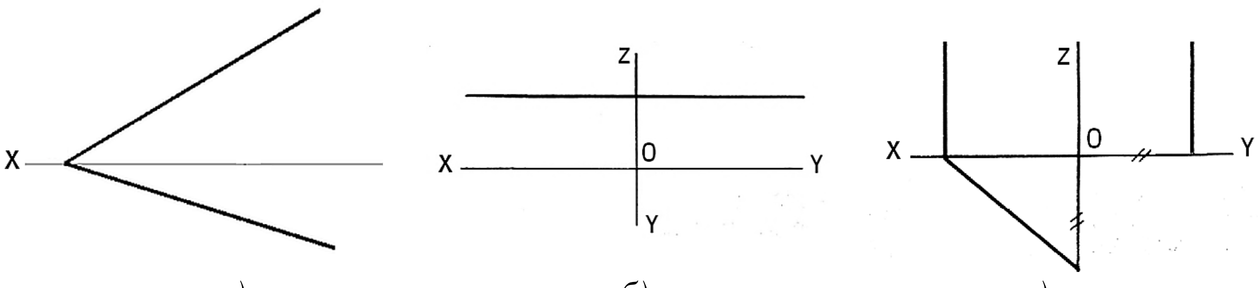
1. Что называется следом плоскости?
2. В чем условность задания плоскости следами на эпюре?
3. Что является горизонтальным, фронтальным, профильным следами плоскости?
4. Где на эпюре находятся следы прямой, принадлежащей плоскости?
5. Как построить следы плоскости, заданной треугольником?
6. Как построить следы плоскости, заданной пересекающимися прямыми?
7. Сколько следов у плоскостей общего положения?
8. Сколько следов у плоскостей уровня?
9. Сколько следов у проецирующих плоскостей?
10. Что такое «вырожденная» проекция?
11. У какой плоскости фронтальный и горизонтальный следы плоскости совпадают с осью *X*?
12. Что такое точки схода следов?

6.5. Тестовые задания

1. ____________ плоскости называют линию пересечения плоскости с плоскостью проекций.

2. Следы прямой, лежащей в плоскости, расположены на ______________ следах плоскости.

3. Горизонтально-проецирующая плоскость задана следами на эпюре:____.



а) *б)* *в)*

4. Проецирующая плоскость на комплексном чертеже может быть задана только одной «_____________» проекцией.

а) основной *б) базовой* *в) вырожденной*

5. Плоскость общего положения пересекает каждую из __________.

6. Следы плоскости общего положения никогда не ____________ к осям x, y, z.

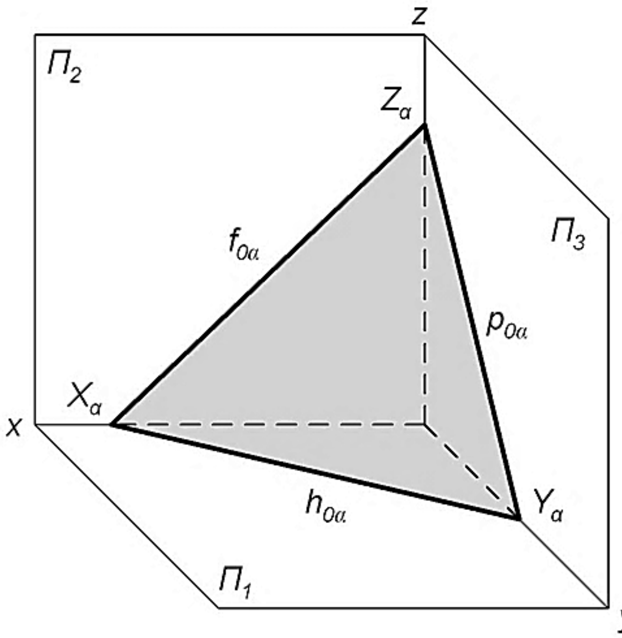
7. У плоскости общего положения _______ следа.

а) четыре *б) два* *в) три*

8. $X_α$, $Y_α$, $Z_α$ – это ___________ следов.

9. Плоскость, имеющая следы $h_{oα}$, $f_{oα}$, $P_{oα}$, обозначается _____.

10. Прямая $h_{oα}$ является ______ _____________, $f_{oα}$ - ______________ __________, $P_{oα}$ - _________________ плоскости α.



11. Два следа имеют плоскости _____________.

12. Если в горизонтально-проецирующей плоскости расположена точка, то ее горизонтальная проекция должна быть на ____________________ плоскости.

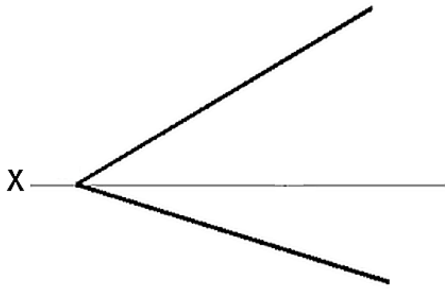
13. Профильная плоскость проецируется на $π_3$ в _________ линию.

14. Точки пересечения следов плоскости, лежащие на соответствующих осях, называются точками ________________________.

15. Чтобы построить следы плоскости, достаточно построить следы любых ______________, лежащих в этой плоскости, и соединить их между собой.

16. Все точки, прямые и плоские фигуры, принадлежащие фронтально-проецирующей плоскости, отображаются на _________________ этой плоскости.

17. По изображению следов определить положение плоскости α в пространстве и обозначить на эпюре следы и точку схода следов плоскости.



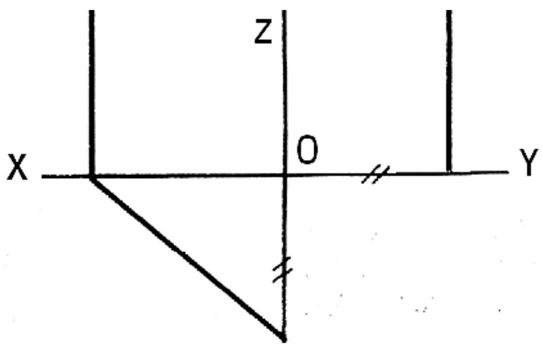
18. Обозначить на эпюре следы и точки схода следов ________________плоскости Q.

а) фронтально-проецирующей

б) фронтальной

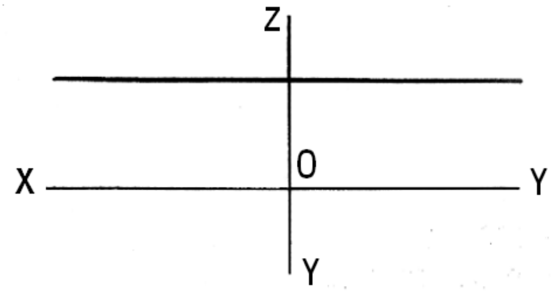
в) горизонтально-проецирующей

г) профильной



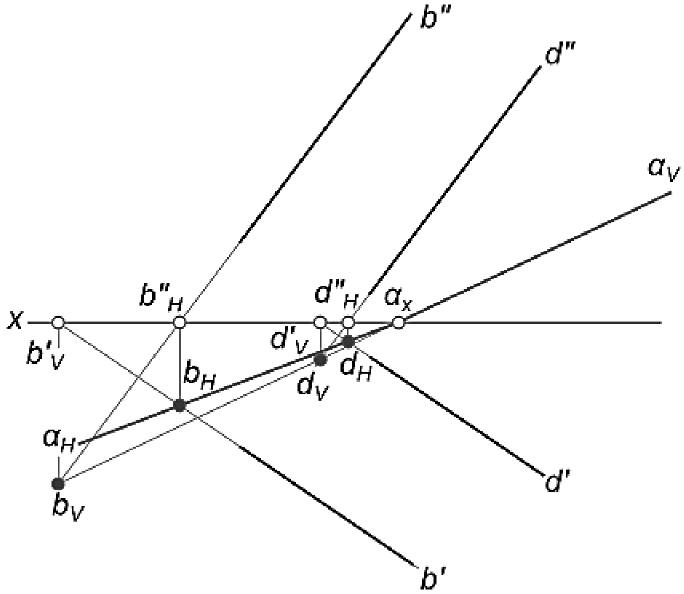
19. Обозначить на эпюре следы ______________________ плоскости ε и точку схода следов.

20. Судя по следам, плоскость ε относится по положению в пространстве к плоскостям ____________.



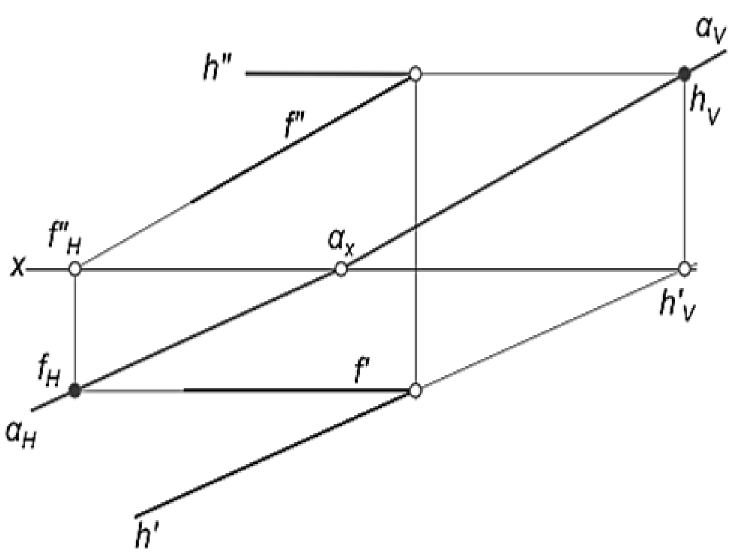
21. Построение следов плоскости α, заданной двумя параллельными прямыми. Для проведения каждого следа на эпюре необходимы две точки:

- для _____________ следа α_H находят b_H и d_H, _____________ следы прямых b и d соответственно;
- для ______________ следа α_V находят b_V и α_x, _____________ след прямой d и точка схода следов соответственно.



22. Построение следов плоскости α, заданной пересекающимися горизонталью и фронталью. Для проведения каждого следа на эпюре необходима одна точка:

- для горизонтального следа ___ находят ____ ;
- для фронтального следа ____ могут быть использованы ____ или ____, фронтальный след прямой h или точка схода следов соответственно.

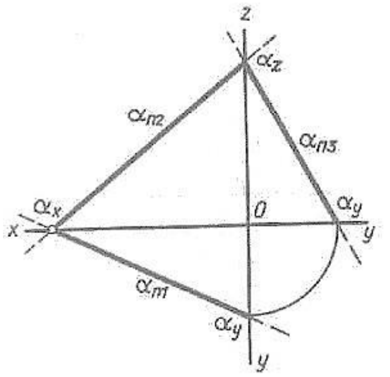


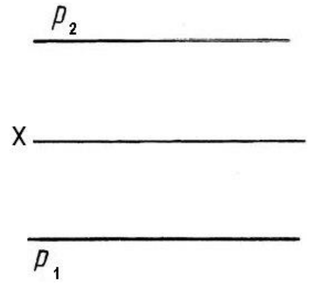
23. Установить соответствие между текстом и рисунками:

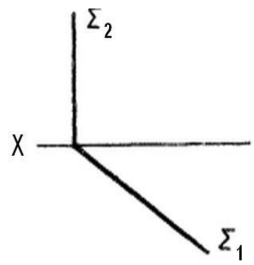
1) Профильная плоскость

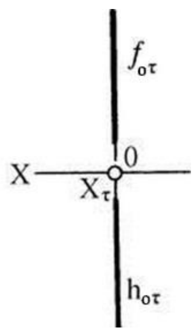
2) Горизонтально-проецирующая плоскость

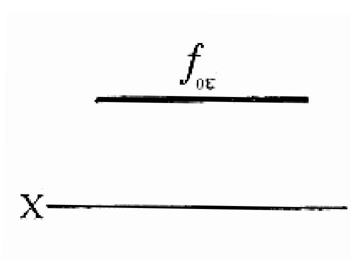
3) Плоскость общего положения

а) 

б) 

в) 

г) 

д) 

РАЗДЕЛ № 7. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Известны три варианта взаимного расположения прямой и плоскости:
1. прямая принадлежит плоскости;
2. прямая параллельна плоскости;
3. прямая пересекает плоскость.

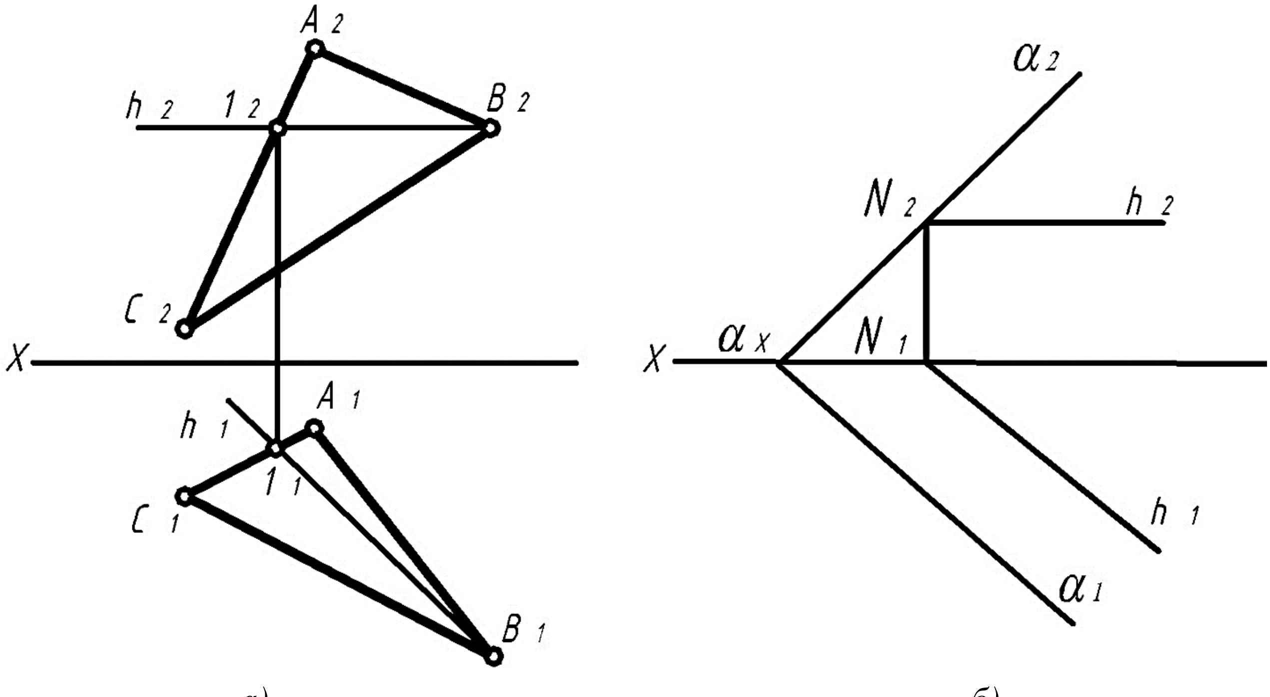
7.1. Прямая, принадлежащая плоскости

Известно (изучали в I части пособия), что прямая принадлежит плоскости, если:

- две точки этой прямой принадлежат той же плоскости;
- она имеет с плоскостью одну общую точку и параллельна какой-либо прямой расположенной в этой плоскости.

Среди прямых линий, которые могут быть расположены в данной плоскости, особое место занимают главные прямые трех направлений частного положения: горизонталь, фронталь и прямые профильные. Эти прямые, особенно горизонтали и фронтали, очень часто применяются в различных построениях и при решении задач. Объясняется это значительной простотой построения указанных прямых, поэтому их удобно применять в качестве вспомогательных.

Горизонталью плоскости называется прямая, лежащая в плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций, обозначаемая H.



а) *б)*

Рис. 39. Горизонтальная прямая плоскости

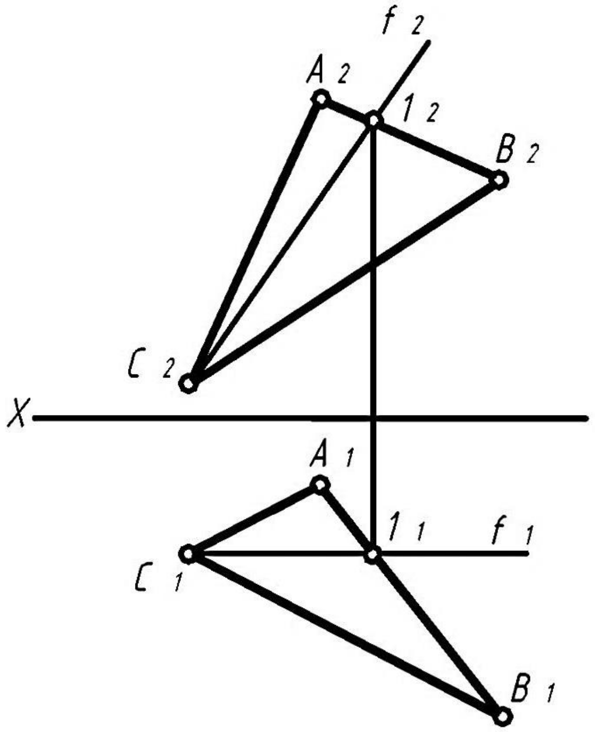
На рисунке 39,*а* в плоскости, заданной треугольником *ABC*, построена горизонталь *H* (h_1, h_2). Построение горизонтали начинают с ее фронтальной проекции h_2, так как она всегда параллельна оси *X*.

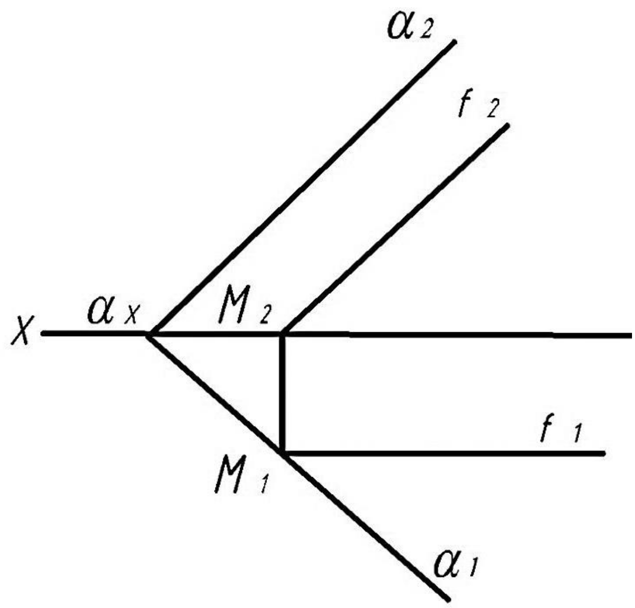
Если плоскость задана следами (рис. 39,*б*), то фронтальная проекция горизонтали параллельна оси *X*, а горизонтальная ее проекция h_1 всегда будет параллельна горизонтальному следу α_1 плоскости α.

Фронталью плоскости называется прямая, лежащая в данной плоскости и параллельная фронтальной плоскости проекций, обозначаемая F.

На рисунке 40,*а* в плоскости, заданной треугольником *ABC*, построена фронталь *F* (f_1, f_2). Построение фронтали начинают с ее горизонтальной проекции, так как она всегда параллельна оси *X*.

Если плоскость задана следами (рис. 40,*б*), то горизонтальная проекция фронтали f_1 параллельна оси *X*, а фронтальная ее проекция f_2 всегда параллельна фронтальному следу α_2 плоскости α.





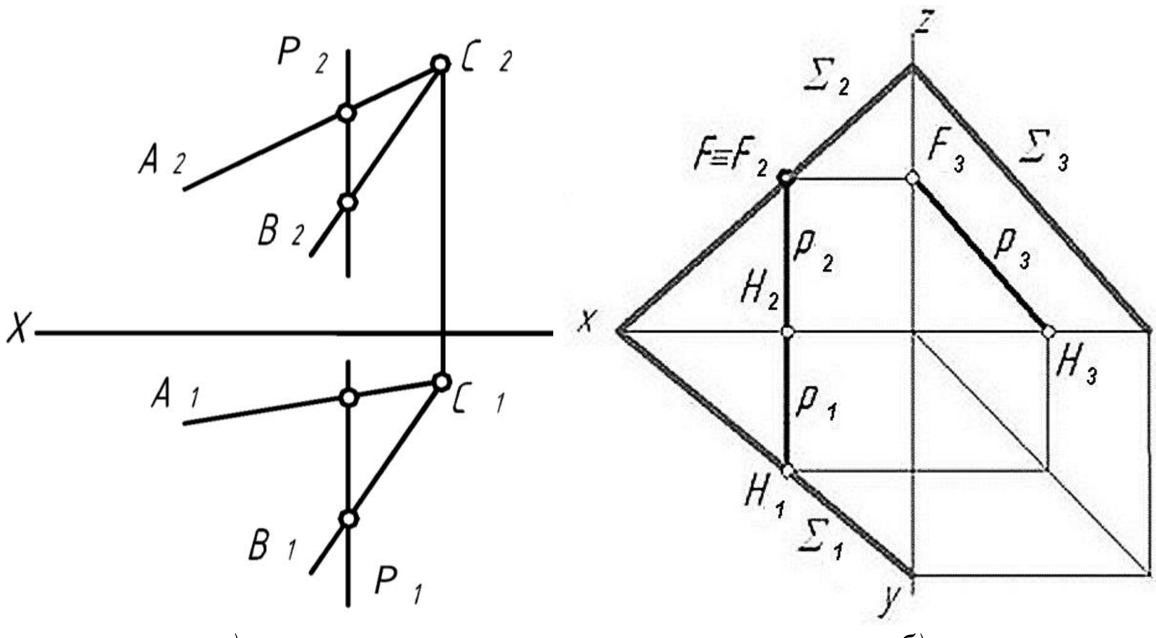
а) *б)*

Рис. 40. Фронтальная прямая плоскости

Профильные прямые плоскости - это прямые, которые лежат в данной плоскости и параллельны профильной плоскости проекций. Обозначаются они *P*.

На рисунке 41,*а* в плоскости, заданной пересекающимися прямыми, показана профильная прямая *P* (P_1, P_2). Фронтальная и горизонтальная проекции этой прямой перпендикулярны к оси *X*.

Если плоскость задана следами (рис. 41,*б*), то профильная проекция P_3 всегда параллельна профильному следу Σ_3 плоскости Σ.



а) *б)*

Рис. 41. Профильная прямая плоскости

7.2. Построение главных прямых в плоскости

Задача 1: Построение трех проекций горизонтали в плоскости, заданной треугольником *ABC* (рис. 42).

Построение:

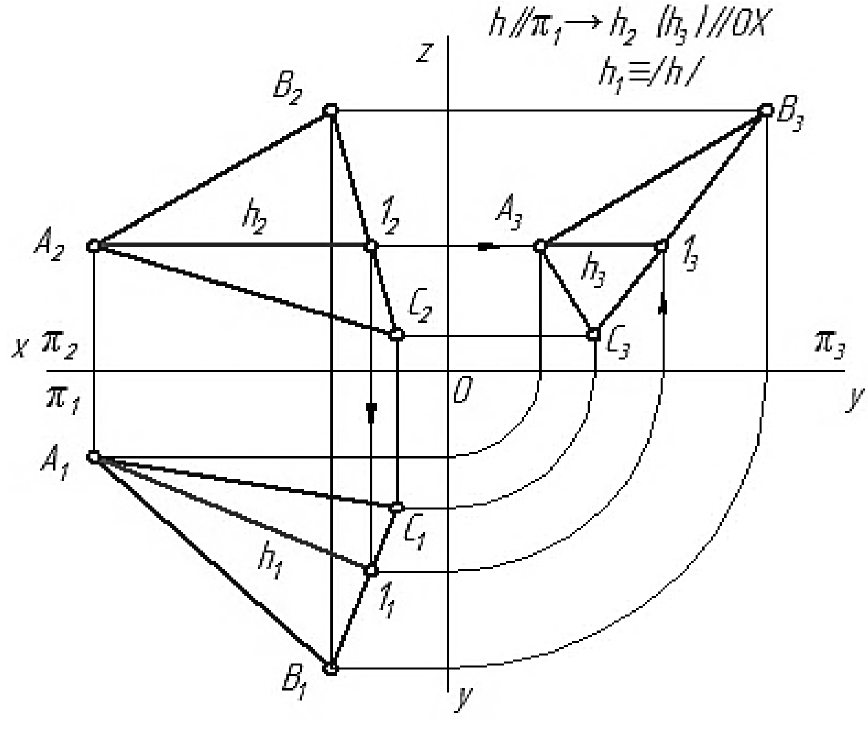


Рис. 42. Горизонталь в плоскости, заданной треугольником

Задача 2: Построение трех проекций фронтали в плоскости, заданной треугольником *ABC* (рис. 43).

Построение:

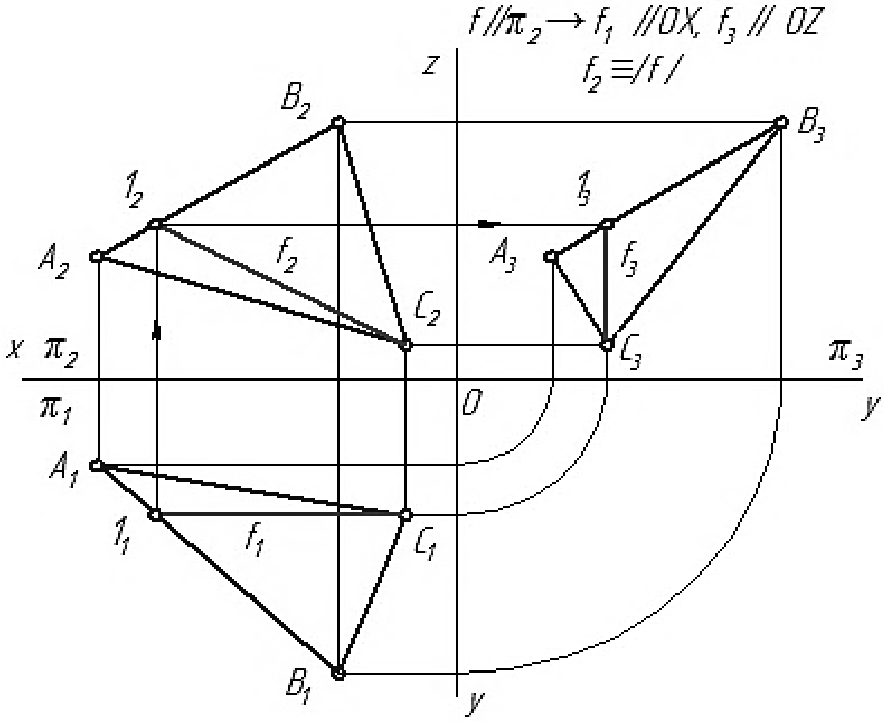


Рис. 43. Фронталь в плоскости, заданной треугольником

Задача 3: Построение трех проекций профильной прямой в плоскости, заданной треугольником ABC (рис. 44).

Построение:

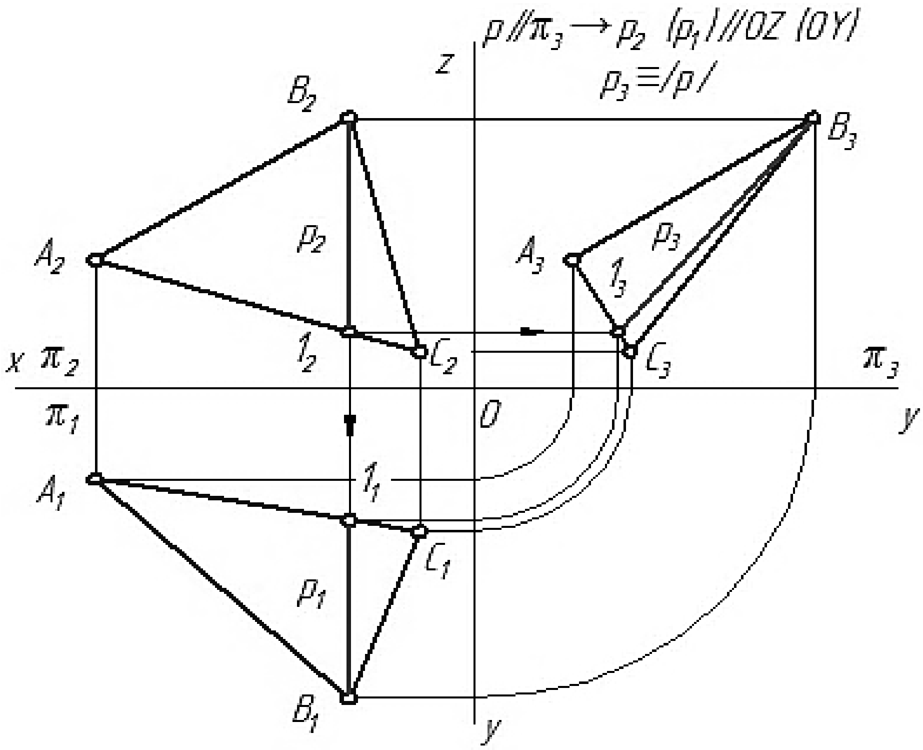


Рис. 44. Профильная прямая в плоскости треугольника

7.3. Прямая, параллельная плоскости

Признак параллельности прямой плоскости: *прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой, принадлежащей этой плоскости*.

На рисунке 45 прямая *AB* параллельна плоскости, так как она параллельна прямой *MN*, которая лежит в этой плоскости. Когда прямая параллельна плоскости, в этой плоскости через какую-либо ее точку можно провести прямую, параллельную данной прямой. Например, если через точку *M*, принадлежащую плоскости, провести прямую *MN*, параллельную *AB*, то она будет лежать в данной плоскости. На этом же рисунке прямая *CD* не параллельна плоскости, потому что прямая *KL*, которая параллельна *CD* и проходит через точку *K* на плоскости, не лежит в данной плоскости, а пересекает ее (рис. 45).

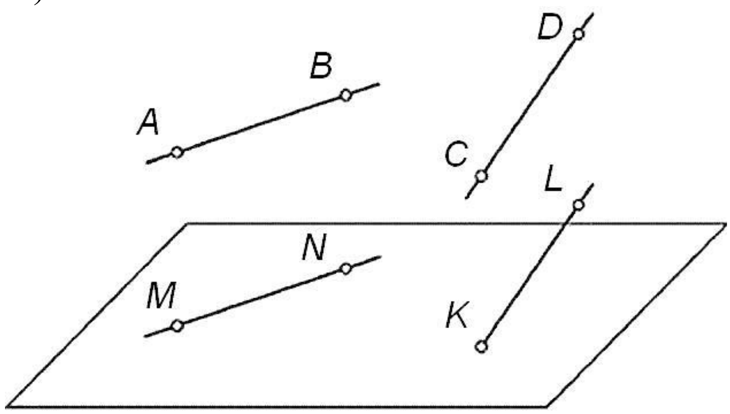


Рис. 45. Прямые и плоскость

Если требуется провести прямую параллельно данной плоскости, то сначала проводят в плоскости какую-либо прямую, а затем строят параллельную ей прямую, которая будет параллельна данной плоскости. В любой плоскости можно провести неограниченное число прямых линий, следовательно, можно провести неограниченное количество и прямых, параллельных плоскости.

7.4. Построение прямых параллельно плоскости

Задача 1: Построение на эпюре проекций прямой *a*, параллельной плоскости, заданной пересекающимися прямыми *m* и *n*.

Построение: Берут любую новую прямую *a*, которая будет параллельна любой прямой плоскости, например, прямой плоскости *m* (рис. 46).

Алгоритм построения:

$$\alpha = m \cap n$$
$$\left.\begin{array}{c} a_2 \parallel m_2 \\ a_1 \parallel m_1 \end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel \alpha$$

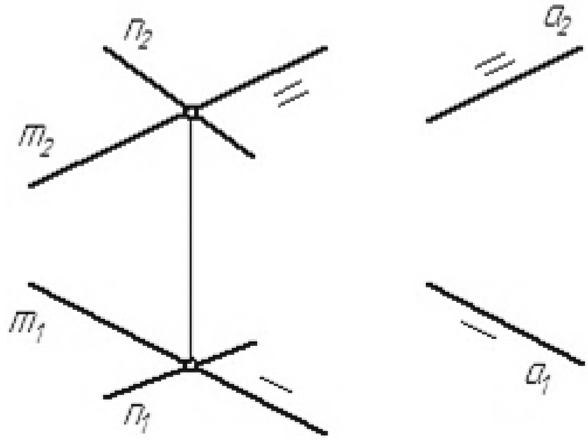


Рис. 46. Построение прямой *a* параллельно плоскости

Задача 2: Построение на эпюре проекции прямой, параллельной плоскости, заданной треугольником *ABC*, и проходящей через точку пространства *K*.

Построение: На эпюре в треугольнике проводят некоторую прямую *A1*, например, она занимает положение фронтали. Затем через точку *K* строят новую прямую *l* так, чтобы ее горизонтальная проекция l_1 была параллельна проекции прямой $A_1 1_1$ плоскости, а фронтальная проекция l_2 - проекции $A_2 1_2$ (рис. 47). Тогда прямая *l* будет параллельна плоскости треугольника *ABC* и проходить при этом через точку *K* пространства.

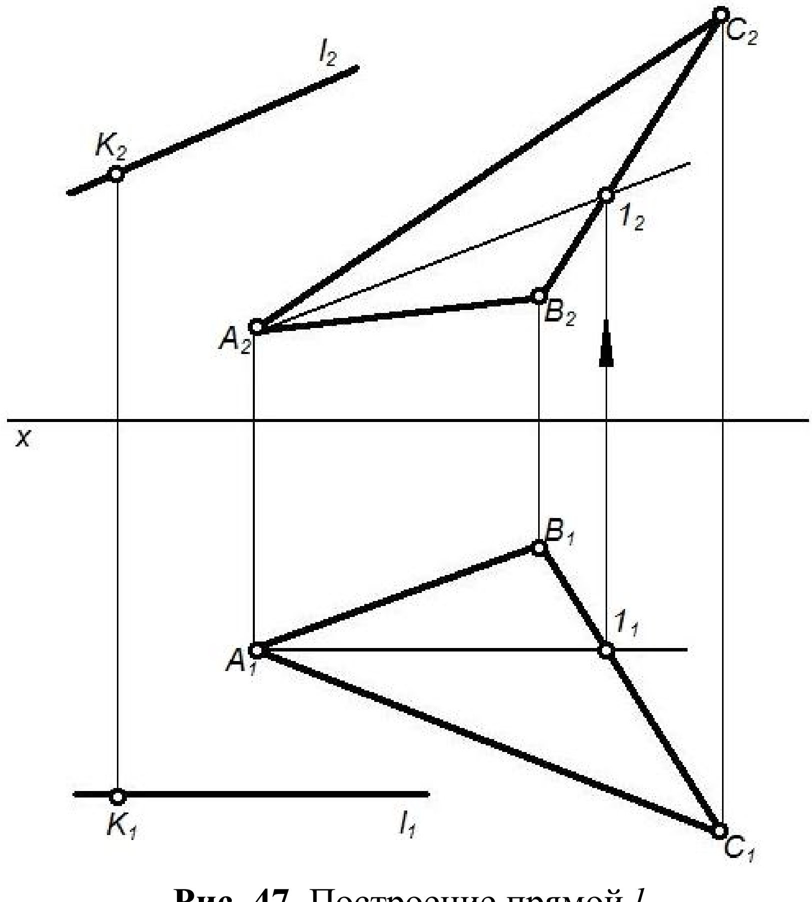


Рис. 47. Построение прямой *l*

Задача 3: Построение на эпюре проекции прямой, параллельной плоскости, заданной следами, и проходящей через точку пространства *A*.

Построение: На рисунке 48 прямая *MN* в плоскости, заданной следами, обозначена своими следами на плоскости. Следы прямой *M* и *N* лежат на следах плоскости. Так как известно, что если прямая принадлежит заданной плоскости, то ее следы лежат на одноименных следах этой плоскости. Построение параллельной прямой аналогичное решению задачи 2.

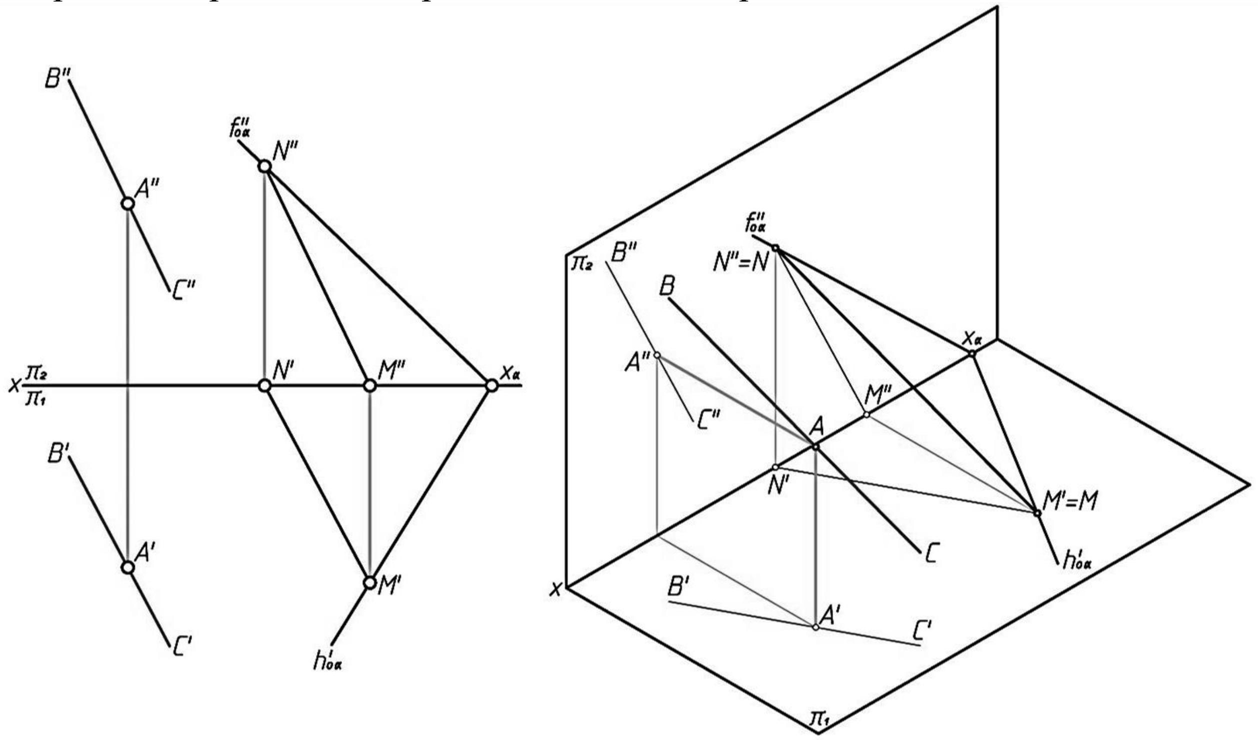


Рис. 48. Построение прямой *l* параллельно плоскости

7.5. Прямая, пересекающая плоскость

Прямая, пересекающая плоскость, показана на рисунке 49: $b \cap G = K$. Определение точки пересечения прямой линии и плоскости – *первая главная позиционная задача «Пересечение линии с поверхностью».*

Для нахождения точки пересечения прямой и плоскости необходимо построить линии пересечения двух плоскостей.

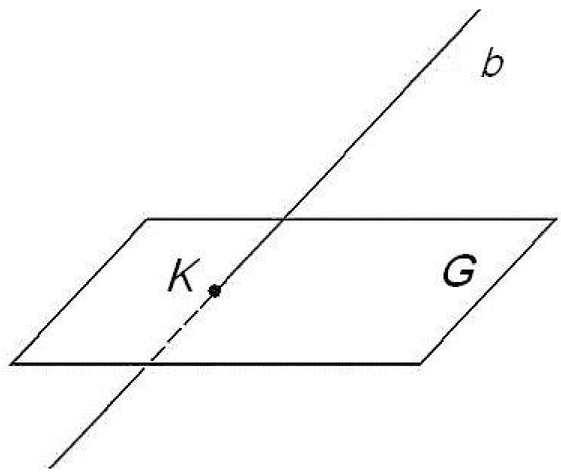


Рис. 49. Построение прямой *d*, пересекающей плоскость

Рассмотрим построение точки пересечения прямой *I* и плоскости *P* (рис. 50). Через некоторую прямую *I* проводят вспомогательную проецирующую плоскость Q. Линия II определяется как пересечение плоскостей *P* и Q. Точка *K*, которую и требуется построить, находится в пересечение прямых *I* и *II*. В этой точке прямая *I* пересекает плоскость *P*.

В примере основным моментом решения является проведение вспомогательной плоскости Q, проходящей через данную прямую. Можно провести вспомогательную плоскость общего положения. Однако показать на эпюре проецирующую плоскость намного проще, чем провести плоскость общего положения. При этом через любую прямую можно провести проецирующую плоскость, поэтому вспомогательная плоскость и выбирается проецирующей.

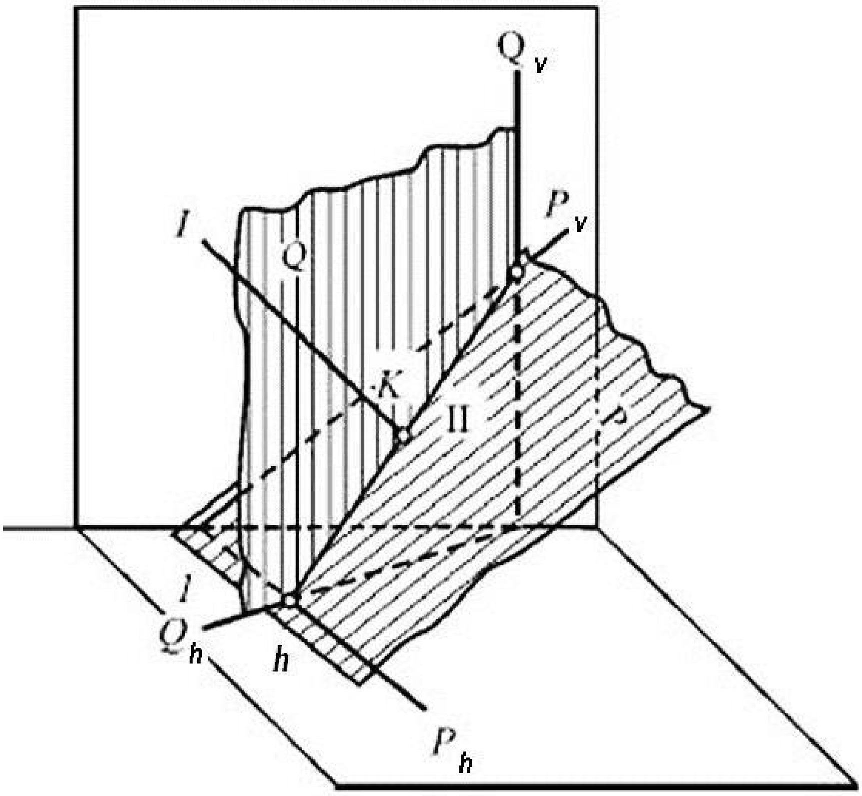


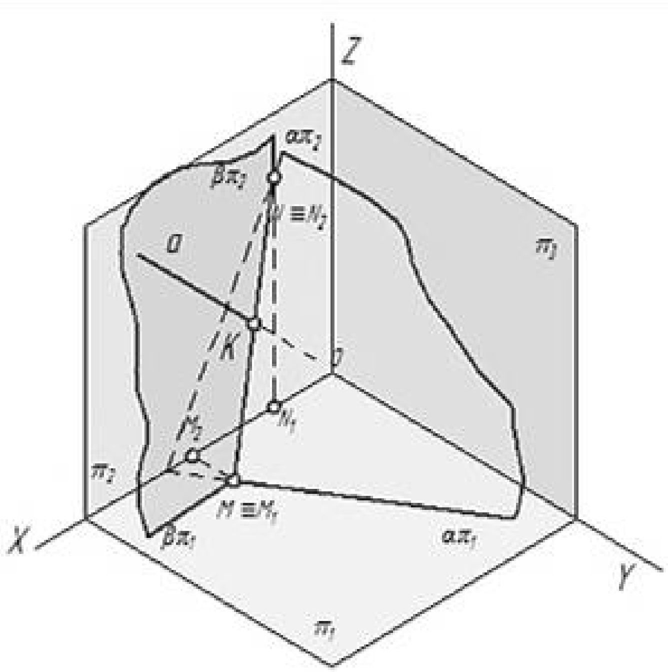
Рис. 50. Построение точки пересечения прямой и плоскости

Для построения точки пересечения прямой с плоскостью общего положения (рис. 51), необходимо:

1. заключить прямую *a* во вспомогательную плоскость β (в качестве вспомогательной плоскости следует выбирать плоскости частного положения);

2. найти линию пересечения вспомогательной плоскости β с заданной плоскостью α;

3. найти точку пересечения заданной прямой *a* с линией пересечения плоскостей *MN*.



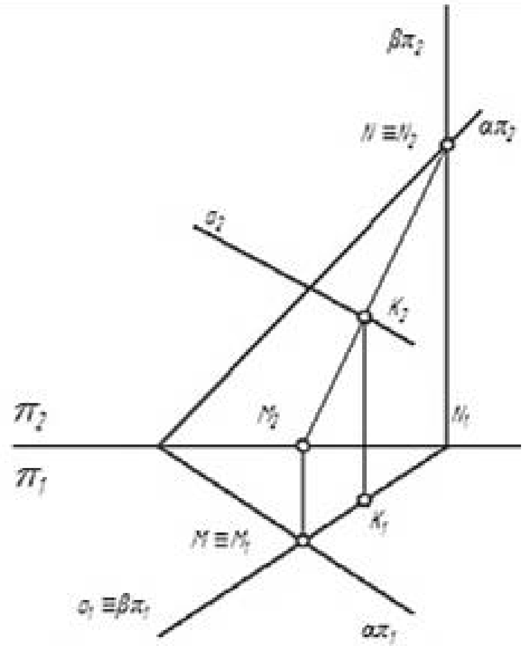
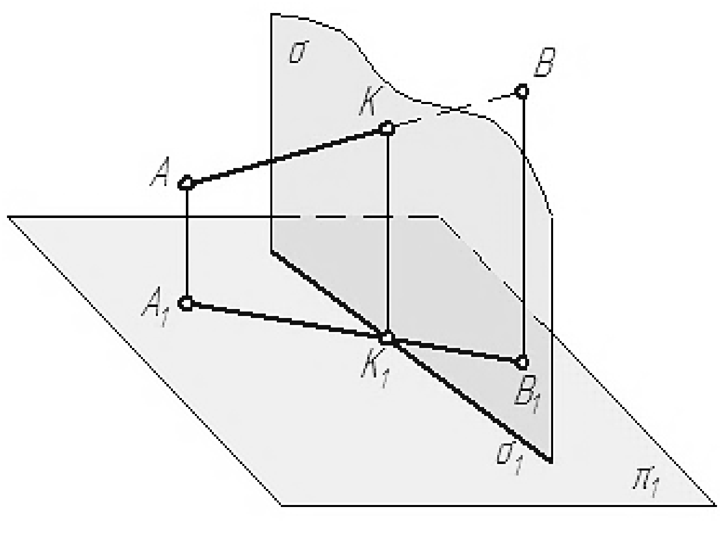


Рис. 51. Построение точки встречи прямой с плоскостью

7.6. Построение прямых, пересекающих плоскости

Задача 1: Определение точки пересечения прямой *AB* с плоскостью σ.
Заданы: Прямая *AB* общего положения, плоскость $\sigma \perp \pi_1$ (рис. 52).



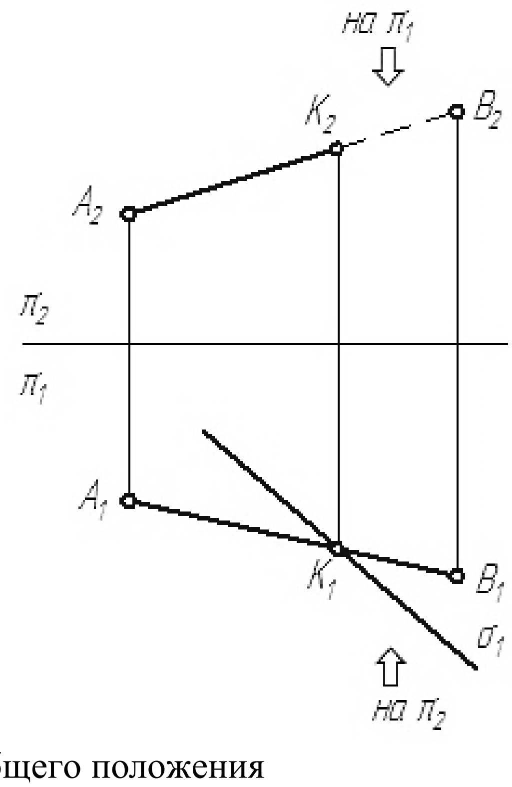


Рис. 52. Пересечение прямой общего положения
с плоскостью частного положения

Построение: Плоскость σ – горизонтально-проецирующая, поэтому ее горизонтальной проекцией является прямая σ_1, то есть горизонтальный след плоскости. Точка K должна принадлежать прямой $AB \Rightarrow K_1 \in A_1B_1$ и заданной плоскости $\sigma \Rightarrow K_1 \in \sigma_1$. K_1 находится в точке пересечения проекций A_1B_1 и σ_1. Фронтальную проекцию точки K находят посредством линии проекционной связи: $K_2 \in A_2B_2$.

Определение видимости частей прямой подробно рассмотрена ниже.

Задача 2: Построение точки пересечения прямой EF с плоскостью ΔABC общего положения.

Построение:

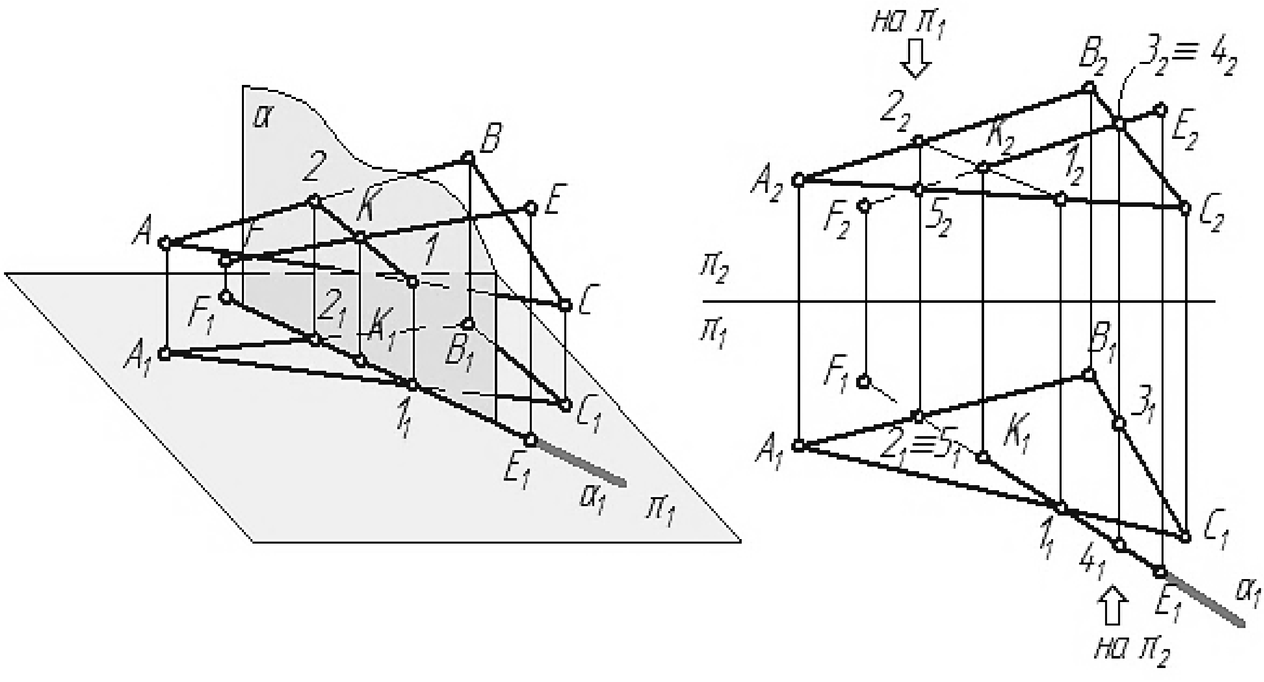
1. заключают прямую EF во вспомогательную плоскость, в качестве которой выступает горизонтально-проецирующая плоскость α (рис. 53,*а*);

2. если $\alpha \perp \pi_1$, то на плоскость проекций π_1 плоскость α проецируется в прямую α_1 (горизонтальный след плоскости), совпадающую с проекцией E_1F_1;

3. находят прямую пересечения *12* проецирующей плоскости α с плоскостью ΔABC;

4. прямая *12* и заданная прямая EF лежат в одной плоскости α и пересекаются в точке K.

При оценке положения данной прямой определяют видимость участков прямой, то есть рассматривают точка какого участка расположена ближе (дальше) к наблюдателям, при взгляде на плоскость проекций. Определяют видимость методом конкурирующих точек.



а) *б)*

Рис. 53. Пересечение прямой с плоскостью

Точки, которые принадлежат разным объектам, а на одной из плоскостей проекций их проекции совпадают (то есть, две точки проецируются в одну)*, называются конкурирующими на этой плоскости проекций.*

Видимость на π_2 (рис. 53,*б*) определяют так. Выбирают точки, конкурирующие на π_2 – это точки *3* и *4*. Пусть точка $3 \in BC \in \Delta ABC$, точка $4 \in EF$. Затем рассматривают расположение этих точек на горизонтальной плоскости проекций при взгляде на π_2. Направление взгляда на π_2 показано стрелкой.

При взгляде на π_2 по горизонтальным проекциям точек 3_1 и 4_1, видно, что точка *4* (и сама точка тоже) располагается ближе к наблюдателю, чем точка *3*. $4_1 \in E_1F_1 \Rightarrow 4 \in EF \Rightarrow$ на π_2 будет видима точка *4*, лежащая на прямой *EF*. Таким образом, прямая *EF* на участке рассматриваемых конкурирующих точек расположена перед плоскостью ΔABC и будет видима до точки *K* – точки пересечения прямой с плоскостью треугольника.

Для определения видимости на π_1 выберем точки, конкурирующие на π_1 – это точки *2* и *5*. Чтобы определить видимость точек на плоскости проекций π_1 оценивают расположение этих точек на фронтальной плоскости проекций при взгляде на π_1. Направление взгляда на π_1 показано стрелкой. По фронтальным проекциям точек 2_2 и 5_2 при взгляде на π_1 видно, что точка *2* располагается ближе к наблюдателю, чем *5*.

$2_1 \in A_2B_2 \Rightarrow 2 \in AB \Rightarrow$ на π_1 будет видима точка *2*, лежащая на прямой *AB*. Следовательно, прямая *EF* на участке рассматриваемых конкурирующих точек расположена под плоскостью треугольника и будет невидима до точки *K* – точки пересечения прямой с плоскостью ΔABC.

Видимой из двух конкурирующих точек будет та, у которой координата «Z» или(и) «Y» больше.

Задача 3: Построение на эпюре точки пересечения *K* прямой *m* с плоскостью, заданной пересекающимися прямыми *a* и *b*.

Построение: Аналогично построению на рисунке 53 к задаче 2 (рис. 54).

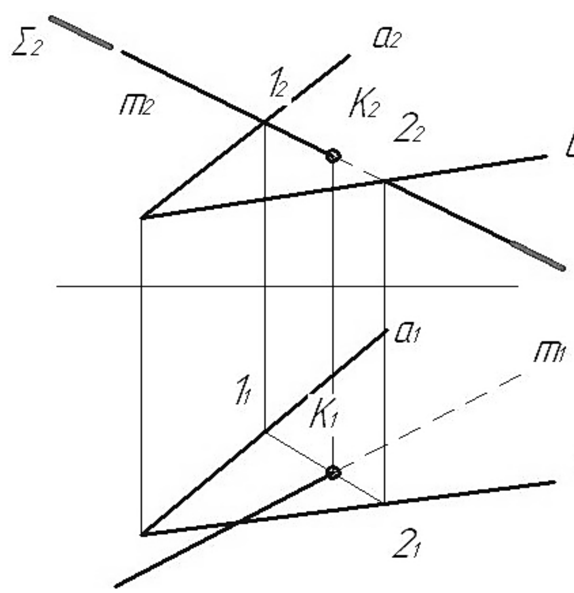


Рис. 54. Пересечение прямой линии и плоскости

Большое значение для задач начертательной геометрии имеет частный случай пересечения прямой и плоскости, когда прямая перпендикулярна плоскости.

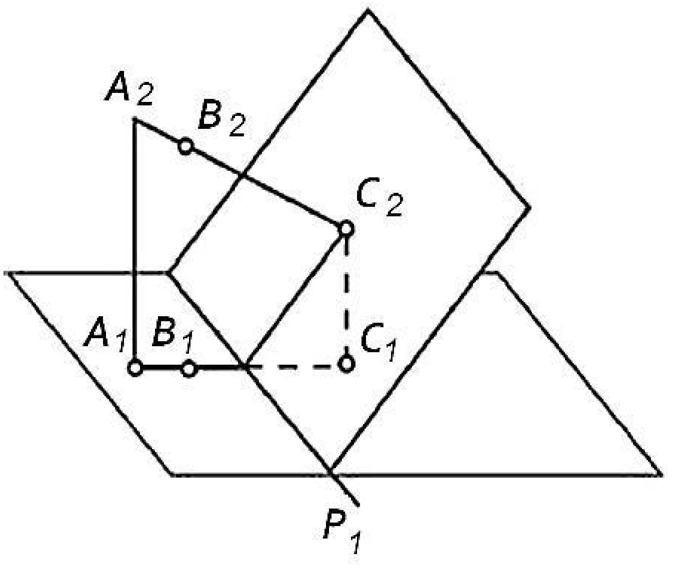
7.7. Прямая, перпендикулярная плоскости

Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.

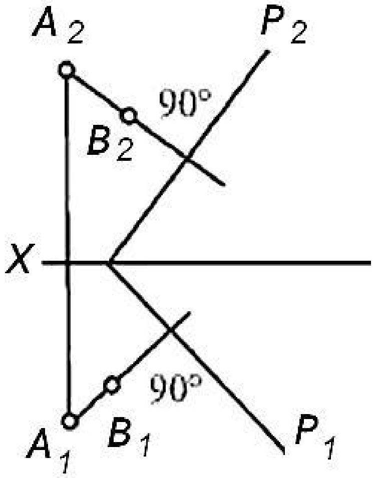
Признак перпендикулярности прямой и плоскости: *Если прямая перпендикулярна каждой из двух пересекающихся прямых плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.*

В качестве подобной пары прямых легче всего рассматривать следы плоскости P_1 и P_2 (рис. 55). Это вызвано тем, что прямой угол между перпендикуляром к плоскости и следом P_1 дает проекцию на горизонтальную плоскость без искажения, а угол между перпендикуляром и следом P_2 проецируется на фронтальную плоскость.

Прямая является перпендикулярной плоскости, когда одноименные проекции прямой перпендикулярны одноименным следам плоскости.



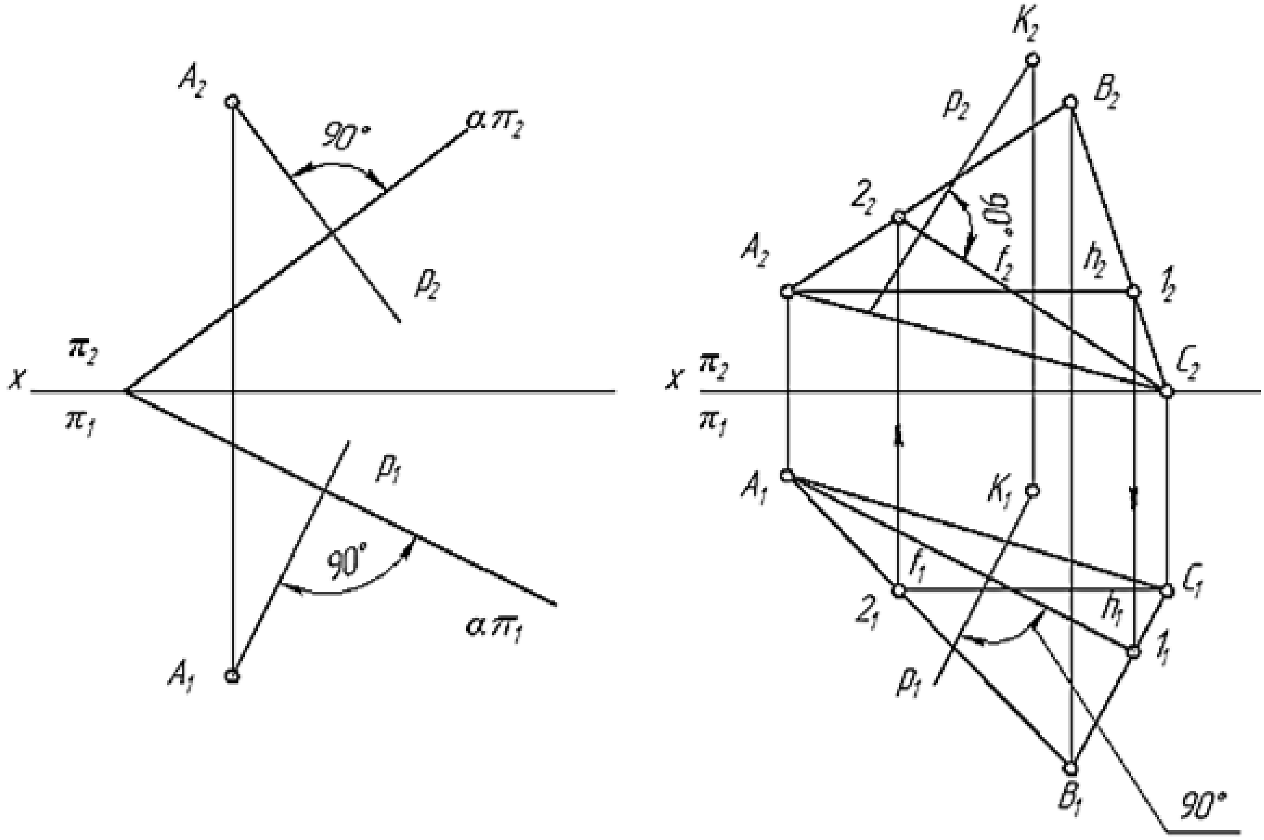
а)



б)

Рис. 55. Прямая перпендикулярна плоскости

Если прямая перпендикулярна плоскости, то на эпюре: проекции прямой перпендикулярны наклонным проекциям горизонтали и фронтали (рис. 56,*б*), лежащих в плоскости, или следам плоскости (рис. 55,*б*; рис. 56,*а*). Пусть прямая p перпендикулярна плоскости ΔABC и проходит через точку K. Строят горизонталь и фронталь в плоскости ΔABC : $A1 \in \Delta ABC$; $A1//\pi_1$; $C2 \in \Delta ABC$; $C2//\pi_2$. Восстанавливают из точки K перпендикуляр к заданной плоскости: $p_1 \perp h_1$ и $p_2 \perp f_2$ (рис. 56,*б*), или $p_1 \perp \alpha\pi_1$ и $p_2 \perp \alpha\pi_2$ (рис. 56,*а*).



а) б)

Рис. 56. Задание прямой, перпендикулярной плоскости

7.8. Контрольные вопросы для самоподготовки

1. Все взаимные положения прямой и плоскости.
2. Что является обоснованием принадлежности прямой плоскости?
3. Какая прямая называется горизонталью плоскости?
4. Какая прямая является фронталью плоскости?
5. Особенности профильной прямой плоскости.
6. С какой проекции начинается построение горизонтали, фронтали, профильной прямой?
7. Как располагаются проекции горизонтали и фронтали плоскостей в плоскости, заданной следами?
8. Признак параллельности прямой и плоскости.
9. Первая главная позиционная задача.
10. Общий метод нахождения точки пересечения прямой и плоскости.
11. Каков алгоритм нахождения точки пересечения прямой линии с плоскостью?
12. Какие точки называются конкурирующими?
13. Метод конкурирующих точек.
14. Признак перпендикулярности прямой плоскости.
15. Какая прямая является перпендикулярной плоскости?

7.9. Тестовые задания

1. Известны _______ варианта взаимного расположения прямой и плоскости.

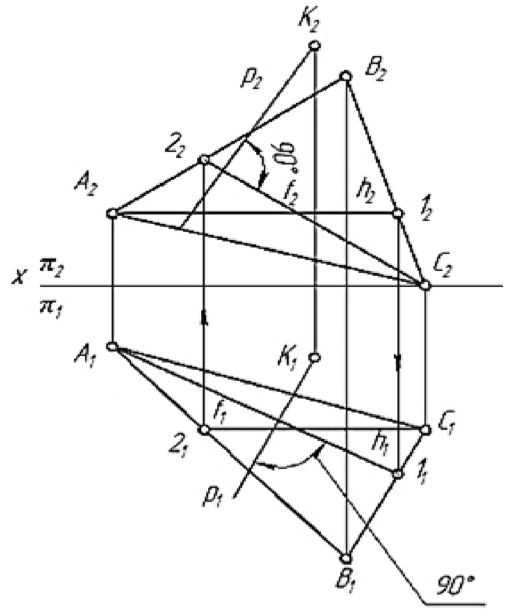
а) два *б) три* *в) четыре* *г) пять*

2. Прямая ___________ плоскости, если она __________ какой-либо прямой, принадлежащей этой плоскости.

а) перпендикулярна *б) параллельна* *в) наклонена к*

3. Прямая принадлежит плоскости, если ______ точки этой прямой принадлежат той же плоскости.

4. _______________ плоскости называется прямая, лежащая в плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций.



5. Фронталью плоскости называется прямая, лежащая в плоскости и параллельная _____________ плоскости проекций.

6. Построение горизонтали начинают с ее __________ проекции h_2, так как она всегда параллельна оси X.

7. Построение на чертеже фронтали начинают с проекции:____.

а) h_1 *б)* h_2

в) f_1 *г)* f_2 *д)* p_2

8. Прямая __________ является перпендикуляром к плоскости.

9. Если плоскость задана следами, то горизонтальная проекция фронтали f_1 _______________ оси X, а фронтальная ее проекция f_2 всегда _____________ фронтальному следу плоскости.

а) перпендикулярна *б) параллельна* *в) наклонена к*

10. Если прямая принадлежит заданной плоскости, то ее ________ лежат на одноименных следах этой плоскости.

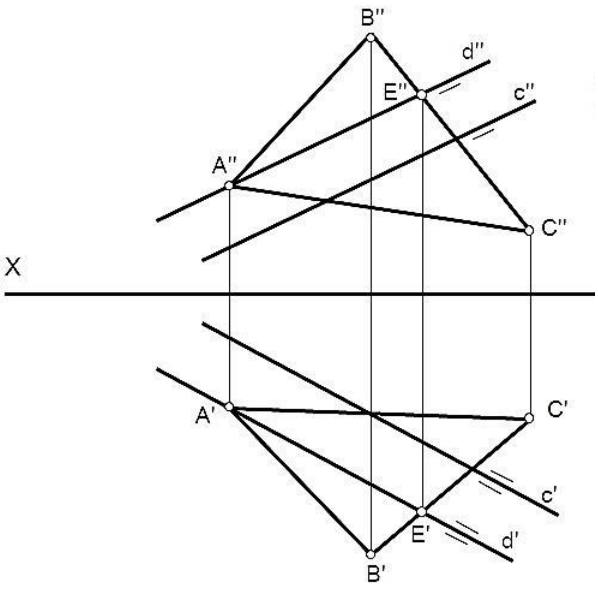
11. Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна ___________________ прямым, лежащим в данной плоскости.

12. Точки, которые принадлежат разным объектам, а на одной из плоскостей проекций их проекции совпадают, называются ____________ на этой плоскости проекций.

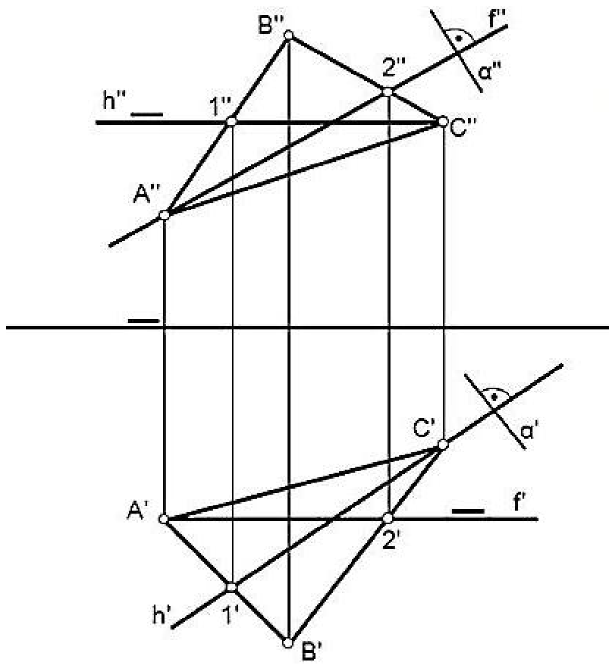
13. Прямая располагается _____________ к плоскости, если одноименные проекции прямой перпендикулярны одноименным следам плоскости.

14. Видимой из двух конкурирующих точек будет та, у которой ___________ больше.

15. Прямая, перпендикулярная плоскости, изображена на рисунке:____.

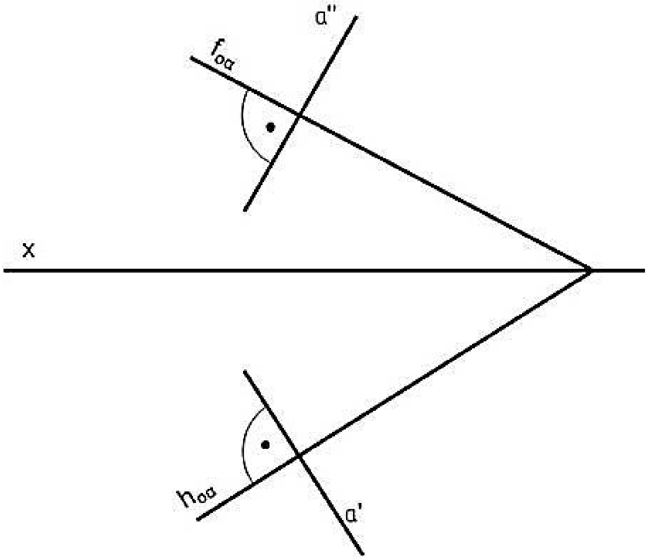


а)

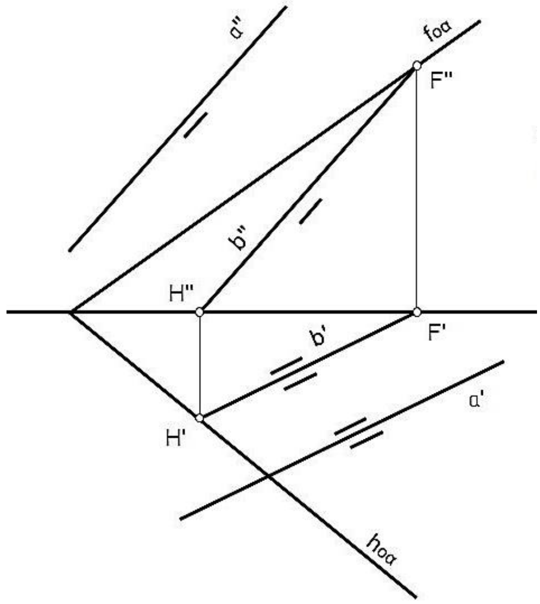


б)

16. Параллельные прямая и плоскость изображена на рисунке:____.



а)



б)

26. Для построения параллельной прямой необходимо, чтобы обе ее проекции были _________________одноименным проекциям прямой, лежащей в данной плоскости.

34. Горизонталь и фронталь позволяют получить без искажений проекции ________________ угла.

35. Горизонтальная проекция перпендикуляра расположена под ______ ____________ к горизонтальной проекции горизонтали, а фронтальная проекция под _______________ к фронтальной проекции фронтали.

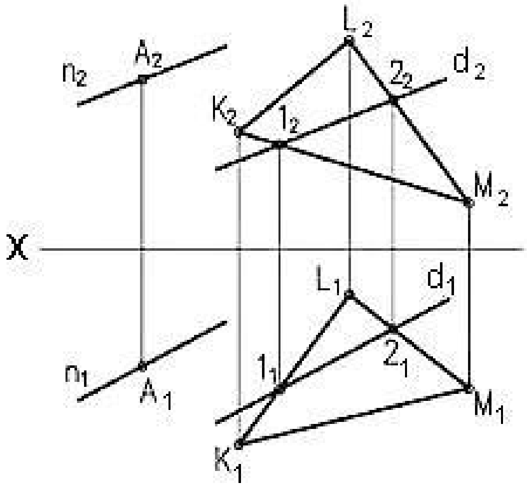
17. Прямая _____ принадлежит плоскости, заданной треугольником KLM.

18. Прямая n и плоскость, заданная треугольником KLM, располагаются друг к другу _______.

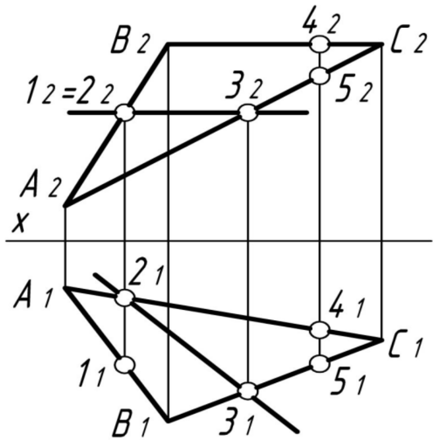
19. Прямая d _________________ плоскости.

20. Прямые n и d ____________ друг другу.

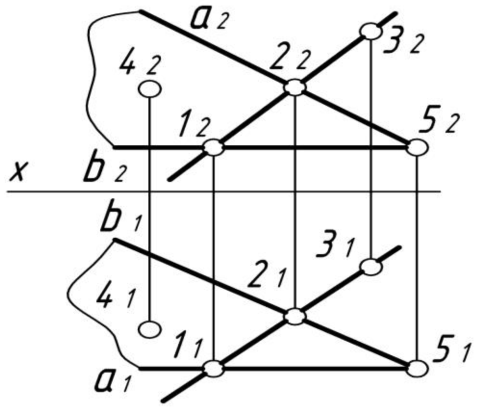
21. Параллельная к плоскости, заданной треугольником KLM, прямая ____.



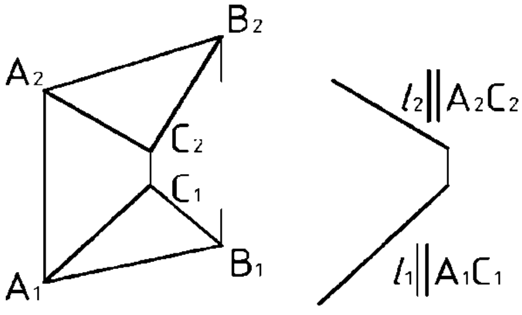
23. На рисунке плоскости, заданной треугольником *ABC*, принадлежат точки: ______________.



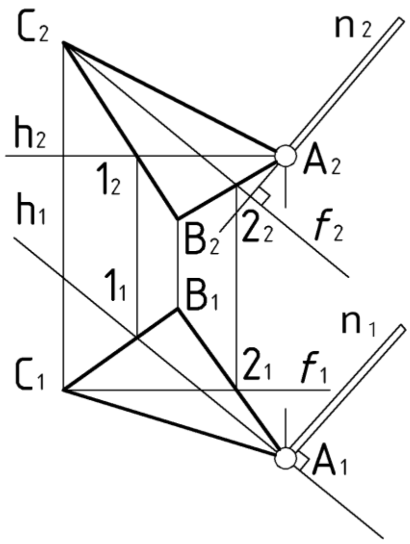
22. На рисунке плоскости, заданной пересекающимися прямыми *a* и *b*, принадлежат точки: ______________.



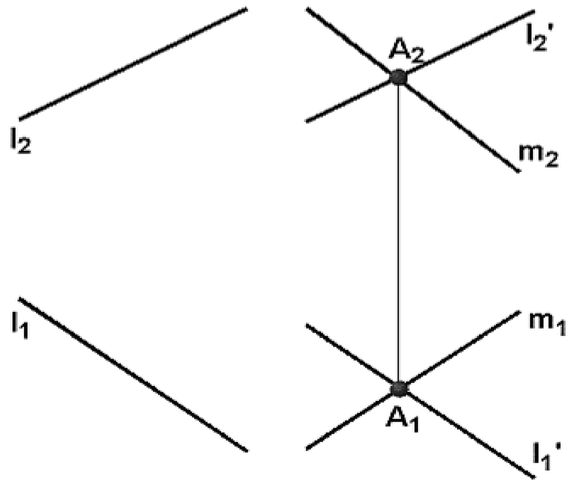
24. Доказательство параллельности прямой *l* и плоскости треугольника ABC:____ ____________________ __________________.

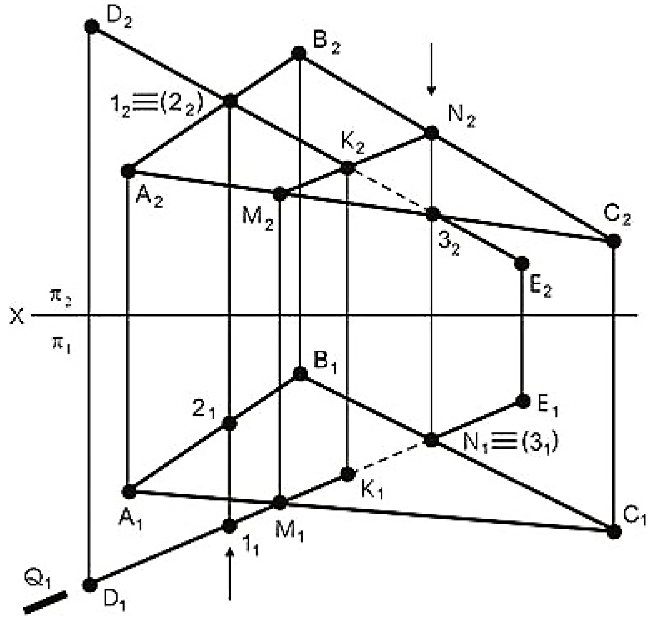


25. Доказать, что прямая n перпендикулярна плоскости треугольника ABC:________________ ______________________ _________________.



26. Алгоритм построения плоскости через точку A, параллельную заданной прямой *l* следующий: __________________________ ______________________ ________________.





27. Точки 1 и 2, 3 и N – это ____________________ точки.

28. Точка K является точкой ___________________________.

29. Плоскость Q занимает в пространстве ______________ положение.

30. Роль плоскости Q в построение носит ____________ характер.

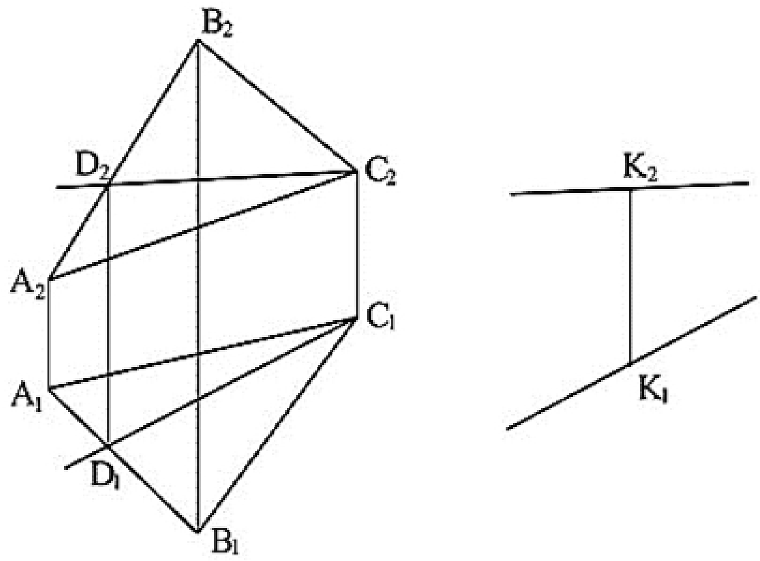
31. Плоскость Q включает в себя ______________.

32. Прямая DE и плоскость треугольника ABC ____________.

а) параллельны б) пересекаются

33. Стрелки на чертеже означают __________________.

37. Задача состоит в построении прямой, проходящей через точку К, и параллельной плоскости треугольника ABC. Для решения задачи в плоскости треугольника ABC проведена одна из ____________ и затем через точку К проведена прямая, параллельная этой ___________.



37. Установить правильную последовательность построения проекций прямой перпендикулярной к плоскости:

1) проводят фронталь F (AB) плоскости P: $f \,||\Pi_2$;

2) условие построения модели взаимно перпендикулярных прямых и плоскости выполнено;

3) прямой угол проецируется на плоскость Π_1 без искажения;

4) проводят через точку A горизонталь H (AC) плоскости P: $h \,||\Pi_1$;

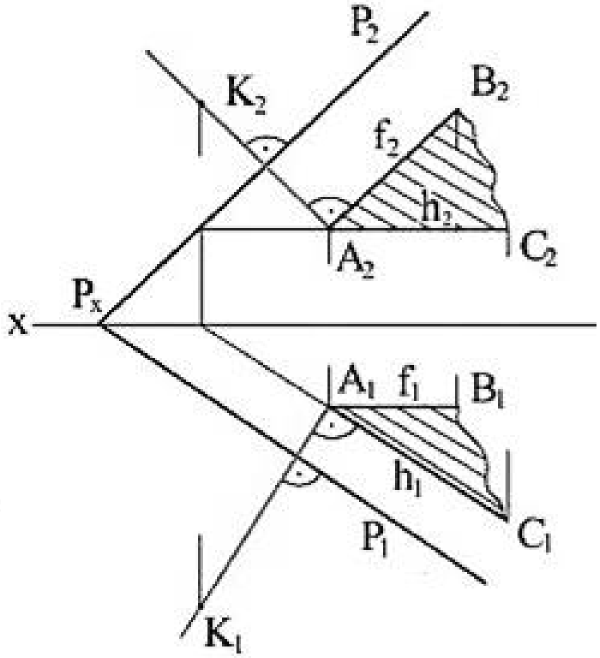
5) $K_1A_1 \perp h_1$, $K_2A_2 \perp f_2$;

6) на плоскости задают точку A;

7) прямые KA и AC образуют прямой угол, одна сторона которого AC параллельна плоскости Π_1;

8) в точке A восстанавливают перпендикуляр к плоскости;

9) $K_1A_1 \perp P_1$, $K_2A_2 \perp P_2$.



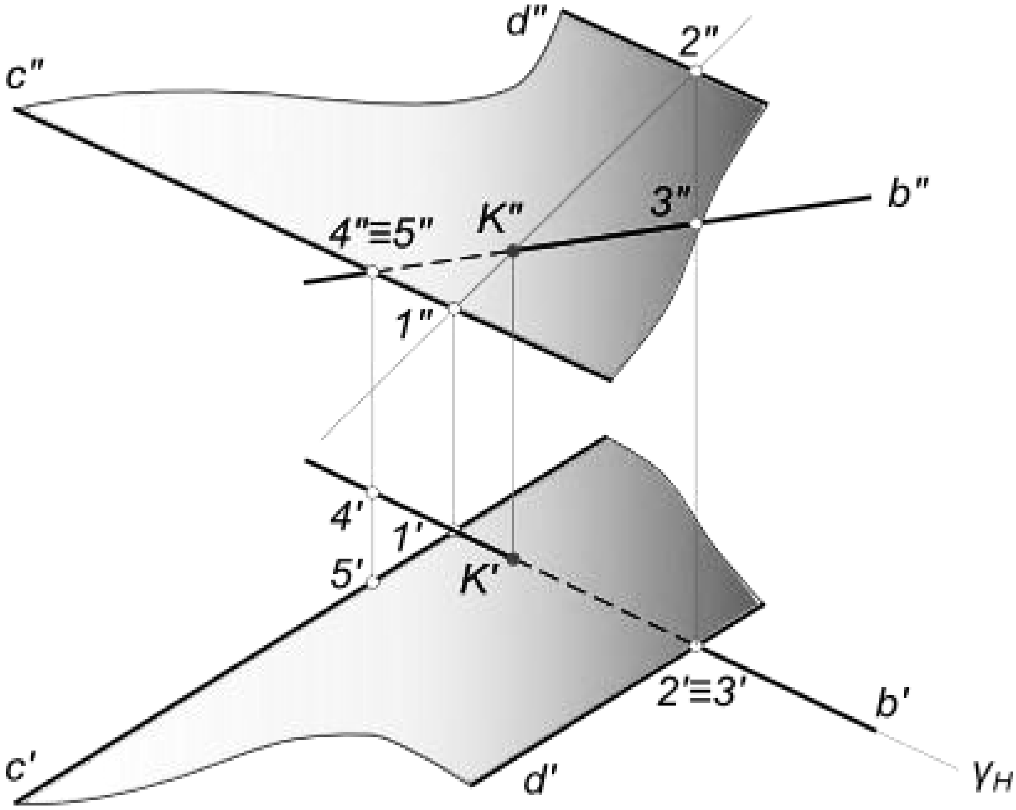
38. Установить правильную последовательность построения точки встречи прямой с плоскостью:

1) определяют точку $K''=l''\cap b''$. Зная K'', находим K' на пересечении b' с линией проекционной связи;

2) проводят через b' горизонтальный след γ_H - горизонтально-проецирующей плоскости γ;

3) используют для этого точки $1'$ и $2'$, принадлежащие данной прямой, в которых горизонтальный след γ_H пересекает прямые c' и d';

4) определяют фронтальную проекцию линии пересечения l, вспомогательной секущей плоскости γ с данной плоскостью α.



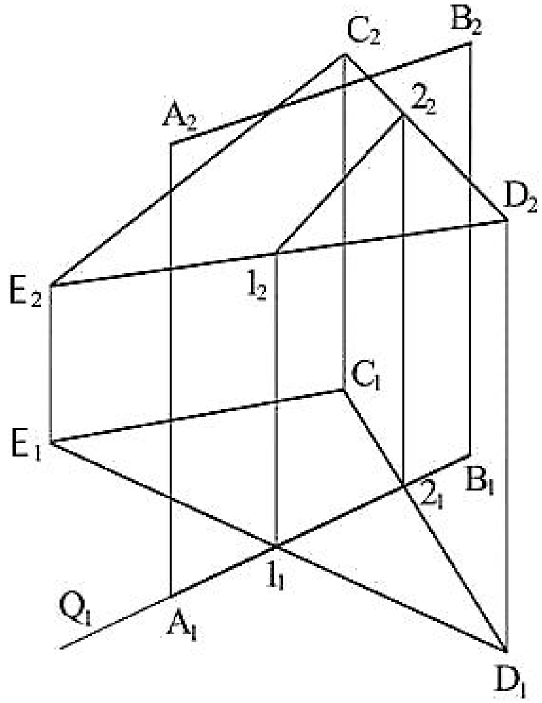
36. Установить правильную последовательность определения взаимного положения прямой и плоскости:

1) строят проекции линии пересечения двух плоскостей 12 – $1_1 2_1$ и $1_2 2_2$;

2) сравнение показывает, что прямая AB не параллельна плоскости треугольника ECD;

3) проводят через прямую AB вспомогательную секущую плоскость Q;

4) горизонтальный след горизонтально-проецирующей плоскости Q_1 сливается с одноименной проекцией прямой $A_1 B_1$.

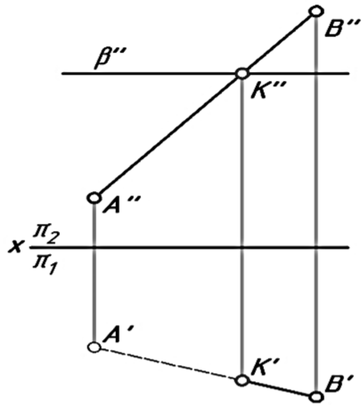


25. Установить соответствие между текстом и рисунками:

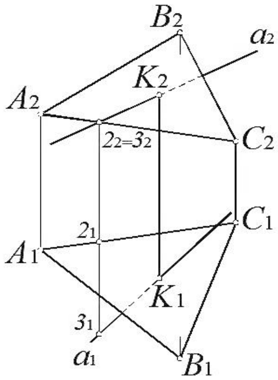
1) Прямая принадлежит плоскости

2) Прямая параллельна плоскости

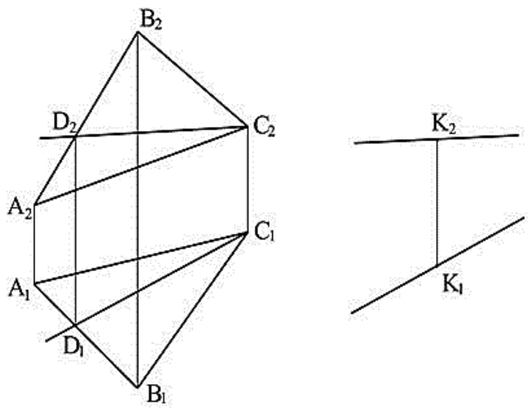
а)



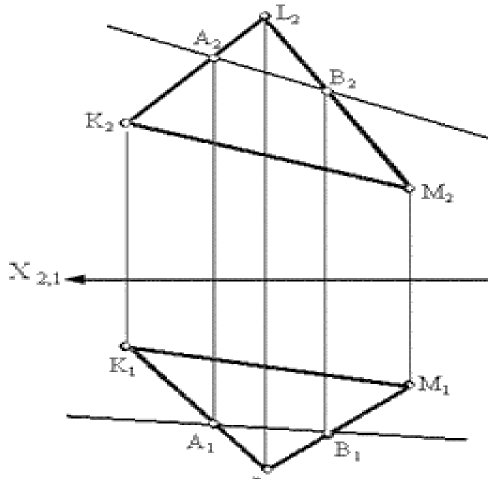
б)



в)

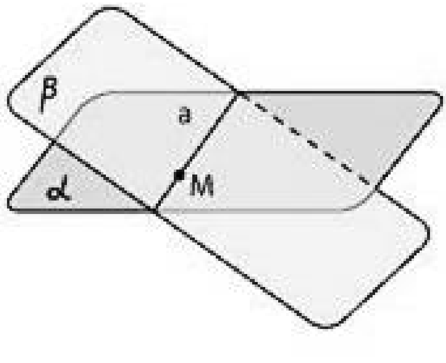


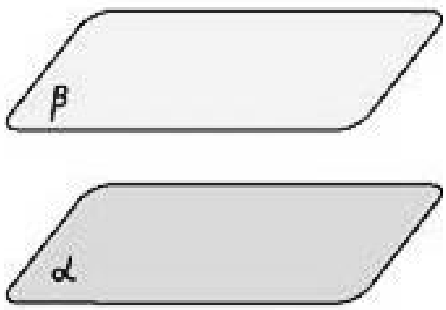
г)



РАЗДЕЛ № 8. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ

Две плоскости в пространстве могут быть пересекающимися (рис. 57,*а*) и параллельными (рис. 57,*б*) между собой.





а) *б)*

Рис. 57. Две плоскости в пространстве

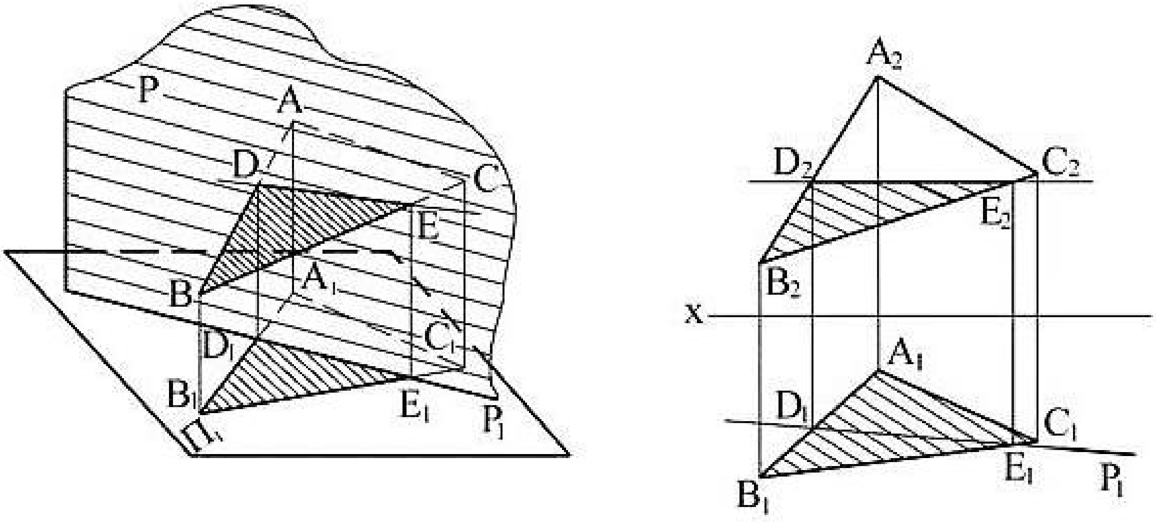
8.1. Пересечение плоскостей

Пересечение двух плоскостей общего положения представляет собой прямую линию. Известно, что любую прямую определяют две точки, поэтому для определения линии пересечения этих плоскостей достаточно найти две точки, принадлежащие одновременно обеим. Построение линии пересечения плоскостей - *вторая главная позиционная задача «Взаимное пересечение двух поверхностей»* - одна из основных задач начертательной геометрии, имеющих большое практическое значение.

Приведем примеры пересечения двух плоскостей различных положений при различных же способах их задания: следами; тремя точками, не лежащими на одной прямой; параллельными прямыми; пересекающимися прямыми и др.

Пример 1: Рассмотрим частный случай пресечения плоскостей, когда одна из них проецирующая. На рисунке 58 приведены плоскость общего положения, заданная треугольником ABC и горизонтально-проецирующая плоскость P. Двумя общими точками, принадлежащими обеим плоскостям, являются точки D и E, которые и определяют линию пересечения. Для определения этих точек находят точки пересечения сторон AB и BC с проецирующей плоскостью. Построение точек D и E как на пространственном чертеже (рис. 58,*а*), так и на эпюре (рис. 58,*б*) не вызывает затруднений, так как основано на разобранном выше свойстве проецирующих следов плоскостей.

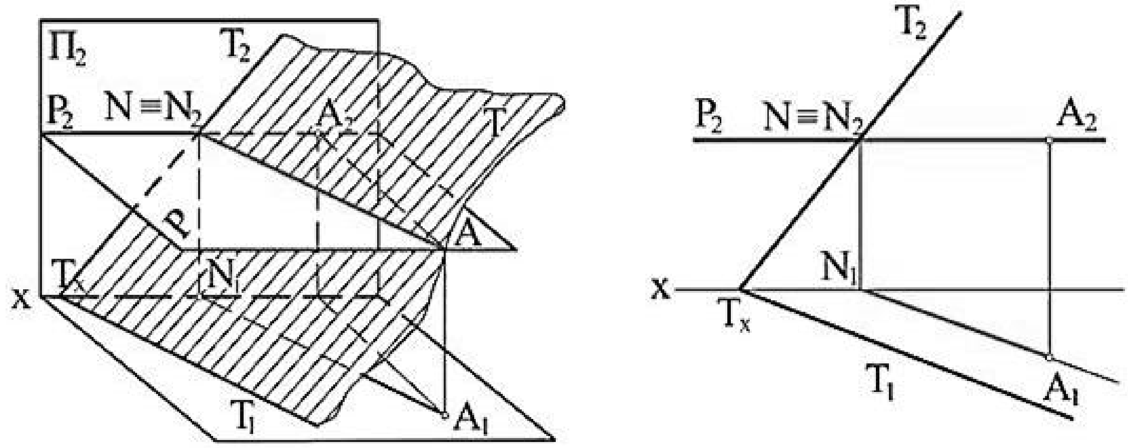
Соединяя одноименные проекции точек D и E получают проекции линии пересечения плоскости треугольника ABC и плоскости P. Горизонтальная проекция D_1E_1 линии пересечения заданных плоскостей совпадает с горизонтальной проекцией проецирующей плоскости P - горизонтальным следом P_1 .



а) *б)*

Рис. 58. Линия пересечения

Пример 2: На рисунке 59 показан случай пересечения двух плоскостей, когда известно направление линии пресечения, так как плоскость Р является плоскостью уровня ($P \| П_1$). Достаточно иметь лишь одну точку пересечения следов и далее провести через эту точку прямую, исходя из положения плоскостей и их следов. В нашем случае линия пересечения является общей горизонталью NA плоскостей Р и Т.



а) *б)*

Рис. 59. Линия пересечения двух плоскостей

Пример 3: На рисунке 60 построение линии пересечения двух плоскостей общего положения α и β, заданных следами.

Порядок построения линии пересечения плоскостей:

1) находят точку пересечения горизонтальных следов - это точка M (проекции M_1 и M_2, при этом M_1=M).

2) находят точку пересечения фронтальных следов - это точка N (проекции N_1 и N_2, при этом N_2=N).

3) строят линию пересечения плоскостей, соединив одноименные проекции полученных точек: M_1N_1 и M_2N_2. MN - линия пересечения плоскостей.

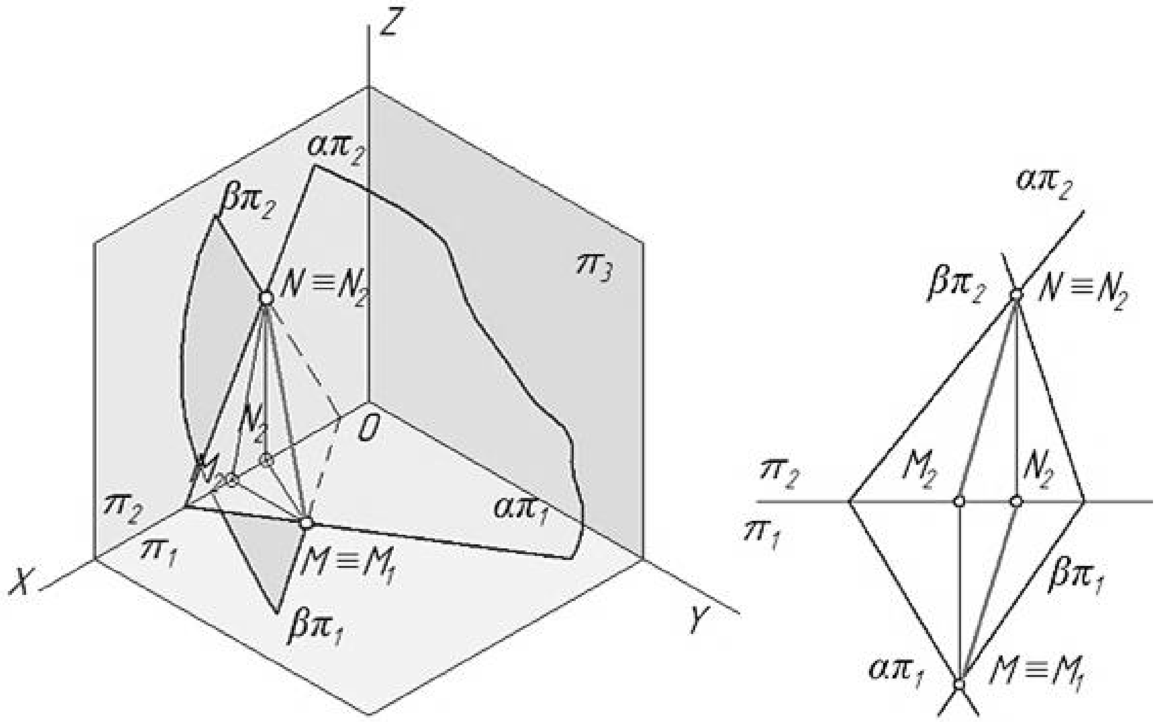
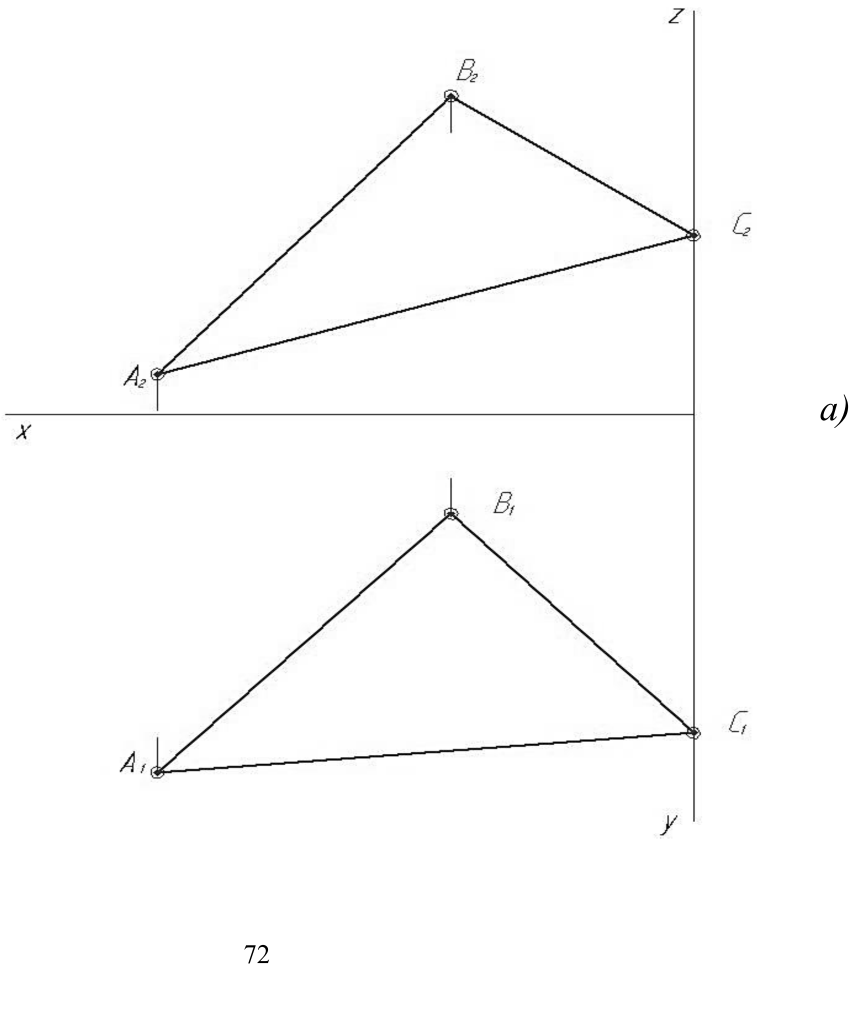


Рис. 60. Пересечение плоскостей, заданных следами

Пример 4: Построение линии пересечения двух треугольников.

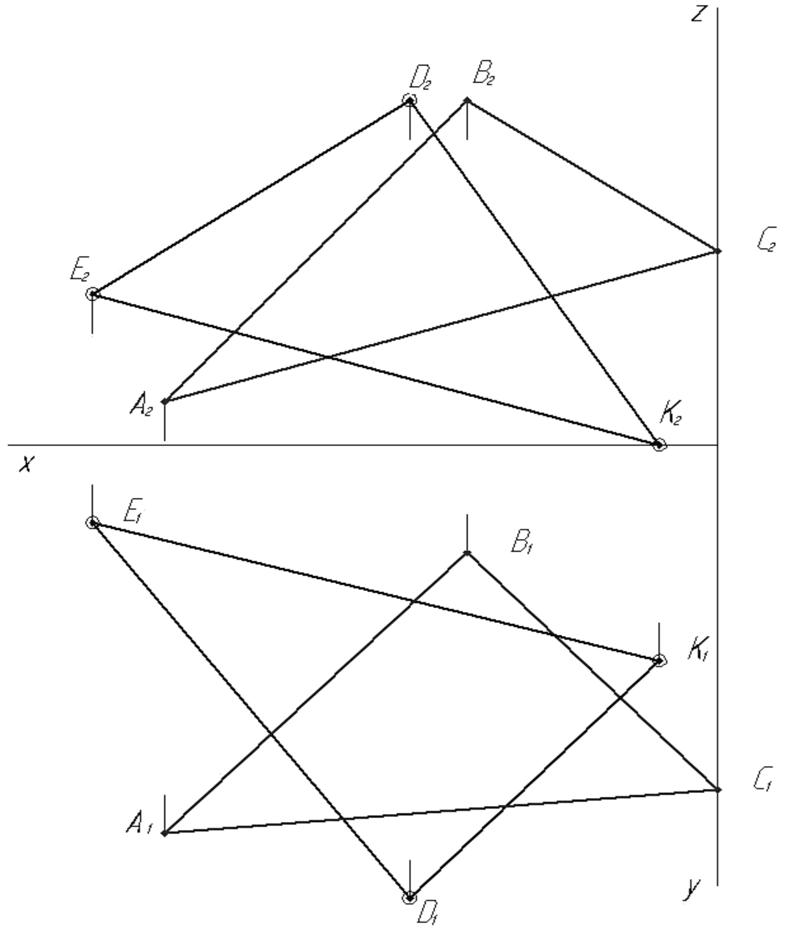
Этап 1.

Строят проекции треугольника *ABC* (рис. 61,*а*).



Этап 2.

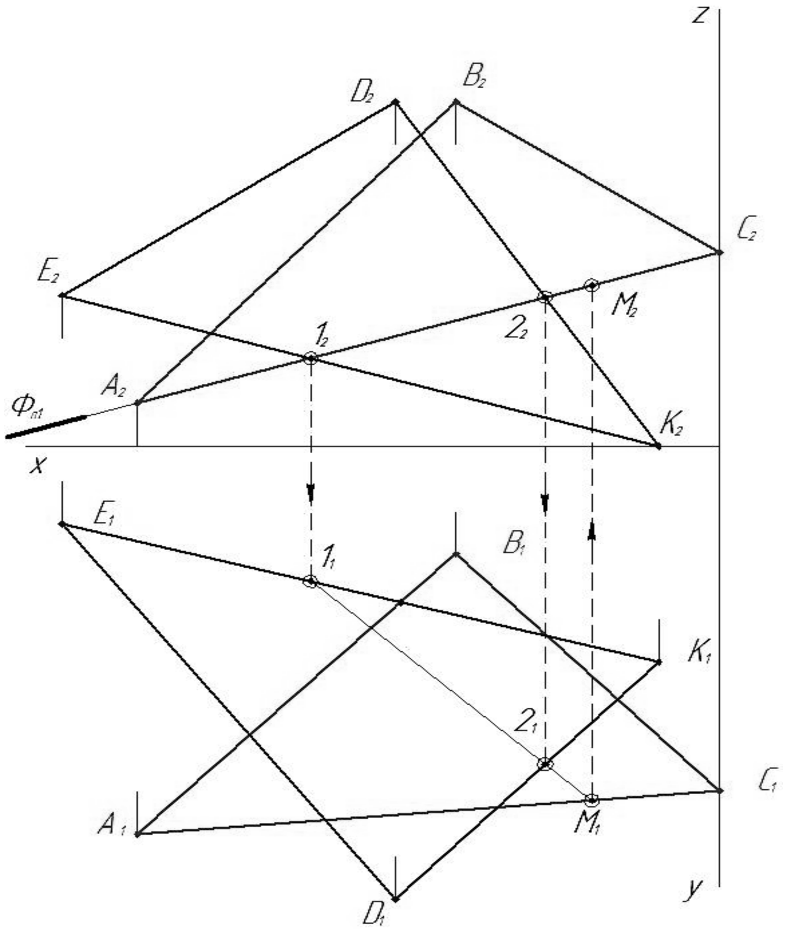
Строят проекции треугольника *EDK* (рис. 61,*б*).



б)

Этап 3.

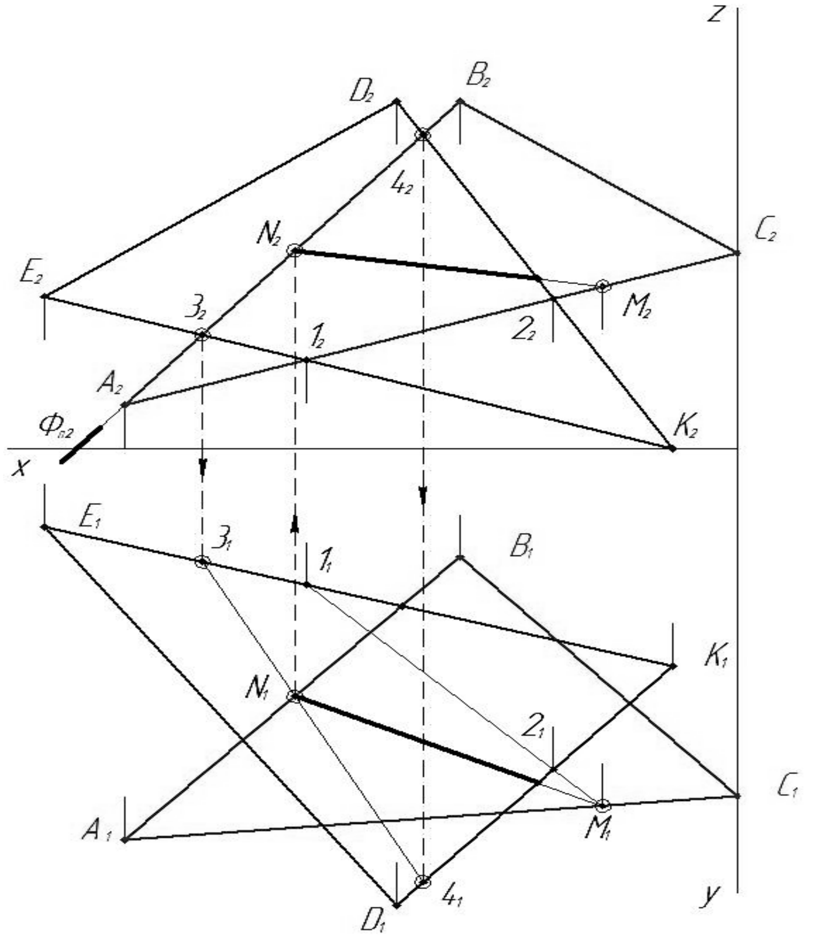
Находят точку пересечения стороны *AC* первого ΔABC с треугольником *EDK* (рис. 61,*в*).



в)

Этап 4.

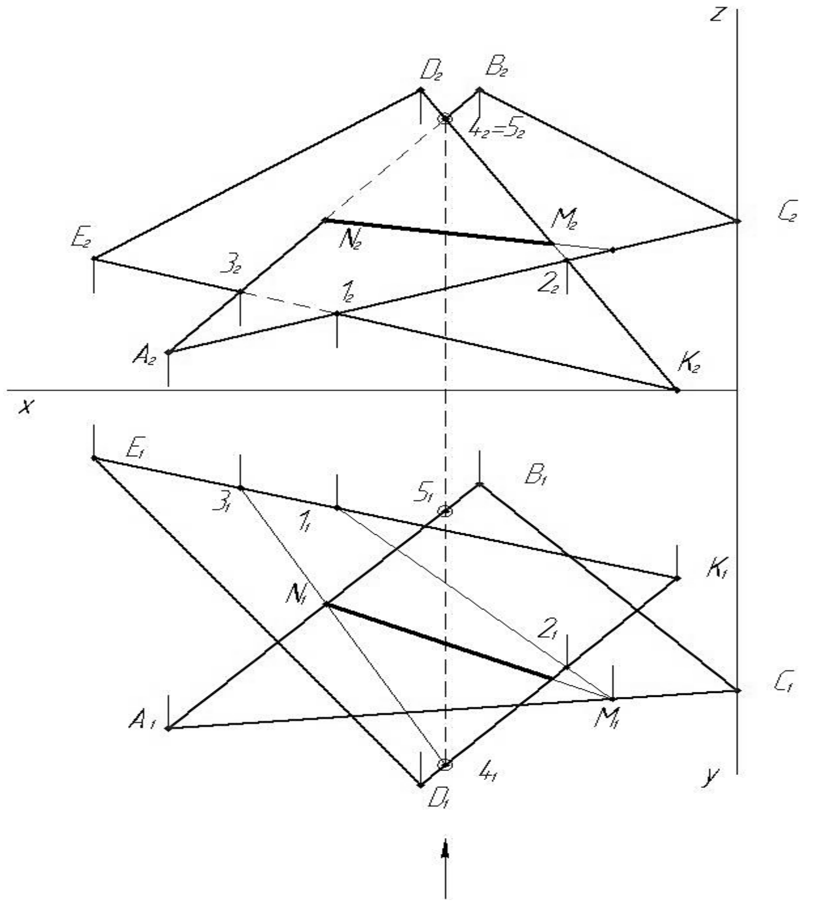
Находят точку пересечения стороны *AB* первого ΔABC с треугольником *EDK* и строят линию пересечения *MN* (рис. 61,*г*).



г)

Этап 5.

С помощью конкурирующих точек *4* и *5* определяют видимость треугольников на фронтальной плоскости проекций (рис. 61,*д*).



д)

Этап 6.

С помощью конкурирующих точек *6* и *7* определяем видимость треугольников на горизонтальной плоскости проекций (рис. 61,*е*).

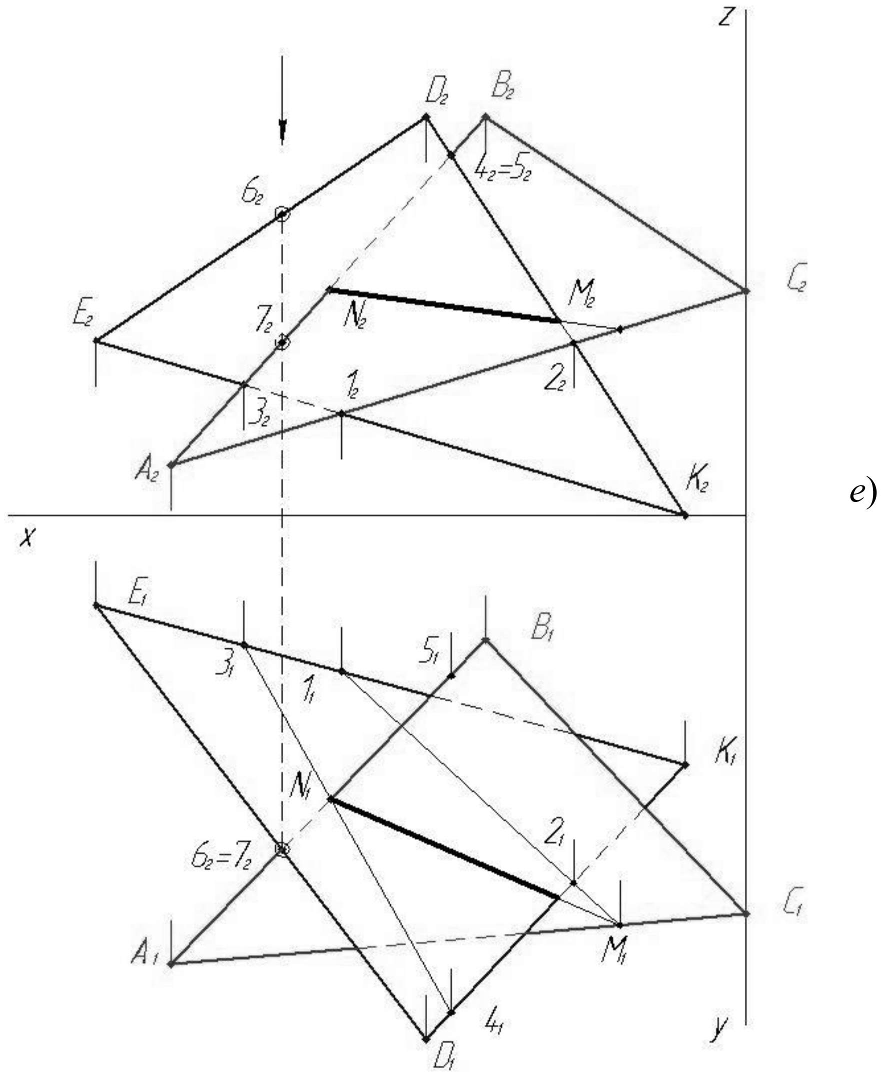


Рис. 61. Построение линии пересечения двух треугольников

Пример 5: Заданы плоскости $\alpha = m \parallel n$ и плоскость $\beta = \Delta ABC$ (рис. 62). Построение линии пересечения заданных плоскостей.

Для нахождения двух точек, общих для обеих заданных плоскостей, пользуются вспомогательными плоскостями частного положения. В качестве таких плоскостей выбирают, например, две вспомогательные плоскости частного положения: $\sigma \parallel \tau$; $\sigma \perp \pi_2$; $\tau \perp \pi_2$.

Введенные плоскости пересекаются с каждой из заданных плоскостей α и β по прямым, параллельным друг другу, так как $\sigma \parallel \tau$:

- результатом пересечения плоскостей α, σ и τ являются прямые (*45*) и (*67*);
- результатом пересечения плоскостей β, σ и τ являются прямые (*32*) и (*18*).

Прямые (*45*) и (*32*) лежат в плоскости σ. Точка их пересечения – это точка *M*, которая одновременно лежит и в плоскости α, и в плоскости β, а точнее, на прямой пересечения плоскостей. Аналогично находят точку *N*, общую для плоскостей α и β.

Соединив точки *M* и *N*, строят прямую пересечения плоскостей α и β.

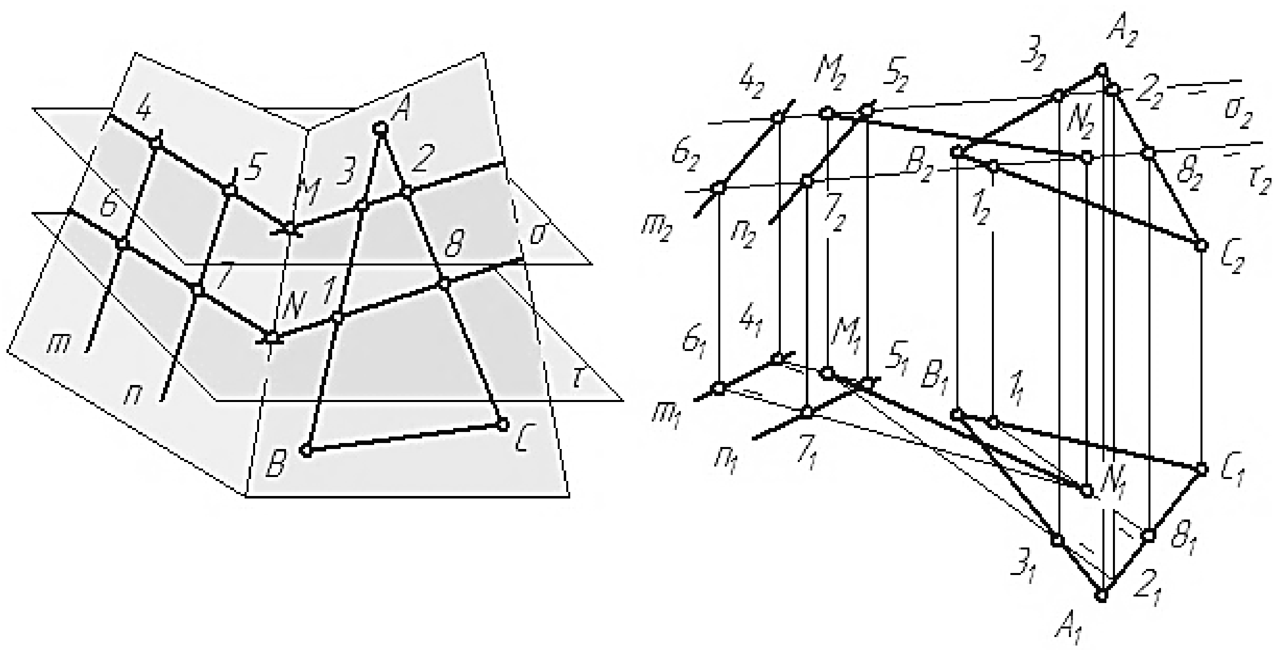


Рис. 62. Пересечение двух плоскостей общего положения

Взаимно перпендикулярные плоскости – частный случай пересекающихся плоскостей. Условие перпендикулярности двух плоскостей: *две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через прямую, перпендикулярную к другой* (рис. 63).

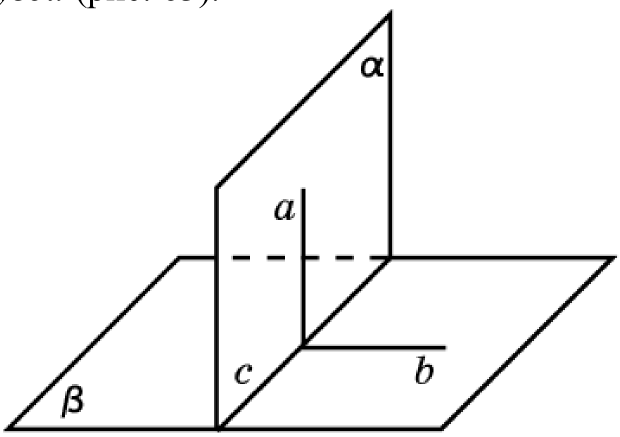


Рис. 63. Перпендикулярные плоскости α и β

Рассмотрим построение взаимно перпендикулярных плоскостей.

Заданы плоскость α = ΔABC и точка K вне плоскости α. Требуется построить плоскость $\beta \perp \alpha$, проходящую через точку K.

Алгоритм решения (рис. 64):

1) строят горизонталь H и фронталь F в заданной плоскости $\alpha = \Delta ABC$;

2) через точку K проводят перпендикуляр b к плоскости α (по теореме о перпендикуляре к плоскости: если прямая перпендикулярна плоскости, то ее проекции перпендикулярны к наклонным проекциям горизонтали и фронтали, лежащих в плоскости): $b_2 \perp \mathrm{f}_2$; $b_1 \perp h_1$;

3) плоскость β задают любым способом, например, двумя пересекающимися прямыми $a \cap b$. Таким образом, плоскость, перпендикулярная к заданной, построена: $\alpha \perp \beta$.

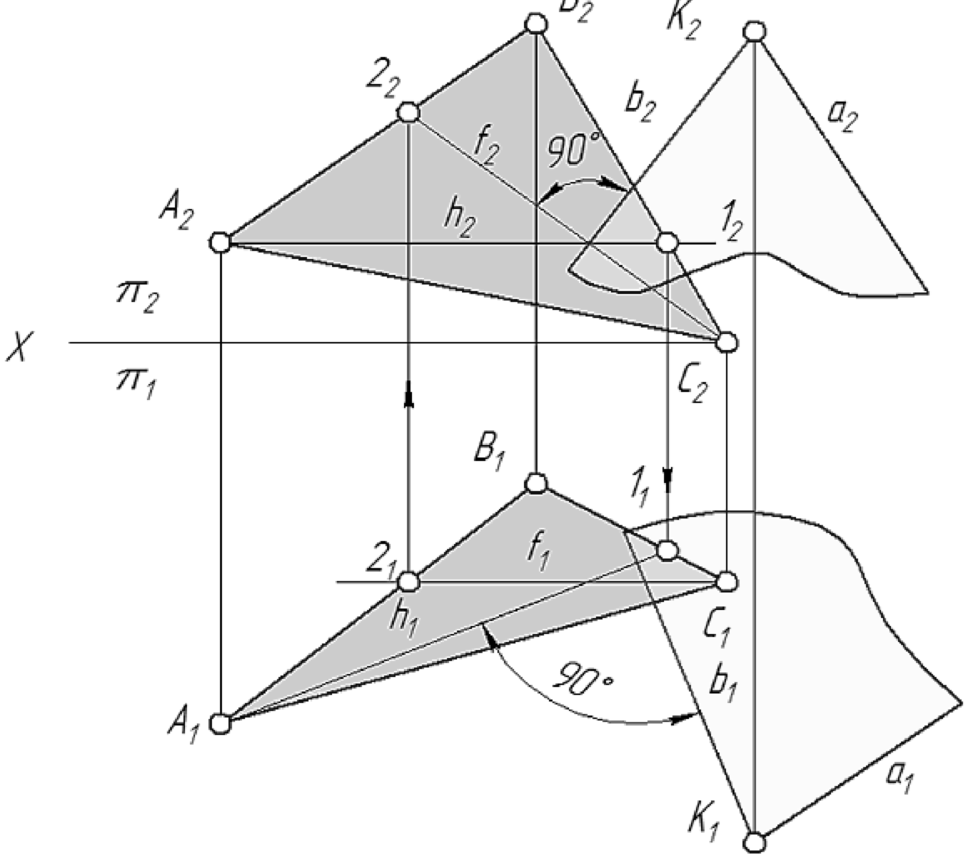


Рис. 64. Построение плоскости, перпендикулярной к ΔABC

8.2. Параллельность плоскостей

Признак параллельности двух плоскостей (рис. 65): *две плоскости взаимно параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.*

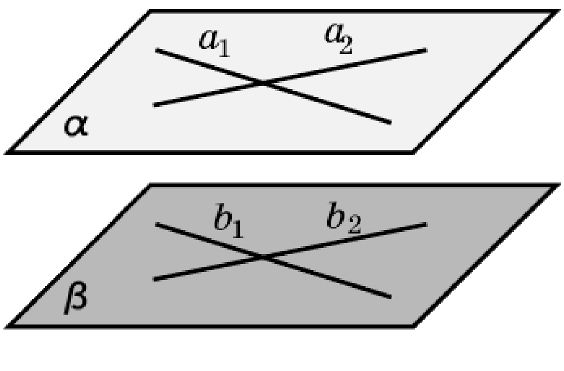


Рис. 65. Построение плоскости

Например, задана плоскость общего положения $\alpha = \Delta ABC$ и точка $F \notin \alpha$ (рис. 66), и необходимо через точку F провести плоскость β, параллельную плоскости α.

В качестве пересекающихся прямых в плоскости α берут, например, стороны треугольника AB и BC. И через точку F проводят прямую m, параллельную, например, стороне AB. Далее через точку F, или же через любую точку, принадлежащую линии m, проводят прямую n, параллельную, например, BC: $m \cap n = F$.

В результате $\beta = m \cap n$ и $\beta \parallel \alpha$ по определению.

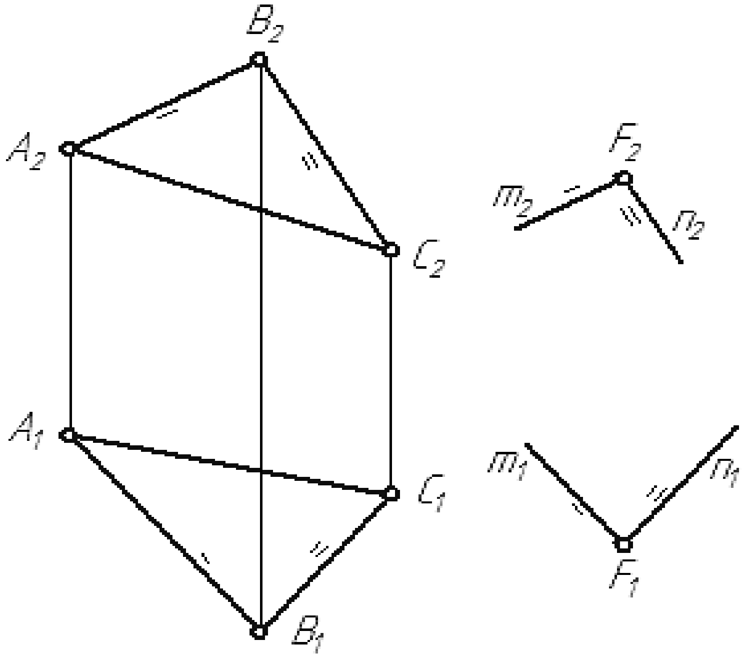


Рис. 66. Построение параллельных плоскостей

Так как выше изложенное действительно и для главных линий параллельных плоскостей, то можно сказать, что *плоскости параллельны, если параллельны их одноименные следы*.

На рисунке 67 изображены две плоскости, заданные следами, α и β. За пересекающиеся прямые в плоскости α можно принять ее следы: h_α и f_α; а в плоскости β следы: h_β и f_β.

Так как $h_\alpha \| h_\beta$, $f_\alpha \| f_\beta$, то из этого следует, что плоскость α параллельна плоскости β.

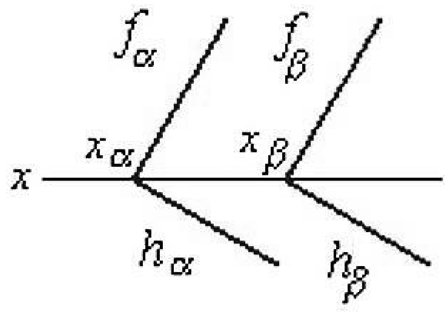


Рис. 67. Параллельные плоскости

8.3. Контрольные вопросы для самоподготовки

1. Какое взаимное положение могут занимать две плоскости?
2. Что представляет собой линия пересечения двух плоскостей?
3. Алгоритм построения линии пересечения двух плоскостей.
4. Как построить линию пересечения двух плоскостей, если плоскости заданы следами?
5. Служит ли признаком взаимного пересечения двух плоскостей хотя бы одной пары их одноименных следов?
6. К какому случаю расположения двух плоскостей относят две взаимно перпендикулярные плоскости?
7. Условие перпендикулярности двух плоскостей.
8. Как взаимно располагаются следы двух взаимно перпендикулярных горизонтально-проецирующих плоскостей?
9. Как взаимно располагаются следы двух взаимно перпендикулярных фронтально-проецирующих плоскостей?
10. Какое количество решений имеет задача проведения плоскости, перпендикулярной к заданной?
11. Какая точка из числа расположенных на общем перпендикуляре к горизонтальной плоскости проекций считается видимой на этой плоскости?
12. Какие точки из числа расположенных на общем перпендикуляре к фронтальной плоскости проекций считается невидимыми на этой плоскости?
13. Как определить видимость элементов в случае взаимного пересечения плоскостей?
14. Что такое фронтально-конкурирующие точки?
15. Какое изображение на плоскости проекций определяет положение фронтально-конкурирующих, горизонтально-конкурирующих точек в пространстве?
16. Как построить взаимно перпендикулярные плоскости?
17. В каких случаях взаимная перпендикулярность одной пары одноименных следов плоскостей соответствует взаимной перпендикулярности самих следов?
18. Перпендикулярны ли плоскости общего положения одна другой, если их одноименные следы взаимно перпендикулярны?
19. Какие две плоскости не пересекаются между собой?
20. Признак параллельности двух плоскостей.
21. Как взаимно располагаются горизонтальные следы двух параллельных между собой горизонтально-проецирующих плоскостей?
22. Как взаимно располагаются фронтальные следы двух параллельных между собой фронтально-проецирующих плоскостей?
23. Как взаимно располагаются одноименные следы двух параллельных между собой плоскостей?

8.4. Тестовые задания

1. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую ______, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

2. Две плоскости пересекаются друг с другом по _______________.

3. Построение линии пересечения плоскостей – вторая главная __________ задача «Взаимное пересечение двух поверхностей».

4. Чтобы построить линию пересечения, необходимо определить _______, принадлежащие одновременно каждой из заданных плоскостей.

5. Взаимно перпендикулярные плоскости – частный случай ___________ плоскостей.

6. Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через _________, перпендикулярную к другой плоскости.

7. Относительная видимость частей плоскостей определяется с помощью ____________________ точек.

8. Плоскости параллельны, если параллельны их ________________ следы.

9. Две плоскости взаимно параллельны, если две ____________ прямые одной плоскости соответственно параллельны двум ______________ прямым другой плоскости.

10. Две плоскости параллельны, если:______

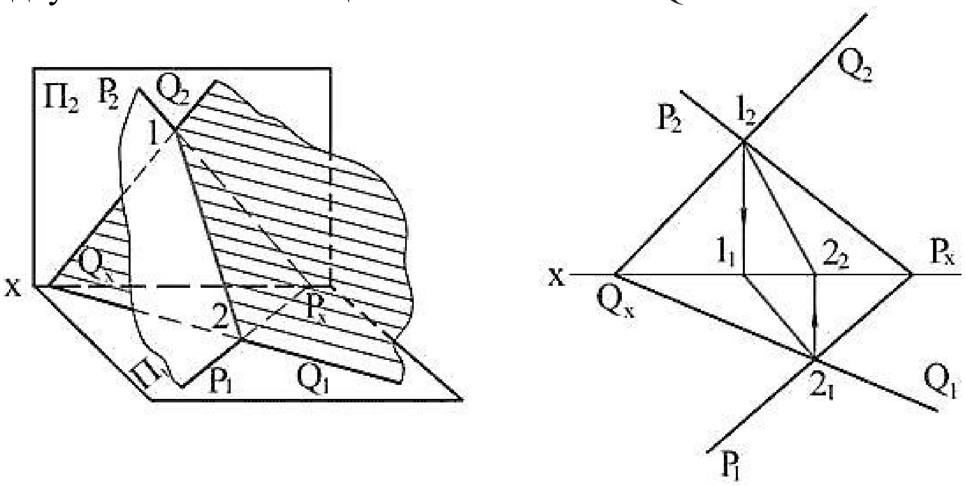
а) две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости;

б) две параллельные прямые одной плоскости параллельны двум параллельным прямым другой плоскости;

в) прямая, расположенная на одной плоскости параллельна прямой расположенной на другой плоскости;

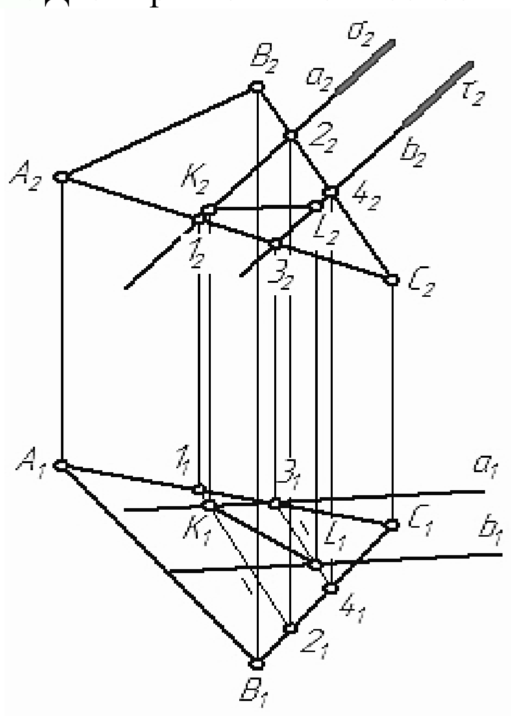
г) любое изображение на одной плоскости имеет зеркальное отражение на другой плоскости.

11. Точки *1* и *2* являются _______ прямой *12*, которая является линией пересечения двух плоскостей общего положения *P* и Q.

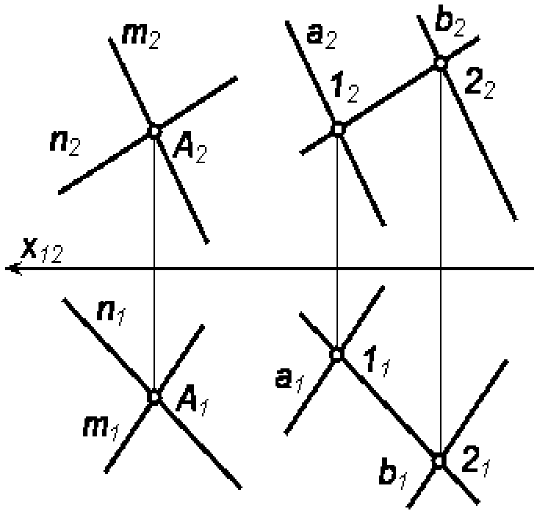


12. При построении линии пересечения двух плоскостей в общем случае в качестве вспомогательных плоскостей удобно использовать как плоскости уровня, так и _______________ плоскости.

13. Две параллельные плоскости изображены на рисунке:____.

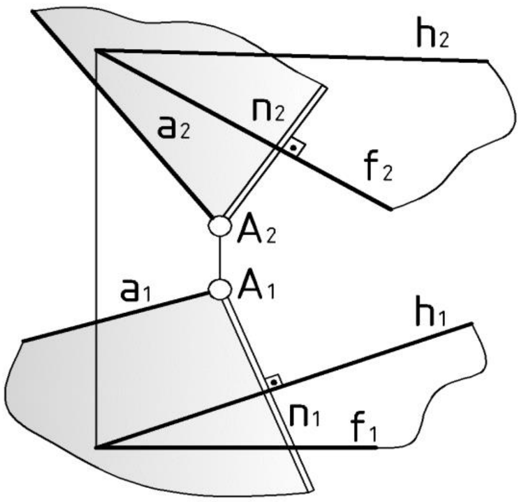


а)

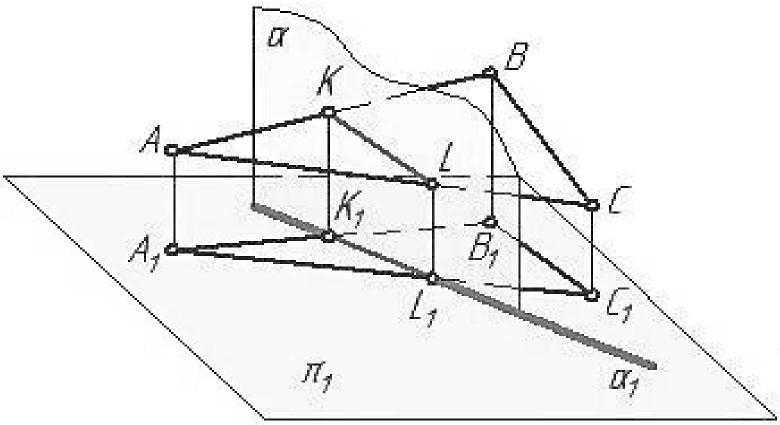


б)

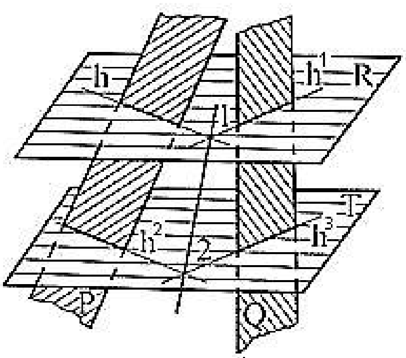
14. Написать алгоритм построения через точку A плоскости, перпендикулярной к плоскости, заданной двумя пересекающимися прямыми h и f:____
_____________________.

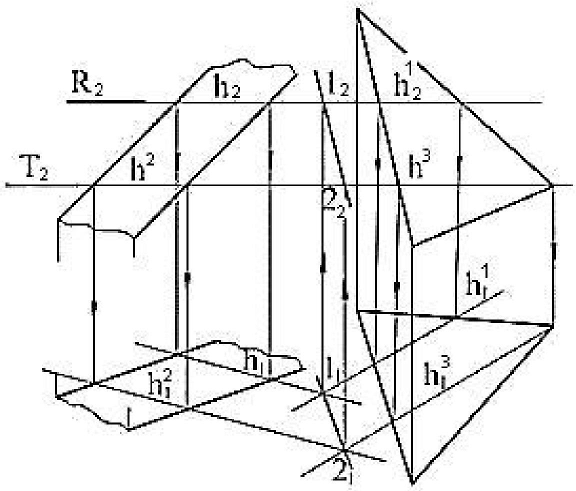


15. Определение линии пересечения двух плоскостей общего и частного положения (ΔABC и α). Так как ______________________ плоскость α пересекает стороны AB и AC треугольника ABC, то точки пересечения K и L этих сторон с плоскостью α являются общими для обеих заданных плоскостей. Соединив их, получают ___________ линию пересечения KL.

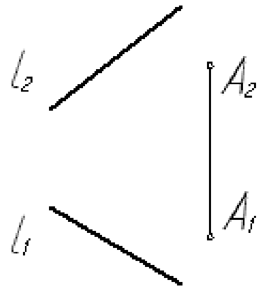


16. Для нахождения линии пересечения двух плоскостей общего положения используют _____________ плоскости T и R, которые занимают в пространстве ____________ положения, и параллельны плоскости проекций ____.





17. Через точку *A* (*A₁*, *A₂*) провести две плоскости α и β, линией пересечения которой будет линия *l*.



18. Установить правильную последовательность построения линии пересечения двух плоскостей α и β, заданных следами:

1) точка L''_1 лежит на оси x, ее положение определяют при помощи линии связи, проведенной из L'_1;

2) находят точку L''_2 на пересечении фронтальных следов плоскостей α и β;

3) прямая l, проходящая через точки пересечения следов плоскостей, является искомой;

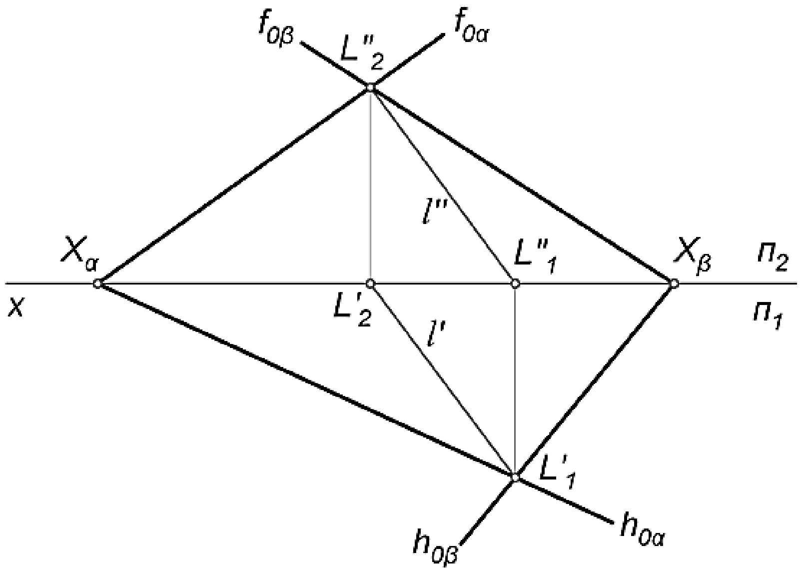
4) точка L'_2 лежит на оси x;

5) проводят прямые l' и l'' через соответствующие проекции точек L_1 и L_2;

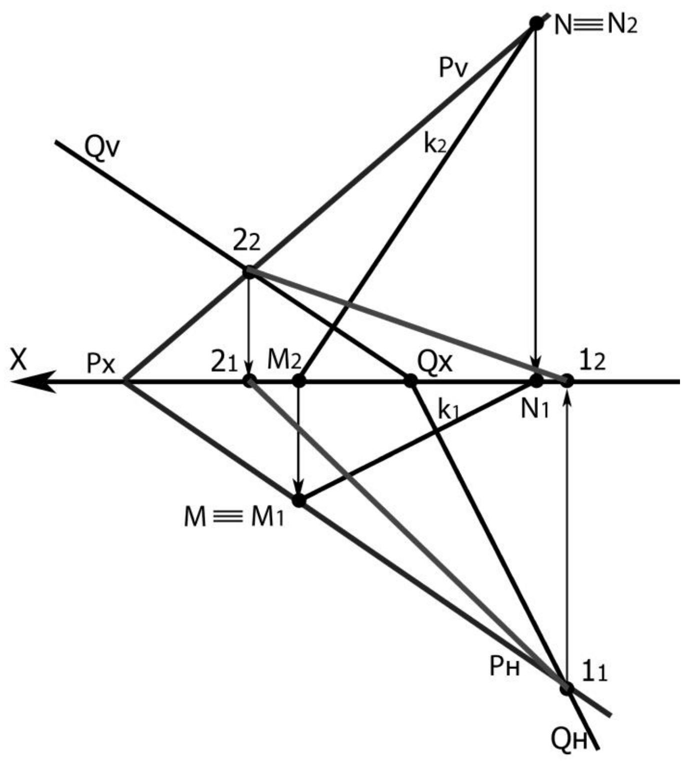
6) в роли вспомогательных плоскостей выступают плоскости проекций $П_1$ и $П_2$;

7) ее положение определяют по линии связи, проведенной из L''_2;

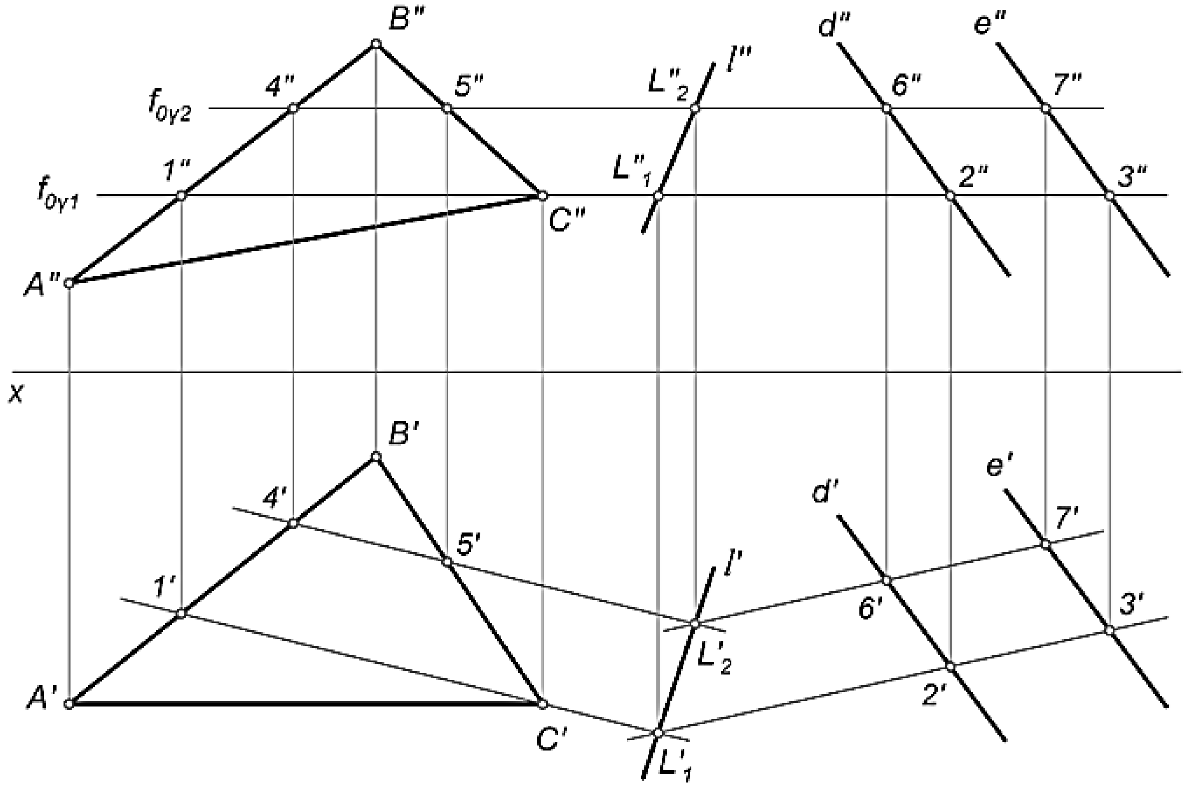
8) находят точку L'_1, расположенную на пересечении горизонтальных следов $h_{0\alpha}$ и $h_{0\beta}$.



19. Привести алгоритм определения и построения линии пересечения двух плоскостей общего положения Q и P:____________________
______________________.



20. Установить правильную последовательность построения линии пересечения плоскостей общего положения для случая, когда плоскость α задана проекциями треугольника *ABC,* а плоскость β - параллельными прямыми *d* и *e:*



1) находят горизонтальную проекцию точки L_1 на пересечении прямых 1'C' и 2'3'. Фронтальная проекция точки L_1 лежит на фронтальном следе плоскости γ;

2) вводят вспомогательную горизонтальную плоскость γ_2. С помощью построений, аналогичных описанным выше, находят проекции точки L_2;

3) через L_1 и L_2 проводят искомую прямую l;

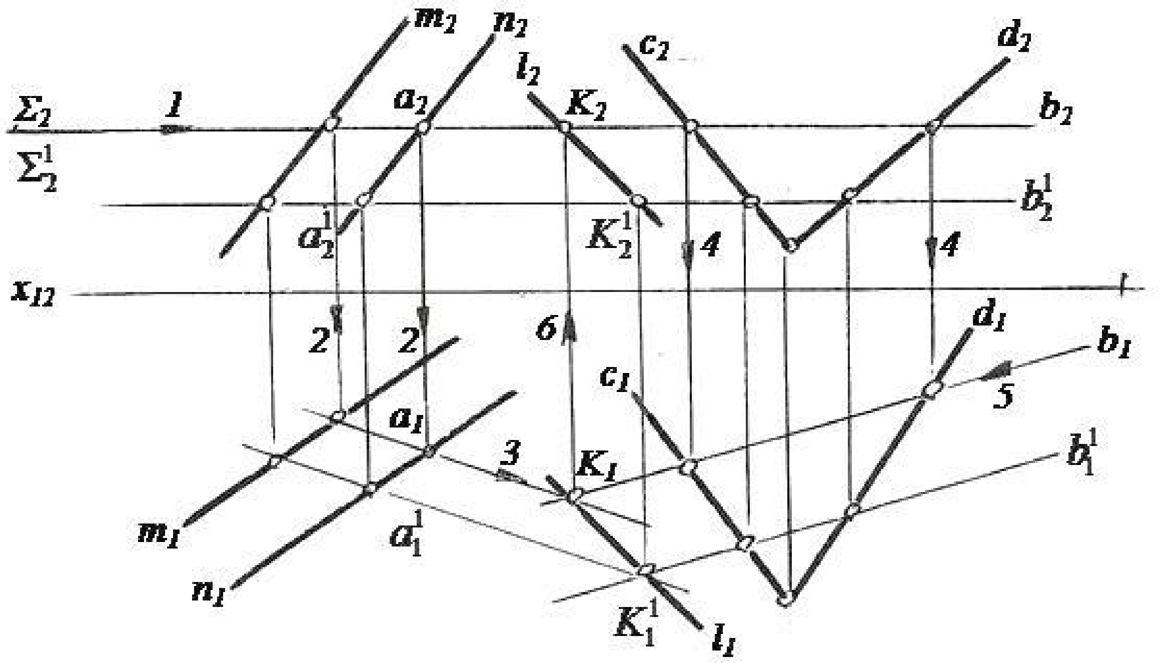
4) решение этой задачи осуществляется путем построения точек L_1 и L_2, принадлежащих линии пересечения;

5) вводят вспомогательную горизонтальную плоскость γ_1, она пересекает α и β по прямым;

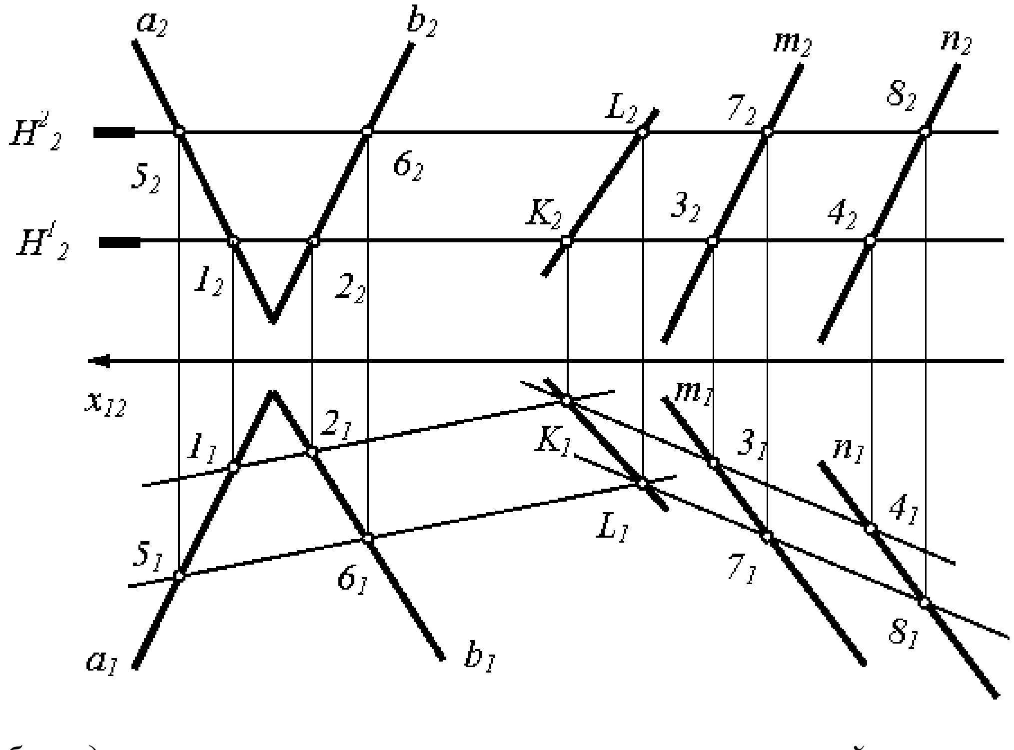
6) определяют горизонтальные проекции 1'C' и 2'3' по линиям связи;

7) фронтальные проекции этих прямых 1"C" и 2"3" совпадают с фронтальным следом плоскости γ_1. он обозначен на рисунке как $f_{0\gamma 1}$ и расположен параллельно оси x.

21. На рисунке заданы плоскости Ф ($m||n$) и Т ($c\cap d$). Для определения ______ точек линии пересечения заданных плоскостей достаточно двух плоскостей-посредников. Для нахождения одной точки K введена ______________ плоскость Σ || ____: $\Sigma\cap\Phi=a$, $\Sigma\cap T=b$ и $a\cap b=K$. Для определения второй точки K^1 пересекаем плоскости Ф и Т плоскостью _____ и аналогично строим вторую точку K^1. Соединив точки K и K^1, получаем линию пересечения $l = \Phi\cap T$.



22. Установить правильную последовательность решения задачи построения линии пересечения двух плоскостей $\Sigma(a \cap b)$ и $\Theta(m||n)$:



1) обе заданные плоскости пересекают вспомогательной плоскостью;

2) находят точку пересечения построенных прямых, она будет принадлежать искомой линии пересечения данных плоскостей;

3) для построения точки L - горизонтальная плоскость уровня H^2;

4) строят прямые пересечения вспомогательной плоскости с каждой из заданных плоскостей;

5) для построения точки K проведена вспомогательная горизонтальная плоскость уровня H^1;

6) для нахождения второй точки линии пересечения проводят вторую вспомогательную плоскость и повторяют приведенный алгоритм решения.

23. Установить правильную последовательность построения линии пересечения двух плоскостей, заданных треугольниками:

1) аналогично строят вторую точку N, принадлежащую искомой линии пересечения заданных плоскостей;

2) находят линию пересечения 34 плоскости с плоскостью ΔDEF;

3) заключают прямую EF во вспомогательную горизонтально-проецирующую плоскость δ;

4) строят фронтальную проекцию $1_2 2_2$ линии пересечения плоскости δ с плоскостью ΔABC;

5) находят фронтальную проекцию M2 искомой точки M на пересечении фронтальную проекцию $1_2 2_2$ с фронтальной проекцией E_2 F_2 прямой EF;

6) находят горизонтальную проекцию M_1 точки M с помощью линии проекционной связи;

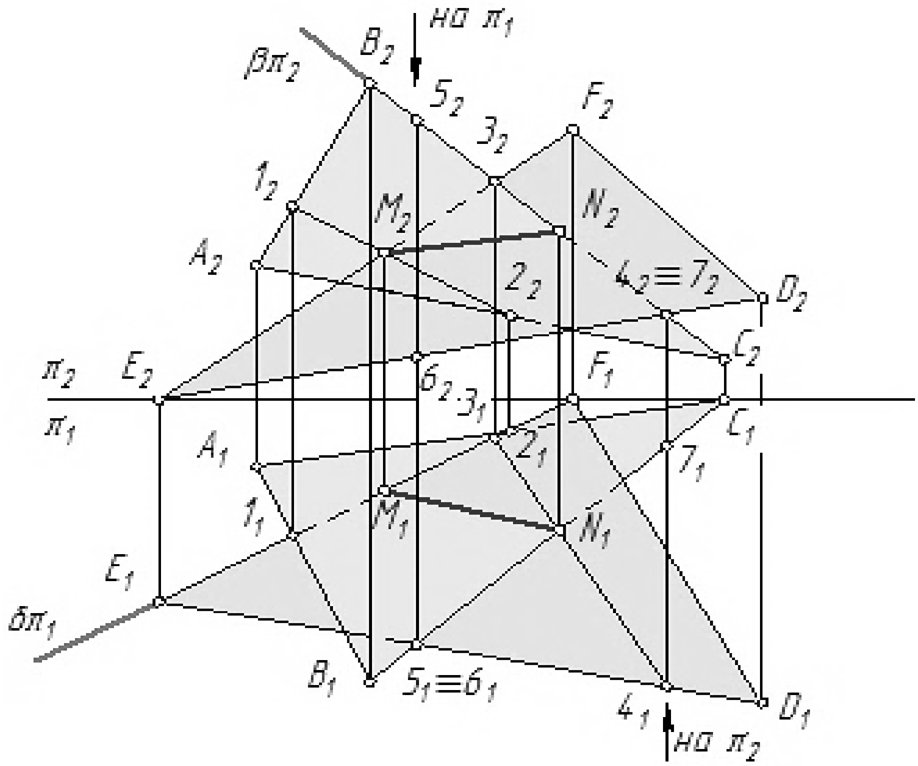
7) определяют с помощью конкурирующих точек для каждой плоскости отдельно видимые участки треугольников;

8) заключают во фронтально-проецирующую плоскость β прямую BC;

9) строят точку M пересечения прямой EF с плоскостью ΔABC;

10) на пересечении линии 34 и прямой BC находят точку N;

11) выбирают одну из сторон треугольника и строят точку пересечения этой стороны с плоскостью другого треугольника.



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Автор надеется, что представленное учебное пособие будет весьма полезным дополнением к лекционному курсу по начертательной геометрии. Современный процесс конструирования и проектирования изделий автоматизирован и компьютеризирован, но, несмотря на это, начертательная геометрия формируют пространственное мышление будущего выпускника.

При изучении начертательной геометрии студенты приобретают теоретические знания, графические навыки и умения, необходимые для разработки и оформления конструкторской документации. Кроме этого, освоение начертательной геометрии стимулирует развитие инженерной интуиции, изобретательства, то есть тех качеств, которые, несомненно, являются важными в будущей деятельности. Язык чертежа остается одним из наиболее информативных международных языков техники, и специалист обязан владеть им.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. 92s.ru/wp-content/uploads/2011/.../10-класс-рабочая-тетрадь-№1Монид-Н.Н.

2. http://www.studfiles.ru/preview/3973679/page:3/

3. http://www.viktoriastar.ru/sledi-priamoi.html

4. http://degeo.weebly.com/105410… 61081.html

5. Прямая. Взаимное расположение прямых: Методические указания к выполнению семестровой работы по дисциплине «Начертательная геометрия. Инженерная графика» / Сост. Н. В. Бережная; Волгоград, Гос. техн. ун-т, 2005. – 24 с.

6. http://studopedia.org/11-2573.html

7. http://www.abc-people.com/data/leonardov/zolot_sech-txt.htm

8.https://ngeo.fxyz.ru /метрические_задачи/

9. Начертательная геометрия. Модуль №1: Учеб.-метод. пособие / Сост. Т.А. Варенцова, Г.Н. Уполовникова. – Тольятти: ТГУ, 2007. - 40 с.

10. http://school70.ru/sferik/proekziy10.htm

11. Учебный модуль№3. Задание геометрических объектов на чертеже / В.Л. Раков. - Санкт-Петербург, 2014.

12. http://www.studfiles.ru/preview/5916529/page:26/

13. http://helpstudent5.narod.ru/page10.html

14. Методика решения задач по начертательной геометрии: Учебное пособие, 6-е изд. / В.С. Дукмасова, В.А. Краснов. – Челябинск: Изд. ЮУрГУ, 2000. – 103 с.

15. http://refdb.ru/look/1311726-pall.html

16. http://cadinstructor.org/ng/lectures/3-ploskost/

17. http://egemaximum.ru/perpendikulyarnost-pryamyx-i-ploskostej/

18. http://refleader.ru/bewbewyfsqas.html

19. http://student-com.ru/...B2.html

20. http://studopedia.org/2-136465.html

21. Азбука начертательной геометрии. Часть I. Учебное пособие/ О.А. Маркова. - Нижнекамск: Нижнекамский химико-технологический институт (филиал) ФГБОУ ВПО «КНИТУ», 2012. - 44 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное пособие

Маркова Ольга Анатольевна
кандидат педагогических наук, доцент

АЗБУКА НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Часть II

Подписано в печать 02.11.2016 г. Формат 60x84 1/16.
Печать офсетная. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 5,1515.
Тираж 100. Заказ 53707.

Отпечатано в ООО «ИПЦ «Гузель»
Республика Татарстан, г. Нижнекамск,
пр. Химиков, д. 18; тел.: 30-31-60