# Министерство образования и науки Российской Федерации

# **Нижнекамский химико-технологический институт (филиал)**

# федерального государственного бюджетного образовательного

# учреждения высшего образования

# «Казанский национальный исследовательский технологический

# университет»

# **А.В. Садыков**

Математическая логика

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

**Нижнекамск**

**2016**

**УДК 510.6**

**С 14**

Печатается по решению редакционно-издательского совета НХТИ ФГБОУ ВО «КНИТУ».

## **Рецензенты:**

## **Апайчева Л.А.,** кандидат физ.-мат. наук, доцент;

**Саримов Н.Н.,** кандидат физ.-мат. наук, доцент.

# **Садыков, А.В.**

**С 14** Математическая логика : учебное пособие / А.В. Садыков. – Нижнекамск : НХТИ ФГБОУ ВО «КНИТУ», 2016. – 93 с.

В работе приводятся основные базовые понятия по разделам математической логики. Излагаемый материал сопровождается примерами и дополняется упражнениями. Приведены задачи для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров «Информатика и вычислительная техника», «Управление в технических системах», «Автоматизация технологических процессов и производств».

Подготовлено на кафедре математики Нижнекамского химико-технологического института.

**УДК 510.6**

© Садыков А.В., 2016

© НХТИ ФГБОУ ВО «КНИТУ», 2016

Содержание

1. ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ …….………….…….… 4
   1. Высказывания и операции над ними …………………4
   2. Формулы алгебры высказываний …………………… 6
   3. Классификация формул. Равносильные формулы….. 7
   4. Нормальные формы ………………………………..... 12
   5. Логическое следование ……………………………… 18
   6. Правила вывода ……………………………………… 21
2. ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ ………………………………………………………………….25
   1. Функции алгебры логики …………………………… 25
   2. Специальные замкнутые классы функций   
      алгебры логики ……………………………….…...… 29
   3. Приложение булевых функций к анализу   
      и синтезу релейно-контактных схем.................……. 31
3. ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ ……..….……… 33
4. ПРАВИЛО РЕЗОЛЮЦИЙ…….……………………… 38
5. ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ ………………..…….……. 41
   1. Определение предиката ……………………….……. 41
   2. Логические операции над предикатами …….……... 43
   3. Теоретико-множественный смысл предикатов…..… 46
   4. Классификация предикатов …………………….….. 47
   5. Формулы логики предикатов. Равносильность формул …………………….……………………………..…… 47
   6. Классификация формул логики предикатов……… 49
6. ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ ……………….…… . 52

7. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ…... 54

ЛИТЕРАТУРА …………..………….. ………………….. 92

1. ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

1.1. Высказывания и операции над ними

**Определение 1.** ***Высказывани­е*** – связное повествовательное предложение, о котором можно сказать истинно оно или ложно.

**Примеры.**

*А*1 – " 8 < 5 "

*А*2 – " Город Саратов находится на берегу Волги "

*А*3 – " Слава российским космонавтам! "

В приведенных примерах высказываниями являются *А*1, *А*2, причем *А*1 – ложное высказывание, *А*2 – истинное высказывание. *А*3 не является высказыванием, так как не является повествовательным предложением.

Высказывание можно рассматривать как величину, принимающую два значения: "*истина*" и "*ложь*". Высказывания будем обозначать латин­скими буквами, а их значения, то есть "*истину*" и "*ложь*", соответственно 1 и 0. Введем функцию **, заданную на совокупности всех высказываний и принимающую значения в множестве {0, 1}, по следующему правилу:



Функцию ** называют ***функцией истинности***, а значение  для высказывания *P* – ***значением истинности*** или ***логическим значением*** высказывания *P*. Для приведенных высказываний имеем .

Из элементарных высказываний с помощью логических операций строят ***сложные высказывания***. В качестве основных в алгебре высказываний принято пять логических операций. Эти операции определяются следующим образом.

**Определение 2.** ***Конъюнкцией*** двух высказываний *А*, *В* на­зывается высказывание *АВ*, которое истинно тогда и только тогда, когда истинны одновременно оба высказывания. Очевидно, в обыч­ной речи операции конъюнкции соответствует союз "*и*". Конъюнкцию еще обозначают символами •, &.

**Определение 3.** ***Дизъюнкцией*** двух высказываний *А*, *В* на­зывается высказывание *A*∨*B*, которое ложно тогда и только тогда, когда ложны одновременно оба высказывания.

В обычной речи опе­рации дизъюнкции соответствует соединение высказываний связкой "*или*" с той лишь разницей, что *A*∨*B* согласно определению истинно и в случае, когда и *А*, и *В* оба истинны. Дизъюнкцию еще обозначают символом **+.**

**Определение 4.** ***Импликацией*** двух высказываний *А*, *В* на­зывается высказывание *А*→*В*, которое ложно тогда и только тогда, когда высказывание *А* истинно, а *В* ложно.

В обычной речи импли­кации соответствует связка "*если ... то*".

По определению при ложном *А* это высказывание истинно независимо от того, какое значение принимает *В*. В обычной речи подразумевается, что когда *А* ложно, то предложение "*если А, то В*" не имеет смысла.

Также по определению при истинном *В* высказывание *А*→*В* истинно независимо от того, какое значение принимает *А*. В обычной речи оба высказывания *А* и *В* могут быть истинными, но истинность *В* не выводится из истинности *А* как, например в пред­ложении "*если* калина красная, *то* снег белый".

**Определение 5.** ***Эквивалентностью*** двух высказываний *А*, *В* называется высказывание *А*↔*В*, которое истинно тогда и только тогда, когда оба данных высказывания имеют одинаковые значения, то есть либо оба истинны, либо оба ложны. В обычной речи эквива­лентности соответствует связка "*тогда и только тогда*".

**Определение 6.** ***Отрицанием*** высказывания *А* называется высказывание *,* которое истинно тогда и только тогда, когда *А* ложно (другое обозначение:).

Операция отрицания является унарной операцией, остальные – бинарными. ***Таблицы истинности*** этих операций имеют вид:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| А В | *АВ* | *A*∨*B* | *А*→*В* | *А*↔*В* |  |
| 0 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

1.2. Формулы логики высказываний

Переменные, вместо которых можно подставлять высказывания, называют ***пропозициональными переменными*** или ***переменными высказываниями***.

Понятие формулы в алгебре высказываний вводится индук­тивно.

##### Определение 7.

**1.** Переменные высказывания (пропозицио­нальные переменные) *X*, *Y*, *Z*, *Xi*, *Yi*, *Zi* (*i* ∈ *N*) и логические константы 0,1 – формулы.

**2.** Если *F*1 и *F*2 – формулы, то выражения (*i*= 1, 2), (*F*1*F*2), (*F*1∨F2), (*F*1→F2), (*F*1↔F2) также являются формулами.

**3.** Никаких других формул, кроме тех, которые образуются с помощью пунктов 1–2, нет.

***Замечание* *1.***Для всякого выражения в алфавите {*X*, *Y*, *Z*,  *Xi*, *Yi*, *Zi* (*i* ∈ *N*)*, *, , ∨, →, ↔, (, )}, используя пункты 1, 2 оп­ределения 7, очевидно, можно выяснить, является оно формулой или нет.

***Замечание* *2.*** Соглашение о скобках. Для упрощения записи формул разрешается не писать:

**а)** внешние скобки;

**б)** скобки с учетом силы (приоритета) операции: самая сильная операция – отрицание (выполняется в первую очередь), затем в порядке следования –  , , ∨, →, ↔.

Формулу, зависящую от переменных высказываний , будем обозначать .

**Определение 8.** ***Интерпретацией*** формулы  называется высказывание , которое получается из заданной формулы после подстановки в нее вместо переменных  соответственно конкретных высказываний .

1.3. Классификация формул.

Равносильные формулы

**Определение 9.** Формула  называется ***выпол­нимой*** (***опровержимой***), если существует ее истинная (ложная) ин­терпретация.

**Определение 10.** Формула  называется ***тавтологией*** (***противоречием***), если любая ее интерпретация истинна (ложна). Если формула  является тавтологией, то пи­шут ╞.

Нахождение всех возможных интерпретаций формулы  связано с построением ее ***таблицы истинности***. Таблица истинности формулы  строится следующим образом. Сначала выписываются слева все переменные высказывания , от которых зависит формула. Далее под ними выписываются все возможные наборы значений . Обычно эти наборы выписываются в естественном порядке, то есть в по­рядке чисел, двоичными кодами которых являются соответствую­щие наборы. Построив, таким образом левый столбец, переходим к вычислению правого столбца, который обозначается через . Итак, таблица истинности формулы  выглядит следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
| … | … |
|  |  |
| … | … |
|  |  |

На наборе  справа выписывается интерпрета­ция формулы  для конкретных высказываний, имею­щих соответственно значения . На практике обычно таблица истинности формулы  строится постепенно в соответствии с ее структурой, то есть по мере выполнения соответст­вующих операций в формуле.

**Пример.** Построить таблицу истинности для формулы .

**Решение.**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 0 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 1 | 0 | 1 | 1 |

Можно сформулировать следующую задачу: дать способ, позволяющий для каждой формулы конечным числом действий определить ее тип по приведенной (см. определения 9, 10) классификации. Поставленная задача носит название "***проблемы разрешимости***". Эта проблема, очевидно, легко решается построени­ем соответствующей таблицы истинности для формулы , хотя число действий может оказаться очень большим, но оно конечно, в силу конечности (конечное число переменных и конечное число операций) формулы.

**Определение 11.** Две формулы ,  называют ***равносильными***, если для любых конкретных высказываний  их интерпретации совпадают, то есть .

Очевидно, равносильные формулы имеют одинаковые таб­лицы истинности. Бинарное отношение равносильности на множест­ве формул обозначают ≅.

###### Основные равносильности

1. Законы нуля и единицы



1. Закон двойного отрицания

.

1. Коммутативные (переместительные) законы

.

1. Ассоциативные (сочетательные) законы



1. Дистрибутивные (распределительные) законы



1. Законы де Моргана

.

1. Законы идемпотентности (одинаковости)

.

1. Законы поглощения



1. Закон исключенного третьего

.

1. Закон противоречия

.

Справедливость этих равносильностей легко проверяется с помощью сравнения таблиц истинности. Второй распределительный закон не имеет аналога в обычной алгебре, поэтому его часто называют «чудо-законом».

**Упражнение 1.** Доказать равносильности:

а) ;

б) ;

в) ;

г) ;

**Лемма** (***о замене***)**.** Пусть  - произвольная формула и .

Тогда  **Доказательство** проводится непосредственным использованием определения равносильности формул. Эта лемма на практике позволяет осуществлять равносильные преобразования формул.

###### Признак равносильности формул

**Теорема 1.** *Две формулы F и G алгебры высказываний равносильны тогда и только тогда, когда формула  является тавтологией:*

**╞ *.*

**Доказательство** следует непосредственно из определений 5, 11.

###### Закон двойственности

**Определение 12.** Пусть  – формула логики высказываний. Двойственной к ней называют формулу, определенную следующим образом



***Замечание 3****.* Из закона двойного отрицания следует, что :



**Теорема 2**. Формулы  и  ***равносильны*** тогда, и только тогда, когда ***двойственные*** им формулы  и  тоже ***равносильны***.

, (1)

**Доказательство**. Пусть  – равносильны, а  – пропозицио­нальные переменные, входящие в эти формулы.

Из равносильности  и  следует:

, (2)

Из (2) следует

, (3)

Отсюда

, ч.т.д.

***Замечание 4.*** Пусть формула получается из формулы *f*  на основании первого дистрибутивного закона. Тогда переход от  к  осуществляется на основании второго ***дистрибутивного* *закона***.

**Определение 13.** Переход от  к  называется преобразованием, двойственным преобразованию, переводящему *f* в .

**Теорема 3 (*Принцип двойственности*).** Двойственная к булевой формуле может быть получена заменой констант 0 на 1, 1 на 0,  на ,  на  и ***сохранением* *структуры* *формулы*** (то есть соответствующего порядка действий).

1.4. Нормальные формы

Введем обозначения



Пусть имеется набор пропозициональных переменных.

**Определение 14.** Формула, где , называется ***конъюнктивным* *одночленом*** (КО) или ***элементарной конъюнкцией***.

**Определение 15.** Дизъюнкция КО  называется ***дизъюнктивной* *нормальной* *формой*** (ДНФ).

**Определение 16.** Формула , где , называется ***дизъюнктивным* *одночленом*** (ДО) или ***элементарной дизъюнкцией***.

**Определение 17.** Конъюнкция КО  называется ***конъюнктивной* *нормальной* *формой*** (КНФ).

В определениях 14-16 никакие ограничения на переменные не накладываются, некоторые переменные могут отсутствовать или повторяться.

**Примеры ДНФ, КНФ.**

****– ДНФ

**** – КНФ

Конъюнктивный одночлен, дизъюнктивный одночлен называют еще ***элементарным* *произведением*** *и* ***элементарной* *суммой***.

Всякую формулу можно выразить через ***конъюнкцию***, ***дизъюнкцию*** и ***отрицание***. Используя законы ***де* *Моргана*** и ***свойство* *дистрибутивности* *конъюнкции*** относительно дизъюнкции можно преобразовать равносильным образом получаемое выражение ***ДНФ***. Если же к исходному выражению применить свойство дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции, то его можно свести к ***КНФ***. Таким образом, справедлива теорема.

**Теорема 4.** ***Любая* *формула*** равносильными преобразованиями может быть приведена к ***ДНФ*** и ***КНФ***.

**Теорема 5.** Формула является ***тавтологией*** (противоречием) тогда и только тогда, когда в ее ***КНФ*** (*ДНФ*) ***в* *каждом* *ДО*** (*КО*) некоторая переменная встречается вместе со своим отрицанием.

Совершенные нормальные формы

Среди нормальных форм важную роль играют ***совершенные* *нормальные* *формы.***

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма

**Определение 18.** ***Совершенной* *дизъюнктивной* *нормальной* *формой*** (СДНФ) формулы , содержащей n различных переменных, называется ее ДНФ, удовлетворяющая следующим условиям:

1. в ней нет ***двух одинаковых слагаемых***;
2. ни одно ***слагаемое*** не содержит ***двух* *одинаковых* *множителей***;
3. никакое ***слагаемое*** не содержит ***переменной вместе с ее* *отрицанием***;
4. в каждом слагаемом в качестве множителя ***содержится либо переменная , либо ее отрицание*** .

Условия определения 18 позволяют получить правила, с помощью которых можно приводить формулу к СДНФ. Опишем эти правила.

Пусть дана произвольная формула . ***Процедура приведения к СДНФ***:

1. Сначала приведём её к ДНФ. Пусть ДНФ для *f –* это формула (то есть ).
2. Затем, если какое-нибудь слагаемое не содержит переменной , то добавим недостающую переменную:

,

Тогда условие 4) будет выполнено.

1. Если в полученном выражении окажутся одинаковые слагаемые, то, удалив все, кроме одного из них, получим равносильное выражение (используем закон идемпотентности ):
2. Если в некоторых слагаемых окажется несколько одинаковых множителей, то лишние множители можно удалить (используем закон ):
3. Удалим все слагаемые, которые содержат какую-либо переменную вместе с ее отрицанием ( такие слагаемые тождественно ложны). Если бы все слагаемые оказались таковыми, то вся сумма тождественно ложна. Тогда и формула *f* – тождественно ложна. В таком случае *f* не имеет СДНФ.

После выполнения указанных действий 1), 2), 3), 4), 5) получим СДНФ.

***Замечание 5.*** При приведении к СДНФ нет необходимости знать заранее, является ли формула тождественно ложной или нет. Если выполняя операции пункта 5), будут удалены все слагаемые, то не получим СДНФ.

Таким образом, справедливо:

**Свойство 1.** У противоречий не существует СДНФ.

**Пример.** Привести формулу к СДНФ:



 – ДНФ;

;



– CДНФ.

Совершенная конъюнктивная нормальная форма

Аналогичным образом определяется СКНФ. Определение дается в терминах, двойственных тем, которые были использованы в ***определении 18.***

**Определение 19. *Совершенной конъюнктивной нормальной формой*** (СКНФ) формулы , содержащей n различных переменных, называется ее КНФ, удовлетворяющая следующим условиям:

1. в ней нет ***двух одинаковых множителей***;
2. ни один ***множитель*** не содержит ***двух* *одинаковых* *слагаемых***;
3. никакой ***множитель*** не содержит какой-нибудь ***переменной* *вместе с ее* *отрицанием****;*
4. каждый множитель содержит в себе в качестве слагаемых ***либо переменную , либо ее отрицание*** .

Правила приведения к СКНФ аналогичны тем, которые описаны выше для нахождения СДНФ, и выражаются в двойственных терминах ( то есть конъюнкцию меняем на дизъюнкцию, дизъюнкцию на конъюнкцию, 0 на 1, 1 на 0).

***Замечание 6.*** Если множители содержат какую-нибудь переменную вместе с ее отрицанием (  истина), то их удаляем. Если все множители такие, то всё произведение тождественно истинно; следовательно формула не имеет СКНФ.

Таким образом, справедливо:

**Свойство 2.** У тавтологий не существует СКНФ.

**Пример.** Привести формулу к СКНФ:

;

– КНФ;

;

*;*

– CКНФ.

**Свойство 3**. Каждая формула алгебры высказываний, не являющаяся тавтологией или противоречием, имеет СКНФ и СДНФ, причем единственные.

**Доказательство.** Существование СКНФ, СДНФ для формулы, не являющейся тавтологией или противоречием, следует из свойств 1,2. Доказательство единственности проводится методом от противного.

Можно дать следующее определение СКНФ, СДНФ:

**Определение 20.** Конъюнктивная (дизъюнктивная) НФ называется ***совершенной***, если выполняются условия:

1. каждая переменная из полного набора содержится во всех элементарных дизъюнкциях (конъюнкциях) ровно один раз с отрицанием или без;
2. среди элементарных дизъюнкций (конъюнкций) нет одинаковых.

Совершенные нормальные формы позволяют дать критерий равносильности двух произвольных формул *f* и . Каковы бы ни были формулы *f* и , можно предположить, что они содержат одни и те же переменные. Если, например, формула *f* не содержит переменной , то можно ее заменить равносильной формулой:

.

Любые две формулы можно заменить равносильными им формулами, содержащими одинаковые переменные. Эти формулы надо привести к СКНФ или СДНФ.

Если формулы *f* и  равносильны, то в силу единственности СНФ должны совпадать. Таким образом, сравнение СНФ формул *f* и  решает вопрос об их равносильности.

Построение СДНФ, СКНФ на основе таблиц истинности

**СДНФ**: На основе 5-го пункта процедуры приведения к СДНФ слагаемые, равные 0, отбрасываются, то есть в СДНФ входят слагаемые, соответствующие наборам переменных, при которых формула имеет значение 1. Следовательно, можно предложить **следующую процедуру получения СДНФ**:

1. по каждому набору переменных, при которых формула принимает значение **1**, составить ***элементарные конъюнкции*;**
2. в эти ***элементарные конъюнкции*** записать ***без инверсии*** переменные, заданные 1 в наборе, и ***с******инверсией*** – переменные, заданные 0;
3. соединить ***элементарные конъюнкции*** знаком ***дизъюнкции****.*

**Процедура получения СКНФ:**

1. по каждому набору переменных, при которых формула принимает значение **0**, составить ***элементарные дизъюнкции***;
2. в ***элементарные дизъюнкции*** записать ***без инверсии*** переменные, заданные 0 в наборе, и ***с инверсией*** – переменные, заданные 1;
3. элементарные дизъюнкции соединить знаком конъюнкции.

**Пример.** Привести к СДНФ, СКНФ с помощью таблицы истинности

;

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | *y* | *z* |  | СДНФ | СКНФ |
| 0 | 0 | 0 | 0 |  |  |
| 0 | 0 | 1 | 1 |  |  |
| 0 | 1 | 0 | 0 |  |  |
| 0 | 1 | 1 | 1 |  |  |
| 1 | 0 | 0 | 0 |  |  |
| 1 | 0 | 1 | 0 |  |  |
| 1 | 1 | 0 | 0 |  |  |
| 1 | 1 | 1 | 1 |  |  |

**СДНФ**: ;

**СКНФ**:

Другое определение совершенных

нормальных форм

**Определения 18, 20** можно объединить.

**ДО** или **КО** называется ***совершенным***, если в нем каждая переменная встречается один раз с отрицанием или без отрицания. Они имеют следующий вид:

СДО: 

СКО: 

**Определение 21. КНФ (ДНФ)** называется совершенной, если в ней все **ДО (КО)** являются совершенными.

1.5. Логическое следование

**Определение 22.** Формула  называется ***логи­ческим следствием*** ***формулы*** , если для любых кон­кретных высказываний  из истинности  сле­дует истинность .

Если формула *G* является логическим следствием формулы *F*, то используется обозначение  ├ .

**Теорема 6.** ├  ╞.

Доказательство следует непосредственно из определений.

**Определение 23.** Формула *G* называется ***логическим след­ствием формул*** , если для любых конкретных высказыва­ний  из одновременной истинности формул  следует истинность формулы .

Если *G* является логическим следствием , то это обстоятельство обозначается через  ├ . Формулы  называются ***посылками***, a *G* – ***следствием*** этих посылок.

**Теорема 7.** *Следующие утверждения*

**1)**  ├ ,

**2)**  ├ ,

**3)** ╞

*являются равносильными.*

В связи с понятием логического следования можно сформулиро­вать следующие ***прямую*** и ***обратную задачи***.

**1.** Даны посылки . Требуется найти все возможные следствия из этих посылок.

**2.** Дано следствие, то есть формула *G*, найти все возможные посылки, из которых *G* является следствием.

Сформулированные задачи можно решить, используя таблицы истинности заданных формул. При решении прямой задачи строим таблицы истинности для формул  и отмечаем в таблице все строки, в которых  одновременно истинны. Очевидно, поскольку искомые *G* должны быть следствиями посылок , то *G* в отмеченных строках обязаны принимать значение 1, а в остальных какие угодно значения. Перебирая все возможные варианты значений в неотмеченных строках, мы получим все иско­мые следствия.

**Пример.** Пусть таблицы истинности для посылок   уже построены. Представленная ниже таблица отражает описанный процесс нахождения всех возможных следствий из .

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х*1*Х*2 | *F*1 | *F*2 | *G*1 | *G*2 | *G*3 | *G*4 |
| 0 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Пусть наоборот дано следствие *G*. Требуется найти все воз­можные посылки, из которых следует *G*. При решении обратной за­дачи строим таблицу истинности *G* и отмечаем строки, в которых *G* ложно, то есть принимает значение 0. Очевидно, если *G* является след­ствием некоторой посылки *F*, то *F* в отмеченных строках обязана принимать значение 0. В остальных строках *F* может принимать лю­бые значения. Посредством перебора всех вариантов значений *F* в неотмеченных строках построим все возможные посылки для *G*.

**Пример.** Пусть таблица истинности для следствия  задана. Представленная ниже таблица отражает описанный процесс нахождения всех возможных посылок для *G*.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Х*1*Х*2 | G | *F*1 | *F*2 | *F*3 | *F*4 |
| 0 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Сформулированные выше задачи могут быть решены также с использованием следующей теоремы, доставляющей критерий ло­гического следования.

**Теорема 8.** *Для того чтобы формула G, не являющаяся тавтологией, была логическим следствием формул , из которых, по крайней мере, одна не является тавтологией, необходимо и достаточно, чтобы в СКНФ формулы G все дизъюнк­тивные одночлены были из СКНФ формулы .*

Покажем, как с использованием этой теоремы решаются сформулированные выше прямая и обратная задачи.

Очевидно, для решения ***прямой задачи***, то есть для нахождения всех возможных следствий из посылок ** необходимо по­строить СКНФ формулы ** и затем из ее дизъюнктивных одночленов ** построить всевозможные их конъюнкции, которые и будут искомыми следствиями. Очевид­но, число таких следствий будет , то есть число подмножеств без единицы из множества **.

При решении ***обратной задачи*** строим СКНФ для заданной формулы следствия * .*

Поскольку общее число совершенных дизъюнктивных од­ночленов от *n* переменных равно , то, добавляя к имеющимся в СКНФ  дизъюнктивным одночленам все­возможные подмножества дизъюнктивных одночленов из множества остальных  дизъюнктивных одночленов, мы получим таким об­разом все искомые посылки.

1.6. Правила вывода

Если в процессе дедуктивного рассуждения некоторое ут­верждение *G* выводится из утверждений **, то говорят, что справедливо правило вывода

* .*

Это равносильно тому, что **├.

###### Основные правила вывода

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | – правило заключения (*modus pones*, MP); | | |
|  | – правило цепного заключения; | | |
|  | – закон контрапозиции; | | |
|  | | | – правила разъединения и объединения посылок; |
|  | | | – законы Моргана; |
|  | | – правило сведения к абсурду; | |
|  | | – правила удаления и введения конъюнкции. | |

**Пример .** Проверить правильность умозаключения: "Если формула является выполнимой, то она является тавтологией или не является противоречием. Если формула – тавтология, то она не является противоречием. Следовательно, если формула выполнимая, то она не является противоречием".

Прежде всего, запишем все фигурирующие в рассуждениях высказывания в символической форме. Для этого выделим простые высказывания и обозначим их буквами.

"Формула является выполнимой" – *А*, "Формула является тавтологией" – *В*, "Формула является противоречием" – *С*. Тогда наши рассуждения выглядят следующим образом:

# .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| A B C |  |  |  |  |
| 0 0 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 0 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 1 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 1 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 0 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 0 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 1 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 1 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

Поскольку в подчеркнутых строках истинно, то умозаключение сделано правильно, или рассуждения логически правильны.

# ***Упражнения***

**1.** Пусть *А* и *В* обозначают соответственно "Сергей – студент" и "Юра – студент". Записать приведенные ниже высказывания в символической форме, то есть используя только обозначения для высказываний (*А*, *В*), символы **, , ∨, →, ↔ :

**а)** "Сергей – студент" и "Юра не студент";

**б)** "Юра – студент", а "Сергей не студент";

**в)** "Юра и Сергей оба не студенты";

**г)**  "Ни Юра, ни Сергей не студенты";

**д)** "Либо Юра, либо Сергей студент";

**е)** "Неверно, что Юра и Сергей оба студенты";

**ж)** "Если Юра студент, то Сергей не студент";

**з)** "Сергей студент тогда и только тогда, когда Юра студент".

**2.** Для тех же высказываний *А* и *В*, что в упр. 1, сформулируйте словесно каждое из следующих высказываний:

**a) ** ; **б)**  ;

**в)** **** ; **г)** **** ;

**д)** **** ; **e)** **** ;

**ж)** **** ; **з)** **** .

**3.** Построить таблицы истинности для формул и определить тип формулы:

**a)** ****; **б)** ****;

**в)** ****; **г)** ****.

**4.** Для следующих формул найти равносильные им ДНФ:

**a)** ****; **б)** ****;

**в)** ****; **г)** ****;

**д)** ****; **е)** ****;

**ж)** ****; **з)** ****.

**5.** Для следующих формул найти равносильные им КНФ:

**a) **;

**б) **;

**в)** ****;

**г)** ****.

**6.** Определить, являются ли заданные формулы выполнимыми:

**a)** ****; **б)** ****;

**в)** ****; **г)** ****.

**7.** Найти совершенные ДНФ и КНФ для формул:

**a)** ****; **б)** ****;

**в)** ****; **г)** ****;

**д)** ****; **е)** ****.

**8.** Для следующих формул найти все вытекающие из них следствия.

**a)** ****; **б)** ****;

**в)** ****; **г)** ****.

**9.** Выяснить, являются ли следующие рассуждения логически правильными, то есть проверить, является ли заключение логическим следствием из посылок.

**а)** Если 6 – составное число, то 12 – составное число; если 12 – составное число, то существует простое число, большее 12; если существует простое число большее 12, то существует составное число большее 12; если 6 делится на 2, то 6 – составное число; число 12 – составное. Следовательно, 6 – составное число.

**б)** Если число *a* делится на 8, то оно делится на 4 и если число *a* делится на 9, то оно делится на 3; если число *a* делится на 3 и на 8, то оно делится на 24; число *a* не делится на 24. Следовательно, число *a* не делится на 4 или не делится на 3.

2. ФУНКЦИИ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ И

ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

2.1. Функции алгебры логики

Функции алгебры логики называют ***булевыми функциями*** в честь английского математика *Джорджа Буля* (1815–1864).

**Определение 1.** ***Булевой функцией***  от *n* аргументов называется функция *f*, заданная на множестве  и принимающая значения в двухэлементном множестве . Другими словами, булева функция от *n* аргументов сопоставляет каждому упорядоченному набору, составленному из элементов 0 и 1, либо 0, либо 1.

Здесь – есть *n*-я декартова степень множества .

**Теорема 1.** *Число всех различных функций алгебры логики  от n переменных равно .*

Всякая функция алгебры логики  может быть задана с помощью таблицы истинности.

**Определение 2.** Говорят, функция алгебры логики  несущественно зависит от переменной *xi*, если для лю­бых двух наборов ,  из области определения  имеет место

.

Например, функция  от двух переменных, заданная таблицей

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 0 0 | 1 |
| 0 1 | 0 |
| 1 0 | 1 |
| 1 1 | 0 |

несущественно зависит от переменной *х*1 а именно,  и .

Очевидно, множество всех функций алгебры логики  от *n* переменных наряду с функциями, которые существен­но зависят от всех *n* переменных, содержат все функции, которые несущественно зависят от некоторой части своих переменных.

Среди функций алгебры логики, зависящих от одной и двух переменных, выделим функции, представленные в таблице:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 0 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Функция, представленная во втором столбце, называется ***отрицанием*** соответствующей переменной, а функции, представленные в остальных столбцах – соответственно ***конъюнкцией***, ***дизъюнкцией***, ***импликацией***, ***эквивалентностью***, ***суммой по модулю* 2**, ***штрихом Шеффера***, ***стрелкой Пирса*** переменных .

Заимствуя соответствующие результаты из алгебры высказываний, для функций алгебры логики можно сформулировать аналогичные теоремы.

**Теорема 2.** *Любая функция алгебры логики , не равная тождественно нулю, имеет СДНФ:*

.

**Теорема 3.** *Любая функция алгебры логики , не равная тождественно единице, имеет СКНФ:*

.

**Определение 3.** Если , , – функции алгебры логики со­ответственно от ** переменных, то функция



называется суперпозицией функций , , …,  в функцию .

Таким образом, имея в наличии некоторые функции алгебры логики, мы с помощью суперпозиций имеющихся функций можем строить новые функции.

Например, пусть заданы таблицей функции

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 0 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 1 | 1 | 1 | 1 |

Образовав их суперпозицию , получим новую функцию от переменных , таблица которой имеет вид

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 0 0 | 0 |
| 0 1 | 1 |
| 1 0 | 1 |
| 1 1 | 1 |

**Определение 4.** ***Множество функций*** алгебры логики *R* на­зывается ***замкнутым***, если любая суперпозиция функций из множе­ства *R* принадлежит множеству *R*.

**Определение 5.** ***Система функций*** алгебры логики  называется ***полной***, если для любой функции алгебры логики  найдется суперпозиция функций из *S*, совпадающая с **.

##### Примеры.

**1.** Система функций алгебры логики  является полной. Полнота указанной системы следует из того, что любая функция алгебры логики имеет либо СДНФ, либо СКНФ, а каждая СДНФ и СКНФ представляет собой суперпозицию функций из .

**2.** Система функций  является полной. Полнота этой системы следует из полноты предыдущей системы, ес­ли учесть, что .

Вообще справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.** *Пусть S и*  *S* ' – *две системы функций алгебры ло­гики, о которых известно следующее: система S является полной и каждая функция из S выражается через суперпозицию функций из S* '*. Тогда система S* ' *также является полной.*

Так, система  является полной систе­мой, так как любая функция полной системы  выражает­ся через функции системы *S*. Именно,

.

Используя полноту системы *S*, можно показать, что любая функция алгебры логики ** имеет однозначное с точно­стью до перестановки членов представление

,

где *–* сумма по модулю 2, a .

Это представление функции называется ***полиномом Жегалкина***.

В теории функций алгебры логики проблема полноты за­ключается в следующем: по заданной системе функций алгебры ло­гики нужно эффективно ответить на вопрос, является заданная сис­тема функций полной или нет.

Проблема полноты функций алгебры логики была решена Постом на языке предполных замкнутых классов функций алгебры логики.

2.2. Специальные замкнутые классы функций алгебры логики

**Определение 6.** Функция ** алгебры логики принадлежит ***классу функций*** *Т*0, сохраняющих константу 0, то­гда и только тогда, когда **.

**Определение 7.** Функция ** алгебры логики принадлежит ***классу функций*** *Т*1, сохраняющих константу 1, тогда и только тогда, когда **

**Определение 8.** Функция ** называется ***двойст­венной*** к функции **, если для любого набора **

.

**Определение 9.** Функция ** называется ***самодвойственной***, если **. Класс всех самодвойственных функций обозначим через *S*.

**Теорема 5**(***признак самодвойственности***)**.** *Функция является самодвойственной тогда и только тогда, когда на любых противоположных наборах она принимает противоположные значения.*

На множестве двоичных наборов введем отношение частичного порядка  по следующему принципу:

.

Полагается, что .

В соответствии с введенным отношением порядка дадим следующее определение монотонной функции алгебры логики.

**Определение 10.** Функция ** алгебры логики принадлежит ***классу монотонных функций*** алгебры логики *М* тогда и только тогда, когда для любых двух наборов  таких, что , имеет место .

**Определение 11.** Функция ** алгебры логики принадлежит ***классу линейных функций*** алгебры логики *L* тогда и только тогда, когда

*,*

где  а "+" есть сумма по модулю 2.

Нетрудно показать, что все перечисленные выше классы функций алгебры логики являются ***замкнутыми классами функций***. Более того, любой замкнутый класс функций алгебры логики при­надлежит, по крайней мере, одному из перечисленных классов, то есть указанные выше классы являются ***максимальными замкнутыми классами функций*** алгебры логики.

Теперь сформулируем теорему Поста.

**Теорема 6** (***теорема Поста***)**.** *Система  булевых функций является полной тогда и только тогда, когда для каждого из классов T*0, *T*1, *S*, *M*, *L* *в системе F найдется функция, не принадлежащая этому классу.*

Согласно теореме Поста для разрешения вопроса полноты относительно некоторой системы функций ** дос­таточно заполнить следующую таблицу с двумя входами

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *T*0 | *T*1 | S | *М* | *L* |
| *fi* | ( + или –) | ( + или –) | ( + или –) | ( + или –) | ( + или –) |
| … | … | … | … | … | … |

В соответствующей клетке таблицы ставится "+", если функ­ция, отмеченная в строке, принадлежит классу, отмеченному в столбце и "–" в противном случае. Очевидно, рассматриваемая систе­ма функций *F* будет полной, если в каждом столбце построенной таблицы будет, по крайней мере, один минус.

**Пример.** Рассмотрим систему **, состоящую из од­ной функции Шеффера, и проверим, является ли она полной.

**1.** Согласно таблице истинности функции Шеффера, она не сохраняет ни ноль, ни единицу, то есть **.

**2.** ** не является самодвойственной, так как **.

**3.** ** не является монотонной, так как, например, .

**4.** ** не является линейной, так как отлична от линейных функций от двух переменных: .

Таким образом, соответствующая таблица для ** имеет во всех столбцах минусы. Поэтому система ** является полной.

**Определение 12.** Система булевых функций называется ***базисом***, если она полна, а удаление любой функции из этой системы делает ее неполной.

**Теорема 7.** *Каждый базис содержит не более четырех булевых функций.*

# ***Упражнение.*** Доказать, что следующие системы булевых функций являются базисами:

# .

2.3. Приложение булевых функций   
к анализу и синтезу релейно-контактных схем

Булевы функции широко применяются при описании работы дискретных управляющих систем, при исследовании некоторых электрических цепей, так называемых релейно-контактных схем.

Под ***релейно-контактной схемой*** (РКС) понимается устройство из проводников и двухпозиционных контактов. Оно может быть предназначено, например, для соединения или разъединения полюсов источника тока с некоторым потребителем. Контакты РКС могут быть двух типов: ***замыкающие*** и ***размыкающие***. Каждый контакт подключен к некоторому реле (переключателю). Когда реле срабатывает, все подключенные к нему замыкающие контакты замкнуты, а размыкающие контакты разомкнуты; в противном случае наоборот. Каждому реле ставится в соответствие своя булева переменная *x*, которая принимает значение 1, если реле срабатывает, и 0 в противном случае.

Замыкающие контакты, подключенные к реле *x*, обозначаются символом *x*, а размыкающие – символом . Это означает, что при срабатывании реле *x* все его замыкающие контакты *x* проводят ток и им сопоставляется 1, а все размыкающие контакты  не проводят ток и им сопоставляется 0. При отключении реле создается противоположная ситуация.

Всей схеме ставится в соответствие булева переменная *f*, которая равна 1, если схема проводит ток, и 0 в противном случае. Переменная *f*, соответствующая схеме, очевидно, является функцией от переменных , соответствующих реле. Эта функция называется ***функцией проводимости схемы***, а ее таблица – ***условиями работы схемы***. Две РКС называются ***равносильными***, если они обладают одинаковыми функциями проводимости. Из двух равносильных схем более простой считается та, которая содержит меньшее число контактов.

При рассмотрении РКС возникают два типа задач: анализ и синтез. ***Задача анализа*** состоит в описании ра­боты схемы. ***Задачей синтеза*** является построение РКС по заданному описанию рабо­ты. При решении этих задач успешно используется аппарат функций алгебры логики. Последовательное соединение контактов записывают как ***конъюнкцию*** соответствующих переменных, а параллельное соединение двух контактов как ***дизъюнкцию*** этих переменных. Это вполне согласуется с обычным пониманием проводимости между полюсами.

**Пример.**  По заданной РКС найти ее функцию проводимости.

*x*



*y*

*x*

*y*



*y*

*z*

Схема состоит из трех параллельных ветвей. Первая ветвь, в свою очередь, состоит из двух параллельных ветвей, в одной из которых последовательно соединены два контакта *x* и , а в другой имеется один контакт *y*. Поэтому первая параллельная ветвь имеет следующую функцию проводимости: .

Вторая параллельная ветвь РКС состоит из двух последовательно соединенных контактов *x* и *y* и поэтому имеет функцию проводимости: .

Третья параллельная ветвь состоит из двух параллельных ветвей, в одной из которых один контакт , а в другой последовательно соединены *y* и *z*. Поэтому функция проводимости следующая: .

Для нахождения функции проводимости всей схемы нужно построить дизъюнкцию найденных функций:

.

Поскольку всякая булева функция может быть выражена через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание, то и всякая функция может быть реализована с помощью РКС, то есть может быть построена такая схема, для которой данная функция служит функцией проводимости.

3. Исчисление высказываний

Применительно к ***алгебре высказываний*** (АВ) аксиоматический подход состоит в следующем. Из всех формул алгебры высказываний выделяется некоторая часть. Формулы из этой части объявляются ***аксиомами***. Определяется некоторое правило, по которому из одних формул можно получать новые формулы. Аксиомы выделяются, и правило определяется так, что по нему из аксиом могут быть получены все тавтологии алгебры высказываний. Таким образом, тавтологии алгебры высказываний оказываются теоремами аксиоматической теории. В результате получаем ***аксиоматическое построение алгебры высказываний***.

В качестве системы аксиом могут быть выбраны разные части совокупности всех формул АВ. То же относится к правилам получения новых формул. В зависимости от выбора получаются различные аксиоматизации АВ. Общим для них является то, что все они обладают одним и тем же множеством теорем – это совокупность всех тавтологий АВ.

Рассмотрим одну из возможных ***аксиоматизаций***.

Сначала дадим общее определение аксиоматической тео­рии.

**Определение 1.** Будем считать, что ***аксиоматическая теория*** *T* за­дана, если выполнены следующие условия:

**1)** задано некоторое множество символов теории *T*; причем конеч­ные последовательности символов называются ***выражениями*** теории *T*;

**2)** определено некоторое подмножество выражений, называемых ***формулам***;

**3)** выделено некоторое подмножество формул, называемых ***аксио­мами***теории *T*;

**4)** имеется некоторое множество правил, которые позволяют из од­них формул теории *T* получать другие.

**Определение 2. *Выводом*** в *T* называется последовательность фор­мул  такая, что для любого *i* формула *Ai* есть либо аксиома теории *Т*, либо непосредственное следствие каких-либо предыдущих формул по одному из правил вывода.

**Определение 3.** Формула *А* теории *T* называется ***теоремой*** (или ***выводимой формулой***), если существует вывод в *T*, в котором по­следней формулой является формула *А*.

**Определение 4.** Формула *А* называется ***следствием*** множества формул *F* в *T* тогда и только тогда, когда существует такая после­довательность формул , что *Аn* совпадает с *А* и для любого *i* *Ai* есть либо аксиома, либо элемент *F*, либо непосредственное след­ствие некоторых предыдущих формул. Элементы *F* называются ***ги­потезами*** вывода.

В дальнейшем для сокращения утверждения "*А* есть следствие *F*" мы будем употреблять обозначение *F*├ *А*. В частности, ├ *А* служит сокращением утверждения "*А* есть теорема".

Введем теперь аксиоматическую теорию *L* для *исчисления высказы­ваний.*

**1.** Символами *L* являются **, →, (, ) и буквы латинского алфавита с целыми положительными числами в качестве индексов. Символы **, → называются ***логическими связками***,а буквы латинского алфа­вита с индексами – ***пропозициональными переменными***.

**2.** Каждая пропозициональная переменная есть формула. Если *А*,*В* – формулы, то  и  – тоже формулы.

**3.** Каковы бы ни были формулы *А*, *В* и *С* теории *L*, следующие фор­мулы суть аксиомы *L*:

(*А*1) ;

(*А*2) ;

(A3) .

**4.** Правилами вывода служат ***правило подстановки*** и ***правило заключения*** (или *modus ponens*, или сокращенно МР). ***Правило подстановки*** заключается в следующем. Пусть *F* – формула, содержащая букву *А*. Тогда, если *F* выводимая формула, то, заменив в ней букву *А* всюду, где она входит, произвольной формулой *G*, мы также получим выводимую формулу. Согласно ***правилу заключе­ния***, если  и *F* – выводимые формулы, то *G* – также выводимая формула.

**Пример 1.** Покажем, что  выводимая формула.

(1)  (в аксиоме (А2) мы подставили вместо формул *А, В, С* соответственно формулы ;

(2)  (в аксиоме (А1) вместо формулы В подставлена формула );

(3) (из (1) и (2) по правилу МР)

(4)  (в аксиоме (А1) вместо *В* подставлена формула *А*);

(5)  (из (3) и (4) по МР).

**Пример 2.** Покажем, что ├.

(1)  (гипотеза);

(2)  (гипотеза);

(3)  (подстановка в аксиому (А1) вместо формул *А, В* соответственно формул );

(4)  (Аксиома (А2));

(5)  (из (1) и (3) по правилу МР);

1.  (из (4) и (5) по правилу МР);

(7)  (из (1) и (6) по правилу МР).

Процесс доказательства формул в аксиоматической теории высказы­ваний значительно упрощается благодаря следующей теореме, кото­рая называется теоремой о дедукции.

**Теорема 1.** *Если F*1, ..., *Fn*–1, *Fn├ G, то F*1, ..., *Fn–*1*├ FnG. В частности, если F ├  G, то ├ F  G.*

Рассмотрим несколько примеров, где используется теорема о дедук­ции.

**Пример 3.** Покажем, что ├.   
Покажем сначала, что *А*├*С.*

(1) *В* (гипотеза);

(2) *А* (гипотеза);

(3)  (гипотеза);

(4)  (из (2) и (3) по МР);

(5) *С* (из (1) и (4) по правилу МР).

Итак, *А*├*С*, отсюда на основании теоремы о де­дукции заключаем, что ├.

**Пример 4**. Покажем, что  ├ .  
 Установим сначала, что *А*├*С*.

(1)  (гипотеза);

(2)  (гипотеза);

(3) *А* (гипотеза);

(4) *В* (из (1) и (3) по правилу МР);

(5) *С* (из (2) и (4) по правилу МР).

Поскольку *А*├*С*, то на основании теоремы о дедук­ции мы заключаем, что├.

**Пример 5**. Покажем, что формула  является теоремой. Покажем сначала, что *А*├ *В*.

(1)  (гипотеза);

(2) *А* (гипотеза);

(3)  (аксиома (A3));

(4)  (из (1) и (3) по правилу МР);

(5)  (аксиома(А1));

(6)  (из (4) и (5) согласно примеру 4);

(7)  (из (2) и (6) согласно правилу МР).

Итак,*А*├ *В*. Применив теперь дважды теорему о дедук­ции, получаем требуемый результат.

Отметим ряд важнейших свойств аксиоматической теории высказы­ваний: полноту, разрешимость, непротиворечивость.

**Теорема 2.** (***о полноте аксиоматической теории высказываний***). *Формула тогда и только тогда является теоремой аксиоматической теории высказываний, когда она является тавтологией алгебры вы­сказываний.*

**Определение 5.** Аксиоматическая теория называется ***непротиворе­чивой****,* если ни для какого утверждения *А*, сформулированного в терминах этой теории, само утверждение *А* и его отрицание  не могут быть теоремами данной теории. Если для некоторого утвер­ждения *А* теории оба утверждения *А* и  – теоремы этой теории, то аксиоматическая теория называется ***противоречивой****.*

Заметим, что в противоречивой аксиоматической теории любая формула является теоремой.

**Теорема 3.** *Аксиоматическая теория высказываний есть непротиво­речивая аксиоматическая теория.*

**Определение 6.** Аксиоматическая теория называется ***разрешимой****,* если существует алгоритм, позволяющий для любой формулы этой теории, ответить на вопрос, будет или нет эта формула теоремой этой теории.

Так как, используя таблицу истинности, мы можем для данной фор­мулы эффективно определить, является ли она тавтологией или нет, то, как следствие теоремы 2, получаем следующие утверждение.

**Теорема 4.** *Аксиоматическая теория высказываний есть разрешимая аксиоматическая теория.*

Введем следующую важную характеристику аксиом аксиоматиче­ской теории.

**Определение 7.** Аксиома *А* данной аксиоматической теории называ­ется ***независящей*** от остальных аксиом этой теории, если она не может быть выведена с помощью пра­вил вывода из всех остальных аксиом. Система аксиом аксиоматиче­ской теории называется ***независимой***, если каждая ее аксиома не за­висит от остальных.

**Теорема 5.** *Система аксиом* (А1), (А2), (АЗ) *аксиоматической теории высказываний независима.*

***Упражнение.*** Используя результаты настоящего раздела показать, что следующие формулы являются теоремами аксиомати­ческой теории высказываний:

(1) ; (3) ;

(2) ; (4) .

**4. ПРАВИЛО РЕЗОЛЮЦИЙ**

Автор данного правила – американский математик Робинсон, 1965 год.

**Правило резолюций:**   
Введем новые понятия. ***Атом*** – это логическая переменная. Под ***дизъюнктом*** понимается элементарная дизъюнкция, то есть это дизъюнкция различных атомов или их отрицаний.

Это правило позволяет соединить две формулы, в одной из которых находится атом (А), а в другой отрицание атома (). Получается новая формула без этого атома.

**Доказательство.** В логике высказываний имеет место тавтология:

****

По теореме о равносильных утверждениях отсюда получаем

**** 

**Частные случаи:** 1)   
­ 2)  

3) □ ,где □ – пустой дизъюнкт (т.е. ложь).

**Процесс доказательства методом резолюций.**

Используется доказательство методом от противного. Отрицание заключения принимается в качестве дополнительной посылки.

1. Все посылки и отрицания заключения привести к нормальной форме. Для этого используются следующие равносильности:

При необходимости применяются законы де Моргана:

.

1. Все полученные в 1–м пункте дизъюнкты записываются с новой строки (включая отрицание заключения). В результате получается ***последовательность формул*** или последовательность дизъюнктов.
2. В полученной последовательности находим любые две формулы, в одной из которых находится атом, а в другой отрицание атома. Положение атомов в формуле роли не играет. Эти две формулы соединяем с помощью правила резолюций и получаем новую формулу без этого атома.
3. Затем ищут следующую пару формул аналогичным образом, в одной из которых атом, а в другой отрицание, и соединяют эти две формулы с помощью правила резолюций и т.д.

Аналогичным образом продолжают до тех пор, пока не появится пустой дизъюнкт □, который и выражает противоречие.

***Преимущества использования правила резолюций*:**

1. В этом методе используется лишь одно правило – это правило резолюций. Не надо запоминать многочисленные правила вывода и теоремы классического исчисления высказываний.
2. В процессе доказательства не надо использовать различные равносильности для проведения простых преобразований.
3. Метод прост в реализации.

***Замечание*.** На основе этого правила разработан язык логического программирования – Пролог.

**Пример**. . Доказать выводимость.



1. ; ;
2. – гипотезы

Дизъюнкты: 1. ;

2. ;

3. ;

4. ;

5. ;

3) 6.  (2, 4)

7.  (3, 5)

8.  (1, 6)

9  – ложь.

При практической реализации этого метода, несмотря на простоту метода доказательства, может возникнуть ряд проблем. Последовательность может содержать большое количество формул. Возникает проблема, какие формулы соединить с помощью правила резолюции и как быстрее достичь цели. Для решения этих проблем разработаны специальные методики поиска.

5. ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

5.1. Определение предиката

Понятие предиката обобщает понятие высказывания, а логика предикатов представляет собой дальнейшее развитие логики высказываний.

***Предикат*** – предложение, похожее на высказывание, но все же им не являющееся. Дадим определение предиката.

**Определение 1.** *n*–***местным предикатом***, заданным на множестве *М*1×*М*2×…×*Мn* называется выражение, содержащее *n* переменных *x*1, *х*2, ..., *хn,* которое становится высказыванием при подстановке вместо этих переменных элементов *а*1, *а*2, ..., *аn,* из множеств *М*1, *М*2, ..., *Мn* соответственно.

Предикаты обозначаются как *Р*(*х*1, *х*2, ..., *хn*) и пред­ставляют собой отображения *Р*: *М*1×*М*2×…×*Мn*  {0,1}. То есть, упорядоченному набору элементов (*а*1, *а*2, ..., *аn)* из множества *М*1×…×*Мn* ставится в соответствие один из элементов множества {0,1}, причем 0, если *Р*(*а*1, *а*2, ..., *аn*) – ложное высказывание и 1, если истинное. Переменные *х*1, *х*2, ..., *хn* называются ***предметными***, а элементы из множеств *М*1, *М*2, …, *Мn*, которые эти переменные пробегают – ***конкретными предметами***. ***Местностью предиката*** называется число различных аргу­ментов, от которых зависит предикат. Предикат является функцией многих переменных.

##### Примеры

**1.** Предложение "*х* – четное число" представляет собой од­номестный предикат, заданный на множестве целых чисел, то есть *Р*: ***Z***→{0, 1}. Областью определения предиката *Р* является множе­ство целых чисел **Z**, областью значений – множество {0, 1}.

**2.** Отношения "*х < у*" и "*х* делится на *у*"представляют собой двуместные предикаты, заданные на множествах **R**×**R** и **Z**×**Z** соответственно.

**Определение 2.** ***Множеством истинности*** предиката *Р*(*х*1, *х*2, ..., *хn*), заданного на множестве *М*1×*М*2×…×*Мn*, называется совокупность таких упорядоченных наборов элементов (*а*1, *а*2, ..., *аn*) из *М*1×*М*2×…×*Мn*, для которых высказывание *Р*(*а*1, *а*2, ..., *аn*) является истинным.

Обозначение: *P*+ ={(*а*1, *а*2, ..., *аn*): *λ*( *Р*(*а*1, *а*2, ..., *аn*)) =1}.

##### Примеры.

**1.** Множеством истинности двухместного предиката *Р*(*х*, *у*):"*х* делится на *у*", заданного на множестве *М*×*М*,   
где *М* = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, является следующее множество *Р+ =*{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1), (4, 2), (6, 2), (6,3)}.

**2.** Множество истинности двуместного предиката *Р*(*х,y*): "*x* *< у*", заданного на множестве *М*1×*М*2, где *М*1= {1, 2, 3}, *М*2= {2, 4, 6}, равно *P+* = {(1,2), (1,4), (1,6), (2,4), (2,6), (3,4), (3,6)}.

**Определение 3.** Два предиката *Р*(*х*1, *х*2, ..., *хn*) и *Q*(*х*1, *х*2, ..., *хn*), за­данные на одном и том же множестве *М*1×*М*2×…×*Мn*, называются ***равносильными****,* если оба предиката принимают истинные значения на одних и тех же наборах (*а*1, *а*2, ..., *аn*) из множества *М*1×*М*2×…×*Мn*, то есть, если *Р+= Q+.* Предикат *Q*(*х*1, *х*2, ..., *хn*), заданный на множестве *М*1×*М*2×…×*Мn* называется ***следствием*** предика­та *Р*(*х*1, *х*2, ..., *хn*), заданного на том же множестве, если он становится истинным высказыванием при всех значениях переменных *х*1, *х*2, ..., *хn* из соответствующих множеств *М*1, *М*2, ..., *Мn*, при кото­рых истинным высказыванием становится предикат *Р*(*х*1, *х*2, ..., *хn*), то есть, если *.*

5.2. Логические операции над предикатами

**Определение 4. *Отрицанием*** предиката *Р*(*х*1, *х*2, ..., *хn*), заданного на множестве *М*1×*М*2×…×*Мn*, называется новый предикат  (*х*1, *х*2, ..., *хn*), заданный на том же множестве, который становится истинным высказыванием при таких значениях (*а*1, *а*2, ..., *аn*) из множества *М*1×*М*2×…×*Мn*, при которых *Р*(*а*1, *а*2, ..., *аn*) является ложным высказыванием и становится ложным высказыванием, если *Р*(*а*1, *а*2, ..., *аn*) является истинным высказыванием.

Например, отри­цанием одноместного предиката *Р(х):* "*х* делится на 3", заданного на множестве М = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} будет предикат : "*х* не делится на 3". Множествами истинности предикатов *Р* и  яв­ляются следующие множества *Р+*= {0, 3, 6, 9}, ()+ = {1, 2, 4, 5, 7, 8}.

Множество истинности предиката  является дополнением множества *Р+*,то есть ( *M* – область определения предиката).

**Определение 5.** ***Конъюнкцией*** двух *n*–местных предикатов *Р*(*х*1, *х*2, ..., *хn*) и *Q*(*х*1, *х*2, ..., *хn*), заданных на множестве *М*1×*М*2×…×*Мn*,называется новый *n*–местный предикат *Р*(*х*1, *х*2, ..., *хn*)*Q*(*х*1, *х*2, ..., *хn*), который становится истинным высказыванием только для таких элементов (*а*1, *а*2, ..., *аn*) из множества *М*1×*М*2×…×*Мn*, для которых *Р*(*а*1, *а*2, ..., *аn*) и *Q*(*а*1, *а*2, ..., *аn*) являются истинны­ми высказываниями.

**Определение 6. *Дизъюнкцией*** двух *n*–местных предикатов *Р*(*х*1, *х*2, ..., *хn*) и *Q*(*х*1, *х*2, ..., *хn*), заданных на множестве *М*1×*М*2×…×*Мn*, называется новый *n*–местный предикат *Р*(*х*1, *х*2, ..., *хn*) ∨*Q*(*х*1, *х*2, ..., *хn*), который становится ложным высказыванием только для таких элементов (*а*1, *а*2, ..., *аn*) из множества *М*1×*М*2×…×*Мn*, для которых *Р*(*а*1, *а*2, ..., *аn*) и *Q*(*а*1, *а*2, ..., *аn*) являются ложными высказываниями.

**Определение 7.** ***Импликацией***двух *n*–местных предикатов *Р*(*х*1, *х*2, ..., *хn*) и *Q*(*х*1, *х*2, ..., *хn*), заданных на множестве *М*1×*М*2×…×*Мn*, называется новый *n*–местный предикат *Р*(*х*1, *х*2, ..., *хn*)*Q*(*х*1, *х*2, ..., *хn*), который становится ложным высказыванием только для таких элементов (*а*1, *а*2, ..., *аn*) из множества *М*1×*М*2×…×*Мn*, для которых *Р*(*а*1, *а*2, ..., *аn*) является истинным высказыванием, а *Q*(*а*1, *а*2, ..., *аn*) является ложным. В остальных случаях – истинным.

**Определение 8. *Эквивалентностью*** двух *n*–местных предикатов *Р*(*х*1, *х*2, ..., *хn*) и *Q*(*х*1, *х*2, ..., *хn*), заданных на множестве *М*1×*М*2×…×*Мn*, называется новый *n*–местный предикат *Р*(*х*1, *х*2, ..., *хn*)*Q*(*х*1, *х*2, ..., *хn*), который становится истинным высказыванием только для таких элементов (*а*1, *а*2, ..., *аn*) из множества *М*1×*М*2×…×*Мn*, для которых высказывания *Р*(*а*1, *а*2, ..., *аn*) и *Q*(*а*1, *а*2, ..., *аn*) ли­бо одновременно являются истинными, либо ложными. В остальных случаях – ложным.

Если предикаты *Р*(*х*1, *х*2, ..., *хn*) и *Q*(*y*1, *y*2, ..., *ym*) заданы на разных множествах, то в результате применения операций конъюнк­ции, дизъюнкции, импликации и эквивалентности к этим предика­там, получим (*n*+ *m*– *k*)–местный предикат, где *k* – число переменных, общих для обоих предикатов.

Кванторные операции

Кроме операций отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, им­пликации и эквивалентности в логике предикатов имеются ***две кванторные операции*: *квантор всеобщности***() и ***существования*** (). Если *Р(х)* одноместный предикат, заданный на некотором множестве М, то в результате применения кванторов к предикату *Р(х)* получим новые предикаты *P*(*x*) и *Р*(*х*), означающие соот­ветственно "все *х* из М обладают свойством *Р*"и "некоторые *х* из М обладают свойством *Р*"*.*

**Пример 1.** Пусть *Р(х)* одноместный предикат "*х* делится на 7", за­данный на множестве целых чисел **Z**. Применяя к этому предикату кванторы получим следующие предикаты: "все *х* из **Z** делятся на число 7" и "существуют *х* из **Z**, которые делятся на число 7". То есть, в результате применения кванторов () и () к одномест­ному предикату *Р*(*х*)получили высказывания, причем первое из них ложное, а второе – истинное. Высказывания являются нульместными предикатами.

Применение кванторов к предикатам понижает местность исходного предиката на единицу. Если *Р*(*х*1, *х*2, ..., *хn*) *n*–местный предикат, то в результате применения кванторов получим новые предикаты *Q*(*х*2, ..., *хn*)= *Р*(*х*1, *х*2, ..., *хn*), *R*(*х*2, ..., *хn*)= *Р*(*х*1, *х*2, ..., *хn*), которые зависят только от переменных *х*2, *х*2, ..., *хn*,то есть являются (*n*– 1)–мест­ными предикатами.

Предметная переменная, которая связывается квантором, то есть входит в предикат и в квантор, называется ***связанной***. Предметная переменная, не связанная никаким квантором, называется ***свободной переменной***.

**Пример 2.** Пусть *Р*(*х*, *y*)двухместный предикат, заданный неравенством "*х*2+ *у*2 1" на множестве **R**×**R**. Множеством истинности преди­ката *Р*(*х*, *y*)является множество всех точек координатной плоскости, расположенных внутри окружности радиуса 1, включая точки ок­ружности. Найдем множества истинности предикатов *Q*(*y*)= *x* *P*(*x*, *y*), *R*(*x*)= *у* *Р*(*х*, *у*), *S*= *x* *y* *P*(*x*, *y*). Множеством истинно­сти предиката *Q*(*y*)является множество таких *у,* для которых данное неравенство выполняется при любых *х* из **R**. Однако таких *у* не су­ществует. Следовательно, множество истинности предиката *Q* не со­держит ни одного элемента, то есть *Q+ =*∅. Множеству истин­ности предиката *R*(*x*)принадлежат все такие *х,* для которых можно найти число *у,* удовлетворяющее данному неравенству. Такие зна­чения *х* лежат в промежутке [–1, 1]. Следовательно, этот промежуток и будет множеством истинности предиката *R.* Предикат *S –* нульместный, то есть является высказыванием. В высказывании *S* говорится, что для любых *х* можно найти такое *у,* для которой выполняется данное неравенство. Однако это не верно. Например, для *х*,лежащих вне отрезка [–1, 1], такое *у* не существует. Тогда *S –* ложное выска­зывание.

5.3. Теоретико–множественный смысл предикатов

При определении множества истинности предиката, составленного из нескольких предикатов при помощи логических связок, можно воспользоваться соотношениями для их множеств истинности. Для двух *n*–местных предикатов *Р*(*х*1, *х*2, ..., *хn*) и *Q*(*х*1, *х*2, ..., *хn*) задан­ных на множестве *М*1×*М*2×…×*Мn*, верны следующие соотношения для их множеств истинности:

1) множество истинности отрицания предиката *Р* равно дополнению множества истинности этого предиката, то есть ;

2)множество истинности конъюнкции двух предикатов *Р* и *Q* рав­но пересечению множеств истинности *Р+* и *Q+*, то есть ;

3) множество истинности дизъюнкции двух предикатов *Р* и *Q* рав­но объединению множеств истинности *Р+* и *Q+,* то есть ;

4) множество истинности импликации двух предикатов *Р* и *Q* равно ;

5) множество истинности эквивалентности двух предикатов *Р* и *Q* равно .

**Пример.** Пусть предикаты *Р*(*х*):"*х* кратно двум" и *Q*(*x*): "*х*кратно трем", заданы на множестве М = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}. Их множествами истинности являются следующие множества: *Р+*= {2, 4, 6, 8}, *Q+*= {3, 6}. Тогда, по соотношениям (1)–(5) получим

а) {1, 3, 5, 7}, {l, 2, 4, 5, 7, 8};

б)  {3, 6} = {6};

в)  = {2, 4, 6, 8}  {3,6}= {2, 3, 4, 6, 8};

г) ** ={1, 3, 5, 7}  {3,6} ={1, 3, 5, 6, 7};

д) ={1, 3, 5, 6, 7}  {1, 2, 4, 5, 6, 7, 8}= {1,5,6,7}.

5.4. Классификация предикатов

**Определение 9.** Предикат *Р*(*х*1, *х*2, ... *х*n), заданный на множестве *М*1×*М*2×…×*Мn*, называется ***тождественно истинным****,* если для всех элементов (*а*1, *а*2, ..., *аn*) из множества *М*1×*М*2×…×*Мn* высказывания *Р*(*а*1, *а*2, ..., *аn*) будут истинными и ***тождественно ложным****,* если для всех элементов (*а*1, *а*2, ..., *аn*) из множества *М*1×*М*2×…×*Мn*, выска­зывания *Р*(*а*1, *а*2, ..., *аn*) будут ложными. Предикат *Р*(*х*1, *х*2, ... *х*n), за­данный на множестве *М*1×*М*2×…×*Мn*, называется ***выполнимым****,* если существует хотя бы один элемент (*а*1, *а*2, ..., *аn*) из множества *М*1×*М*2×…×*Мn*, для которого высказывание *Р*(*а*1, *а*2, ..., *аn*) будет ис­тинным и ***опровержимым****,* если хотя бы для одного элемента (*а*1, *а*2, ..., *аn*) из множества *М*1×*М*2×…×*Мn* высказывание *Р*(*а*1, *а*2, ..., *аn*) будет ложным.

В соответствии с классификацией предикатов истинность нульместных предикатов, содержащих кван­торы, можно определить следующим образом. Высказывание ∀*x* *P*(*x*) будет истинным, если предикат *Р*(*х*)является тождественно истинным предикатом. В противном случае – ложным. Высказыва­ние ∃*х* *Р*(*х*) будет истинным, если предикат *Р*(*х*) *–* является выпол­нимым и будет ложным в противном случае.

5.5. Формулы логики предикатов.   
Равносильность формул

Определение формулы логики предикатов имеет индуктивный ха­рактер. Сначала задается алфавит символов, из которых составляются формулы:

– предметные переменные: *х, у, z, xi, yi, zi ();*

– нульместные предикатные переменные: *Р*, *Q*, *R*, *Рi*, *Qi*, *Ri,*

*(i  N)*;

– *n*–местные () предикатные переменные: *Р*(, ..., ), *Q*(, ..., ), *R*(, ..., ), *Рi*(, ..., ), *Qi*(, ..., ), *Ri*(, ..., ) *(i  N)* с указанием числа свободных мест в них;

– символы логических операций: ;

– кванторы: ∀, ∃;

– вспомогательные символы: (, ) – скобки; , – запятая.

**Определение 10.** (***формулы логики предикатов***).

**1.** Каждая нульместная предикатная переменная есть формула.

**2.** Любой *n*–местный предикат *Р*(*х*1, *х*2, ..., *хn*) есть формула.

**3.** Если *F*, *G –* формулы, не содержащие предметных перемен­ных, которые связаны квантором в одной формуле и свободны в другой, то выражения (), (*F* ∧ *G*), (*F* ∨ *G*), (*F* → *G* ), (*F* ↔ *G*) также являются формулами.

**4.** Если *F* формула, а *х –* предметная переменная, входящая сво­бодно в *F,* то выражения ∀*x* *F*(*x*) и ∃*x* *F*(*x*) также являются формулами.

**5.** Никаких других формул в логике предикатов нет.

Формулы, в которых нет свободных переменных, называются ***замкнутыми***, а формулы, содержащие свободные переменные, – ***открытыми***.

Из определения формулы логики предикатов следует, что все фор­мулы алгебры высказываний являются также формулами логики предикатов.

**Определение 11.** Две формулы *F* и *G* называются ***равносильными****,* если при подстановке в эти формулы вместо предикатных перемен­ных конкретных предикатов, а вместо предметных переменных конкретных элементов, эти формулы преобразуются в высказывания с одинаковыми логическими значениями, то есть либо оба в ис­тинные высказывания, либо оба в ложные.

Все ***основные равно­сильности логики высказываний*** верны также и для формул логики предикатов. Кроме них, в логике предикатов имеются равносильности, связанные с кванторами:

**1.** Законы отрицания: , .

**2.** Законы дистрибутивности:

**;

**.

**3*.***Если предикат *Q* не зависит от переменной *х,* то верны сле­дующие законы:

**, **;

**, **.

**4.** Законы переименования связанных переменных:

**, **.

**5*.***Законы перестановки кванторов:

**, **.

5.6. Классификация формул логики предикатов

**Определение 12.** Формула *F* логики предикатов называется ***выпол­нимой*** *(****опровержимой****)* на множестве М, если можно найти такие конкретные предикаты, заданные на том же множестве, при подста­новке которых вместо предикатных переменных, она преобразуется в ***выполнимый (опровержимый)*** предикат. Формула логики преди­катов называется ***тождественно истинной*** *(****тождественно лож­ной****)* на множестве М, если при подстановке вместо предикатных пе­ременных любых конкретных предикатов, заданных на этом же множестве, она преобразуется в ***тождественно истинный (тождест­венно ложный)*** предикат. Формула логики предикатов называется ***тавтологией*** *(****противоречием****),* если при подстановке вместо преди­катных переменных любых конкретных предикатов, заданных на любом множестве, она преобразуется в ***тождественно истинный (тождественно ложный)*** предикат.

Критерием равносильности формул *F* и G является тавтологичность формулы *(F*↔ *G).*

**Пример 1.** Вычислить значение формулы , если предикат имеет значение – «число *x* меньше числа *y*» и определен на множестве , *N*=.

Так как при указанном значении предиката высказывание означает утверждение, что «для любого натурального числа *x* найдется натуральное число *y*, большее числа *x*», то это высказывание истинно. Высказывание означает утверждение, что «существует натуральное число *x*, которое меньше любого натурального числа *y*». Это высказывание ложно. Поэтому получаем, что исходная формула ложна.

**Пример 2**. Доказать, что формула выполнима.

Для доказательства выполнимости формулы *A* достаточно найти область определения двухместного предиката и такое его значение, что в этой области формула принимает истинные значения. Такой областью определения предиката, в частности, будет множество . Действительно, если - предикат «*y< x*», то формула *A* тождественно истинна в области *М*, и, следовательно, выполнима в этой области. Однако, если в качестве предиката взять предикат «*x< y*», то формула *A* будет тождественно ложной в области *М* и, следовательно, невыполнимой в области *М*. При этом ясно, что формула *A* не общезначима.

**Пример 3.** Доказать, что формула является общезначимой.

Считая, что формула *A* определена на любой области *M*, проведем равносильные преобразования:

.

То есть формула *A* тождественно истинна для любых одноместных предикатов и и в любой области.

**Пример 4.** Доказать, что формула тождественно ложна.

Так как формула , а формула , очевидно, тождественно ложна, то ложна и формула *A*.

**Определение 13.** Формула *F',* равносильная *F,* называется ее ***при­веденной*** формой, если *F'* из логических связок содер­жит только отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию, а отрицание относится только к предикатным переменным и к высказываниям. ***Предваренной нормальной*** формой (ПНФ) фор­мулы *F* называется такая ее приведенная форма, в которой все кванторы вынесены в начало формулы, а область действия каждого квантора распространяется до конца формулы.

ПНФ – это формула вида , где  – один из кванторов ∀ или ∃ (), а формула *F* не содержит кванторов и является приведенной формой.

Для формул логики предикатов справедлива следующая теорема.

**Теорема.** *Для каждой формулы логики предикатов существует равносильная ей ПНФ.*

Предваренные нормальные формы формул в логике предикатов используются для выяснения равносильности формул и для решения проблемы классификации формул.

Одной из задач классификации формул является проблема ***разрешимости****,* которая состоит в следующем. Необходимо найти алгоритм, при помощи ко­торого для произвольной формулы логики предикатов можно опре­делить, будет она тавтологией или нет. В отличие от алгебры выска­зываний, для формул логики предикатов общего алгоритма не су­ществует. Это было доказано в 1936 году американским математиком *А. Чёрчем*. Несмотря на отсутствие алгоритма в общем случае, в неко­торых частных случаях такой алгоритм существует. Например, для формул, содержащих только одноместные предикаты.

6. ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ (ИП)

Понятие формулы в ИП вводится так же, как оно вводилось в логике предикатов.

Аксиоматическая теория начинается с выбора системы аксиом. Как и в случае высказываний, этот выбор может быть осуществлен по-разному. Одной из таких систем аксиом может служить система, состоящая из трех аксиом рассмотренного выше формализованного исчисления высказываний и двух дополнительных аксиом (схем аксиом):

(P1) ****;

(P2) ,

где формула *t* не содержит свободной переменной *x*.

К правилу вывода ***modus pones***(MP) добавляются еще два ***правила вывода***:

|  |  |
| --- | --- |
|  | – правило введения квантора общности (∀–правило); |
|  | – правило введения квантора существования ( ∃– правило), |

где *х* не входит свободно в формулу *F*.

Понятия вывода и теоремы определяются аналогично соответствующим понятиям исчисления высказываний.

Возможны и другие системы аксиом и правил вывода.

Рассмотрим пример вывода в исчислении предикатов.

**Пример.** Доказать, что

.

**Решение.** Построим вывод второй формулы из первой:



7. ЗАДАЧИ

ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

# ***Задача 1***

# Решить системы логических уравнений:

1. **а)**  **б)** 
2. **а)**  **б)** 
3. **а)**  **б)** 
4. **а)**  **б)** 
5. **а)**  **б)** 
6. **а)**  **б)** 
7. **а)**  **б)** 
8. **а)**  **б)** 
9. **а)**  **б)** 
10. **а)**  **б)** 
11. **а)**  **б)** 
12. **а)**  **б)** 
13. **а)**  **б)** 
14. **а)**  **б)** 
15. **а)**  **б)** 
16. **а)**  **б)** 
17. **а)**  **б)** 
18. **а)**  **б)** 
19. **а)**  **б)** 
20. **а)**  **б)** 
21. **а)**  **б)** 
22. **а)**  **б)** 
23. **а)**  **б)** 
24. **а)**  **б)** 

**25. а)**  **б)** 

**Пример.** Решить систему логических уравнений:



##### Решение: *Первый способ*. Решаем первое уравнение системы. Отыскав все реше­ния первого уравнения, выбираем из них те, которые удовлетворяют вто­рому уравнению.

 .

Отсюда решениями первого уравнения будут

1) *а* = 0, *b* = 0, *c* = 0; 2) *а* = 0, *b* = 0, *c* = 1;

3) *а* = 0, *b* = 1, *c* = 0; 4) *а* = 0, *b* = 1, *c* = 1;

5) *а* = 1, *b* = 1, *c* = 1.

Подставив найденные решения во второе уравнение, найдем решение системы

1) 0 ∨ 0 ↔ 0 = 1 ≠ 0; 2) 0 ∨ 0 ↔ 1 = 0 = 0;

3) 0 ∨ 1 ↔ 0 = 0 = 0; 4) 0 ∨ 1 ↔ 1 = 1 ≠ 0;

5) 1 ∨ 1 ↔ 1 = 1 ≠ 0.

Таким образом, решениями системы будут второе и третье решения первого уравнения, то есть

*а* = 0, *b* = 0, *c* = 1; *а* = 0, *b* = 1, *c* = 0.

*Второй способ.* Строим таблицы истинности для левых частей первого и второго уравнений и подчеркиваем строки, в которых их значения совпа­дают с соответствующими значениями правых частей уравнений.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a | b | c | (1)  *b*& *c* | *a*→ (1) | (2)*a*∨ *b* | (2)↔ *b* |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

**Решения:** *а* = 0, *b* = 0, *c* = 1; *а* = 0, *b* = 1, *c* = 0.

# ***Задача 2***

# Найти КНФ формул *F*. Являются ли формулы *F* тавтологиями?

**1. а)** ; **б)** .

**2. а)** ; **б)** .

**3. а)** ; **б)** .

**4. а)** ; **б)** .

**5. а)** ; **б)** .

**6. а)** ; **б)** .

**7. а)** ; **б)** .

**8. а)** ; **б)** .

**9. а)** ; **б)** .

**10. а)** ; **б)** .

**11. а)** ; **б)** .

**12. а)** ; **б)** .

**13. а)** ; **б)** .

**14. а)** ; **б)** .

**15. а)** ; **б)** .

**16. а)** ; **б)** .

**17. а)** ; **б)** .

**18. а)** ; **б)** .

**19. а)** ; **б)** .

**20. а)** ; **б)** .

**21. а)** ; **б)** .

**22. а)** ; **б)** .

**23. а)** ; **б)** .

**24. а)** ; **б)** .

**25. а)**; **б)** .

**Пример.** Найти КНФ формулы *F*: . Является ли формула *F* тавтологией?

##### Решение



Последнее выражение является КНФ, так как представляет собой конъюнкцию дизъюнктивных одночленов ,, , *.* Очевидно, формула *F* не является тавтологией, так как условие теоремы 5 (из раздела 1.4) не выполняется.

# ***Задача 3***

# Найти ДНФ заданной формулы *F*. Является ли формула *F* противоречием?

**1. а)** ; **б)** .

**2. а)** ; **б)** .

**3. а)** ; **б)** .

**4. а)** ; **б)** .

**5. а)** ; **б)** .

**6. а)** ; **б)** .

**7. а)** ; **б)** .

**8. а)** ; **б)** .

**9. а)** ; **б)** .

**10. а)** ; **б)** .

**11. а)** ; **б)** .

**12. а)** ; **б)** .

**13. а)** ; **б)** .

**14. а)** ; **б)** .

**15. а)** ; **б)** .

**16. а)** ; **б)** .

**17. а)** ; **б)** .

**18. а)** ; **б)** .

**19. а)** ; **б)** .

**20. а)** ; **б)** .

**21. а)** ; **б)** .

**22. а)** ; **б)** .

**23. а)** ; **б)** .

**24. а)** ; **б)** .

**25. а)** ; **б)** .

**Пример.** Найти ДНФ формулы *F*:

.

Является ли формула *F* противоречием?

##### Решение



Поскольку полученная формула является дизъюнкцией конъюнктив­ных одночленов, то это ДНФ. Согласно теореме 5 (из раздела 1.4), она равносильна 0, то есть является противоречием.

Следует заметить, что самый быстрый переход от ДНФ к КНФ и обратно осуществляется на основе «***чудо - закона***».

# ***Задача 4***

# Доказать равносильность формул: 1) составлением таблиц истинности; 2) приведением формул к СДНФ или СКНФ с помощью равносильных преобразований.

**1. а)** ; **б)** .

**2. а)** ; **б)** .

**3. а)** ; **б)** .

**4. а)** ; **б)** .

**5. а)** ; **б)** .

**6. а)** ; **б)** .

**7. а)** ; **б)** .

**8. а)** ; **б)** .

**9. а)** ; **б)** .

**10. а)** ; **б)** .

**11. а)** ; **б)** .

**12. а)** ; **б)** .

**13. а)** ; **б)** .

**14. а)** ; **б)** .

**15. а)** ; **б)** .

**16. а)** ; **б)** .

**17. а)** ; **б)** .

**18. а)** ; **б)** .

**19. а)** ; **б)** .

**20. а)** ; **б)** .

**21. а)** ; **б)** .

**22. а)** ; **б)** .

**23. а)** ; **б)** .

**24. а)** ; **б)** .

**25. а)** ; **б)** .

**Пример**. Доказать равносильность формул

#### 

с помощью: 1) таблиц истинности; 2) равносильных преобразований.

##### Решение: *Первый способ.* Строим таблицы истинности для формул *F* и *G*:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *P* | *Q* | *R* | (1) | (2) | (3) | F | G |
|  |  |  | (1)&(2)&(3) |  |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| I | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |

Из построенных таблиц для *F* и G видно, что их значения для кон­кретных высказываний совпадают.

*Второй способ.* Приведём формулу *F* равносильными преобразованиями к формуле *G*.

#### 

Преобразование (1) осуществляется с использованием равносильно­сти *.* Преобразование (2) осуществляется с использованием дистрибутивности операции & относительно ∨ к двум первым скобкам.

Преобразование (3) осуществляется с использованием следующих равносильностей:

а) ; б) ;

в) ; г) .

Преобразование (4) осуществляется с использованием дистрибутив­ности операции & относительно ∨. Преобразование (5) осуществляется с использованием равносильностей в), г), использованных при преобразова­нии (3).

# ***Задача 5***

# Проверить правильность умозаключений методом от про­тивного:

1. **а)** Если противоположные стороны четырехугольника по­парно параллельны, то он является параллелограммом. Если че­тырехугольник – ромб, то его противоположные стороны попарно параллельны. Следовательно, если четырехугольник – ромб, то он – параллелограмм.

**б)** Матрица обладает обратной тогда и только тогда, когда она является невырожденной и ее определитель отличен от нуля. Матрица является невырожденной тогда и только тогда, когда ее определитель отличен от нуля. Следовательно, матрица обладает обратной тогда и только тогда, когда она является невырожден­ной.

1. **а)** Четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его противоположные стороны попарно равны и параллельны. Если противоположные стороны четырехугольни­ка попарно параллельны, то они равны. Следовательно, четырех­угольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его противоположные стороны попарно параллельны.

**б)** Если система векторов содержит нулевой вектор или два одинаковых вектора, то она является линейно зависимой. Данная система векторов линейно независима. Следовательно, система не содержит ни нулевого вектора, ни одинаковых векторов.

1. **а)** Если формула является выполнимой, то она является тав­тологией или не является противоречием. Если формула – тавто­логия, то она не является противоречием. Следовательно, если формула – выполнимая, то она не является противоречием.

**б)** Если матрица *А* – невырожденная, то ее определитель от­личен от нуля, а ее строки образуют линейно независимую систе­му векторов. Если определитель отличен от нуля, то матрица *А* – невырожденная и ее строки образуют линейно независимую сис­тему векторов. Следовательно, матрица *А* – невырожденная тогда и только тогда, когда ее определитель отличен от нуля.

1. **а)** Если число векторов совпадает с рангом системы, то сис­тема векторов линейно независима и является базисом. Если сис­тема векторов линейно независима или является базисом, то чис­ло векторов в системе совпадает с ее рангом. Следовательно, система векторов является базисом тогда и только тогда, когда число векторов в ней совпадает с рангом системы.

**б)** Если я приду в институт и получу стипендию, то я пойду на занятия. Если я приду в институт и не пойду на занятия, то я все равно получу стипендию. Следовательно, я пойду на занятия или не приду в институт.

1. **а)** Если последовательность монотонная и ограниченная, то она имеет предел. Если последовательность монотонная и имеет предел, то она ограничена. Данная последовательность монотон­ная. Следовательно, монотонная последовательность имеет пре­дел тогда и только тогда, когда она ограничена.

**б)** Параллелограмм является прямоугольником тогда и толь­ко тогда, когда его диагонали или все его углы равны. Диагонали параллелограмма равны тогда и только тогда, когда все его углы равны между собой. Следовательно, параллелограмм является прямоугольником тогда и только тогда, когда его диагонали рав­ны.

1. **а)** Если данный параллелограмм имеет равные диагонали, то он является прямоугольником или квадратом. Данный параллело­грамм не является квадратом. Следовательно, если данный парал­лелограмм имеет равные диагонали, то он является прямоуголь­ником.

**б)** Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр в десятичной записи делится на 3 или на 9. Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр в десятичной записи делится на 3. Следовательно, если сумма цифр в десятичной записи делится на 9, то число делится на 3.

1. **а)** Матрица обладает обратной тогда и только тогда, когда она является невырожденной и ее определитель отличен от нуля. Матрица является невырожденной тогда и только тогда, когда ее определитель отличен от нуля. Следовательно, матрица обладает обратной тогда и только тогда, когда ее определитель отличен от нуля.

**б)** Если четырехугольник – параллелограмм, то его противо­положные стороны попарно параллельны. Если четырехугольник – ромб, то две его противоположные стороны попарно параллель­ны. Следовательно, если четырехугольник – ромб, то он – парал­лелограмм.

1. **а)** Треугольник является равнобедренным тогда и только то­гда, когда его боковые стороны и углы при основании равны. Треугольник является равнобедренным тогда и только тогда, когда его боковые стороны равны. Следовательно, если боковые стороны треугольника равны, то равны и углы при основании.

**б)** Четырехугольник является квадратом или ромбом тогда и только тогда, когда все его стороны равны. Если четырехугольник – квадрат, то он является и ромбом. Следовательно, четырех­угольник является ромбом тогда и только тогда, когда все его стороны равны.

1. **а)** Если матрица *А* – невырожденная, то ее определитель от­личен от нуля, а ее строки образуют линейно независимую систе­му векторов. Если определитель отличен от нуля, то матрица *А* – невырожденная и ее строки образуют линейно независимую сис­тему векторов. Следовательно, если матрица *А* – невырожденная и ее определитель отличен от нуля, то строки этой матрицы обра­зуют линейно независимую систему векторов.

**б)** Четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его противоположные стороны равны и па­раллельны. Данный четырехугольник имеет равные противопо­ложные стороны. Следовательно, данный четырехугольник будет параллелограммом тогда и только тогда, когда его противопо­ложные стороны параллельны.

1. **а)** Целое число делится на 6 тогда и только тогда, когда оно делится на 2 и на 3. Данное число не делится на 6. Следовательно, если данное число делится на 2, то оно не делится на 3.

**б)** Если число векторов совпадает с рангом системы, то сис­тема векторов линейно независима и является базисом. Если сис­тема векторов линейно независима или является базисом, то чис­ло векторов в системе совпадает с ее рангом. Следовательно, сис­тема векторов является базисом тогда и только тогда, когда она линейно независима.

1. **а)** Параллелограмм является прямоугольником тогда и толь­ко тогда, когда его диагонали или все его углы равны. Диагонали параллелограмма равны тогда и только тогда, когда все его углы равны между собой. Следовательно, параллелограмм является прямоугольником тогда и только тогда, когда все его углы равны.

**б)** Если функция дифференцируемая и ее производная по­ложительна, то функция монотонно возрастающая. Если функция дифференцируемая и монотонно возрастающая, то производная функции положительна. Следовательно, если функция дифферен­цируемая, то она является монотонно возрастающей тогда и толь­ко тогда, когда ее производная положительна.

1. **а)** Если волки будут сыты, а овцы целы, то пастухи будут довольны. Если волки не будут сыты, то пастухи будут довольны тогда и только тогда, когда овцы целы. Следовательно, если пас­тухи довольны, то волки сыты или овцы целы.

**б)** Число является четным тогда и только тогда, когда оно делится на 2 или на 4. Число является четным тогда и только тогда, когда оно делится на 2. Следовательно, если число делится на 4, то оно четное и делится на 2.

1. **а)** Неверно, что если Анри украл машину, то Луи и Том ви­дели это. Луи видел, как Анри украл машину. Следовательно, Ан­ри украл машину, но Том не видел этого.

**б)** Число делится на 5 тогда и только тогда, когда оно окан­чивается нулем или цифрой 5. Данное число не оканчивается цифрой 5. Следовательно, данное число делится на 5 тогда и только тогда, когда оно оканчивается нулем.

1. **а)** Если целое число делится на 2 и на 3, то оно делится на 6. Если целое число делится на 2 и не делится на 3, то оно не делит­ся на 6. Следовательно, если целое число делится на 2, то оно де­лится на 6 тогда и только тогда, когда оно делится на 3.

**б)** Треугольник является равнобедренным тогда и только то­гда, когда его боковые стороны и углы при основании равны. Ес­ли боковые стороны треугольника равны, то равны и углы при основании. Следовательно, треугольник является равнобедрен­ным тогда и только тогда, когда его боковые стороны равны.

1. **а)** Подсистема векторов является базисом исходной системы тогда и только тогда, когда она линейно независима и любой век­тор исходной системы линейно выражается через векторы этой подсистемы. Данная подсистема векторов является линейно неза­висимой. Следовательно, данная подсистема векторов является базисом исходной системы тогда и только тогда, когда любой вектор исходной системы линейно выражается через векторы этой подсистемы.

**б)** Если сторож выходил на работу и у преступника был ключ, то ограбление произошло в субботу. Если у преступника был ключ, и ограбление произошло в субботу, то сторож не выхо­дил на работу. Следовательно, если сторож выходил на работу, то у преступника не было ключа.

1. **а)** Если число векторов совпадает с рангом системы, то сис­тема векторов линейно независима и является базисом. Если сис­тема векторов линейно независима или является базисом, то чис­ло векторов в системе совпадает с ее рангом. Следовательно, сис­тема векторов линейно независима тогда и только тогда, когда число векторов в ней совпадает с рангом системы.

**б)** Целое число делится на 6 тогда и только тогда, когда оно делится на 2 и на 3. Если данное число делится на 2, то оно не де­лится на 3. Следовательно, данное число не делится на 6.

1. **а)** Если производная функции в точке равна нулю и при пе­реходе через нее меняет знак с плюса на минус, то данная точка является точкой максимума функции. Если производная в точке равна нулю и эта точка является точкой максимума функции, то производная при переходе через нее меняет знак с плюса на ми­нус. Следовательно, если производная в точке равна нулю, то точка является точкой максимума тогда и только тогда, когда производная при переходе через нее меняет знак с плюса на ми­нус.

**б)** Параллелограмм является прямоугольником тогда и толь­ко тогда, когда его диагонали равны. Диагонали параллелограмма равны тогда и только тогда, когда все его углы равны между со­бой. Следовательно, параллелограмм является прямоугольником тогда и только тогда, когда диагонали или все его углы равны.

1. **а)** Система линейных уравнений разрешима и имеет единст­венное решение тогда и только тогда, когда число неизвестных совпадает с рангом системы. Число неизвестных данной системы линейных уравнений не совпадает с рангом системы. Следова­тельно, если система линейных уравнений разрешима, то она имеет неединственное решение.

**б)** Если музыкант принесет ноты, то мы пойдем на его кон­церт, если инструмент будет настроен. Если инструмент будет на­строен, то музыкант принесет ноты, если мы придем на его кон­церт. Инструмент будет настроен. Следовательно, мы придем на концерт тогда и только тогда, когда музыкант принесет ноты.

1. **а)** Параллелограмм является ромбом тогда и только тогда, когда все его стороны равны. Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то этот параллелограмм – ромб. Следовательно, параллелограмм является ромбом, если все его стороны равны или диагонали перпендикулярны.

**б)** Известно, что свидетель ошибся или злоумышленник не уехал в экипаже. Если злоумышленник имел сообщника, то он уе­хал в экипаже. У злоумышленника не было ни сообщника, ни ключа или у него был сообщник и был ключ. Следовательно, если у злоумышленника был ключ, то свидетель ошибся.

1. **а)** Треугольник является равнобедренным тогда и только то­гда, когда его боковые стороны равны. Если боковые стороны треугольника равны, то равны и углы при основании. Следова­тельно, треугольник является равнобедренным тогда и только то­гда, когда его боковые стороны и углы при основании равны.

**б)** Если я сдам все зачеты и экзамен по логике, то пойду на свидание. Если я сдам экзамен по логике и не пойду на свидание, то я сдам все зачеты. Следовательно, либо я пойду на свидание, либо не сдам экзамен по логике.

1. **а)** Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр в десятичной записи делится на 3. Если число делится на 9, то оно делится на 3, Следовательно, если число делится на 9, то сумма его цифр в десятичной записи делится на 3.

**б)** Если функция дифференцируемая и ее производная моно­тонно возрастает, то функция является выпуклой вниз. Если функция дифференцируемая и является выпуклой вниз, то ее про­изводная монотонно возрастает. Следовательно, если функция дифференцируемая, то она является выпуклой вниз тогда и только тогда, когда ее производная монотонно возрастает.

1. **а)** Четырехугольник является квадратом или ромбом тогда и только тогда, когда все его стороны равны. Четырехугольник не является квадратом. Следовательно, четырехугольник является ромбом тогда и только тогда, когда все его стороны равны.

**б)** Если матрица *А* – невырожденная, то ее определитель от­личен от нуля, а ее строки образуют линейно независимую систе­му векторов. Если определитель отличен от нуля, то матрица *А* – невырожденная и ее строки образуют линейно независимую сис­тему векторов. Следовательно, определитель отличен от нуля то­гда и только тогда, когда матрица *А* является невырожденной и ее строки образуют линейно независимую систему векторов.

1. **а)** Четырехугольник является ромбом тогда и только тогда, когда он является квадратом или когда все его стороны равны. Если четырехугольник является квадратом, то все его стороны равны. Следовательно, четырехугольник является ромбом тогда и только тогда, когда все его стороны равны.

**б)** Если последовательность монотонная и ограниченная, то она имеет предел. Если последовательность монотонная и имеет предел, то она ограничена. Следовательно, если последователь­ность монотонная, то она ограничена тогда и только тогда, когда имеет предел.

1. **а)** Четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его противоположные стороны попарно па­раллельны. Четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его диагонали в точке пересечения делятся пополам. Следовательно, четырехугольник является параллело­граммом тогда и только тогда, когда его противоположные сторо­ны попарно параллельны или когда его диагонали в точке Пересечения делятся пополам.

**б)** Система линейных уравнений разрешима и имеет единст­венное решение тогда и только тогда, когда число неизвестных совпадает с рангом системы. Данная система линейных уравнений имеет неединственное решение. Следовательно, число неизвест­ных данной системы не совпадает с рангом.

1. **а)** Если прямая *l* перпендикулярна прямым *а* и *b*, то прямые *а* и *b* параллельны. Если *l* перпендикулярна прямой *b* и прямые *а* и *b* параллельны, то *l* перпендикулярна *а*. Следовательно, если *l* перпендикулярна прямой *b,* то прямые *а* и *b* параллельны тогда и только тогда, когда *l* перпендикулярна прямой *а*.

**б)** Два множества равны друг другу тогда и только тогда, когда они состоят из одних и тех же элементов. Следовательно, два множества не равны друг другу тогда и только тогда, когда они не состоят из одних и тех же элементов.

***Формула Н***является ***логическим следствием*** формул , ес­ли из одновременной истинности формул следует истин­ность формулы *Н*. Таким образом, если построить таблицу истинности формул , *H*, то в строках таблицы, в которых все формулы  одновременно истинны, формула *Н*, если она является следстви­ем ,обязана также быть истинной. В этом случае пишут  ˫ *H.*

При дедуктивных рассуждениях, когда из некоторых суждений выво­дится умозаключение, говорят, что ***умозаключение правильное***, если оно является логическим следствием данных суждений.

Проверить правильность умозаключения можно ***методом от против­ного***. Мы предполагаем, что *Н* не является логическим следствием *.* Тогда должна быть ситуация, при которой *H* = 0, a все одновременно истинны. Если во всех случаях, при которых *H* = 0,по край­ней мере, одна из формул ложная, то мы приходим к ***проти­воречию***, и ***умозаключение правильное***. Если же хотя бы в одном случае мы найдём, что все  истинны, то умозаключение не является правильным.

**Пример.** Проверить правильность умозаключения методом от про­тивного:

"Если завтра будет холодно, то я надену теплое пальто, если рукав будет починен. Завтра будет холодно, а рукав не будет починен. Следовательно, я не надену теплое пальто".

##### Решение. Используя аппарат алгебры высказываний, запишем наши высказыва­ния в виде выражений, использующих обозначения логических операций и простых высказываний. *Обозначения*:

1) завтра будет холодно – *а*;

2) я надену тёплое пальто – *b*;

3) рукав пальто будет починен – *с*.

*Заданные суждения:* .

*Умозаключение:* .

Пусть . Если , то *а =*1, *с*= 0. Тогда .

Отсюда следует, что умозаключение правильное.

# ***Задача 6***

Упростите РКС так, чтобы она содержала не более *N* контактов.

*x*

**

*y*

*z*

**

*x*

*x*

**

*y*

*z*

**

*y*

*x*

**

*y*

*z*

*z*

**

1. **а)** *N* = 3 **б)** *N* = 5

**

**

*x*

**

**

*y*

**

**

*z*

*x*

**

*z*

**

*x*

*x*

**

*y*

**

*y*

**

*y*

*z*

*z*

**

**

**

**

1. **а)** *N* = 6 **б)** *N* = 4

*x*

**

**

*y*

**

*z*

*x*

**

*z*

*x*

**

**

*y*

**

**

*z*

**

**

**

**

**

1. **а)** *N* = 5 **б)** *N* = 5

**

**

*x*

**

*y*

**

*z*

*z*

*x*

*x*

*z*

**

*x*

*x*

**

*y*

*y*

**

*y*

*z*

*z*

**

**

**

*y*

*x*

*z*

1. **а)** *N* = 6 **б)** *N* = 4

*x*

**

**

*y*

**

*z*

*x*

**

*z*

*x*

**

*y*

**

**

*z*

*z*

*z*

*y*

*y*

*x*

*x*

1. **а)** *N* = 5 **б)** *N* = 5

**

**

**

*y*

**

*z*

*x*

**

**

1. **а)** *N* = 6 **б)** *N* = 4

*x*

**

**

*y*

**

*z*

**

**

**

*y*

*x*

**

**

**

**

**

**

*z*

**

**

*y*

**

*z*

*x*

**

*y*

*x*

1. **а)** *N* = 5 **б)** *N* = 4

**

*z*

*z*

*y*

*x*

*x*

**

*y*

**

*x*

*y*

*z*

*z*

*x*

*y*

**

**

*y*

**

*z*

*x*

**

*y*

*z*

*z*

**

*x*

**

**

*y*

*z*

**

*y*

**

*x*

*y*

*z*

*z*

*x*

**

*x*

*y*

1. **а)** *N* = 3 **б)** *N* = 4

*x*

**

**

*y*

**

*z*

*x*

*y*

**

*x*

**

*y*

**

*z*

**

**

*y*

*x*

**

**

*z*

1. **а)** *N* = 6 **б)** *N* = 5

*x*

**

**

*y*

**

*z*

*x*

**

*z*

1. **а)** *N* = 3 **б)** *N* = 4

*z*

*x*

**

**

*y*

*z*

*y*

**

*x*

*z*

*x*

*y*

**

**

*x*

**

*y*

*z*

**

**

*y*

**

*z*

*x*

**

*x*

*y*

*x*

*y*

*z*

**

**

*y*

*x*

**

*z*

1. **а)** *N* = 6 **б)** *N* = 4

*x*

**

**

*y*

**

*z*

**

*x*

*y*

*z*

**

*x*

**

**

*y*

*z*

**

*y*

**

*x*

*y*

*z*

*z*

*x*

**

*x*

*y*

1. **а)** *N* = 3 **б)** *N* = 4

*x*

**

**

*y*

*z*

**

*y*

*z*

**

*x*

**

*y*

**

*z*

**

**

*y*

*x*

**

**

*z*

1. **а)** *N* = 6 **б)** *N* = 5

**

**

*y*

**

*z*

*x*

*y*

*z*

*x*

1. **а)** *N* = 6 **б)** *N* = 4

*x*

**

*y*

**

*z*

**

**

**

**

*x*

**

**

*y*

**

*z*

*y*

*z*

**

*x*

*z*

**

*x*

*x*

**

*y*

*y*

**

*y*

*z*

*z*

*y*

*x*

*x*

*z*

*z*

*y*

1. **а)** *N* = 3 **б)** *N* = 5

**

**

*y*

**

*z*

*x*

*y*

*z*

*x*

1. **а)** *N* = 6 **б)** *N* = 5

*x*

**

*z*

**

*y*

**

*z*

**

*y*

**

**

*x*

**

**

*y*

**

*z*

*x*

*z*

*x*

**

*z*

*y*

*x*

*y*

*y*

*z*

*x*

*y*

**

**

*x*

**

1. **а)** *N* = 4 **б)** *N* = 4

**

**

*y*

**

*z*

*x*

*z*

**

*y*

*z*

*x*

*y*

*y*

*z*

*x*

**

**

**

**

**

**

1. **а)** *N* = 6 **б)** *N* = 4

**

**

*y*

**

*z*

*x*

*y*

*z*

**

*y*

*x*

*y*

*z*

*x*

**

*x*

**

**

*z*

*y*

*z*

*x*

*y*

*z*

1. **а)** *N* = 5 **б)** *N* = 5

**

**

*y*

**

*z*

*x*

*z*

*x*

*y*

1. **а)** *N* = 6 **б)** *N* = 4

*z*

*x*

*y*

*y*

*z*

*x*

**

**

**

**

**

**

*x*

**

**

*y*

*z*

**

**

**

**

*z*

*y*

*x*

*z*

*z*

*x*

*y*

**

*x*

*z*

*x*

**

1. **а)** *N* = 4 **б)** *N* = 4

**

**

*y*

**

*z*

*x*

*x*

*y*

*z*

*x*

**

*y*

**

*z*

**

**

*y*

*x*

**

**

*z*

1. **а)** *N* = 6 **б)** *N* = 4

**

**

*y*

**

*z*

*x*

*x*

*z*

**

*y*

*x*

*y*

*z*

*x*

**

*x*

**

**

*z*

*y*

*z*

**

**

**

1. **а)** *N* = 3 **б)** *N* = 4

**

**

*y*

**

*z*

*x*

*x*

*y*

*z*

1. **а)** *N* = 6 **б)** *N* = 4

*x*

*z*

**

*x*

*y*

*z*

*y*

**

**

**

**

**

**

**

*y*

**

*x*

*y*

*z*

*x*

**

1. **а)** *N* = 6 **б)** *N* = 4

*x*

*y*

*z*

**

**

**

**

**

**

*y*

*z*

*x*

**

**

*y*

**

*z*

*x*

**

**

**

# ***Задача 7***

Найти все неравносильные между собой следствия из посылок.

1. **а)** Если целое число делится на 2, то оно делится на 6 тогда и только тогда, когда оно делится на 3. Если целое число делится на 3, то оно делится на 6 тогда и только тогда, когда оно делится на 2.

**б)** Если система векторов линейно зависима, то один из век­торов линейно выражается через остальные векторы. Если ранг равен числу векторов системы, то система векторов линейно не­зависима.

1. **а)** Если сумма двух слагаемых – четное число, то оба сла­гаемых – четные числа или оба – нечетные числа. Если оба сла­гаемых – нечетные числа, то сумма – четное число.

**б)** Если боковые стороны треугольника равны, то этот тре­угольник – равнобедренный. Если углы при основании треуголь­ника равны, то этот треугольник – равнобедренный.

1. **а)** Если в треугольнике боковые стороны и углы при осно­вании равны, то этот треугольник является равнобедренным. Если в треугольнике углы при основании равны, то равны и его боко­вые стороны.

**б)** Если *а* делится на *с* и *b* делится на *с*, то *а* + *b* делится на *с*. Если *а* + *b* делится на *с*, то *а* делится на *с* тогда и только тогда, ко­гда *b* делится на *с*.

1. **а)** Если параллелограмм имеет равные диагонали, то он яв­ляется прямоугольником или квадратом. Если параллелограмм является квадратом, то он является и прямоугольником.

**б)** Если система векторов содержит нулевой вектор, то она линейно зависима. Если система векторов линейно независима, то она не содержит двух одинаковых векторов и нулевого вектора.

1. **а)** Если диагонали параллелограмма не равны, то он не яв­ляется квадратом. Если диагонали параллелограмма взаимно пер­пендикулярны, то он является квадратом тогда и только тогда, ко­гда его диагонали равны.

**б)** Если в треугольнике медиана является высотой и биссек­трисой, то этот треугольник – равнобедренный. Если медиана яв­ляется высотой, то медиана является и биссектрисой.

1. **а)** Если целое число делится на 2 и не делится на 3, то оно не делится на 6. Если целое число делится на 6, то оно делится на 2.

**б)** Если противоположные стороны четырехугольника по­парно равны, то этот четырехугольник – параллелограмм. Если противоположные стороны четырехугольника попарно парал­лельны, то этот четырехугольник – параллелограмм.

1. **а)** Если формула является выполнимой, то она является тав­тологией или не является противоречием. Если формула – тавто­логия, то она не является противоречием.

**б)** Если прямые *а* и *b* параллельны друг другу, то *а* будет па­раллельна плоскости ** тогда и только тогда, когда *b* будет парал­лельна плоскости **. Если прямые *а* и *b* параллельны плоскости **, то они параллельны друг другу.

1. **а)** Если матрица является невырожденной и ее определи­тель отличен от нуля, то матрица обладает обратной. Если матри­ца невырожденная, то ее определитель отличен от нуля.

**б)** Если две прямые в пространстве не пересекаются и не параллельны, то они являются скрещивающимися. Если прямые скрещиваются, то они не пересекаются.

1. **а)** Если система векторов линейно независимая и является базисом, то число векторов в системе совпадает с ее рангом. Если система векторов линейно зависима, то она не является базисом.

**б)** Если все стороны треугольника равны, то этот треуголь­ник – равносторонний. Если все углы треугольника равны, то этот треугольник – равносторонний.

1. **а)** Если целое число оканчивается нулем, то оно делится на 5. Если целое число оканчивается цифрой 5, то оно делится на 5.

**б)** Если параллелограмм имеет равные диагонали, то он яв­ляется прямоугольником или квадратом. Если параллелограмм является квадратом, то он является и прямоугольником.

1. **а)** Если целое число делится на 2 и на 3, то оно делится и на 6. Если число не делится на 3, то оно не делится на 6.

**б)** Если прямые *а* и *b* параллельны друг другу, то *а* перпен­дикулярна плоскости ** тогда и только тогда, когда *b* перпендику­лярна плоскости **. Если прямые *а* и *b* перпендикулярны плоско­сти **, то они параллельны друг другу.

1. **а)** Если плоскости ** и ** параллельны и прямая *а* перпенди­кулярна **, то *а* перпендикулярна и плоскости **. Если плоскости ** и ** параллельны и прямая *а* перпендикулярна **, то *а* перпендику­лярна и плоскости **. Если прямая *а* перпендикулярна плоскостям ** и **, то плоскости ** и ** параллельны.

**б)** Если функция дифференцируема, то она является выпук­лой вниз тогда и только тогда, когда производная монотонно воз­растает. Если функция не является выпуклой вниз, то ее произ­водная не является монотонно возрастающей функцией.

1. **а)** Если *А* и *В* – квадратные матрицы порядка *n* (то есть имеют *n* строк и *n* столбцов), то *А* ⋅ *В* – также квадратная матрица порядка *n*. Если *А* – квадратная матрица порядка *n*, то *А* ⋅ *В* является квад­ратной тогда и только тогда, когда *В* – квадратная матрица поряд­ка *n*.

**б)** Если треугольник – равнобедренный, то углы при его ос­новании равны. Если треугольник -– равнобедренный, то его боко­вые стороны равны друг другу тогда и только тогда, когда равны углы при основании.

1. **а)** Если противоположные стороны четырехугольника по­парно равны и параллельны, то этот четырехугольник – паралле­лограмм. Если противоположные стороны четырехугольника па­раллельны, то они равны.

**б)** Если определитель системы из *n* линейных уравнений с *n* неизвестными равен нулю, то система неразрешима или имеет бесконечное множество решений. Если система из *n* линейных уравнений с *n* неизвестными неразрешима, то ее определитель ра­вен нулю.

1. **а)** Если прямые *а* и *b* параллельны друг другу, то прямая *l* будет параллельна *а* тогда и только тогда, когда *l* будет парал­лельна *b*. Если *b* параллельна *а*, то *l* параллельна *b* тогда и только тогда, когда прямые *а* и *b* параллельны друг другу

**б)** Если все данные посылки – тавтологии, то формула *F* яв­ляется логическим следствием из этих посылок тогда и только то­гда, когда *F* – тавтология. Если формула *F* – тавтология, то она яв­ляется логическим следствием из данных посылок.

1. **а)** Если *а* ⋅ *b* – четное и *а* – нечетное число, то *b* – четное чис­ло. Если *а* – нечетное число, то *а* ⋅ *b* является четным тогда и только тогда, когда *b* – четное число.

**б)** Если две строки определителя совпадают или отличаются только знаком, то определитель равен нулю. Если определитель отличен от нуля, то он не содержит двух одинаковых строк.

1. **а)** Если прямые *а* и *b* параллельны друг другу и *а* парал­лельна плоскости **, то и *b* параллельна плоскости **. Если прямые *а* и *b* параллельны плоскости **, то они параллельны между собой. Если прямые *а* и *b* параллельны друг другу и *b* параллельна плос­кости **, то *а* параллельна плоскости **.

**б)** Если целое число делится на 6, то оно делится на 2 и на 3. Если целое число не делится на 2, то оно не делится на 6.

1. **а)** Если функция дифференцируема, то она монотонно воз­растает тогда и только тогда, когда ее производная положительна. Если производная функции положительна, то эта функция являет­ся монотонно возрастающей.

**б)** Если *а* и *b* – целые числа, то *а* + *b* – целое число. Если *а* – целое, то *а* + *b* является нецелым числом тогда и только тогда, когда *b* – нецелое число.

1. **а)** Если прямая перпендикулярна к диаметру окружности и проходит через его конец, то она является касательной к окруж­ности. Если прямая не перпендикулярна к диаметру, то она не яв­ляется касательной к окружности.

**б)** Если два числа равны или отличаются знаком, то их мо­дули совпадают. Если модули двух чисел не совпадают, то эти числа не равны друг другу.

1. **а)** Если треугольник – равнобедренный, то его боковые сто­роны равны. Если треугольник – равнобедренный, то углы при его основании равны.

**б)** Если *а* делится на *с* или *b* делится на *с*, то произведение *а* ⋅ *b* делится на *с*. Если *а* делится на *с*, то произведение *а* ⋅ *b* делится на *с*.

1. **а)** Если оба слагаемых являются одновременно четными числами или одновременно нечетными числами, то их сумма – чет­ное число. Если сумма не является четным числом, то оба слагае­мых не могут быть одновременно четными числами.

**б)** Если четырехугольник – параллелограмм, то он является ромбом тогда и только тогда, когда его диагонали взаимно перпендикулярны. Если диагонали четырехугольника не взаимно перпендикулярны, то он – не ромб.

1. **а)** Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы между этими сторо­нами равны, то такие треугольники подобны. Если треугольники подобны, то две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника.

**б)** Если определитель системы из *n* линейных уравнений с *n* неизвестными отличен от нуля, то система имеет единственное решение. Если ранг системы совпадает с числом неизвестных, то система линейных уравнений имеет единственное решение.

1. **а)** Если целое число делится на 2 и на 3, то оно делится на 6. Если целое число делится на 2 и не делится на 3, то оно не делит­ся на 6. Если целое число делится на 3 и не делится на 2, то оно не делится на 6.

**б)** Если плоскости ** и ** параллельны, то прямая *а* будет перпендикулярна ** тогда и только тогда, когда прямая *а* будет перпендикулярна *.* Если плоскости ** и ** не параллельны друг другу, то прямая *а* не может быть одновременно перпендикуляр­ной ** и **.

1. **а)** Если треугольник – равнобедренный, то высота, опущен­ная на основание, является медианой. Если треугольник – равно­бедренный, то высота, опущенная на основание, является биссек­трисой.

**б)** Если подсистема векторов линейно независима, то она является базисом тогда и только тогда, когда каждый вектор исходной системы линейно выражается через векторы этой подсистемы. Если каждый вектор исходной системы линейно выражается через векторы подсистемы, то эта подсистема является базисом тогда и только тогда, когда она линейно не­зависима.

1. **а)** Если диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны или делят его углы пополам, то этот параллелограмм – ромб. Если параллело­грамм – не ромб, то его диагонали не делят углы пополам.

**б)** Если последовательность монотонная и ограниченная, то она име­ет предел. Если последовательность имеет предел, то она ограничена.

**Пример.** Найти все неравносильные между собой следствия из посылки:

"Если у четырёхугольника две противоположные стороны параллель­ны и они же равны, то этот четырёхугольник – параллелограмм. У данного четырёхугольника две противоположные стороны равны или параллель­ны".

**Решение.** Используя аппарат алгебры высказываний, запишем данные посылки в виде сложных высказываний. *Обозначим*:

1) у четырёхугольника две противоположные стороны параллельны – *а*;

2) у четырёхугольника эти же противоположные стороны равны – *b*;

3) четырёхугольник является парал­лелограммом – *с.*

*Заданные посылки:* .



Отсюда логическими следствиями из заданных посылок  будут:



# ***Задача 8***

При помощи теоремы о дедукции доказать выводимость следующих формул из данных гипотез.

* 1. ** ˫ **.
  2. ** ˫ **.
  3. ** ˫ **.
  4. ** ˫ **.
  5. ** ˫ **.
  6. ** ˫ **.
  7. ** ˫ **.
  8. ** ˫ **.
  9. ** ˫ **.
  10. ** ˫ **.
  11. ** ˫ **.
  12. ** ˫ **.
  13. ** ˫ **.
  14. ** ˫ **.
  15. ** ˫ **.
  16. ** ˫ **.
  17. ** ˫ **.
  18. ** ˫ **.
  19. ** ˫ **.
  20. ** ˫ **.
  21. ** ˫ **.
  22. ** ˫ **.
  23. ** ˫ **.
  24. ** ˫ **.
  25. ** ˫ **.

**Пример.** При помощи теоремы о дедукции доказать выводимость следующей формулы из данных гипотез.

** ˫ .

**Решение.** Сначала к гипотезам ** и  добавим новую гипотезу *а* и получим вывод функции *с*. То есть построим последовательность фор­мул, которая будет выводом формулы *с*:

1) ** – гипотеза;

2)  *–* гипотеза;

3) *а –* новая гипотеза;

4)  – получена из (3) и (1) по ПВ;

5) *b*  – получена из (2) и (3) по ПВ;

6) *с* – получена из (5) и (4) по ПВ.

Таким образом, построим вывод формулы *с* из данных гипотез и но­вой гипотезы *а,* то есть доказали выводимость

**˫*с*.

Тогда, применяя теорему о дедукции, получим доказуемую выводи­мость

** ˫ .

Вывод формулы *с* можно также изобразить в виде дерева вывода:

.

# ***Задача 9***

При помощи законов двойного отрицания и теоремы о де­дукции доказать, что следующие формулы являются теоремами исчисления высказываний.

1. ˫**.
2. ˫**.
3. ˫**.
4. ˫**.
5. *a*→*b*,˫.
6. ˫.
7. ˫.
8. ˫.
9. ˫.
10. ˫**.
11. ˫**.
12. ˫**.
13. ˫**.
14. ˫.
15. ˫.
16. ˫.
17. ˫.
18. ˫.
19. ˫.
20. ˫.
21. ˫.
22. ˫.
23. ˫.
24. ˫.
25. ˫.

**Пример.** При помощи законов двойного отрицания и теоремы о де­дукции доказать, что следующая формула является теоремой исчисления высказываний:

****.

**Решение.** Сначала докажем, что из гипотез и *b* выводима формула :

1)  *–* гипотеза;

2) *b –* гипотеза;

3) *а* – получена из (1) и (2) по ПВ;

4)  – теорема, закон двойного отрицания;

5)  – получена из (3) и (4) по ПВ.

Таким образом, получили вывод формулы *,* то есть доказали выво­димость ˫*.*

Применяя дважды теорему о дедукции, получим сначала выводимость

*(b→a)* ˫ (*b→*  *)*,

затем ˫****.

# ***Задача 10***

При помощи закона контрапозиции и теоремы о дедукции доказать следующие теоремы:

1. ˫**.
2. ˫**.
3. ˫**.
4. ˫**.
5. ˫**.
6. ˫**.
7. ˫**.
8. ˫**.
9. ˫**.
10. ˫**.
11. ˫**.
12. ˫**.
13. ˫**.
14. ˫**.
15. ˫**.
16. ˫**.
17. ˫**.
18. ˫**.
19. ˫**.
20. ˫**.
21. ˫**.
22. ˫**.
23. ˫**.
24. ˫**.
25. ˫**.

**Пример.** При помощи закона контрапозиции и теоремы о дедукции доказать следующую теорему:

˫**.

**Решение.** Построим сначала вывод формулы *с* из гипотез **:

1)  – гипотеза;

2) * –* гипотеза;

3) ** – гипотеза;

4) ** – заключение двойного отрицания;

5) *a*  из (3) и (4) по ПВ;

6) *b* из (1) и (5) по ПВ;

7) ** – заключение контрапозиции;

8) ** – из (2) и (7) по ПВ;

9) *c* – из (6) и (8) по ПВ.

Таким образом, получили, вывод формулы *с*, то есть доказали выводи­мость

** ˫*С*.

Применяя последовательно теорему о дедукции, получим:

** ˫**; ** ˫**;

˫**.

**лиТЕРАТУРА**

1. Лихтарников Л.М., Сукачева Т.Г. Математическая логика. Курс лекций. Задачник – практикум и решения: Учебное пособие. 3 – е изд., испр. – СПб.:Издательство «Лань», 2008. – 288 с.
2. Дискретная математика: Теория, задачи, приложения / Я.М. Ерусалимский. – 7-е изд. – М.: Вузовская книга, 2005. – 268 с.: ил.
3. Игошин В.И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов: учеб.пособие для студ. высш.учеб.заведений / В.И.Игошин. – 2-е изд.,стер. –М. : Издательский центр «Академия», 2006. – 304 с.
4. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов: Учеб.пособие для студ. высш.учеб.заведений / В.И.Игошин. –М. : Издательский центр «Академия», 2004. – 448 с.
5. Успенский В.А., Верещагин Н.К., Плиско В.Е. Вводный курс математической логики. – 2-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 128 с.
6. Математическая логика и теория алгоритмов. Ч. I: Метод. указания / А.В.Садыков, Е.С.Титова. – Нижнекамск: НХТИ ФГБОУ ВО «КНИТУ», 2016. – 60 с.

**Учебное издание**

**Садыков Айдар Вагизович**

**кандидат технических наук, доцент**

# **Математическая логика**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Корректор Белова И.М.

Худ. редактор Фёдорова Л.Г.

Сдано в набор 07.12.16.

Подписано в печать 12.12.16.

Бумага писчая. Гарнитура Таймс.

Усл. печ. л. 5,8. Тираж 100 экз.

Заказ №30.

НХТИ ФГБОУ ВО «КНИТУ»

г. Нижнекамск, 423570, ул.30 лет Победы, д.5а