О.В. Шемелова, Т.Г. Макусева, Л.В. Бакеева

РУКОВОДСТВО К САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Санкт-Петербург
«Свое издательство»
2015

УДК 514.12
Ш46

Печатается по решению редакционно-издательского совета Нижнекамского химико-технологического института (филиал) ФГБОУ ВПО «КНИТУ»

Рецензенты:
Е.И. Санина, доктор педагогических наук, профессор кафедры общих, математических и естественно-научных дисциплин ГБОУ ВПО МО «Академия социального управления», г. Москва.
А.Н. Гайфутдинов, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры МАХП Нижнекамского химико-технологического института (филиал) ФГБОУ ВПО «КНИТУ», г. Нижнекамск

Шемелова, О.В., Макусева, Т.Г., Бакеева, Л.В.
Руководство к самостоятельному решению задач по аналитической геометрии на плоскости: учебное пособие / О.В. Шемелова, Т.Г. Макусева, Л.В. Бакеева. – Санкт-Петербург: «Свое издательство», 2015. – 150 с.

Учебное пособие предназначено для студентов, которые изучают высшую математику и желают приобрести необходимые навыки в решении задач, а также изучающих математику по технологии индивидуализированного обучения. Пособие содержит в полном объеме предназначенный для изучения теоретический материал в соответствии с ФГОС ВПО, который методически обработан для самостоятельного изучения и представлен в виде схем и таблиц. В учебном пособии представлено большое количество примеров, поясняющих теорию и помогающих в дальнейшем в решении задач, задачи для самостоятельного решения в 30 вариантах, вопросы к экзамену (зачету), задания для контрольных работ.

ISBN 978-5-4386-0692-5

Содержание

Введение

Могущественна геометрия; соединенная с искусством неодолима.

Еврипид.

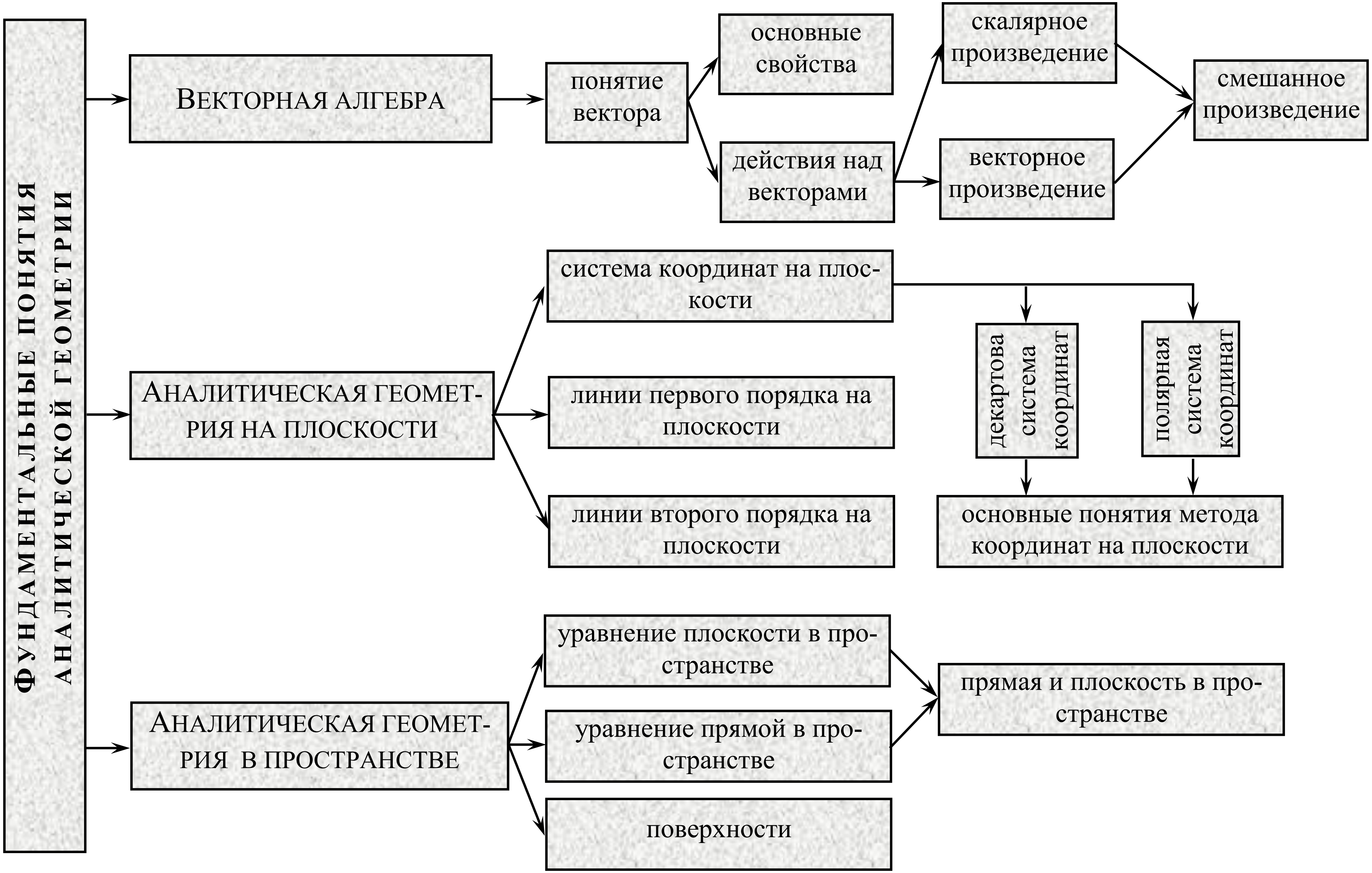
Высшая математика является одним из важнейших элементов в образовании современного человека. В настоящее время значительно повышаются требования к математической культуре любого специалиста. При изучении математики очень важно умение решать задачи. Еще Ньютон высказывал мнение, что эта сторона дела важнее, чем усвоение теории.

Настоящее справочное пособие предназначено студентам нематематических факультетов институтов и является пособием для самостоятельного овладения способами и методами решения задач аналитической геометрии в объеме действующих программ курсов высшей математики.

В пособии рассматривается решение задач аналитической геометрии на прямой, плоскости, в пространстве и векторной алгебры.

При составлении пособия имелось в виду, что им будут пользоваться студенты заочного и вечернего отделений. В связи с этим, в начале каждого раздела помещены основные понятия, определения, теоремы, формулы и другие краткие сведения по теории, структурированные в таблицы и методические указания, необходимые для решения последующих задач; затем приводятся подробные решения типовых задач с краткими пояснениями теоретических положений; в конце каждого раздела содержится по 30 вариантов задач для самостоятельного решения.

Заметим, что умение решать типовые задачи различной степени трудности является основным критерием при оценке полученных знаний. Оно является главным основанием как для получения зачета или сдачи экзамена, так и при выведении итогового рейтинга, характеризующего ваши успехи в этом предмете.


ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ
ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА
понятие вектора
основные свойства
действия над векторами
скалярное произведение
векторное произведение
смешанное произведение
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ
система координат на плоскости
линии первого порядка на плоскости
линии второго порядка на плоскости
декартова система координат
полярная система координат
основные понятия метода координат на плоскости
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ
уравнение плоскости в пространстве
уравнение прямой в пространстве
поверхности
прямая и плоскость в пространстве

1. Развитие математики: этапы, проблемы, достижения

1. Эпоха и время	2. Области деятельности людей	3. Постановка проблем	4. Развитие математики	5. Персоналии (страны, имена, труды)	6. Примеры исторических задач
I. ЗАРОЖДЕНИЕ МАТЕМАТИКИ					
Первобытнообщинный строй. Бесклассовое общество. Каменный век (неолит). 10 – 5 тысяч лет до н.э.	Первобытное (мотыжное) земледелие и скотоводство, ремесла (гончарные, плотничьи, ткацкие, обработка камня, дерева, кости, меди), зачатки искусства (скульптура, музыка, магия). Ориентировка во времени и пространстве по звездам (зачатки астрономии), торговля, изготовление орудий труда и оружия, охота, рыболовство.	Измерения длины и емкости предметов, счет предметов, отсчет времени. Оформление чувства геометрической формы.	Понятие числа, счет, магические числа. Плоскостные и пространственные соотношения, простейшие геометрические фигуры. Свойства углов, окружности, сферы. Лунный календарь.		Следы «магических чисел» (3, 4, 7, 12, 40, 60) в фольклоре. Использование «магических фигур» в орнаментах, скульптуре, рисунке.
Рабовладельческий строй. Возникновение первых государств и классов. Бронзовый век. Конец 4-го – начало 1-го тысячелетия до н.э.	Поливное земледелие, кочевое скотоводство, организация общественных работ и управления, распределение урожая, сбор налогов, торговля, строительство пирамид, военное дело. Общение с другими государствами, путешествия, астрономия. Распространение металлургии бронзы, появление бронзовых орудий и оружия.	Календарные и финансовые расчеты; задачи вычисления, задачи измерения, астрономические вычисления.	Арифметические расчеты, техника вычислений, различные системы счисления (10-ричная и 60-ричная), арифметические таблицы и абак; дробные числа и действия с ними, нуль, отрицательные числа, символы для обозначения чисел, проценты, квадратные и ку-	**ДРЕВНИЙ ВОСТОК** **ВАВИЛОН** (глиняные таблички) **ЕГИПЕТ** (папирусы Райнда, Ахмеса) **ИНДИЯ** (Бахшалийская рукопись) **КИТАЙ** (Лю хуэй: «Математический трактат о морском острове», «Девять отделов искусства счета», «Начала искус-	**Египет:** Некое количество, его $\frac{2}{3}$, его $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{7}$, сложенные вместе, дают 33. Каково это количество? **Вавилон:** Площадь A, состоящая из суммы двух квадратов, составляет 1000. Сторона одного из квадратов составляет $\frac{2}{3}$ стороны другого квадрата, уменьшенные на 10. Каковы сто-

1. Эпоха и время	2. Области деятельности людей	3. Постановка проблем	4. Развитие математики	5. Персоналии (страны, имена, труды)	6. Примеры исторических задач
	Письменность, восточная культура.		бические корни, формулы вычислений. Возникновение алгебры из арифметики. Техника измерений, алгебраический характер геометрии.	ства вычисления», «Математика в 9 книгах»)	роны квадратов? **Вавилон:** За какое время удвоится сумма денег, ссуженная под 20% годовых? **Египет:** Измерить высоту пирамиды, измерить расстояние от берега до корабля.
II. ПЕРИОД ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ					
Разложение первобытнообщинного строя, зарождение классов, рабовладельческой демократии, античного общества. Железный век. Расцвет Древней Греции и Римской империи. VI – IV вв. до н.э	Вытеснение бронзы железом, распространение металлургии железа, совершенствование военного дела. Введение алфавита и чеканной монеты, оживление торговли, расцвет городов, путешествия купцов, географические открытия, космология. Изготовление железных орудий и оружия. Строительство храмов. Философия, биология, физика, мистицизм (поиск места человека во Вселенной).	Совершенствование теории вычислений и измерений (свойств чисел и фигур), решение трудных прикладных задач.	Свойства плоских фигур, кривых до 3-го и 4-го порядка, свойства многоугольников и многогранников. Свойства чисел (в частности, магических), отрицательные числа, открытие иррациональности.	**ДРЕВНЯЯ ГРЕЦИЯ** Ионийская школа Милетская школа *Фалес Милетский* Пифагорейская школа *Гиппократ*	**Пифагор:** а) Квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равновелик сумме квадратов, построенных на катетах. б) Всякое нечетное число, кроме 1, есть разность двух квадратов.

1. Эпоха и время	2. Области деятельности людей	3. Постановка проблем	4. Развитие математики	5. Персоналии (страны, имена, труды)	6. Примеры исторических задач
	Греческая культура. Рост досуга аристократии, предпочтительное занятие умственным трудом – философия, этика, литература, логика, расцвет греческой драматургии, первые Олимпийские игры, основание Академии в Афинах.	Доказательство трудных математических проблем. Например, три классические задачи древности: об удвоении куба, о трисекции угла, о квадратуре круга.	Начала аксиоматики, создание теории отношений, метода «исчерпывания», атомного метода, исследование парадоксов и софизмов; зарождение дифференциального и интегрального методов. Создание формальной логики.	**Греция** *АФИНСКАЯ ШКОЛА* *Аристотель* («Физика») *Платон* *Евдокс* *Зенон* *Аполлоний Пергский* («Конические сечения»)	**Аполлоний:** Построить окружность, касающуюся трех данных окружностей. **Архимед:** Если круг описан около квадрата, а другой в него вписан, то описанный круг по площади вдвое больше вписанного.
Падение Афин, возвышение Македонии. Проникновение греческой цивилизации в восточный мир. IV в. до н .э.– III в. до н.э.	Военное дело, административные расчеты, техника управления, мореплавание, совершенствование сельского хозяйства, инженерная деятельность. Механика, астрономия (изобретение астролябии, описание затмений), планетарные теории, философия. Борьба и объединение восточной и греческой культур.	Систематизация теоретических знаний, решение задач практического применения математики, математическое описание механических и астрономических теорий.	«Греческая математика» Систематизация теоретических знаний по геометрии; развитие аксиоматики, формирование математики как дедуктивной науки. Изложение трех великих открытий (теория отношений, теория иррационально-	**Греция** *ЕВКЛИД* («Начала»)	**Евклид:** а) В данный круг вписать треугольник, равноугольный данному треугольнику. б) Доказать, что простых чисел существует бесконечное множество.

1. Эпоха и время	2. Области деятельности людей	3. Постановка проблем	4. Развитие математики	5. Персоналии (страны, имена, труды)	6. Примеры исторических задач
			стей, теория 5 правильных тел). Совершенствование вычислительной техники, начала интегрального исчисления. Вычислительная астрономия, тригонометрические таблицы, начала сферической геометрии, сферическая тригонометрия.	*Архимед* («Квадратура параболы», «О спиралях», «Исчисление песчинок», «Послание Эратосфену о механических теоремах») *Птолемей* («Альмагест»)	**Архимед:** Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии $1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots$. **Птолемей:** Доказать, что в четырехугольнике, вписанном в окружность, сумма произведений противоположных сторон равняется произведению диагоналей.
			Формулы для вычисления площадей и объемов.	*Герон*	**Герон:** Найти треугольники с целочисленными площадями (треугольники Герона), длины сторон которых являются последовательными числами.
			Совершенствование арифметических вычислений, теория чисел, решение уравнений.	*Диофант* («Арифметика»)	**Диофант:** Найти два числа, произведение которых, сложенное с каждым из данных чисел, составит куб некоторого числа.
Упадок античного общества, разделение Римской империи на Восточную и	Астрономия, возникновение обсерваторий, межгосударственное общение (культурное и торговое). Перемещение центра математических	Разработка планетных таблиц, реформа календаря, совершенствование техники вы-	Позиционная система счисления, индийская нумерация, зарождение арабской алгебры. Новые методы и	**Персия** *Ал-Бируни* («Книга вразумления начаткам науки звезд») **Арабские стра**	**Ал-Хорезми:** Решить квадратные уравнения: $5x^2=40x$; $\frac{25}{9}x^2=100$;

1. Эпоха и время	2. Области деятельности людей	3. Постановка проблем	4. Развитие математики	5. Персоналии (страны, имена, труды)	6. Примеры исторических задач
Западную, падение Западной Римской империи. Образование Киевской Руси. 1-е тысячелетие до н.э. – II в. н.э. Раннее средневековье (IV – VIII вв.) Великое переселение народов.	исследований в Индию, на Восток. Византийская культура. Создание Кириллом и Мефодием славянской письменности.	числений и измерений.	формулы для вычислений (извлечение корня, бином), для решения уравнений. Астрономические и тригонометрические таблицы.	**ны** *Мухаммед Ал-Хорезми* («Об индийском счете», «Краткая книга об исчислении алгебры и алмукабалы»). *Омар Хайям* («О доказательствах задач алгебры и алмукабалы»).	$10x = x^2 + 21$; $x^2 = 12x + 288$. **Авиценна:** Если число, будучи разделено на 9 дает в остатке 1 или 8, то квадрат этого числа, деленный на 9, дает в остатке 1. **О. Хайям:** Решить уравнение: $\frac{1}{x^2} + 2 \cdot \frac{1}{x} = 1\frac{1}{4}$.
Феодальный строй (классическое средневековье), Крестовые походы, первое летописное упоминание о Москве (1147 г.), походы Чингизхана и Батыя на Русь. XII –	Греко-римская цивилизация в Западной Европе. Астрономические исследования, земледелие, торговля, коммерческие связи, денежные расчеты, рост банковского дела, навигация, церковное воспитание, схоластика. Возникновение первых европейских университетов.	Совершенствование вычислений, задачи «для оттачивания ума», решение проблем, поставленных в эпоху античности.	Использование римской и индийско-арабской нумерации; исследование звездчатых многоугольников и многогранников; оригинальные математические задачи.	**Италия** *Леонардо Пизанский* (*Фибоначчи*) («Книга абака», «Практическая геометрия»)	Один говорит другому: «Дай мне 7 динариев, и я буду в 5 раз богаче тебя». А другой говорит: «Дай мне 5 денариев, и я буду в 7 раз богаче тебя». Сколько у каждого?

1. Эпоха и время	2. Области деятельности людей	3. Постановка проблем	4. Развитие математики	5. Персоналии (страны, имена, труды)	6. Примеры исторических задач
XIV вв. Падение Византии. Эпоха Возрождения. Позднее средневековье. Инквизиция. Феодализм и зарождение капитализма. Буржуазные революции в Европе. Свержение татарского ига и создание централизованного государства. XV – XVI в.в.	Астрономические теории, мореплавание, географические открытия, землемерие, торговля. Изобретение книгопечатания, усовершенствование машин, использование энергии воды и ветра (каналы, насосы, мельницы, подъемные машины), горное дело, изобретение огнестрельного оружия. Обращение к культурному наследию античности. Философия, живопись, архитектура, литература, экономика, новые социальные процессы.	Решение средствами математики проблем земной и небесной механики, технических проблем.	Выделение тригонометрии в самостоятельную науку; оформление общей теории решения уравнений. Изображение чисел буквами, алгебраическая символика, усовершенствование обозначений и способов записи, совершенствование действий со степенями, вычислительной техники. Изобретение логарифмов. Накопление интеграционных методов.	*Н. Коперник* («Об обращении небесных сфер») *И. Мюллер* (*Региомонтан*) из Кенигсберга **Франция** *Ф. Виет* («Введение в аналитическое искусство») **Италия** *Леонардо да Винчи* *Л. Пачоли* *Кардано* («Великое искусство, или об алгебраических правилах») *Тарталья* **Шотландия** *Дж. Непер* («Построение удивительных таблиц логарифмов»)	Доказать, что высоты в треугольнике пересекаются в одной точке. **Ф. Виет:** Решить уравнение: $x^2 + px + q = 0$ подстановкой $x = y + z$. **Л. да Винчи:** Если два равных круга пересекаются друг с другом, то прямая, проходящая через точки их пересечений, будет в любой части своей длины находиться на одинаковых расстояниях от того и другого центра. **Кардано:** а) Найти построением положительный корень уравнения: $x^2 + 6x = 91$. б) Разложить 10 на два слагаемых так, чтобы их произведение равнялось 40.

1. Эпоха и время	2. Области деятельности людей	3. Постановка проблем	4. Развитие математики	5. Персоналии (страны, имена, труды)	6. Примеры исторических задач
III. СОЗДАНИЕ МАТЕМАТИКИ ПЕРЕМЕННЫХ ВЕЛИЧИН					
Зарождение капитализма, королевские монархии. Промышленная революция, идеологический разрыв с прошлым. Образование США (1776 г.). Французская революция. Петровская эпоха в России. XVII–XVIII вв. Раннее новое время.	Совершенствование фабрик, укрепление боеспособности вооруженных сил, учреждение военных школ, поиски новых технических изобретений (часы), страховое дело, азартные игры, лотереи. Занятия наукой ради ее развития, создание ученых академий и политехнических школ, обсерваторий. Развитие теоретической механики, теории упругости, гидродинамики, теории колебаний, волновой теории света. Исследование законов и общих методов мышления, логика, философия. Французские энциклопедисты. Основание гринвичской обсерватории, славянско-греко-латинской академии в Москве, открытие Академии наук и художеств в Петербурге, основание МГУ.	Приложения математики к механике, страховому и лотерейному делу – описание законов движений и измерений, законов тяготения, вычисление координат центров тяжести и т.д., законов случайных событий и игр.	Теория чисел, счетные машины. Начала математического анализа (функция, предел, производная, интеграл, дифференциальное и интегральное исчисления, исследование функций). Ряды.	**Италия** *Г. Галилей* **Германия** *И. Кеплер* («Новая стереометрия винных бочек») *Г.В. Лейбниц* («Рассуждения о различии между обыкновенным анализом и новым исчислением трансцендентных») **Англия** *И. Ньютон* («Всеобщая арифметика», «Об анализе с помощью уравнений с бесконечным числом членов», «Математические начала натуральной философии») *К. Маклорен*, *Б. Тейлор*	**Лейбниц:** Показать, что $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$ **Ньютон:** а) Разделить $y^4-3\frac{1}{2}a^2y^2+3a^2y-\frac{1}{2}a^4$ на $y^2-2ay+a^2$. б) Дана конечная прямая *BC*, на концах которой проведены под данными углами *ABC* и *ACB* две прямые *BA* и *CA*. Найти высоту их точки пересечения *A* над данной линией *BC*.

1. Эпоха и время	2. Области деятельности людей	3. Постановка проблем	4. Развитие математики	5. Персоналии (страны, имена, труды)	6. Примеры исторических задач
	Век Просвещения.		Аналитическая геометрия, проективная геометрия. Основы теории вероятностей, комбинаторика, вариационное исчисление. Дифференциальные уравнения и их интегрирование. Полярные координаты, исследование замечательных кривых. Изобретение новых символов; вопросы обоснования математики.	**Франция** *Р. Декарт* («Геометрия») *П. Ферма* («Метод отыскания наибольших и наименьших значений») *Б. Паскаль* («Опыт о конических сечениях», «Трактат о синусах четверти круга») *Ж. Даламбер* («Предел») *Ж.Л. Лагранж* («Размышления об алгебраическом решении уравнений», «Теория аналитических функций») *Лопиталь* («Анализ бесконечно малых для изучения кривых линий») *П.С. Лаплас*	**Декарт:** Решить уравнение: $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$ **Ферма:** а) Показать, что если есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии – a_1, a_2, a_3, …, то $\frac{S}{S - a_1} = \frac{a_1}{a_2}$. б) Доказать, что уравнение $x^4 + y^4 = z^4$ не имеет решений в целых числах. **Паскаль:** а) Найти общий признак делимости на произвольное число. б) Доказать, что если шестиугольник вписан в окружность и противоположные стороны его не параллельны, то точки пересечения этих сторон лежат на одной прямой (прямой Паскаля).

1. Эпоха и время	2. Области деятельности людей	3. Постановка проблем	4. Развитие математики	5. Персоналии (страны, имена, труды)	6. Примеры исторических задач
				Швейцария *Братья Бернулли* **Россия** *Л. Эйлер* («Исследование о мнимых корнях уравнений», «Универсальная арифметика», «Приложения о поверхностях», «Введение в анализ бесконечных», «Исследования о кривизне поверхности», «Интегральное исчисление», «Дифференциальное исчисление»)	**Я. Бернулли:** Если два первых члена арифметической прогрессии положительны, не равны между собой и совпадают с двумя первыми членами геометрической прогрессии, то все члены арифметической прогрессии, начиная с третьего, меньше соответствующих членов геометрической прогрессии.

1. Эпоха и время	2. Области деятельности людей	3. Постановка проблем	4. Развитие математики	5. Персоналии (страны, имена, труды)	6. Примеры исторических задач
IV. СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА					
Развитие капитализма. Наполеоновская эпоха и войны. Колониализм. Революция в Европе, восстание декабристов в России, отмена крепостного права в России. XIX в.	Физика, математика, оптика, теория магнетизма, электродинамика; геодезия, техника: теория артиллерийской стрельбы. Теория ошибок, вычислительная техника.	Решение задач естествознания и техники. Математические методы физики и механики, создание математической теории электромагнитных явлений.	Математическая физика, математическая статистика, теория вероятностей, теория дифференциальных уравнений, топология. Вычислительная математика, прикладная математика. Теория чисел, теория действительного числа, теория функций комплексного переменного. Векторное и тензорное исчисления, неевклидовы геометрии. Алгебраическая геометрия.	**Германия** *К.Ф. Гаусс* («Арифметические исследования», «Общие исследования относительно кривых и поверхностей», «Теория чисел», «Теория биквадратных вычетов») *Г.Ф. Риман, К. Вейерштрасс* *Л. Кроникер, Г. Кантор* **Франция** *А. Пуанкаре* *А.М. Лежандр* («Аналитическая механика») *Г. Монж* («Начертательная геометрия») *С. Пуассон, Ж. Фурье* *О. Коши* («Курс анализа») *Э. Галуа* («Мемуар об условиях разрешимости уравнений в радикалах») **Норвегия** *Н.Г. Абель* («О специальном классе алгебраически разрешимых уравнений в радикалах») **Россия** *Н.И. Лобачевский* («Начала геометрии»)	**Гаусс:** а) Доказать, что произведение двух целых положительных чисел, из которых каждое меньше простого числа p, не делится на p. б) Построить правильный 17-угольник с помощью циркуля и линейки. **Пуассон:** Некто имеет 12 пинт вина и хочет подарить из него половину, но у него нет сосуда в 6 пинт. У него два сосуда: один в 8, другой в 5 пинт. Спрашивается, каким образом налить 6 пинт в сосуд в 8 пинт. **Коши:** Доказать, что для любого натурального значения x выполняется неравенство: $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq$ $\geq \sqrt{x_1 x_2 \ldots x_n}$,

1. Эпоха и время	2. Области деятельности людей	3. Постановка проблем	4. Развитие математики	5. Персоналии (страны, имена, труды)	6. Примеры исторических задач
				М.В. Остроградский *П.Л. Чебышев* («Черчение географических карт», «О простых числах», «О средних величинах») *А.М. Ляпунов*	где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – положительные числа, причем знак равенства достигается лишь в случае $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.
Эпоха империализма. Распад колониальной системы, экономический раздел мира. Классический монополистический капитализм. Октябрьская революция в России. XX в.	Индустриальное общество. Возникновение естественно-научных и математических школ и обществ (современной математики, теоретической физики, атомной физики).	Проблемы обоснования математики.	Теория множеств и математическая логика. Информатика. Исследование математических моделей на ЭВМ.	**Германия** *Ф. Клейн* *Д. Гилберт* («Математические проблемы», «Основания геометрии») *Р. Курант, Г. Вейль* **Англия** *Дж. Буль* («Исчисления логики», «Математический анализ логики») **Франция** *Н. Бурбаки* («Архитектура математики») **Россия** *А.Н. Колмогоров* *Н.Н. Лузин* («Интеграл и тригонометрический ряд»)	

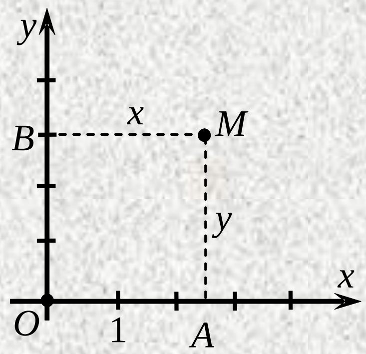
Аналитическая геометрия – раздел математики, в котором изучают свойства геометрических объектов (точек, линий, поверхностей и тел) средствами алгебры и математического анализа при помощи метода координат.

2. Линии первого порядка на плоскости

2.1. Декартовы координаты на плоскости

Декартова прямоугольная система координат определяется заданием двух взаимно-перпендикулярных прямых, на каждой из которых выбрано положительное направление и единица масштаба. Эти направляющие прямые называют **осями координат**. Горизонтальная ось – **ось абсцисс** *Ox*, вертикальная ось – **ось ординат** *Oy*.

Прямоугольными декартовыми координатами произвольной точки M на плоскости называют расстояния от этой точки до координатных осей,



измеренные одной и той же единицей длины и взятые с соответствующими знаками.

$x = MB$ – абсцисса точки M;

$y = MA$ – ордината точки M.

I принцип соответствия: любой точке плоскости соответствуют два числа – ее координаты. Обратно, всякой паре чисел отвечает определенная точка плоскости, имеющая эти числа своими координатами.

II принцип соответствия: всякому уравнению с двумя неизвестными x и y соответствует на плоскости некоторая линия. И обратно, всякой плоскости линии соответствует некоторое уравнение.

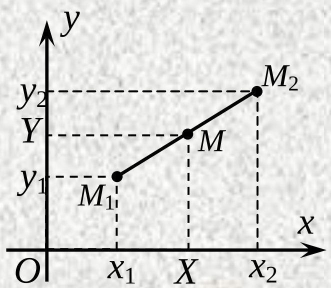
Простейшие задачи

1) Расстояние между двумя точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ вычисляется по формуле:

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

2) Координаты середины отрезка M_1M_2 – точка $M(x; y)$ определяются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$



3) Площадь треугольника ABC, где $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ определяется по формуле:

$$S_{\Delta ABC} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

2.2. Прямая линия I порядка на плоскости

Общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$y = kx + b$, можно получить из общего уравнения прямой, разрешая его относительно y.

Здесь $k = \operatorname{tg}\alpha$ – угловой коэффициент, α – угол между прямой и положительным направлением оси Ox, b – отрезок, отсекаемый прямой на Oy.

Уравнение прямой в отрезках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

можно получить из общего уравнения прямой, разделив обе его части на c.

Здесь a, b – длины отрезков, отсекаемых на осях координат, взятые с соответствующими знаками.

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ **и** $M_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1, y_1)$ **с заданным угловым коэффициентом:** $y - y_1 = k(x - x_1)$

Нормальное уравнение прямой

$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$, где p – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на данную прямую, α – угол между этим перпендикуляром и осью Ox. Уравнение получается умножением обеих частей общего уравнения на нормирующий множитель $\mu = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, знак которого противоположен знаку свободного члена.

Даны две прямые a: $y = k_1x + b_1$ и b: $y = k_2x + b_2$.

При $k_1 = k_2$, $a \parallel b$,

при $k_1k_2 = -1$, $a \perp b$,

Острый угол φ между прямыми a и b определяется по формуле:

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|$$

Расстоянием от точки $M(x_1, y_1)$ до прямой называется длина перпендикуляра d, опущенного из этой точки на прямую: $d = \left|\dfrac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$

2.3. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_1(x_1, y_1)$

и имеющей заданный нормальный вектор $\overline{N}=\{A;B\}$ имеет вид:

$$\boxed{A(x-x_1)+B(y-y_1)=0}.$$

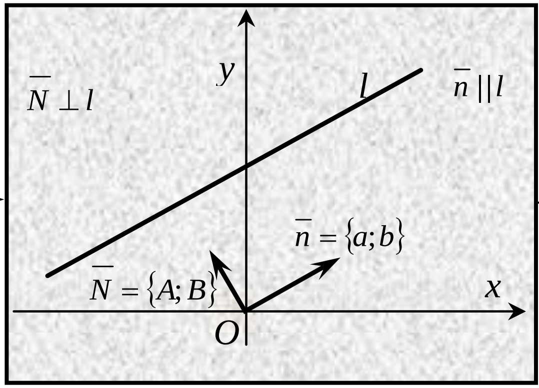
Нормальным вектором прямой называется любой ненулевой вектор $\overline{N}=\{A;B\}$, перпендикулярный данной прямой.

и имеющей заданный направляющий вектор $\overline{n}=\{a;b\}$ имеет вид:

$$\boxed{\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}}.$$

Направляющим вектором прямой называется любой ненулевой вектор $\overline{n}=\{a;b\}$, параллельный данной прямой.

Любая прямая имеет бесконечное множество векторов, коллинеарных между собой.



2.4. Решение задач

Пример 1: Даны вершины треугольника *ABC*: *A* (4; 6), *B* (– 4; 0), C (– 1; – 4). Составить уравнения:

а) трех его сторон;

б) высоты, опущенной из точки *B* на сторону *AC*;

в) медианы, проведенной из вершины *C*;

г) биссектрисы угла *B* (прямая l_1);

д) прямой *l*, проходящей через точку *A*, параллельно *BC*;

Найти: **е)** найти периметр и площадь треугольника *ABC*;

ж) расстояние от точки *B* до прямой *l*;

з) точку пересечения прямых *l* и l_1;

Что следует делать	*Как следует делать*
а) составим уравнения сторон *AB*, *AC*, *BC* треугольника *ABC*. Для составления уравнений сторон воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две данные точки. $$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (1)$$	Для стороны *AB*: *A* (4; 6), *B* (– 4; 0): $x_1 = 4$; $y_1 = 6$; $x_2 = -4$; $y_2 = 0$. Подставим значения в уравнение (1), получим $$\frac{x-4}{-4-4}=\frac{y-6}{0-6}, \qquad \frac{x-4}{-8}=\frac{y-6}{-6}.$$ По свойству пропорции можно записать $$-6\cdot(x-4)=-8\cdot(y-6),$$ $$-6x+24=-8y+48,$$ $$-6x+8y-24=0 \text{ или}$$ $3x - 4y + 12 = 0$ – ***общее уравнение стороны*** *AB*. Для стороны *BC*: *B* (– 4; 0), *C* (– 1; – 4): $x_1 = -4$; $y_1 = 0$; $x_2 = -1$; $y_2 = -4$.

Что следует делать	*Как следует делать*
	Подставим значения в уравнение (1), получим $$\frac{x-(-4)}{-1-(-4)}=\frac{y-0}{-4-0}, \qquad \frac{x+4}{3}=\frac{y}{-4}.$$ По свойству пропорции можно записать $$-4\cdot(x+4)=3\cdot y,$$ $$-4x-16=3y,$$ $$-4x-3y-16=0 \text{ или}$$ $4x + 3y + 16 = 0$ – ***общее уравнение стороны*** *BC*. Для стороны *AC*: *A* (4; 6), *C* (– 1; – 4): $x_1 = 4$; $y_1 = 6$; $x_2 = -1$; $y_2 = -4$. Подставим значения в уравнение (1), получим $$\frac{x-4}{-1-4}=\frac{y-6}{-4-6}, \qquad \frac{x-4}{-5}=\frac{y-6}{-10}.$$ По свойству пропорции можно записать $$-10\cdot(x-4)=-5\cdot(y-6).$$ $$-10x+40=-5y+30,$$ $$-10x+5y+10=0 \text{ или}$$ $2x - y + 2 = 0$ – ***общее уравнение стороны*** *AC*. Все три точки *A*, *B*, *C* и соответствующие прямые *AB*, *AC*, *BC* построены на рис. 1.

Что следует делать	*Как следует делать*

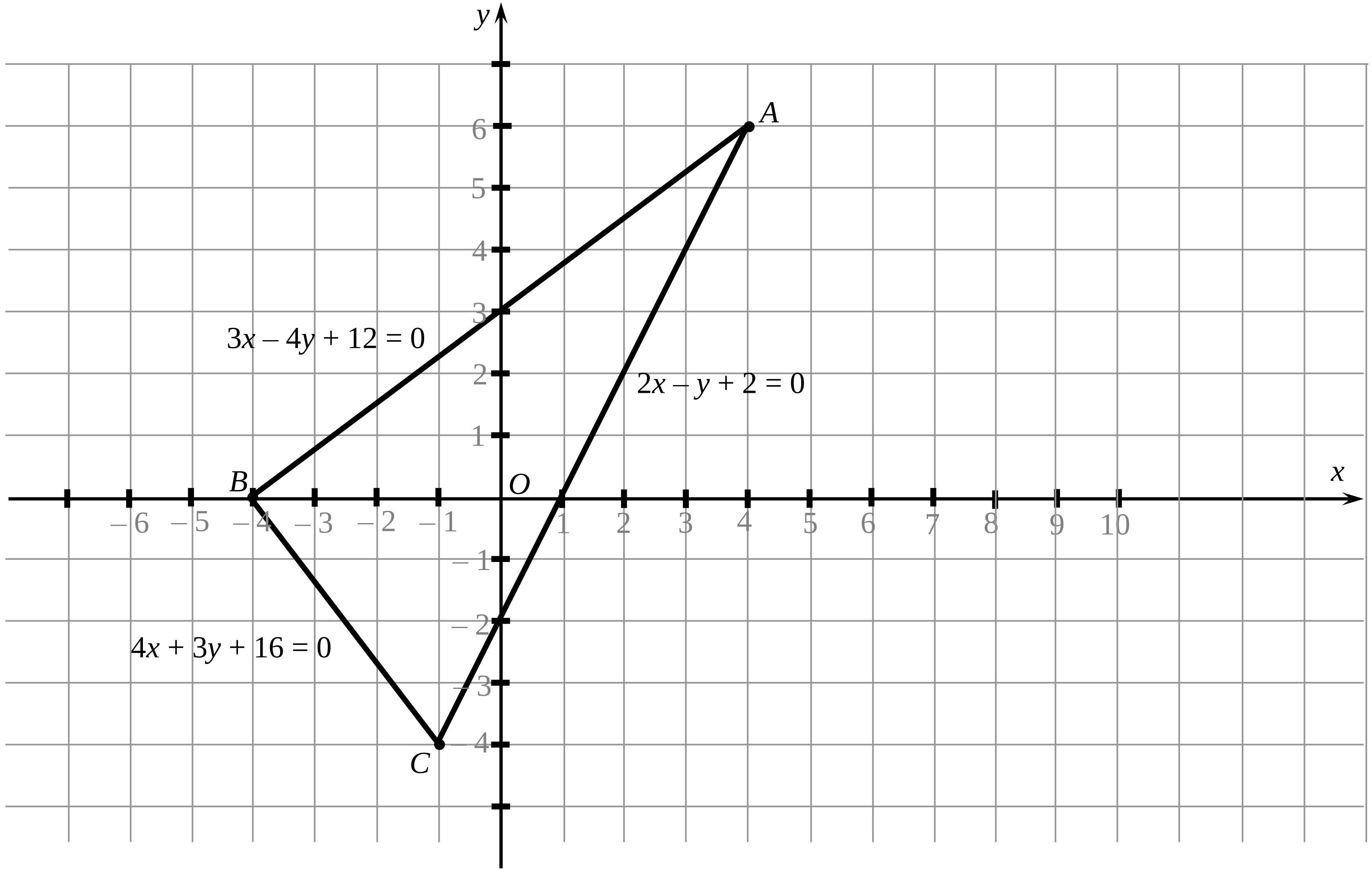


Рис. 1

<table>
<tr><th>Что следует делать</th><th>Как следует делать</th></tr>
<tr><td>

б) составим уравнение высоты, опущенной из вершины B на сторону AC. Обозначим ее BD. Так как $BD \perp AC$, то $k_{BD} \cdot k_{AC} = -1$, т.е. $k_{BD} = -\frac{1}{k_{AC}}$. Зная, что высота проходит через точку B (– 4; 0) и ее угловой коэффициент равен $-\frac{1}{k_{AC}}$, воспользуемся уравнением прямой

$$y - y_1 = k(x - x_1), \qquad (2)$$

проходящей через данную точку с заданным угловым коэффициентом.

</td><td>

Найдем угловой коэффициент прямой AC. Для этого приведем общее уравнение этой прямой к уравнению с угловым коэффициентом:

$$2x - y - 2 = 0,$$

$$y = 2x - 2.$$

Таким образом $k_{AC} = 2$, значит $k_{BD} = -\frac{1}{k_{AC}} = -\frac{1}{2}$.

Учитывая координаты точки B (– 4; 0), коэффициент $k_{BD} = -\frac{1}{2}$ и формулу (2), получим:

$$y - 0 = -\frac{1}{2}(x + 4),$$

$y = -\frac{1}{2}x - 2$ – ***уравнение высоты*** BD с угловым коэффициентом.

Для построения высоты BD подберем следующие точки:

x	**0**	**– 2**
y	– 2	– 1

Высота BD изображена на рис. 2.

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Что следует делать</th><th>Как следует делать</th></tr>
<tr><td colspan="2">

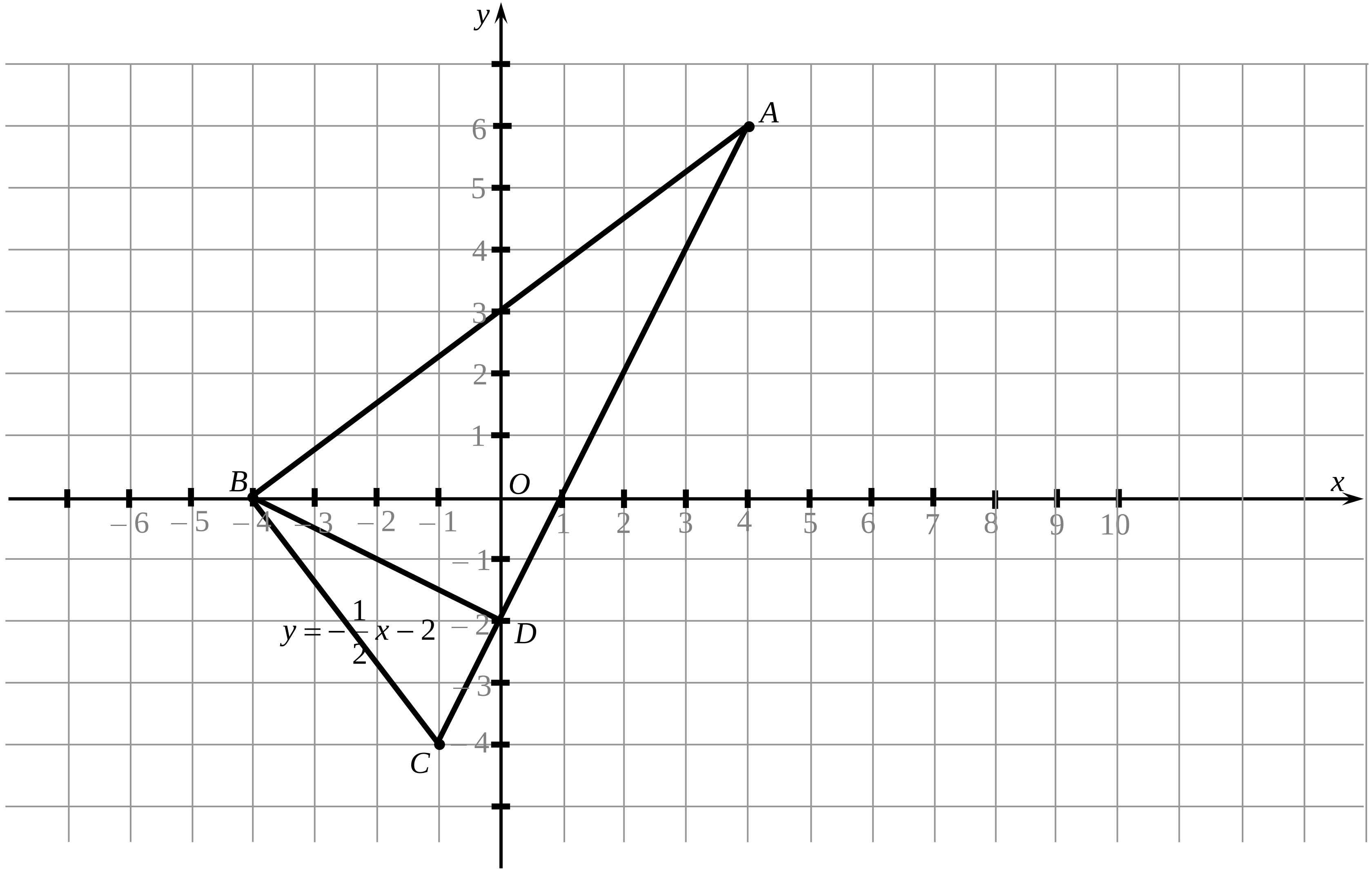


Рис. 2

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Что следует делать</th><th>Как следует делать</th></tr>
<tr><td>

в) составим уравнение медианы, проведенной из вершины *C*. Обозначим ее *CK*.

Так как *CK* – медиана, то она делит сторону *AB* пополам, т.е. точка *K* – середина отрезка *AB*. Зная координаты точек *C* и *K*, напишем уравнение прямой, проходящей через две точки.

</td><td>

Определим координаты точки *K* – середины отрезка *AB*:

A (4; 6), *B* (– 4; 0).

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{4-4}{2} = 0, \qquad y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{6+0}{2} = 3.$$

Итак, *K* (0; 3).

Составим уравнение *CK*, где *C* (– 1; – 4), *K* (0; 3), используя уравнение (1), т.е. $x_1 = -1$; $y_1 = -4$; $x_2 = 0$; $y_2 = 3$.

$$\frac{x+1}{0+1} = \frac{y+4}{3+4}, \qquad \frac{x+1}{1} = \frac{y+4}{7},$$

$$7 \cdot (x+1) = 1 \cdot (y+4), \qquad 7x + 7 = y + 4,$$

$y = 7x + 3$ – уравнение прямой *CK* с угловым коэффициентом.

Для построения данной прямой подберем следующие точки:

x	**0**	**– 1**
y	3	– 4

Медиана *CK* изображена на рис. 3.

</td></tr>
</table>

Что следует делать	*Как следует делать*

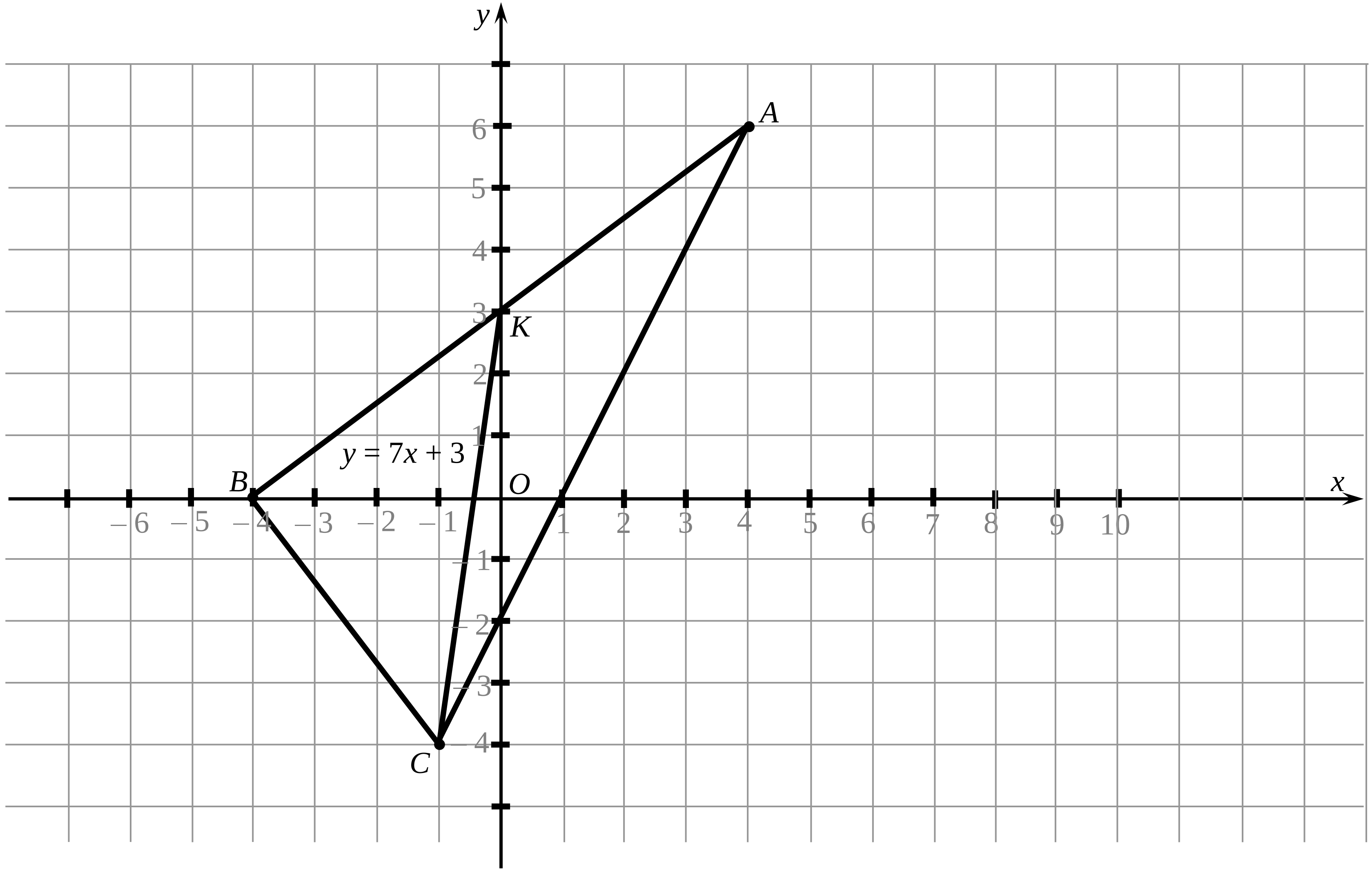
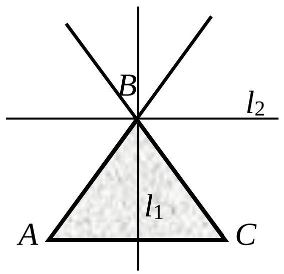


Рис. 3

Что следует делать	*Как следует делать*
г) составим уравнение биссектрисы угла *B*, т.е. уравнение прямой, образованной двумя пересекающимися прямыми *AB* и *BC*. При этом получаются два угла и, значит, две биссектрисы. Искомые биссектрисы являются геометрическим местом точек, равноудаленных от сторон *AB* и *BC*. Пусть уравнения двух сторон: AB: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$; BC: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Возьмем произвольную точку $M\,(x; y)$, принадлежащую биссектрисе угла. Расстояние d_1 этой точки до *AB* определится формулой: $d_1 = \dfrac{\lvert A_1x + B_1y + C_1\rvert}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}$, расстояние до *BC*: $d_2 = \dfrac{\lvert A_2x + B_2y + C_2\rvert}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$. Так как точка $M\,(x; y)$ одинаково удалена от сторон угла, то $d_1 = d_2$:	Используем уравнения сторон *AB* и *BC*. AB: $3x - 4y + 12 = 0$, BC: $4x + 3y + 16 = 0$. Составим формулу (3) для уравнений биссектрис данного угла: $\dfrac{3x-4y+12}{\sqrt{3^2+4^2}} = \pm\dfrac{4x+3y+16}{\sqrt{4^2+3^2}}$, $\dfrac{3x-4y+12}{\sqrt{25}} = \pm\dfrac{4x+3y+16}{\sqrt{25}}$, $\dfrac{3x-4y+12}{5} = \pm\dfrac{4x+3y+16}{5}$, $3x-4y+12 = \pm(4x+3y+16)$. Рассматривается два случая: **1)** $3x - 4y + 12 = 4x + 3y + 16$, $3x - 4x - 4y - 3y + 12 - 16 = 0$, $-x - 7y - 4 = 0$, $x + 7y + 4 = 0$. (4) **2)** $3x - 4y + 12 = -(4x + 3y + 16)$, $3x + 4x - 4y + 3y + 12 + 16 = 0$, $7x - y + 28 = 0$. (5) Получили уравнения (4) и (5) – общие уравнения биссектрис угла *B*: одно

Что следует делать	*Как следует делать*
$$\frac{\lvert A_1x+B_1y+C_1\rvert}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{\lvert A_2x+B_2y+C_2\rvert}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$ или $$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}} \qquad (3)$$ – уравнения биссектрис l_1 и l_2 угла B – внешнего и внутреннего.  Для определения уравнения нужной прямой l_1 воспользуемся следующим свойством: вершины A и C расположены по разные стороны от биссектрисы l_1, поэтому подстановка их координат в уравнение биссектрисы дает числа разных знаков.	из них уравнение прямой l_1, второе – прямой l_2. Определим, какое из этих уравнений – уравнение биссектрисы внутреннего угла (уравнение l_1). Рассмотрим, например, уравнение (4) и подставим в него координаты точек A (4; 6) и C (– 1; – 4): точка A в уравнение (4): $4 + 7 \cdot 6 + 4 = 50 > 0$, точка C в уравнение (4): $-1 + 7 \cdot (-4) + 4 = -25 < 0$, Получили числа разных знаков, следовательно, уравнение $x + 7y + 4 = 0$ является уравнением биссектрисы внутреннего угла. Построим его, приведя к виду: $$x + 7y + 4 = 0,$$ $$7y = -x - 4,$$ $$y = -\frac{x}{7}-\frac{4}{7},\ y = -\frac{1}{7}x-\frac{4}{7}$$ – уравнение биссектрисы (прямая l_1). Для построения биссектрисы подберем следующие точки: **x**: 3, – 4; **y**: – 1, 0 Биссектриса угла ABC, прямая l_1 изображена на рис. 4.

Что следует делать	*Как следует делать*

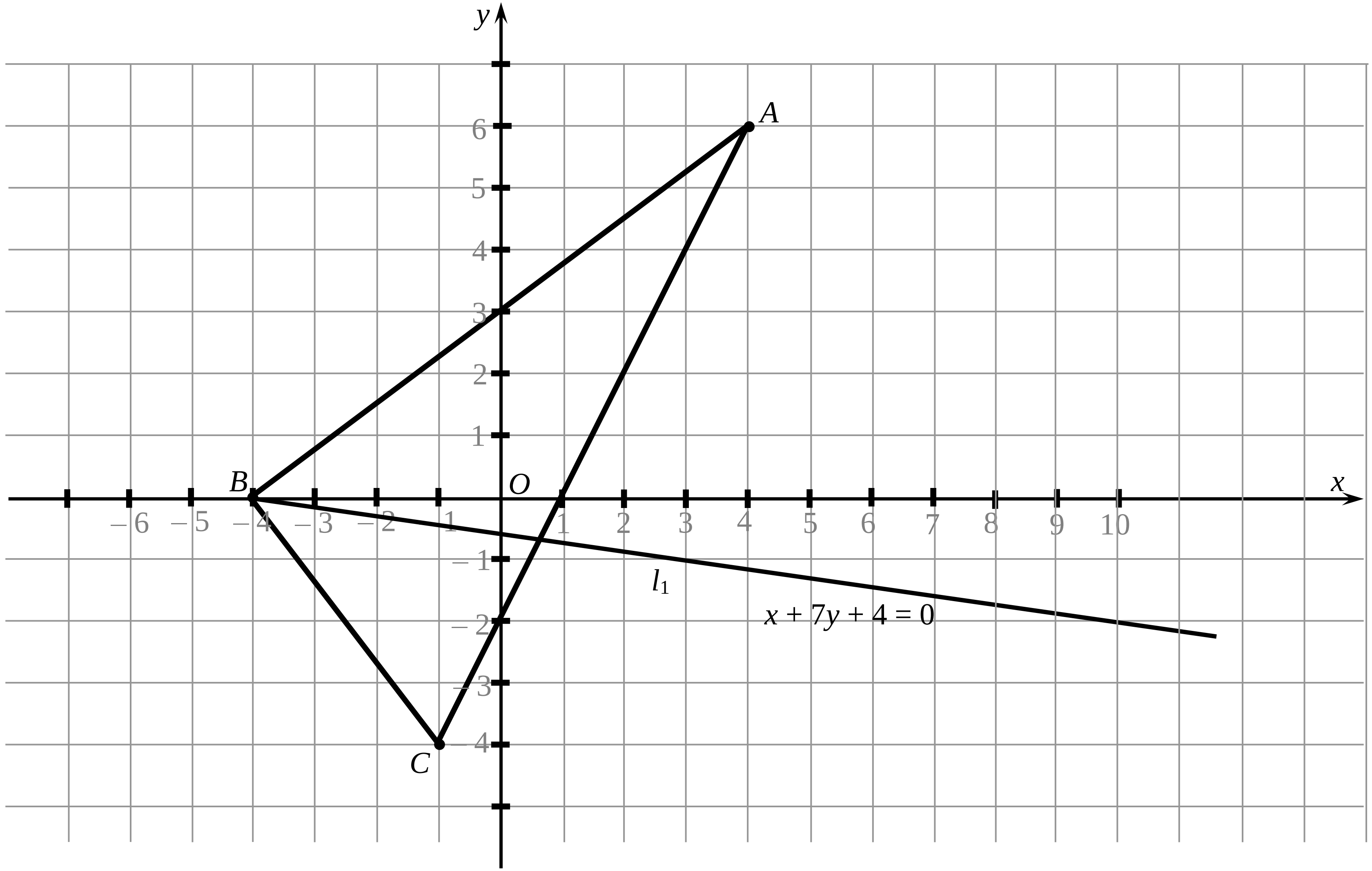


Рис. 4

<table>
<tr><th>Что следует делать</th><th>Как следует делать</th></tr>
<tr><td>

д) составим уравнение прямой l, проходящей через точку A параллельно прямой BC.

Так как $l \parallel BC$, то $k_l = k_{BC}$. Зная координаты точки A (4; 6), через которую проходит искомая прямая, и ее угловой коэффициент, воспользуемся формулой: $y - y_1 = k(x - x_1)$.

</td><td>

Найдем угловой коэффициент прямой BC.

Общее уравнение прямой BC (*см. пункт а*) имеет вид: $4x + 3y + 16 = 0$. Выражая отсюда y, найдем уравнение с угловым коэффициентом:

$$3y = -4x - 16, \quad \text{тогда } y = -\frac{4}{3}x - \frac{16}{3}, \quad \text{откуда } k_{BC} = -\frac{4}{3} = k_l.$$

Координаты точки A (4; 6), т.е. $x_1 = 4$; $y_1 = 6$, таким образом, с учетом формулы (2), получим

$$y - 6 = -\frac{4}{3}(x - 4), \qquad y - 6 = -\frac{4}{3}x + \frac{16}{3},$$

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{34}{3}$$ – уравнение прямой l с угловым коэффициентом.

Для построения прямой l подберем следующие точки:

<table>
<tr><td>x</td><td>4</td><td>7</td></tr>
<tr><td>y</td><td>6</td><td>2</td></tr>
</table>

Прямая l изображена на рис. 5.

</td></tr>
</table>

Что следует делать	*Как следует делать*

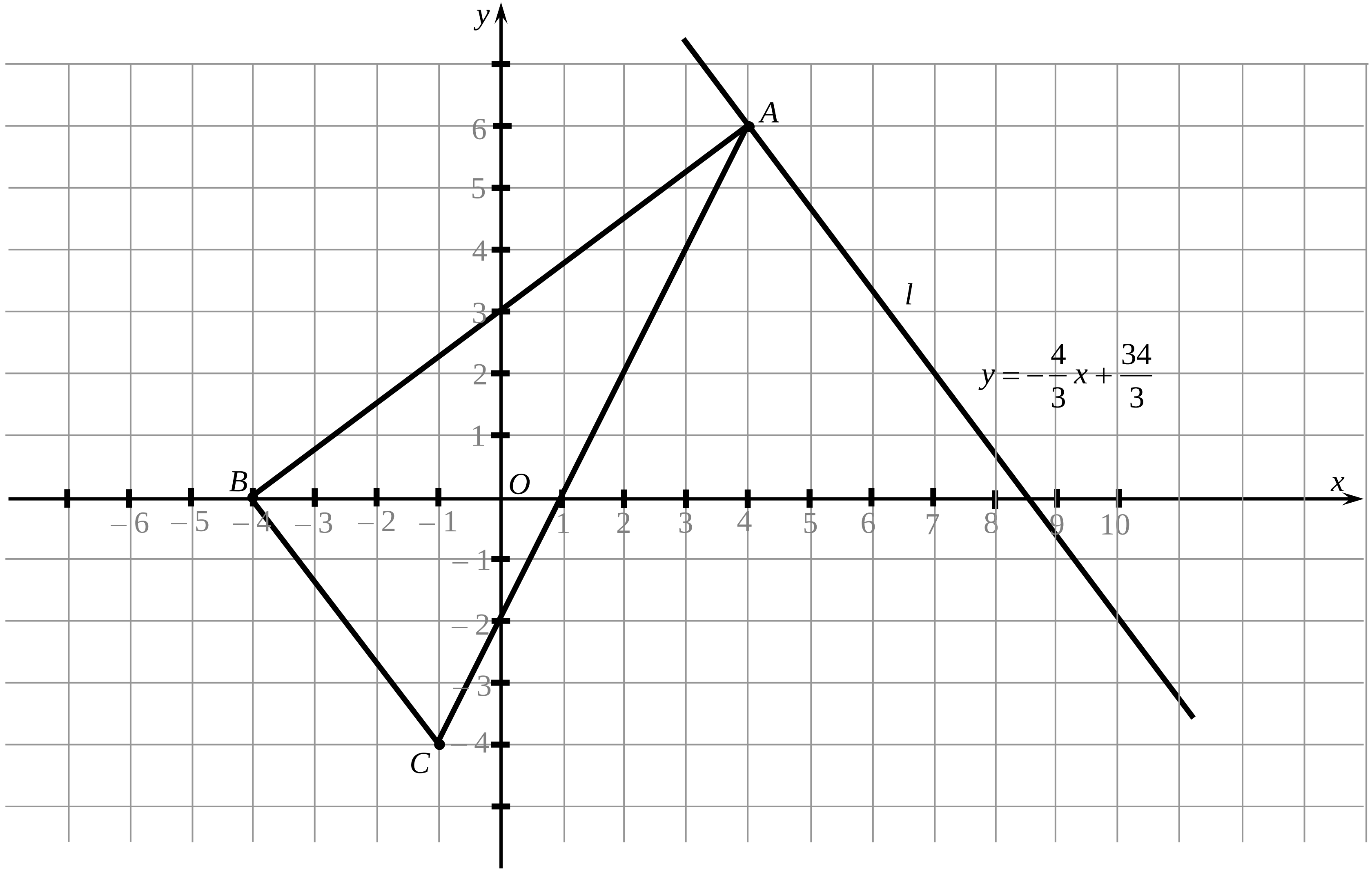


Рис. 5

Что следует делать	*Как следует делать*
е) найдем периметр P треугольника ABC: $P_\Delta = AB + BC + AC$. Длины сторон найдем по формуле нахождения расстояния между двумя точками M_1 $(x_1; y_1)$ и M_2 $(x_2; y_2)$: $$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$ Площадь треугольника ABC найдем по формуле: $$S_\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$ где $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$ – координаты вершин треугольника.	Определим длины сторон треугольника ABC: $$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-4-4)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$$ $$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-1+4)^2 + (-4-0)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$ $$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-1-4)^2 + (-4-6)^2} = \sqrt{25+100} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$ Тогда периметр треугольника: $$P = 10 + 5 + \sqrt{125} = 15 + 5\sqrt{5} = 5\cdot\left(3+\sqrt{5}\right) \approx 26{,}8.$$ Найдем площадь треугольника: $$S_\Delta = \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot(0+16-6-0+16+24) = \frac{1}{2}\cdot 50 = 25$$
ж) найдем расстояние от точки B до прямой l. Воспользуемся формулой расстояния от точки M_0 $(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$: $$d = \frac{\lvert Ax_0 + By_0 + C\rvert}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$	Запишем уравнение прямой l (*см. пункт е*) $y = -\frac{4}{3}x + \frac{34}{3}$ в общем виде: $$y + \frac{4}{3}x - \frac{34}{3} = 0 \quad \text{или} \quad 4x + 3y - 34 = 0.$$ Так как B $(-4; 0)$, то $x_0 = -4$; $y_0 = 0$.

<table>
<tr><th>Что следует делать</th><th>Как следует делать</th></tr>
<tr><td></td><td>Получим $d = \frac{\left|4\cdot(-4)+3\cdot 0-34\right|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{\left|-16-34\right|}{\sqrt{25}} = \frac{50}{5} = 10$.</td></tr>
<tr><td>з) найдем точку пересечения прямых l и l_1. Для этого составим и решим систему из уравнений, задающих эти прямые.</td><td>Итак, рассматриваются уравнения прямых l_1 (см. пункт г): $y = -\frac{1}{7}x - \frac{4}{7}$ и l (см. пункт е): $y = -\frac{4}{3}x + \frac{34}{3}$. Составляется система из этих уравнений:
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{7}x - \frac{4}{7}, \\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{34}{3}. \end{cases}$$
Приравниваем правые части уравнений системы, получаем
$$-\frac{1}{7}x - \frac{4}{7} = -\frac{4}{3}x + \frac{34}{3}, \qquad -\frac{1}{7}x + \frac{4}{3}x = \frac{34}{3} + \frac{4}{7},$$
$$\frac{-3x + 28x}{21} = \frac{238 + 12}{21},$$
$$25x = 250,$$
откуда находим $x = 10$.
Подставляем x в одно из уравнений системы, например,
$$y = -\frac{1}{7}\cdot 10 - \frac{4}{7} = \frac{-10-4}{7} = -\frac{14}{7} = -2.$$
Таким образом, точка пересечения прямых $l_1 \cap l = P$ (рис. 6), где P (10; – 2).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Все построения для решенной задачи можно было проводить на одном графике (рис. 7).</td></tr>
</table>

Что следует делать	*Как следует делать*

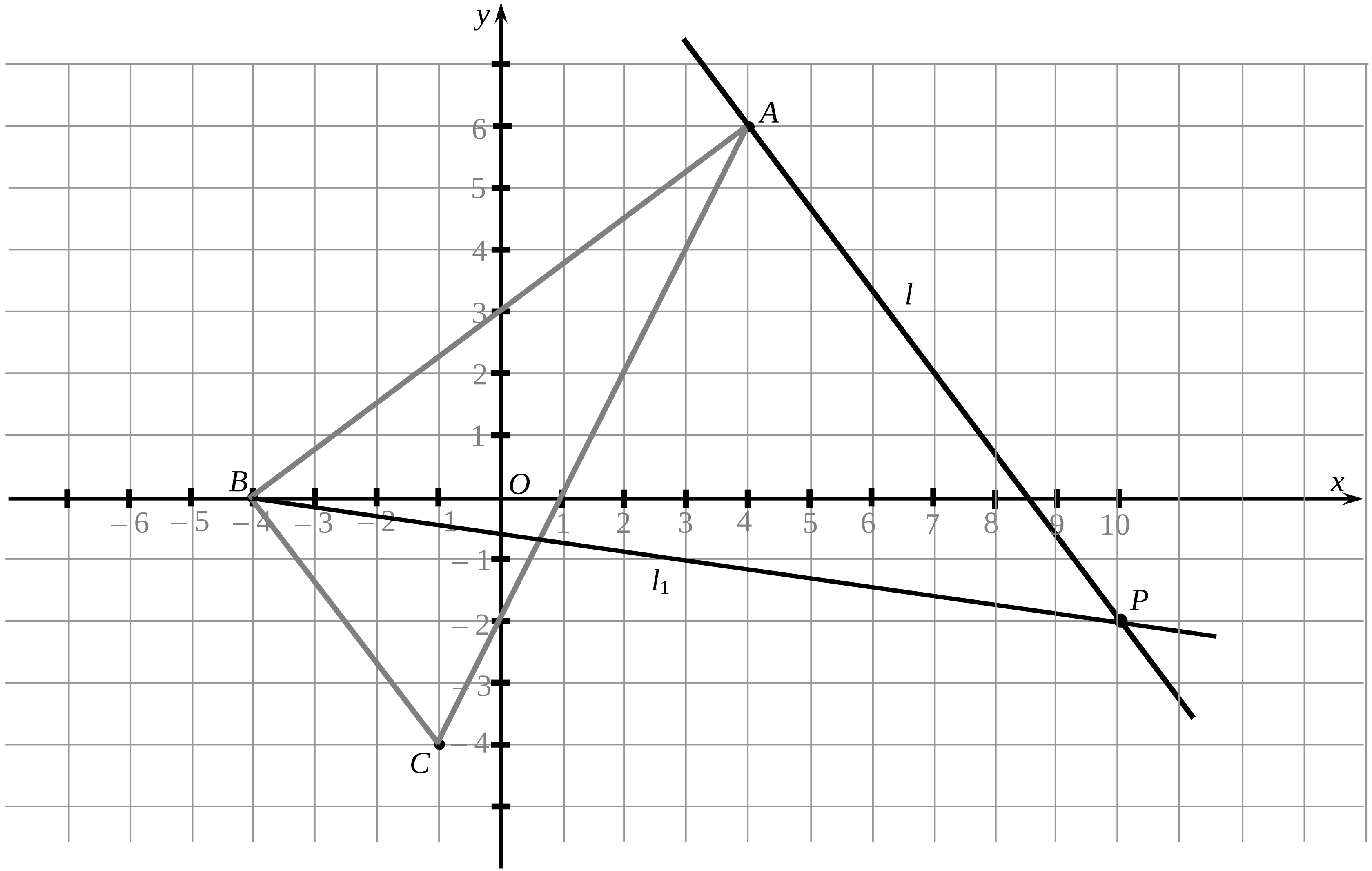


Рис. 6

Что следует делать	*Как следует делать*

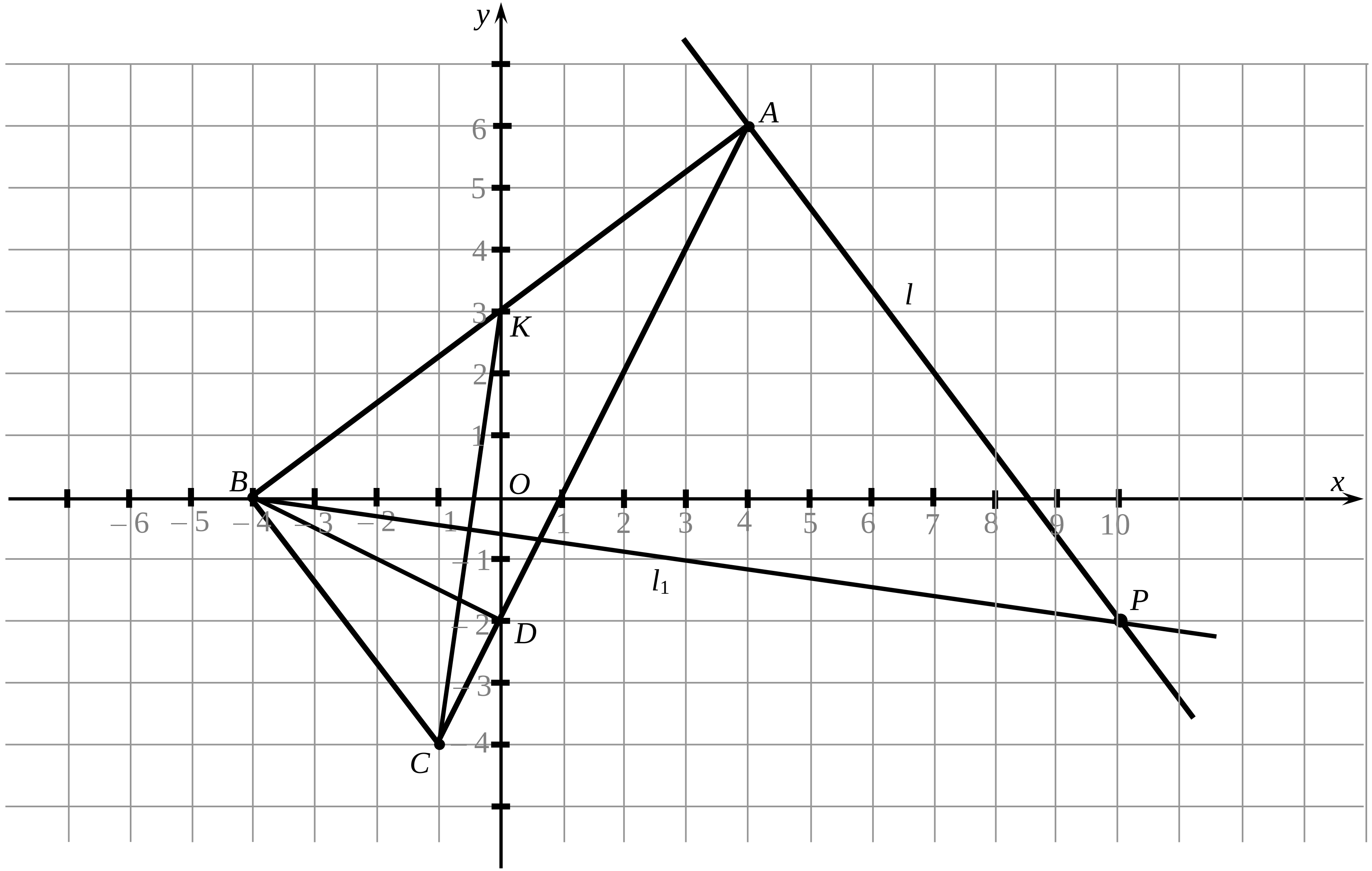


Рис. 7

Пример 2: Фиксированные издержки на предприятии при выпуске некоторой продукции составляют $F = 1500$ руб. в месяц, переменные издержки – $V_0 = 12$ руб. за единицу продукции, при этом выручка составляет $R_0 = 22$ руб. за единицу изготовленной продукции. Составить функцию прибыли $P(q)$ (q – количество произведенной продукции); построить ее график и определить точку безубыточности.

Что следует делать	*Как следует делать*
При производстве q единиц любой продукции ***совокупные издержки*** *(затраты)* $C(q)$ состоят из двух слагаемых – постоянных (фиксированных) и переменных издержек: $C(q) = F + V$. ***Постоянные издержки*** F – это издержки, не зависящие от числа единиц произведенной продукции. Они включают в себя амортизацию, аренду помещения, проценты по займам и т.п. ***Переменные издержки*** V – это издержки, напрямую зависящие от количества произведенной продукции. Они включают в себя стоимость сырья, рабочей силы и т.п. В простейшем случае переменные издержки прямо пропорциональны q – количеству произведенной продукции. Коэффициент пропорциональности V_0 – это переменные затраты по производству одной единицы продукции.	Вычислим совокупные издержки на производстве при выпуске q единиц некоторой продукции $$C(q) = F + V_0 q \quad \Rightarrow \quad C(q) = 1500 + 12q.$$

Что следует делать	*Как следует делать*
Тогда совокупные издержки на производстве при выпуске q единиц некоторой продукции описывается ***линейной моделью издержек***: $\boxed{C(q)=F+V_0 q}$. ***Совокупный доход***, или *выручка* $R(q)$, получаемый пред приятием от продажи q единиц продукции, определяется формулой $\boxed{R(q)=R_0 q}$, где R_0 – цена единицы товара. Очевидно, что область определения этой функции $D(q)=[0;+\infty)$ и $R(0)=0$. Если произведено и продано q единиц продукции, то ***прибыль*** $P(q)$ определяется формулой $\boxed{P(q)=R(q)-C(q)}$. При малых значениях q прибыль отрицательна, т.е. производство убыточно. При увеличении q прибыль возрастает и при некотором q обращается в нуль. Точка, в которой прибыль обращается в нуль, называется ***точкой безубыточности***.	Если будет продано q единиц продукции, то совокупный доход составит $$R(q)=R_0 q \quad \Rightarrow \quad R(q)=22q.$$ Исходя из полученных функций совокупного дохода и совокупных издержек, найдем функцию прибыли $P(q)=R(q)-C(q)$, $$P(q)=22q-(1500+12q),$$ $$P(q)=10q-1500.$$ Точка безубыточности – точка, в которой прибыль равна нулю, или точка, в которой совокупные издержки равны совокупному доходу $$C(q)=R(q),$$ $$1500+12q=22q,$$ откуда находим $q=150$ – точка безубыточности. Для построения графика (рис. 8) функции прибыли найдем еще одну точку $q=300$, $P(300)=1500$.

Что следует делать	*Как следует делать*

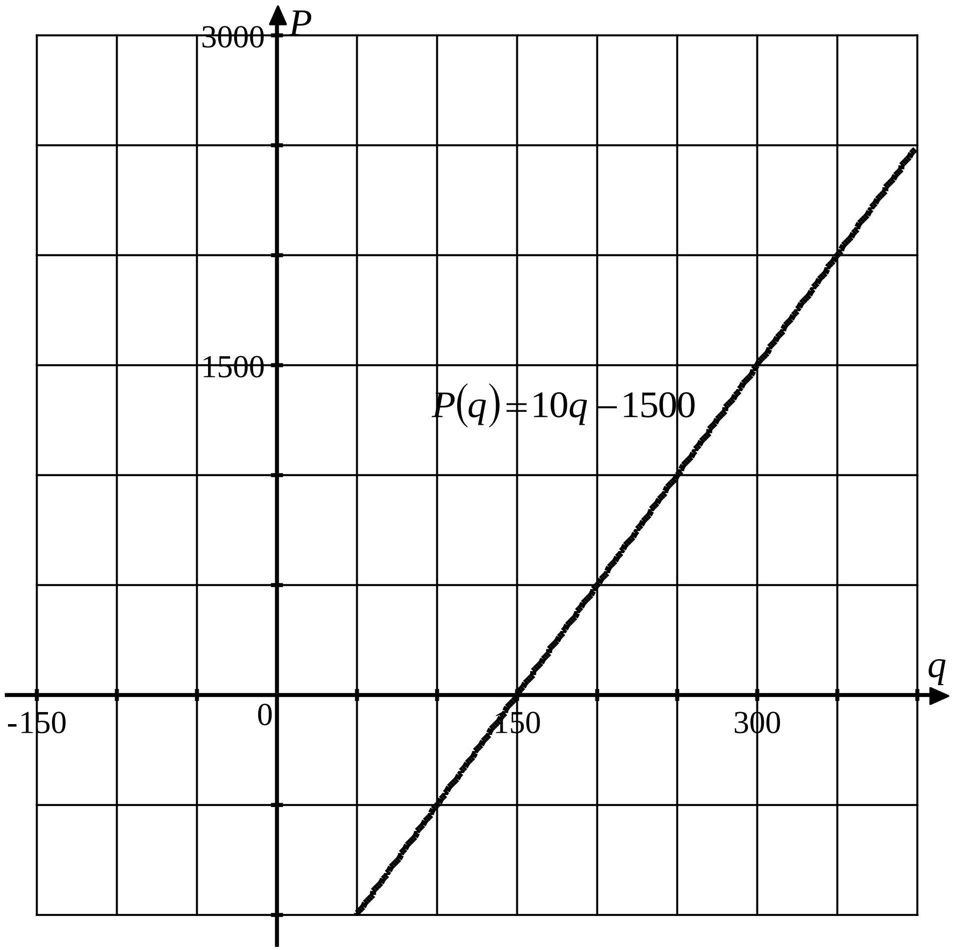


Рис. 8

Пример 3: Законы спроса и предложения на некоторый товар соответственно определяются уравнениями $p_D = -2q + 9$, $p_S = q + 3$, где p – цена на товар, q – количество товара. Предполагается, что спрос определяется только ценой товара на рынке p_C, а предложение – только ценой p_S, получаемой поставщиками. Необходимо:

а) определить точку рыночного равновесия;

б) точку равновесия после введения налога $t = 1$. Определить увеличение цены и уменьшение равновесного объема продаж;

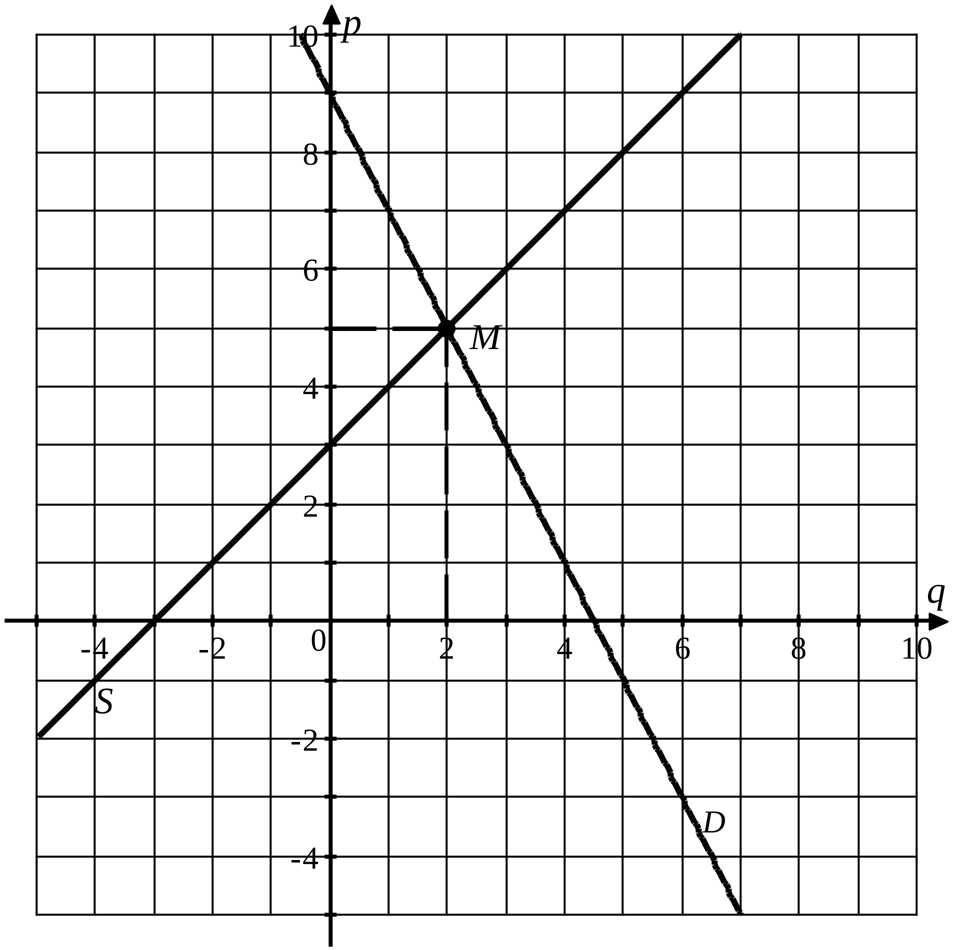
в) найти субсидию s, которая приведет к увеличению объема продаж на $q_0 = 2$ ед. относительно изначального (определенного в пункте а));

г) найти новую точку равновесия и доход правительства при введении налога, пропорционального цене и равного $N = 15\%$;

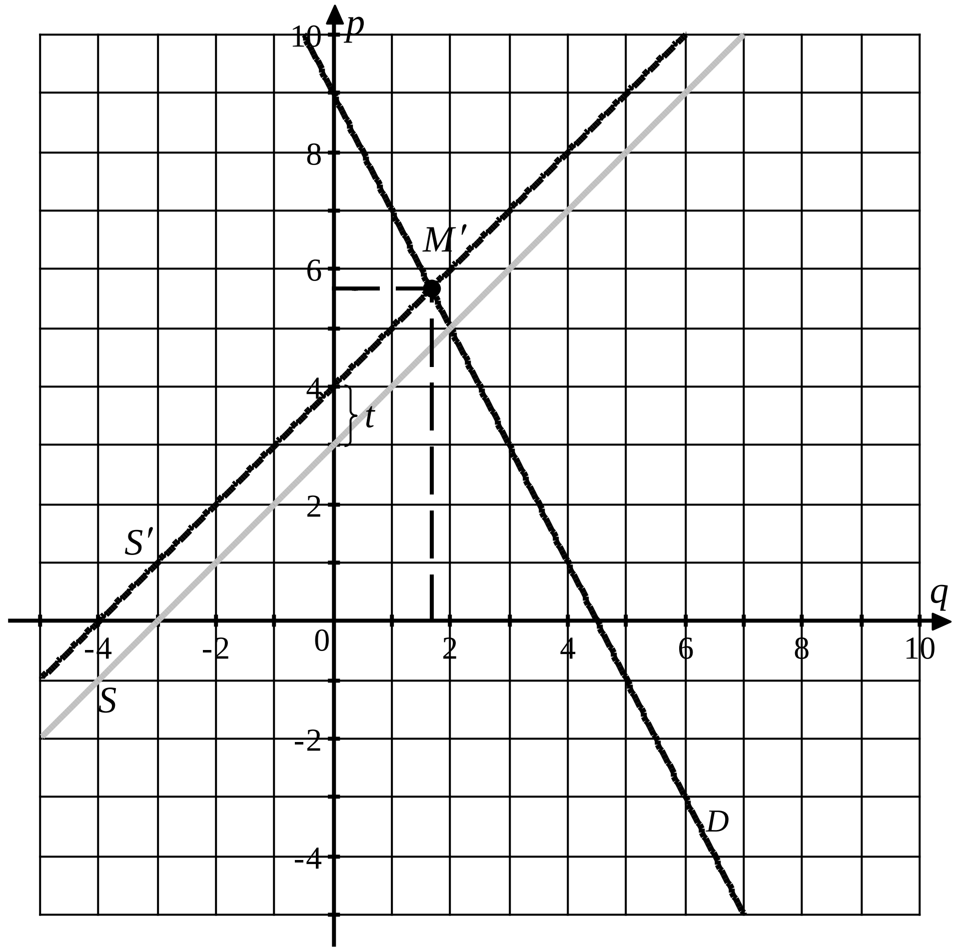
д) определить, сколько денег будет израсходовано правительством на скупку излишка при установлении минимальной цены, $p_0 = 6$.

К каждому пункту решения сделать рисунок в системе координат. На рисунке обозначить соответствующие пункту задачи линии и точки.

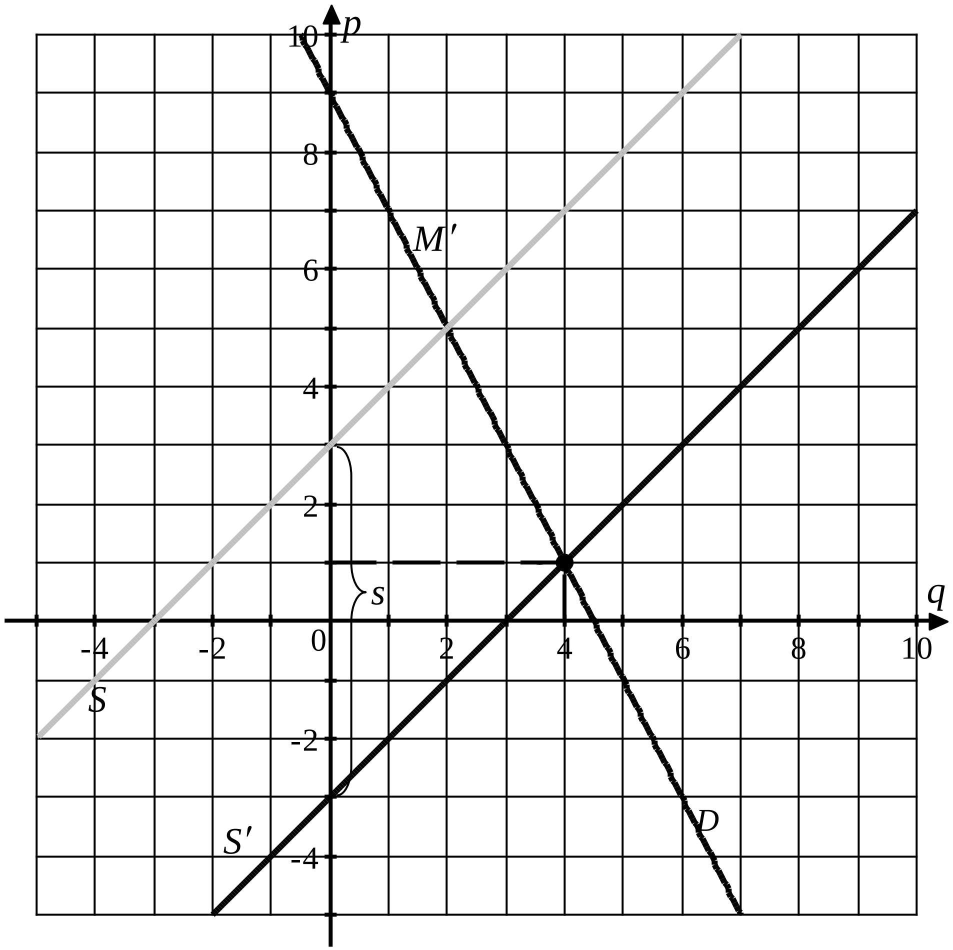
Что следует делать	*Как следует делать*
Точка пересечения кривых спроса и предложения $(x_0; p_0)$ называется ***точкой рыночного равновесия***. Соответственно, p_0 называется ***равновесной ценой***, а x_0 – ***равновесным количеством (объемом продаж)***.	**а)** Находим точку рыночного равновесия из условия $p_D = p_S$ (рис. 9): $-2q + 9 = q + 3,$ $-3q = -6,$ $q = 2$; $p = 5$. Точка рыночного равновесия $M(2;5)$.

Что следует делать	Как следует делать
	 **Рис. 9**

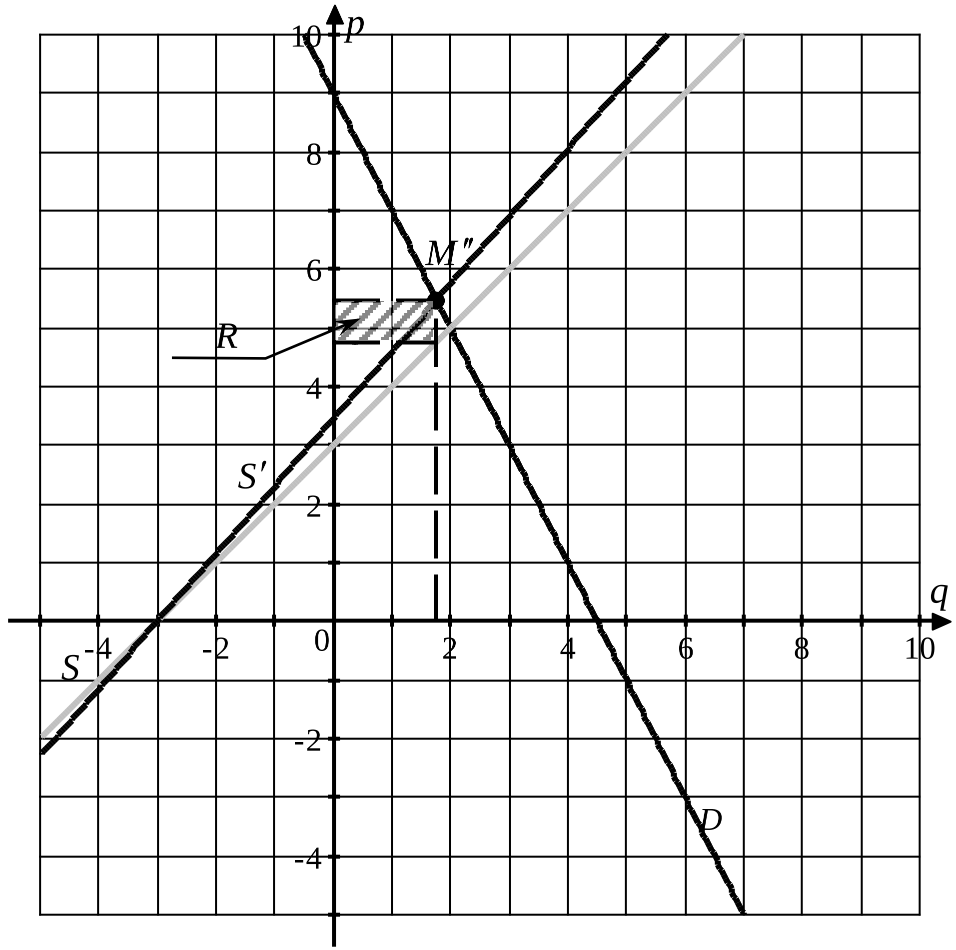
Что следует делать	*Как следует делать*
Часто правительство вводит налог t на товар или предоставляет субсидию s, чтобы население могло приобрести этот товар по разумной цене. При использовании линейных моделей предполагается, что спрос определяется только ценой товара на рынке p_C, а предложение – только ценой p_S, получаемой поставщиками. Эти цены связаны между собой следующими уравнениями: $$p_C = p_S + t,$$ $$p_C = p_S - s,$$ где t и s – соответственно налог и субсидия на единицу товара. Таким образом, при введении налога или субсидии уравнение спроса D не изменится. График функции предложения поднимется на t единиц вверх или опустится на s единиц вниз.	**б)** Если введен налог $t = 1$, то система уравнений для определения точки равновесия примет вид $$D: \quad p_C = -2q + 9,$$ $$S: \quad p_S = q + 3,$$ $$p_C = p_S + 1.$$ Используя соотношение между ценой на рынке p_C и ценой p_S, получаемой поставщиками, имеем следующие выражения для определения точки рыночного равновесия $$-2q + 9 = q + 4,$$ $$p_C = q + 4.$$ Откуда находим новую точку рыночного равновесия $M'\left(\frac{5}{3}; \frac{17}{3}\right)$ (рис. 10). Следовательно, после введения налога равновесная цена увеличилась на $\frac{17}{3} - 5 = \frac{2}{3}$ ден. ед., а равновесный объем уменьшился на $2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$ ед.

Что следует делать	*Как следует делать*
	 **Рис. 10**

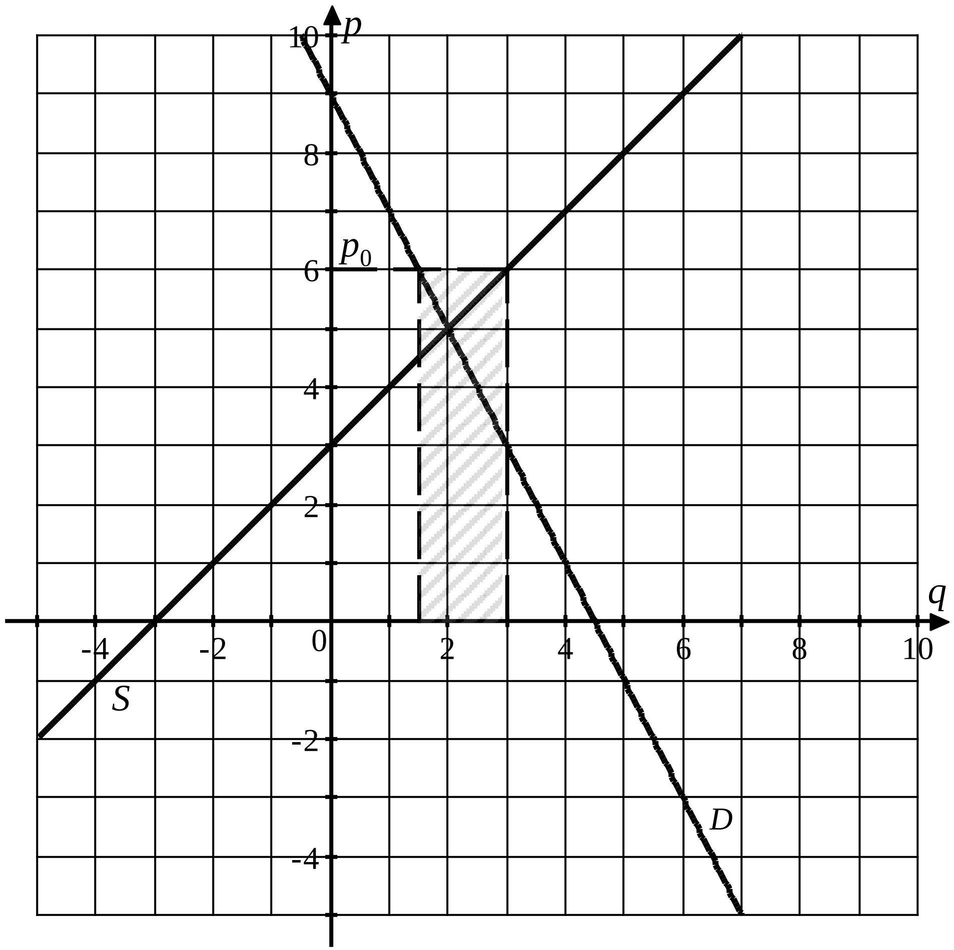
Что следует делать	*Как следует делать*
	в) Если предоставляется субсидия, то система для определения точки равновесия имеет вид $$D:\quad p_C = -2q + 9,$$ $$S:\quad p_S = q + 3,$$ $$p_C = p_S - s.$$ Новый объем продаж равен $2+2=4$ единицы, подставляем $q=4$ в систему, находим $$p_C = 1;\quad p_S = 7;\quad s = 7 - 1 = 6.$$ Таким образом, субсидия, которая приведет к увеличению объема продаж на 2 ед. относительно изначального, должна быть равна 6 ден. ед. (рис. 11).

Что следует делать	*Как следует делать*
	 **Рис. 11**

Что следует делать	*Как следует делать*
Вместо субсидии иногда вводится минимальная цена. В этом случае правительство скупает излишек продукции, равный $x_S - x_D$. Некоторые налоги, например, НДС (налог на добавленную стоимость), пропорциональны цене. В этом случае остается той же точка пересечения графика предложения с осью Ox и меняется угол наклона графика к оси Ox.	**г)** Если налог составляет 15%, то вся рыночная цена составляет 115%, из них 100% получают поставщики товара, 15% – государство. Итак, поставщики получают $p_S = \frac{100}{115} p_C = \frac{20}{23} p_C.$ Таким образом, система для определения новой точки рыночного равновесия имеет вид $\begin{cases} p_C = -2q + 9, \\ \frac{20}{23} p_C = q + 3. \end{cases}$ Решая эту систему, находим новую точку рыночного равновесия $M''\left(\frac{37}{21}; \frac{115}{21}\right),$ при этом доход правительства R будет равен $R = \left(1 - \frac{20}{23}\right) \cdot \frac{37}{21} \cdot \frac{115}{21} = \frac{185}{147} = 1\frac{38}{147}.$ На рис. 12 доход правительства соответствует площади заштрихованного прямоугольника.

Что следует делать	*Как следует делать*
	 **Рис. 12**

Что следует делать	*Как следует делать*
	Таким образом, новая точка равновесия $M''\left(\frac{37}{21};\frac{115}{21}\right)$, а доход правительства при введении налога, пропорционального цене и равного 15% будет равен $R=1\frac{38}{147}$ ден. ед. **д)** Если установлена минимальная цена, то из уравнений спроса и предложения можно найти объемы спроса и предложения, соответствующие данной цене. Если минимальная цена выше равновесной цены, то объем предложения превышает объем спроса, тогда разницу между ними скупает правительство. При $p_0=6$ находим $$q_D=\frac{-p_0+9}{2}=\frac{-6+9}{2}=1{,}5$$ $$q_S=p_0-3=6-3=3.$$ Таким образом, затраты правительства составят $$(q_S-q_D)\cdot p_0=(3-1{,}5)\cdot 6=9.$$ На рис. 13 затраты правительства соответствуют площади заштрихованного прямоугольника. Следовательно, правительством будет израсходовано 9 ден. ед. на скупку излишка при установлении минимальной цены, равной 6.

Что следует делать	*Как следует делать*
	 **Рис. 13**

Пример 3: Для функции $f(t)$, заданной графически на интервале $t \in [0;6]$, составить ее аналитическое выражение.

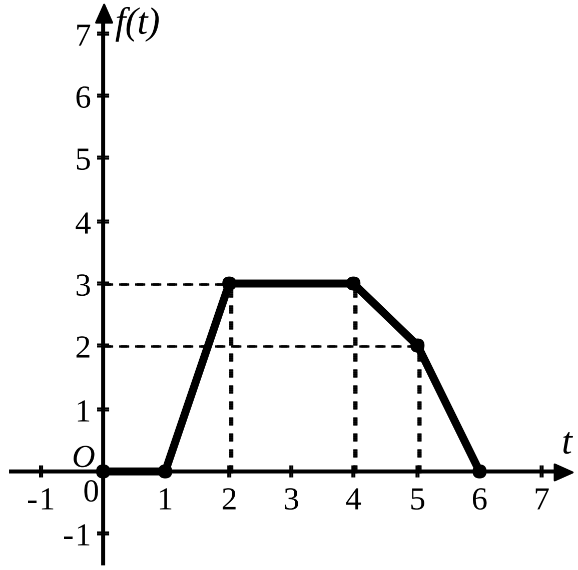
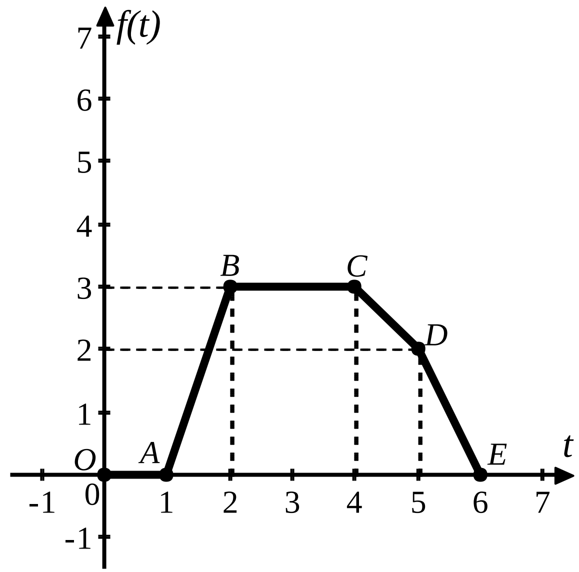


Рис .14

Что следует делать	*Как следует делать*
Для того, чтобы описать аналитическое выражение для заданной функции, следует составить уравнения отрезков этих прямых, используя формулу: $\boxed{\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}}$. Каждый из отрезков рассматривается по отдельности.	График функции, представленной на рис. 14, можно обозначить отрезками прямых OA, AB, BC, CD, DE (рис. 15).

Что следует делать	*Как следует делать*
	 **Рис. 15**
Уравнение оси абсцисс имеет вид $y = 0$.	**1)** Отрезок OA задан на интервале $t \in [0;1)$. Этот отрезок совпадает с осью абсцисс. Следовательно, для отрезка OA можно записать: $f(t) = 0$, если $0 \le t < 1$.
	2) Отрезок AB задан на интервале $t \in [1;2)$, и по графику очевидно, что он проходит через точки $A(1;0)$ и $B(2;3)$. Составим уравнение прямой AB: $\dfrac{f - f_A}{f_B - f_A} = \dfrac{t - t_A}{t_B - t_A}$;

Что следует делать	*Как следует делать*
	$\dfrac{f-0}{3-0}=\dfrac{t-1}{2-1}$; $\dfrac{f}{3}=\dfrac{t-1}{1}$; $f=3(t-1)$; $f=3t-3$. Таким образом, для отрезка AB справедливо записать: $f(t)=3t-3$, если $1\le t<2$.
Уравнение прямой, параллельной оси абсцисс является частным случаем уравнения прямой с угловым коэффициентом и имеет вид: $y=b$.	**3)** Отрезок BC задан на интервале $t\in[2;4)$. По графику делаем вывод, что отрезок BC параллелен оси абсцисс. Поскольку из графика очевидны координаты точек $B(2;3)$ и $C(4;3)$, уравнение отрезка BC: $f(t)=3$, если $2\le t<4$.
	4) Отрезок CD задан на интервале $t\in[4;5)$. Из графика запишем координаты соответствующих точек: $C(4;3)$ и $D(5;2)$. Составим уравнение прямой CD: $\dfrac{f-f_C}{f_D-f_C}=\dfrac{t-t_C}{t_D-t_C}$; $\dfrac{f-3}{2-3}=\dfrac{t-4}{5-4}$;

Что следует делать	*Как следует делать*
	$\frac{f-3}{-1}=\frac{t-4}{1};$ $f-3=-(t-4);$ $f=-t+4+3$ $f=7-t.$ Таким образом, для отрезка CD справедливо записать: $f(t)=7-t$, если $4\le t<5$.
	5) Отрезок DE задан на интервале $t\in[5;6]$ и проходит через точки с координатами $D(5;2)$ и $E(6;0)$. Составим уравнение прямой DE: $\frac{f-f_D}{f_E-f_D}=\frac{t-t_D}{t_E-t_D};$ $\frac{f-2}{0-2}=\frac{t-5}{6-5};$ $\frac{f-2}{-2}=\frac{t-5}{1};$ $f-2=-2(t-5);$ $f=-2t+10+2$ $f=12-2t.$ В итоге, для отрезка DE можно записать: $f(t)=12-2t$, если $5\le t\le 6$.

Что следует делать	*Как следует делать*
	Рассмотрев по отдельности все отрезки функции $f(t)$, заданной графически на интервале $t \in [0;6]$, запишем ее итоговое аналитическое выражение: $$f(t)=\begin{cases}0, & \text{при } 0 \le t < 1,\\ 3t-3, & \text{при } 1 \le t < 2,\\ 3, & \text{при } 2 \le t < 4,\\ 7-t, & \text{при } 4 \le t < 5,\\ 12-2t, & \text{при } 5 \le t \le 6.\end{cases}$$

2.4. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача I. Прямая на плоскости

Замечание. При решении задач своего варианта построить прямые.

Вариант № 1

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;3)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}=(-1;1)$. Привести полученное уравнение к общему виду и с угловым коэффициентом.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(1;-2)$, $M_2(-4;5)$. Записать общее и параметрические уравнения этой прямой.

3. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;2)$ с заданным угловым коэффициентом $k=2$. Привести полученное уравнение к общему виду и в отрезках на осях.

4. Записать уравнение прямой, зная отрезки $a = 8$, $b = 9$, отсекаемые на осях Ox и Oy соответственно. Привести полученное уравнение к виду с угловым коэффициентом и к нормальному виду.

5. Определить точки пересечения прямой $2x-3y-12=0$ с координатными осями.

6. Составить уравнение биссектрисы угла между прямыми $x-7y+5=0$, $5x+5y-3=0$, смежного с углом, содержащим начало координат.

7. Вычислить длину перпендикуляра, опущенного из вершины B на медиану, проведенную из вершины C треугольника ABC, если $A\,(-10;-13)$, $B\,(-2;3)$, $C\,(2;1)$.

Вариант № 2

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M\,(0;-1)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}=(7;2)$. Привести полученное уравнение к общему виду и с угловым коэффициентом.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1\,(-3;6)$, $M_2\,(-3;-3)$. Записать общее и параметрические уравнения этой прямой.

3. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-10;-4)$ с заданным угловым коэффициентом $k=-\dfrac{5}{2}$. Привести полученное уравнение к общему виду и в отрезках на осях.

4. Записать уравнение прямой, зная отрезки $a = 3$, $b = -7$, отсекаемые на осях Ox и Oy соответственно. Привести полученное уравнение к виду с угловым коэффициентом и к нормальному виду.

5. Построить прямые $3x-4y-29=0$ и $2x+5y+19=0$. Найти точку их пересечения.

6. При каком значении m прямые $mx+(2m+3)y+m+6=0$ и $(2m+1)x+(m-1)y+m-2=0$ пересекаются в точке, лежащей на оси Oy?

7. Две стороны квадрата лежат на прямых $5x-12y-65=0$, $5x-12y+26=0$. Найти его площадь.

Вариант № 3

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;-2)$ перпендикулярно вектору $\bar{n}=(-4;3)$. Привести полученное уравнение к общему виду и с угловым коэффициентом.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(3;5)$, $M_2(5;-2)$. Записать общее и параметрические уравнения этой прямой.

3. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M(5;-10)$ с заданным угловым коэффициентом $k=-\frac{2}{5}$. Привести полученное уравнение к общему виду и в отрезках на осях.

4. Записать уравнение прямой, зная отрезки $a=-4$, $b=7$, отсекаемые на осях Ox и Oy соответственно. Привести полученное уравнение к виду с угловым коэффициентом и к нормальному виду.

5. Стороны AB, BC и AC треугольника ABC заданы уравнениями $4x+3y-5=0$, $x-3y+10=0$, $x-2=0$ соответственно. Найти координаты вершин A, B, C.

6. Определить, при каком значении m прямые $(m-1)x+$ $+my-5=0$, $mx+(2m-1)y+7=0$ пересекаются в точке, лежащей на оси Ox.

7. Даны две смежные вершины квадрата $A(2;0)$, $B(-1;4)$. Найти уравнения его сторон.

Вариант № 4

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;0)$ перпендикулярно вектору $\bar{n}=(-3;9)$. Привести полученное уравнение к общему виду и с угловым коэффициентом.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(-1;2)$, $M_2(3;4)$. Записать общее и параметрические уравнения этой прямой.

3. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-4;5)$ с заданным угловым коэффициентом $k=\frac{5}{2}$. Привести полученное уравнение к общему виду и в отрезках на осях.

4. Записать уравнение прямой, зная отрезки $a=\frac{4}{5}$, $b=-\frac{5}{4}$, отсекаемые на осях Ox и Oy соответственно. Привести полученное уравнение к виду с угловым коэффициентом и к нормальному виду.

5. Даны уравнения сторон параллелограмма $8x+3y+1=0$, $2x+y-1=0$ и уравнение одной из его диагоналей $3x+2y+3=0$. Найти координаты вершин параллелограмма.

6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $P(8;6)$ и отсекающей от координатного угла треугольник площади 12 кв. ед. Сделать чертеж.

7. Найти уравнение биссектрисы тупого угла между прямыми $x-3y+5=0$, $3x-y+15=0$.

Вариант № 5

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M\,(0;\,-2)$ перпендикулярно вектору $\overline{n} = (-3;11)$. Привести полученное уравнение к общему виду и с угловым коэффициентом.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1\,(-4;\,-2)$, $M_2\,(1;\,2)$. Записать общее и параметрические уравнения этой прямой.

3. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M\,(5;\,-3)$ с заданным угловым коэффициентом $k = \dfrac{2}{5}$. Привести полученное уравнение к общему виду и в отрезках на осях.

4. Записать уравнение прямой, зная отрезки $a = 2$, $b = -\dfrac{3}{2}$, отсекаемые на осях Ox и Oy соответственно. Привести полученное уравнение к виду с угловым коэффициентом и к нормальному виду.

5. Стороны треугольника лежат на прямых $x + 5y - 7 = 0$, $3x - 2y - 4 = 0$, $7x + y + 19 = 0$. Вычислить его площадь.

6. Через точку $M\,(3;\,-2)$ провести прямую так, чтобы отрезок между осями делился в ней пополам.

7. Найти уравнение биссектрисы угла между прямыми $x + 2y - 11 = 0$, $3x - 6y - 5 = 0$, в котором лежит точка $M(1;-3)$.

Вариант № 6

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M\,(-1;\,2)$ перпендикулярно вектору $\overline{n} = (4;-4)$. Привести полученное уравнение к общему виду и с угловым коэффициентом.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1\,(5;\,3)$, $M_2\,(4;\,-1)$. Записать общее и параметрические уравнения этой прямой.

3. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-3;6)$ с заданным угловым коэффициентом $k = -\dfrac{4}{3}$. Привести полученное уравнение к общему виду и в отрезках на осях.

4. Записать уравнение прямой, зная отрезки $a = \dfrac{3}{2}$, $b = -1$, отсекаемые на осях Ox и Oy соответственно. Привести полученное уравнение к виду с угловым коэффициентом и к нормальному виду.

5. Дана прямая $5x + 3y - 3 = 0$. Построить прямую, параллельную ей и проходящую через точку $M\,(1;\,2)$. Записать уравнение этой прямой.

6. Через точку $P\,(5;\,2)$ провести прямую, отсекающую равные отрезки на осях.

7. Найти точку пересечения перпендикуляров, восстановленных из середин сторон треугольника ABC, если $A\,(2;\,3)$, $B(0;\,-3)$, $C\,(5;\,-2)$.

Вариант № 7

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1; -3)$ перпендикулярно вектору $\overline{n} = (-3; 4)$. Привести полученное уравнение к общему виду и с угловым коэффициентом.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(-4; 5)$, $M_2(0; -3)$. Записать общее и параметрические уравнения этой прямой.

3. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M(7; 8)$ с заданным угловым коэффициентом $k = \frac{4}{3}$. Привести полученное уравнение к общему виду и в отрезках на осях.

4. Записать уравнение прямой, зная отрезки $a = -4$, $b = 1/2$, отсекаемые на осях Ox и Oy соответственно. Привести полученное уравнение к виду с угловым коэффициентом и к нормальному виду.

5. Дана прямая $5x + 3y - 3 = 0$. Записать уравнения перпендикуляров, восстановленных в точках пересечения этой прямой с осями координат.

6. Через точку $M(4; -3)$ провести прямую так, чтобы площадь треугольника образованного ею с осями координат, равнялось 3 кв.ед.

7. Дан четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках: $A(-9; 0)$, $B(-3; 6)$, $C(3; 4)$ и $D(6; -3)$. Найти точку пересечения диагоналей и угол между ними.

Вариант № 8

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(0; 2)$ перпендикулярно вектору $\overline{n} = (-7; 3)$. Привести полученное уравнение к общему виду и с угловым коэффициентом.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(-3; -6)$, $M_2(2; 0)$. Записать общее и параметрические уравнения этой прямой.

3. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M(4; -3)$ с заданным угловым коэффициентом $k = -\frac{3}{4}$. Привести полученное уравнение к общему виду и в отрезках на осях.

4. Записать уравнение прямой, зная отрезки $a = 5$, $b = -1$, отсекаемые на осях Ox и Oy соответственно. Привести полученное уравнение к виду с угловым коэффициентом и к нормальному виду.

5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2; 1)$ перпендикулярную прямой $2x + 3y + 4 = 0$.

6. Привести прямые $3x - 2y + 12 = 0$, $y = 4x - 2$, $y = -x + 1$, $5x + 2y + 20 = 0$ к виду в отрезках на осях.

7. Найти вершины ромба, зная уравнения двух его сторон $2x - 5y - 1 = 0$, $2x - 5y - 34 = 0$ и уравнение диагонали $x + 3y - 6 = 0$.

Вариант № 9

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M\,(2;\,3)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}=(-5;1)$. Привести полученное уравнение к общему виду и с угловым коэффициентом.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1\,(-3;\,-7)$, $M_2\,(0;\,-1)$. Записать общее и параметрические уравнения этой прямой.

3. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M\,(-3;\,-4)$ с заданным угловым коэффициентом $k=\frac{3}{4}$. Привести полученное уравнение к общему виду и в отрезках на осях.

4. Записать уравнение прямой, зная отрезки $a=-7$, $b=2$, отсекаемые на осях Ox и Oy соответственно. Привести полученное уравнение к виду с угловым коэффициентом и к нормальному виду.

5. Составить уравнение двух сторон прямоугольника, если заданы уравнения двух других сторон: $2x-3y+5=0$, $3x+2y-7=0$ и вершина $A\,(2;\,-3)$.

6. Даны точки $A\,(-3;\,1)$, $B\,(3;\,-7)$. На оси Oy найти точку M такую, что прямые AM и BM перпендикулярны.

7. Найти уравнение биссектрисы угла между прямыми $2x-3y-5=0$, $6x-4y+7=0$, смежного с углом, содержащим точку $C\,(2;\,-1)$.

Вариант № 10

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M\,(-3;\,0)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}=(4;-9)$. Привести полученное уравнение к общему виду и с угловым коэффициентом.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1\,(2;\,-4)$, $M_2\,(6;\,-8)$. Записать общее и параметрические уравнения этой прямой.

3. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M\,(12;\,4)$ с заданным угловым коэффициентом $k=-\frac{3}{2}$. Привести полученное уравнение к общему виду и в отрезках на осях.

4. Записать уравнение прямой, зная отрезки $a=-1/3$, $b=2/3$, отсекаемые на осях Ox и Oy соответственно. Привести полученное уравнение к виду с угловым коэффициентом и к нормальному виду.

5. Составить уравнение прямых, проходящих через вершины треугольника ABC: $A\,(5;\,-4)$, $B\,(-1;\,3)$, $C\,(-3;\,-2)$ параллельно противолежащим сторонам.

6. Через точку $M\,(3;\,2)$ провести прямую так, чтобы отрезок ее между осями координат делился пополам в этой точке.

7. Найти уравнения биссектрис углов между прямыми $x-3y+5=0$, $3x-y-2=0$.

Вариант № 11

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2;-3)$ перпендикулярно вектору $\bar{n}=(-5;2)$. Привести полученное уравнение к общему виду и с угловым коэффициентом.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки M_1 (6; – 2), M_2 (1; – 5). Записать общее и параметрические уравнения этой прямой.

3. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2;10)$ с заданным угловым коэффициентом $k=\frac{3}{2}$. Привести полученное уравнение к общему виду и в отрезках на осях.

4. Записать уравнение прямой, зная отрезки $a=\frac{3}{4}$, $b=-5$, отсекаемые на осях Ox и Oy соответственно. Привести полученное уравнение к виду с угловым коэффициентом и к нормальному виду.

5. Даны середины сторон треугольника M_1 (2; 1), M_2 (5; 3), M_3 (3; – 4). Составить уравнения его сторон.

6. Проверить, являются ли точки A (– 2; – 2), B (– 3; 1), C (7; 7), D (3; 1) вершинами трапеции. Найти уравнения средней линии и диагоналей трапеции.

7. Найти углы между прямыми $3x - y + 7 = 0$, $y = 2x - 3$, $\frac{y}{3}+\frac{x}{2}=1$.

Вариант № 12

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M (0; 3) перпендикулярно вектору $\bar{n}=(-13;4)$. Привести полученное уравнение к общему виду и с угловым коэффициентом.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки M_1 (6; 7), M_2 (1; – 1). Записать общее и параметрические уравнения этой прямой.

3. Записать уравнение прямой, проходящей через точку M (6; – 4) с заданным угловым коэффициентом $k=-\frac{2}{3}$. Привести к общему виду и в отрезках на осях.

4. Записать уравнение прямой, зная отрезки $a = 4$, $b=\frac{3}{2}$, отсекаемые на осях Ox и Oy соответственно. Привести полученное уравнение к виду с угловым коэффициентом и к нормальному виду.

5. Даны точки P (2; 3), Q (– 1; 0). Составить уравнение прямой, проходящей через точку Q перпендикулярно отрезку PQ.

6. Дан треугольник ABC: A (4; 6), B (– 4; 0), C (– 1; – 4). Найти: уравнения сторон; медианы, опущенной из вершины C; высоты из вершины A на BC.

7. Найти уравнения биссектрис углов между прямыми $x-2y-3=0$, $2x + 4y + 7 = 0$.

Вариант № 13

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M\,(1;-4)$ перпендикулярно вектору $\bar{n}=(5;-2)$. Привести полученное уравнение к общему виду и с угловым коэффициентом.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1\,(2;-8)$, $M_2\,(-3;-5)$. Записать общее и параметрические уравнения этой прямой.

3. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M\,(-3;4)$ с заданным угловым коэффициентом $k=\dfrac{2}{3}$. Привести полученное уравнение к общему виду и в отрезках на осях.

4. Записать уравнение прямой, зная отрезки $a=\dfrac{1}{2}$, $b=3$, отсекаемые на осях Ox и Oy соответственно. Привести полученное уравнение к виду с угловым коэффициентом и к нормальному виду.

5. Даны вершины треугольника ABC: $A\,(2;1)$, $B\,(-1;1)$, $C\,(3;2)$. Составить уравнения его высот.

6. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC даны координаты вершины при остром угле $A\,(5;7)$ и уравнение противолежащего катета $6x+4y-9=0$. Найти уравнение другого катета и гипотенузы.

7. Найти расстояние от точки $M\,(1;-2)$ до прямой $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=1$.

Вариант № 14

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M\,(6;0)$ перпендикулярно вектору $\bar{n}=(2;-17)$. Привести полученное уравнение к общему виду и с угловым коэффициентом.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1\,(9;-12)$, $M_2\,(1;0)$. Записать общее и параметрическое уравнения этой прямой.

3. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2;5)$ с заданным угловым коэффициентом $k=-\dfrac{1}{5}$. Привести полученное уравнение к общему виду и в отрезках на осях.

4. Записать уравнение прямой, зная отрезки $a=-3$, $b=-5$, отсекаемые на осях Ox и Oy соответственно. Привести полученное уравнение к виду с угловым коэффициентом и к нормальному виду.

5. Стороны треугольника лежат на прямых $4x-y-7=0$, $x+3y-31=0$, $x+5y-7=0$. Определить точку пересечения высот.

6. Составить уравнения катетов равнобедренного прямоугольного треугольника ABC, зная уравнение гипотенузы $y=3x+5$ и вершину прямого угла $C\,(4;-1)$.

7. Найти уравнения биссектрис углов между прямыми $3x+4y-1=0$, $5x+12y-2=0$.

Вариант № 15

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;\,4)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}=(-4;2)$. Привести полученное уравнение к общему виду и с угловым коэффициентом.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(8;\,2)$, $M_2(6;\,-2)$. Записать общее и параметрические уравнения этой прямой.

3. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-5;\,1)$ с заданным угловым коэффициентом $k=\dfrac{1}{5}$. Привести полученное уравнение к общему виду и в отрезках на осях.

4. Записать уравнение прямой, зная отрезки $a=5$, $b=-3$, отсекаемые на осях Ox и Oy соответственно. Привести полученное уравнение к виду с угловым коэффициентом и к нормальному виду.

5. Составить уравнения сторон и медиан треугольника ABC: $A(3;\,2)$, $B(5;\,-2)$, $C(1;\,0)$.

6. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;\,-1)$ и составляющей с осью Ox угол вдвое больший, чем прямая $y=\dfrac{x}{3}+\dfrac{4}{3}$.

7. Через точку пересечения прямых $2x+5y-8=0$; $x-3y+4=0$ провести прямые, параллельные осям Ox и Oy, проходящие через начало координат, записать их уравнения.

Вариант № 16

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(0;\,-6)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}=(13;3)$. Привести полученное уравнение к общему виду и с угловым коэффициентом.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(7;\,0)$, $M_2(-3;\,4)$. Записать общее и параметрические уравнения этой прямой.

3. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-8;2)$ с заданным угловым коэффициентом $k=-\dfrac{1}{4}$. Привести полученное уравнение к общему виду и в отрезках на осях.

4. Записать уравнение прямой, зная отрезки $a=6$, $b=-5$, отсекаемые на осях Ox и Oy соответственно. Привести полученное уравнение к виду с угловым коэффициентом и к нормальному виду.

5. Дан треугольник ABC: $A(1;\,-1)$, $B(-2;\,1)$, $C(3;\,5)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины A на медиану, проведенную из вершины B.

6. Написать уравнение прямой, проходящей через точку А $(3;\,-1)$ параллельно: 1) Ox; 2) биссектрисе I и III-его координатных углов; 3) прямой $y=3x+7$.

7. Через точку пересечения прямых $2x+5y-8=0$, $x-3y+4=0$ и точку $M(4;\,3)$ провести прямую. Найти расстояние от точки M до каждой прямой.

Вариант № 17

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1; 4)$ перпендикулярно вектору $\bar{n} = (9; -2)$. Привести полученное уравнение к общему виду и с угловым коэффициентом.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(-2; 7)$, $M_2(3; 9)$. Записать общее и параметрические уравнения этой прямой.

3. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2; 4)$ с заданным угловым коэффициентом $k = \frac{1}{4}$. Привести полученное уравнение к общему виду и в отрезках на осях.

4. Записать уравнение прямой, зная отрезки $a = 6$, $b = -3$, отсекаемые на осях Ox и Oy соответственно. Привести полученное уравнение к виду с угловым коэффициентом и к нормальному виду.

5. Дан треугольник ABC: $A(2; -2)$, $B(3; -5)$, $C(5; 7)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины C на биссектрису внутреннего угла при вершине A.

6. Написать уравнение сторон равнобедренной трапеции, зная основания $a = 10$, $b = 6$, если угол при основании равен $60°$. Ось Ox – вдоль большего основания, ось Oy – вдоль оси симметрии трапеции.

7. Найти угол между прямыми $7x - y + 8 = 0$, $\frac{x}{7} + y = 1$.

Вариант № 18

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку М $(2; -4)$ перпендикулярно вектору $\bar{n} = (-4; 5)$. Привести полученное уравнение к общему виду и с угловым коэффициентом.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(12; -3)$, $M_2(0; -1)$. Записать общее и параметрические уравнения этой прямой.

3. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M(5; -6)$ с заданным угловым коэффициентом $k = -\frac{1}{3}$. Привести полученное уравнение к общему виду и в отрезках на осях.

4. Записать уравнение прямой, зная отрезки $a = -6$, $b = 2$, отсекаемые на осях Ox и Oy соответственно. Привести полученное уравнение к виду с угловым коэффициентом и к нормальному виду.

5. Даны две смежные вершины $A(-3; -1)$, $B(2; 2)$ параллелограмма $ABCD$ и точка $Q(3; 0)$ пересечение его диагоналей. Найти уравнения сторон параллелограмма.

6. Найти уравнение прямой, которая проходит через точку $B(5; -5)$ и отсекает от координатного угла треугольник площади 50 кв. ед.

7. Найти уравнение сторон треугольника ABC, если $A(3; -4)$, а уравнения высот $7x - 2y - 1 = 0$, $2x - 7y - 6 = 0$.

Вариант № 19

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(0; 5)$ перпендикулярно вектору $\bar{n} = (10; -2)$. Привести полученное уравнение к общему виду и с угловым коэффициентом.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(-2; 1)$, $M_2(5; -3)$. Записать общее и параметрические уравнения этой прямой.

3. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-4; 6)$ с заданным угловым коэффициентом $k = \frac{1}{3}$. Привести полученное уравнение к общему виду и в отрезках на осях.

4. Записать уравнение прямой, зная отрезки $a = 2$, $b = 6$, отсекаемые на осях Ox и Oy соответственно. Привести полученное равнение к виду с угловым коэффициентом и к нормальному виду.

5. Дан треугольник ABC: $A(1; -2)$, $B(5; 4)$, $C(2; 0)$. Составить уравнения биссектрис внутреннего и внешнего угла при вершине A.

6. Среди прямых 1) $3x + 5y - 4 = 0$, 2) $x - y - 2 = 0$, 3) $6x + 10y - 8 = 0$, 4) $-3x - 5y + 2 = 0$, 5) $5x - 3y - 1 = 0$, 6) $4x - y - 7 = 0$ выбрать совпадающие, параллельные, перпендикулярные.

7. Найти уравнения сторон треугольника ABC, зная $A(-4; 2)$ и уравнения медиан $3x - 2y + 2 = 0$, $3x + 5y - 12 = 0$.

Вариант № 20

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку М (3; 4) перпендикулярно вектору $\bar{n} = (6; -1)$. Привести полученное уравнение к общему виду и с угловым коэффициентом.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(4; 1)$, $M_2(-3; -8)$. Записать общее и параметрические уравнения этой прямой.

3. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-4; 5)$ с заданным угловым коэффициентом $k = -\frac{1}{2}$. Привести полученное уравнение к общему виду и в отрезках на осях.

4. Записать уравнение прямой, зная отрезки $a = -6$, $b = 1$, отсекаемые на осях Ox и Oy соответственно. Привести полученное уравнение к виду с угловым коэффициентом и к нормальному виду.

5. Даны две противоположные вершины квадрата $A(-1; 3)$, $C(6; 2)$. Составить уравнения его сторон.

6. Через точку $M(4; 3)$ проведена прямая, отсекающая от координатного угла треугольник площади 3 кв.ед. Найти точки пересечения прямой с осями

7. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; -1)$ и точку пересечения прямых $7x - y + 3 = 0$, $3x + 5y + 4 = 0$.

Вариант № 21

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(5; -5)$ перпендикулярно вектору $\overline{n} = (0; -3)$. Привести полученное уравнение к общему виду и с угловым коэффициентом.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(6; -1)$, $M_2(9; 3)$. Записать общее и параметрические уравнения этой прямой.

3. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M(7; -3)$ с заданным угловым коэффициентом $k = \dfrac{1}{2}$. Привести полученное уравнение к общему виду и в отрезках на осях.

4. Записать уравнение прямой, зная отрезки $a = 6$, $b = 1$, отсекаемые на осях Ox и Oy соответственно. Привести полученное уравнение к виду с угловым коэффициентом и к нормальному виду.

5. Даны уравнения сторон треугольника: $3x + 4y - 1 = 0$, $x - 7y - 17 = 0$, $7x + y + 31 = 0$. Доказать, что этот треугольник равнобедренный (сравнить углы).

6. Составить уравнения сторон треугольника ABC, зная $A(3; -1)$, уравнения биссектрисы $x - 4y + 10 = 0$ и медианы $6x + 10y - 59 = 0$, проведенных из различных вершин.

7. Найти расстояние от точки $M(-1; 2)$ до прямой $y = \dfrac{4x}{3} - 7$.

Вариант № 22

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-5; 0)$ перпендикулярно вектору $\overline{n} = (4; 15)$. Привести полученное уравнение к общему виду и с угловым коэффициентом.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(7; 3)$, $M_2(-1; 4)$. Записать общее и параметрические уравнения этой прямой.

3. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M(2; -6)$ с заданным угловым коэффициентом $k = -5$. Привести полученное уравнение к общему виду и в отрезках на осях.

4. Записать уравнение прямой, зная отрезки $a = -5$, $b = 4$, отсекаемые на осях Ox и Oy соответственно. Привести полученное уравнение к виду с угловым коэффициентом и к нормальному виду.

5. Точка $E(1; -1)$ является центром квадрата, одна из сторон лежит на прямой $x - 2y + 12 = 0$. Составить уравнения остальных сторон.

6. Составить уравнения сторон треугольника ABC, зная $C(4; 3)$, уравнения биссектрисы $x + 2y - 5 = 0$ и медианы $4x + 13y - 10 = 0$, проведенных из одной вершины.

7. Найти расстояние от точки пересечения прямых $2x - 5y - 1 = 0$, $x + 4y - 7 = 0$ до прямой $\dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{4} = 1$.

Вариант № 23

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(6; -3)$ перпендикулярно вектору $\bar{n}=(2;-2)$. Привести полученное уравнение к общему виду и с угловым коэффициентом.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(-5; -10)$, $M_2(0; -8)$. Записать общее и параметрические уравнения этой прямой.

3. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-3; -4)$ с заданным угловым коэффициентом $k = 5$. Привести полученное уравнение к общему виду и в отрезках на осях.

4. Записать уравнение прямой, зная отрезки $a = 4$, $b = 5$, отсекаемые на осях Ox и Oy соответственно. Привести полученное уравнение к виду с угловым коэффициентом и к нормальному виду.

5. Дана диагональ квадрата $7x - y + 8 = 0$ и вершина $A(-4;5)$. Найти уравнения сторон и 2-ой диагонали квадрата.

6. Составить уравнения сторон треугольника ABC, зная вершину $B(2; -7)$, уравнения высоты $3x + y + 11 = 0$ и медианы $x + 2y + 7 = 0$, проведенных из различных вершин.

7. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x - 5y - 1 = 0$, $x + 4y - 7 = 0$ перпендикулярно прямой $x + 5y = 1$.

Вариант № 24

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(3; -17)$ перпендикулярно вектору $\bar{n}=(4;0)$. Привести полученное уравнение к общему виду и с угловым коэффициентом.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(-12; 15)$, $M_2(-10; 0)$. Записать общее и параметрические уравнения этой прямой.

3. Записать уравнение прямой, проходящей через точку М $(2; 5)$ с заданным угловым коэффициентом $k = 4$. Привести полученное уравнение к общему виду и в отрезках на осях.

4. Записать уравнение прямой, зная отрезки $a = -2$, $b = -2$, отсекаемые на осях Ox и Oy соответственно. Привести полученное уравнение к виду с угловым коэффициентом и к нормальному виду.

5. Даны вершины $A(3; -1)$, $B(5; 7)$ треугольника ABC и точка $N(4; -1)$ пересечения высот. Найти уравнения сторон треугольника ABC.

6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2; 3)$ и отсекающей на осях отрезки равной длины.

7. Даны уравнения сторон треугольника ABC: AB: $x + 2y + 3 = 0$; BC: $3x - 7y + 9 = 0$; AC: $5x - 3y - 11 = 0$. Найти расстояние от точки пересечения высот до стороны AB.

Вариант № 25

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-9;\,0)$ перпендикулярно вектору $\bar{n}=(4;-13)$. Привести полученное уравнение к общему виду и с угловым коэффициентом.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(12;\,-3)$, $M_2(11;\,-2)$. Записать общее и параметрические уравнения этой прямой.

3. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1;\,7)$ с заданным угловым коэффициентом $k=-4$. Привести полученное уравнение к общему виду и в отрезках на осях.

4. Записать уравнение прямой, зная отрезки $a=-3$, $b=-4$, отсекаемые на осях Ox и Oy соответственно. Привести полученное уравнение к виду с угловым коэффициентом и к нормальному виду.

5. Составить уравнения сторон треугольника ABC, если дана одна из вершин $A(1;\,3)$ и уравнения двух медиан $x-2y+1=0$, $y-1=0$.

6. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $P(1;\,1)$ и отсекающей от координатного угла треугольник, площадью 2 кв. ед.

7. Даны уравнения смежных сторон параллелограмма $x-y-1=0$, $x-2y=0$ и точка $M(3;\,-1)$ пересечения диагоналей. Найти уравнения других сторон.

Вариант № 26

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(3;\,-7)$ перпендикулярно вектору $\bar{n}=(4;-1)$. Привести полученное уравнение к общему виду и с угловым коэффициентом.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(9;\,-3)$, $M_2(8;\,1)$. Записать общее и параметрические уравнения этой прямой.

3. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-3;\,2)$ с заданным угловым коэффициентом $k=-3$. Привести полученное уравнение к общему виду и в отрезках на осях.

4. Записать уравнение прямой, зная отрезки $a=-4$, $b=3$, отсекаемые на осях Ox и Oy соответственно. Привести полученное уравнение к виду с угловым коэффициентом и к нормальному виду.

5. Составить уравнения сторон треугольника ABC, зная вершину $B(-4;\,-5)$ и уравнения высот $5x+3y-4=0$, $3x+8y+13=0$.

6. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(3;\,-7)$ и отсекающей на осях отрезки одинаковой величины.

7. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2;1)$ и точку пересечения прямых $7x-y+3=0$, $3x+5y-4=0$.

Вариант № 27

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(0; -11)$ перпендикулярно вектору $\bar{n} = (11; -3)$. Привести полученное уравнение к общему виду и с угловым коэффициентом.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(0; 3)$, $M_2(7; -1)$. Записать общее и параметрические уравнения этой прямой.

3. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M(2; -4)$ с заданным угловым коэффициентом $k = 3$. Привести полученное уравнение к общему виду и в отрезках на осях.

4. Записать уравнение прямой, зная отрезки $a = -3$, $b = 2$, отсекаемые на осях Ox и Oy соответственно. Привести полученное уравнение к виду с угловым коэффициентом и к нормальному виду.

5. Составить уравнения сторон треугольника ABC, зная вершину $A(4; -1)$ и уравнения биссектрис $x - 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$.

6. Вычислить площадь треугольника, отсекаемого прямой $3x - 4y - 12 = 0$ от координатного угла.

7. Найти уравнение прямой, проходящей через точки пересечения прямых $7x - y + 3 = 0$ и $2x - 5y - 1 = 0$; $3x + 5y + 4 = 0$ и $x + 4y - 7 = 0$.

Вариант № 28

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2; 7)$ перпендикулярно вектору $\bar{n} = (-3; -2)$. Привести полученное уравнение к общему виду и с угловым коэффициентом.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(2; -3)$, $M_2(5; 2)$. Записать общее и параметрические уравнения этой прямой.

3. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-7; 3)$ с заданным угловым коэффициентом $k = 1$. Привести полученное уравнение к общему виду и в отрезках на осях.

4. Записать уравнение прямой, зная отрезки $a = 2$, $b = 3$, отсекаемые на осях Ox и Oy соответственно. Привести полученное уравнение к виду с угловым коэффициентом и к нормальному виду.

5. Найти уравнения сторон треугольника ABC, зная вершину $B(2; 6)$ и уравнения высоты $x - 7y + 15 = 0$ и биссектрисы $3x + y + 1 = 0$, проведенных из одной вершины.

6. Привести прямые $2x + 3y - 6 = 0$, $4x - 3y + 24 = 0$, $3x - 5y - 2 = 0$ к виду в отрезках и построить. Выяснить есть ли среди них параллельные и перпендикулярные.

7. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1; 2)$ перпендикулярно прямой $x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - P = 0$.

Вариант № 29

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(0; 15)$ перпендикулярно вектору $\bar{n} = (-17; 3)$. Привести полученное уравнение к общему виду и с угловым коэффициентом.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(-4; 1)$, $M_2(-9; 2)$. Записать общее и параметрические уравнения этой прямой.

3. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M(1; 4)$ с заданным угловым коэффициентом $k = -1$. Привести полученное уравнение к общему виду и в отрезках на осях.

4. Записать уравнение прямой, зная отрезки $a = 1$, $b = 2$, отсекаемые на осях Ox и Oy соответственно. Привести полученное уравнение к виду с угловым коэффициентом и к нормальному виду.

5. Найти уравнения сторон треугольника ABC, зная вершину $B(2; -1)$, уравнения высоты $3x - 4y + 27 = 0$ и биссектрисы $x + 2y - 5 = 0$, проведенных из различных вершин.

6. При каких значениях m и n прямые $mx + 8y + n = 0$ и $2x + my - 1 = 0$: **1)** имеют одну общую точку, **2)** параллельны, **3)** перпендикулярны.

7. Через точку $M(2; -1)$ провести прямую, параллельную прямой $4x - 7y + 12 = 0$. Привести полученное уравнение к виду с угловым коэффициентом и к нормальному виду.

Вариант №30

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(4; 7)$ перпендикулярно вектору $\bar{n} = (-13; 0)$. Привести полученное уравнение к общему виду и с угловым коэффициентом.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(-1; -1)$, $M_2(4; 1)$. Записать общее и параметрические уравнения этой прямой.

3. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1; 3)$ с заданным угловым коэффициентом $k = -2$. Привести полученное уравнение к общему виду и в отрезках на осях.

4. Записать уравнение прямой, зная отрезки $a = 2$, $b = 1$, отсекаемые на осях Ox и Oy соответственно. Привести полученное уравнение к виду с угловым коэффициентом и к нормальному виду.

5. Найти уравнения сторон треугольника ABC, зная вершину $C(4; -1)$, уравнения высоты $2x - 3y + 12 = 0$ и медианы $2x + 3y = 0$, проведенных из одной вершины.

6. Определить, при каких значениях a и b прямые $ax - 2y - 1 = 0$, $6x - 4y - b = 0$: **1)** имеют одну общую точку; **2)** параллельны; **3)** перпендикулярны.

7. Даны вершины треугольника ABC: $A(-6; 2)$, $B(2; -2)$ и точка пересечения высот $M(1; 2)$. Найти координаты вершины C.

Задача II. Метод координат на плоскости

Замечание. Выполняя решение задач своего варианта, выполнить все построения.

Заданы координаты вершин треугольника A, B, C. Найти:

1) площадь треугольника ABC;

2) длины сторон и периметр треугольника ABC;

3) длину медианы AM в треугольнике ABC;

4) длину высоты BH в треугольнике ABC;

5) координаты центра тяжести треугольника ABC

6) координаты точки D параллелограмма $ABCD$.

1.	A (– 5; 0)	B (7; 9)	C (5; – 5)	**11.**	A (4; 5)	B (2; – 2)	C (7; – 4)	**21.**	A (3; 4)	B (– 6; 7)	C (1; 1)
2.	A (– 7; 2)	B (5; 11)	C (3; – 3)	**12.**	A (3; – 4)	B (6; 7),	C (1; 1)	**22.**	A (2; 5)	B (– 5; 2)	C (– 1; 1)
3.	A (– 5; – 3)	B (7; 6)	C (5; – 8)	**13.**	A (3; 2)	B (2; –5)	C (– 6; – 1)	**23.**	A (3; 2)	B (– 5; 4)	C (– 1; – 6)
4.	A (– 6; – 2)	B (6; 7)	C (4; – 7)	**14.**	A (2; 1)	B (– 7; – 3)	C (– 4; 3)	**24.**	A (3; 2),	B (2; – 5)	C (– 4; – 1)
5.	A (–8; –4)	B (4; 5)	C (2; –9)	**15.**	A (– 2; – 1)	B (7; 3)	C (4; – 3)	**25.**	A (3; 5)	B (– 1; 1)	C (1; – 4)
6.	A (0; –1)	B (12; 8)	C (10; –6)	**16.**	A (– 4; 5)	B (4; 1)	C (0; –1)	**26.**	A (2; 1)	B (– 7; – 3)	C (– 4; 3)
7.	A (– 6; 1)	B (6; 10)	C (4; – 4)	**17.**	A (2; 1)	B (– 7; 3)	C(0; – 3)	**27.**	A (– 2; 5)	B (3; 4)	C (4; – 2)
8.	A (– 2; – 4)	B (10; 5)	C (8; – 9)	**18.**	A (3; – 4)	B (2; 1)	C (1; 7)	**28.**	A (2; – 5)	B (– 3; – 4)	C (1; 0)
9.	A (– 3; 0)	B (9; 9)	C (7; – 5)	**19.**	A (3; 4)	B (1; – 1)	C (7; 0)	**29.**	A (– 2; – 1)	B (7; 3)	C (4; – 3)
10.	A (– 9; – 2)	B (3; 7)	C (1; – 7)	**20.**	A (4; – 5)	B (2; 2)	C (7; 4)	**30.**	A (4; 5)	B (3; – 2)	C (7; – 3)

Задача III. Прямые на плоскости

Замечание. Выполняя решение задач своего варианта, выполнить все построения.

На плоскости заданы две прямые l_1 и l_2.

1. Построить прямые l_1 и l_2.

2. Привести уравнения обеих прямых к виду уравнений «в отрезках», к уравнениям с угловым коэффициентам, к нормальным уравнениям.

3. Найти точку A пересечения прямых l_1 и l_2.

4. Найти угол между прямыми l_1 и l_2 (в градусах).

5. Найти расстояние от точки $P(-3;6)$ до каждой из прямых l_1 и l_2. Определить расстояние AP.

1.	$l_1:\ 2x+4y-7=0$; $l_2:\ 3x-2y+5=0$	**7.**	$l_1:\ 5x+6y-30=0$; $l_2:\ 8x-4y+16=0$	**13.**	$l_1:\ 5x-3y-10=0$; $l_2:\ 4x+5y+9=0$	**19.**	$l_1:\ 5x-3y-13=0$; $l_2:\ 4x+5y+12=0$	**25.**	$l_1:\ 4x+3y+9=0$; $l_2:\ 6x-y+7=0$
2.	$l_1:\ 4x-3y+9=0$; $l_2:\ 6x+y-7=0$	**8.**	$l_1:\ 3x+4y-7=0$; $l_2:\ 2x-5y+6=0$	**14.**	$l_1:\ 5x+3y-11=0$; $l_2:\ 4x-5y+10=0$	**20.**	$l_1:\ 5x+3y-13=0$; $l_2:\ 4x-5y+12=0$	**26**	$l_1:\ 3x+4y+12=0$; $l_2:\ 4x-3y+7=0$
3.	$l_1:\ 3x-4y+12=0$; $l_2:\ 4x+3y-7=0$	**9.**	$l_1:\ 5x-3y-8=0$; $l_2:\ 4x+5y+7=0$	**15.**	$l_1:\ 3x-4y-11=0$; $l_2:\ 2x+5y+10=0$	**21.**	$l_1:\ 3x-4y-4=0$; $l_2:\ 2x+5y+3=0$	**27.**	$l_1:\ 5x+9y+45=0$; $l_2:\ 2x-5y-10=0$
4.	$l_1:\ 5x+9y-45=0$; $l_2:\ 2x-5y+10=0$	**10.**	$l_1:\ 5x+3y-9=0$; $l_2:\ 4x-5y+8=0$	**16.**	$l_1:\ 5x+3y-12=0$; $l_2:\ 4x-5y+11=0$	**22.**	$l_1:\ 3x+4y-4=0$; $l_2:\ 2x-5y+3=0$	**28.**	$l_1:\ 10x-5y-4=0$; $l_2:\ 3x+8y-18=0$
5.	$l_1:\ 10x+5y-4=0$; $l_2:\ 3x-8y-18=0$	**11.**	$l_1:\ 3x-4y-9=0$; $l_2:\ 2x+5y+8=0$	**17.**	$l_1:\ 3x-4y-12=0$; $l_2:\ 2x+5y+11=0$	**23.**	$l_1:\ 5x-3y-15=0$; $l_2:\ 4x+5y+14=0$	**29.**	$l_1:\ 4x-7y+28=0$; $l_2:\ 2x+4y-15=0$
6.	$l_1:\ 4x+7y-28=0$; $l_2:\ 2x-4y+15=0$	**12.**	$l_1:\ 3x+4y-10=0$; $l_2:\ 2x-5y+9=0$	**18.**	$l_1:\ 3x+4y-13=0$; $l_2:\ 2x-5y+11=0$	**24**	$l_1:\ 3x+2y-5=0$; $l_2:\ 2x-4y-7=0$	**30.**	$l_1:\ 5x-6y-30=0$; $l_2:\ 8x+4y+16=0$

Задача IV. Прямая на плоскости

Замечание. Выполняя решение задач своего варианта, выполнить все построения.

Треугольник задан координатами своих вершинами A, B и C.

1. Требуется вычислить площадь треугольника ABC.

2. Определить величину углов в треугольнике ABC (в градусах).

3. Написать уравнение прямой l_1, параллельной стороне BC, проходящей через точку A.

4. Написать уравнение и длину высоты BH в треугольнике ABC.

5. Найти точку пересечения l_1 и BH.

1.	A (0; 5), B (– 1; 3) и C (5; 1)	**11.**	A (0; – 5), B (– 1; 3) и C (6; – 1)	**21.**	A (0; – 4), B (2; 0) и C (6; – 2)
2.	A (– 1; 5), B (1; 1) и C (6; 2)	**12.**	A (– 1; – 5), B (1; 1) и C (6; 2)	**22.**	A (6; – 1), B (0; – 5) и C (– 1; 3)
3.	A (– 3; 5), B (– 1; 1) и C (6; 2)	**13.**	A (– 3; – 5), B (– 1; 1) и C (6; 2)	**23.**	A (6; 2), B (0; – 5) и C (– 1; 3)
4.	A (– 3; 5), B (– 1; – 3) и C (6; – 2)	**14.**	A (– 3; – 5), B (2; 0) и C (6; – 2)	**24.**	A (6; 2), B (– 1; – 5) и C (2; 3)
5.	A (0; 4), B (– 1; – 3) и C (6; – 2)	**15.**	A (0; – 4), B (– 1; 3) и C (6; 0)	**25.**	A (6; – 2), B (– 1; – 5) и C (2; 3)
6.	A (0; 4), B (– 1; – 3) и C (6; 0)	**16.**	A (0; – 4), B (– 1; 4) и C (6; 0)	**26.**	A (0; – 4), B (2; 4) и C (6; – 3)
7.	A (– 1; 4), B (– 2; – 3) и C (6; 0)	**17.**	A (– 1; – 4), B (– 2; 3) и C (6; 0)	**27.**	A (6; – 2), B (1; – 5) и C (2; 4)
8.	A (– 1; 4), B (– 2; – 3) и C (6; 1)	**18.**	A (– 1; – 4), B (– 2; 3) и C (6; 1)	**28.**	A (6; – 2), B (– 1; – 4) и C (2; 4)
9.	A (1; 4), B (– 2; – 3) и C (6; 1)	**19.**	A (1; – 4), B (– 2; 3) и C (6; 1)	**29.**	A (6; – 2), B (– 2; – 4) и C (2; 4)
10.	A (2; 4), B (– 2; – 3) и C (6; – 1)	**20.**	A (2; – 4), B (– 2; 3) и C (6; – 1)	**30.**	A (– 6; – 2), B (– 2; – 4) и C (2; 4)

Задача V. Применение аналитической геометрии в экономике

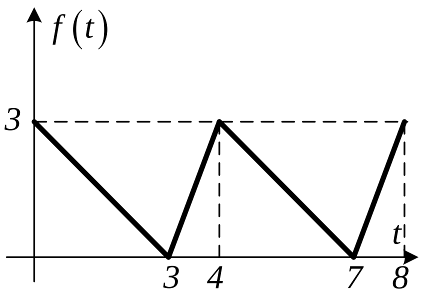
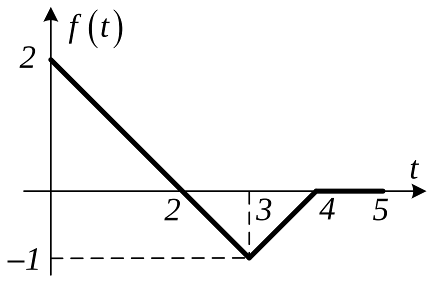
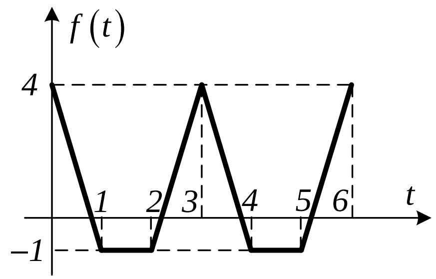
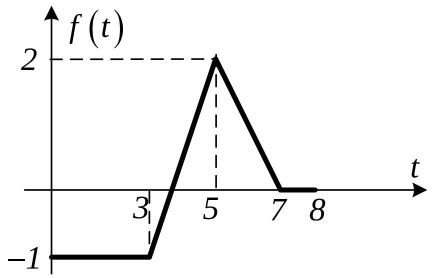
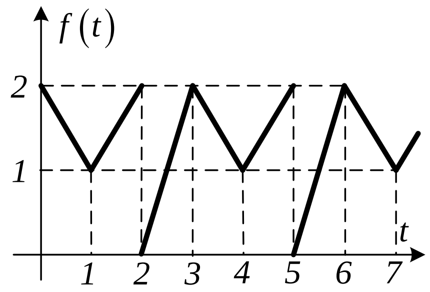
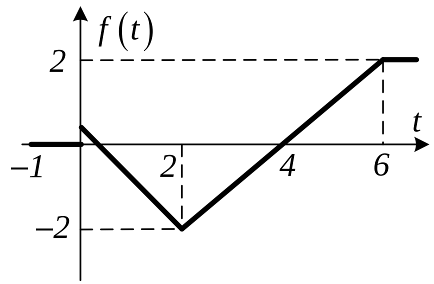
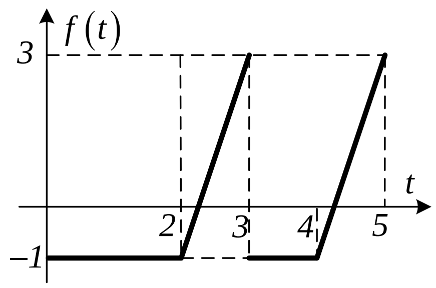
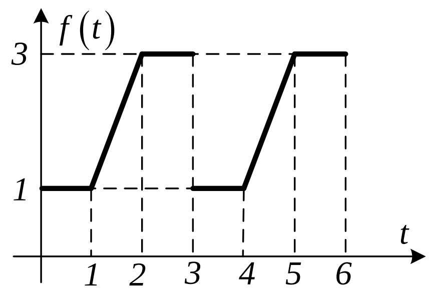
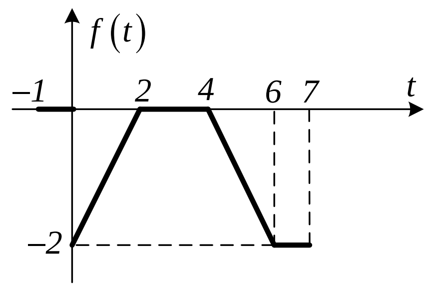
Замечание. Выполняя решение задач своего варианта, выполнить все построения.

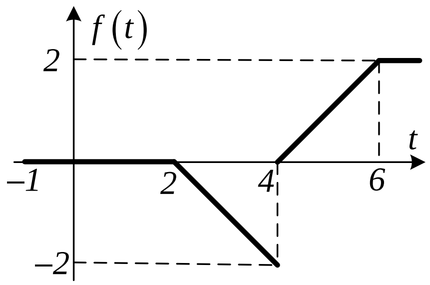
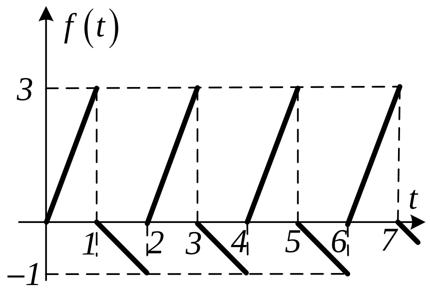
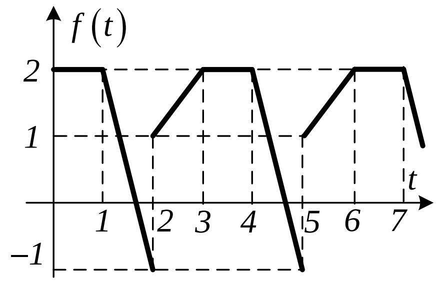
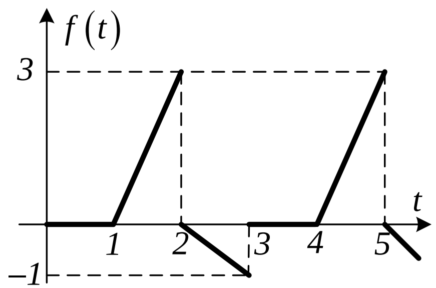
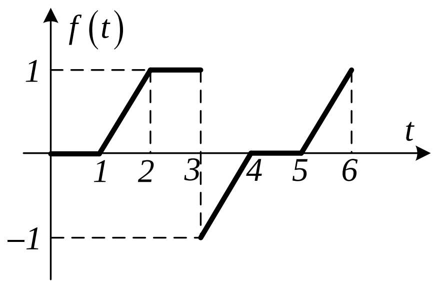
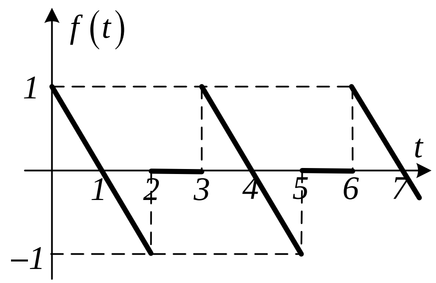
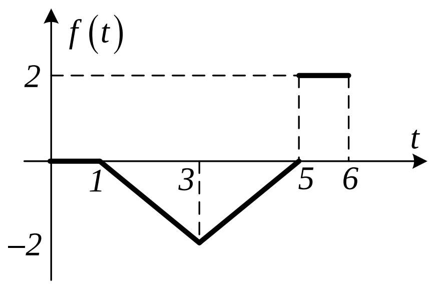
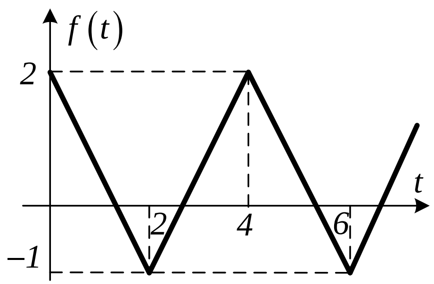
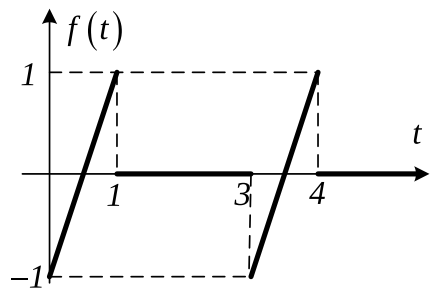
Фиксированные издержки на предприятии при выпуске некоторой продукции составляют F руб. в месяц, переменные издержки – V_0 руб. за единицу продукции, при этом выручка составляет R_0 руб. за единицу изготовленной продукции. Составить функцию прибыли $P(q)$ (q – количество произведенной продукции); построить ее график и определить точку безубыточности.

Данные к условию задачи, соответствующие вариантам:

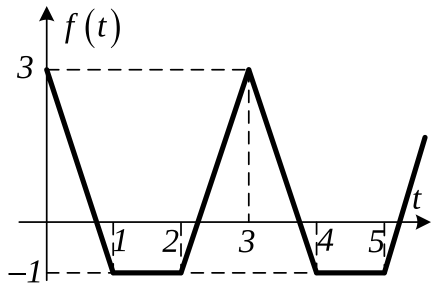
1.	$F=10\,000,\quad V_0=35,\quad R_0=50$	**11.**	$F=11\,000,\quad V_0=30,\quad R_0=45$	**21.**	$F=6000,\quad V_0=15,\quad R_0=25$
2.	$F=4000,\quad V_0=5,\quad R_0=15$	**12.**	$F=13\,500,\quad V_0=25,\quad R_0=30$	**22.**	$F=18\,500,\quad V_0=65,\quad R_0=75$
3.	$F=12\,000,\quad V_0=30,\quad R_0=55$	**13.**	$F=4000,\quad V_0=10,\quad R_0=20$	**23.**	$F=8500,\quad V_0=25,\quad R_0=40$
4.	$F=7000,\quad V_0=20,\quad R_0=30$	**14.**	$F=6500,\quad V_0=20,\quad R_0=25$	**24.**	$F=2500,\quad V_0=15,\quad R_0=20$
5.	$F=1000,\quad V_0=5,\quad R_0=15$	**15.**	$F=10\,500,\quad V_0=40,\quad R_0=60$	**25.**	$F=8000,\quad V_0=30,\quad R_0=45$
6.	$F=11\,500,\quad V_0=45,\quad R_0=55$	**16.**	$F=2000,\quad V_0=5,\quad R_0=10$	**26.**	$F=19\,500,\quad V_0=65,\quad R_0=85$
7.	$F=3000,\quad V_0=5,\quad R_0=10$	**17.**	$F=15\,000,\quad V_0=50,\quad R_0=60$	**27.**	$F=5000,\quad V_0=15,\quad R_0=25$
8.	$F=7500,\quad V_0=30,\quad R_0=45$	**18.**	$F=18\,000,\quad V_0=70,\quad R_0=90$	**28.**	$F=14\,000,\quad V_0=45,\quad R_0=50$
9.	$F=16\,000,\quad V_0=50,\quad R_0=65$	**19.**	$F=9000,\quad V_0=30,\quad R_0=55$	**29.**	$F=19\,000,\quad V_0=70,\quad R_0=75$
10.	$F=13\,000,\quad V_0=40,\quad R_0=50$	**20.**	$F=9500,\quad V_0=25,\quad R_0=35$	**30.**	$F=1500,\quad V_0=5,\quad R_0=25$

Задача VI. Для функции $f(t)$, заданной графически на интервале, составить ее аналитическое выражение.

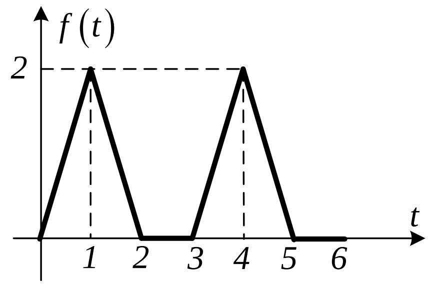
Вариант	*Задание*	*Вариант*	*Задание*	*Вариант*	*Задание*
1.		**2.**		**3.**	
4.		**5.**		**6.**	
7.		**8.**		**9.**	

10.		**11.**		**12.**	
13.		**14.**		**15.**	
16.		**17.**		**18.**	

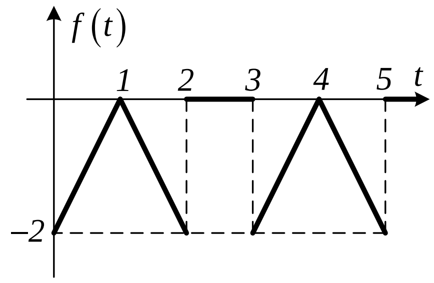
19.



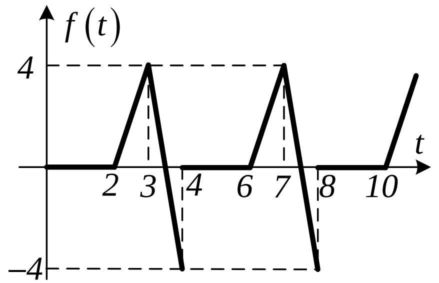
20.



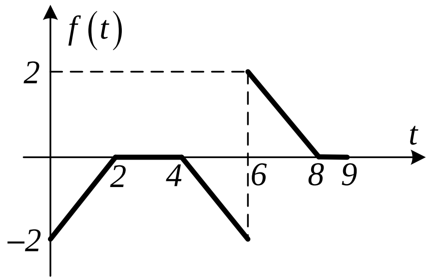
21.



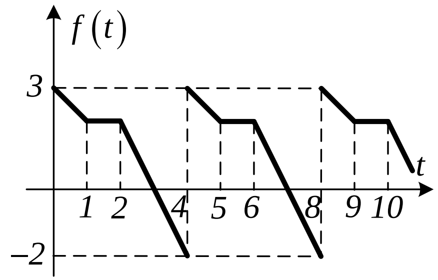
22.



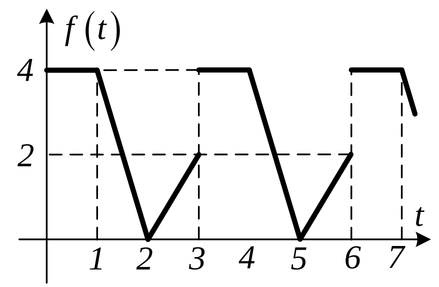
23.



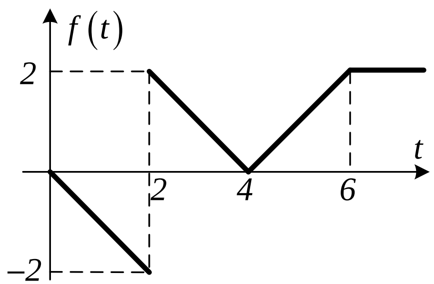
24.



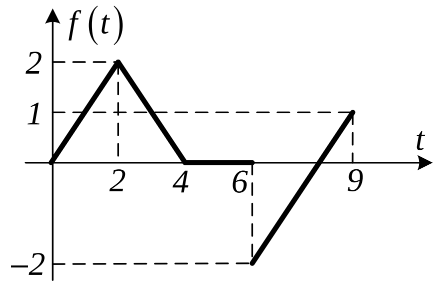
25.

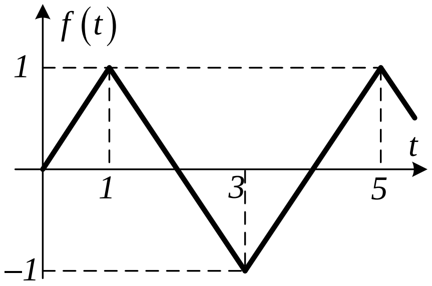
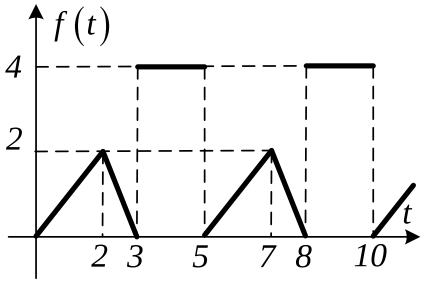
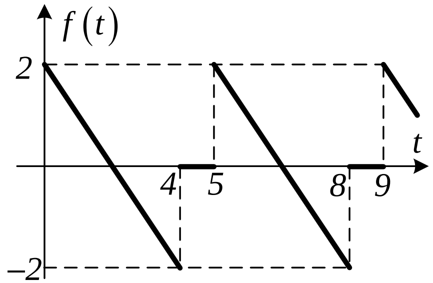


26.



27.



28.	 	**29.**	 	**30.**	

3. Кривые второго порядка

Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду

Общее уравнение второго порядка имеет вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (6)$$

где A, B, C одновременно в нуль не обращаются.

$B = 0$

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (7)$$

Уравнение (7) всегда определяет:

- **окружность** – при $A = C$,
- **эллипс** – при $AC > 0$,
- **гиперболу** – при $AC < 0$,
- **параболу** – при $AC = 0$.

$B \neq 0$

Уравнение (6) приводится к виду (7) поворотом осей системы координат Oxy на угол α. Величина α определяется из уравнения:

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A-C}{2B}.$$

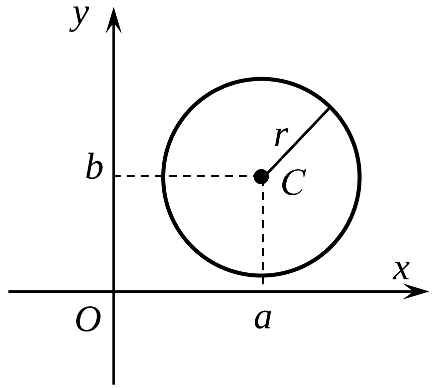
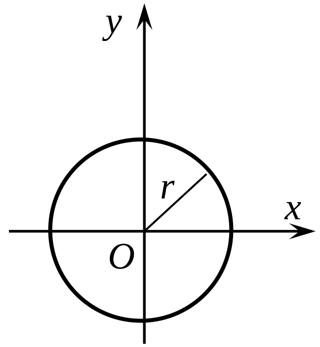
Переход к системе $Ox'y'$ осуществляется по формулам:

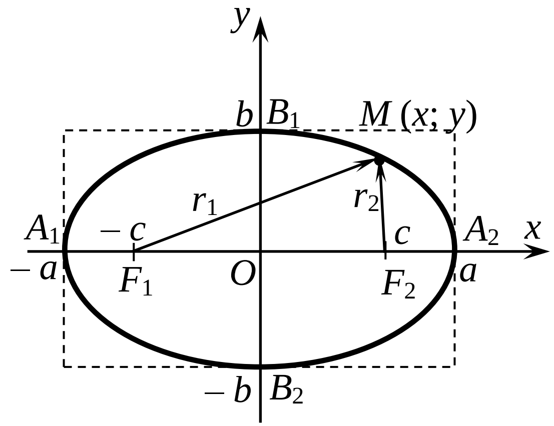
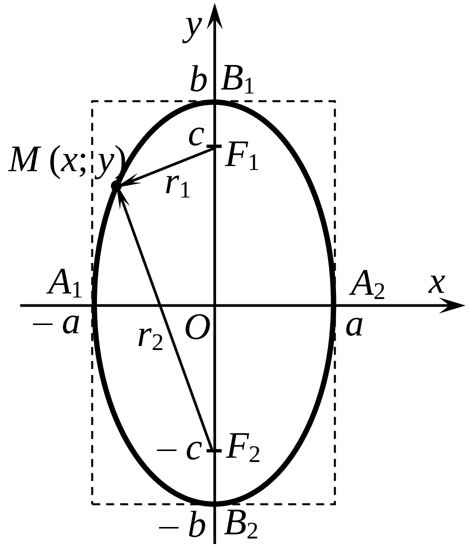
$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha, \end{cases} \qquad (8)$$

где $\sin\alpha = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}}$,

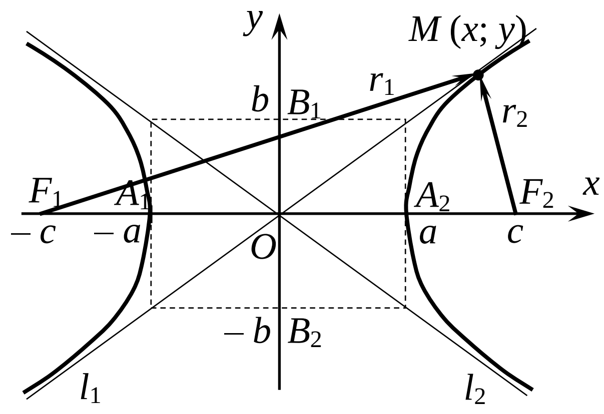
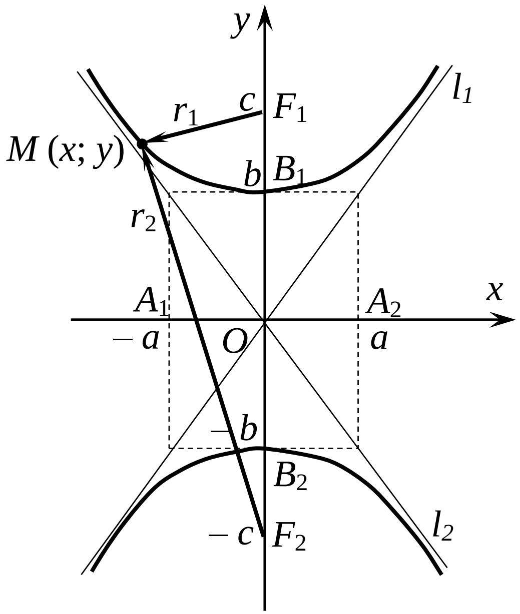
$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}, \quad \cos 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg} 2\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 2\alpha}}.$$

Кривые второго порядка

<table>
<tr><th colspan="3">3.1. Окружность</th></tr>
<tr><td>Определение</td><td colspan="2">Окружностью называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от одной точки, называемой центром.</td></tr>
<tr><td>Канонические уравнения</td><td>Каноническое уравнение окружности с центром $O'\,(a;\,b)$ и радиусом r имеет вид: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.</td><td>Частный случай – уравнение окружности с центром в начале координат $O\,(0;\,0)$ и радиусом r: $x^2+y^2=R^2$</td></tr>
<tr><td></td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><th colspan="3">3.2. Эллипс</th></tr>
<tr><td>Определение</td><td colspan="2">Эллипсом называется множество точек на плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух заданных точек (называемых фокусами) есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.</td></tr>
</table>

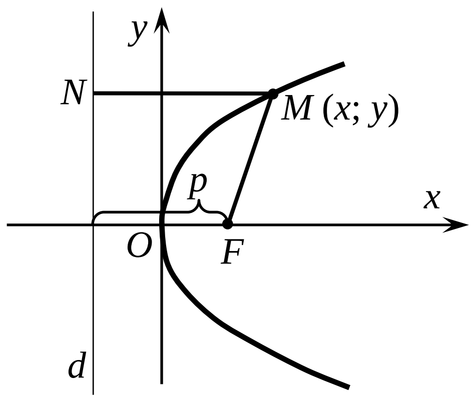
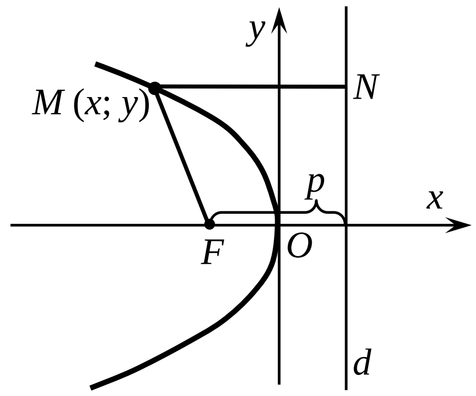
Каноническое уравнение	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	
		
Соотношение между a и b	$a>b$	$a<b$
Большая ось	$\lvert A_1A_2\rvert=2a$	$\lvert B_1B_2\rvert=2b$
Малая ось	$\lvert B_1B_2\rvert=2b$	$\lvert A_1A_2\rvert=2a$
Положение фокусов	$F_1;\ F_2\in Ox$	$F_1;\ F_2\in Oy$
Соотношение между a, b и c	$a^2-b^2=c^2$	$b^2-a^2=c^2$
Координаты фокусов	$F_1(-c;0),\ F_2(c;0)$	$F_1(0;c),\ F_2(0;-c)$

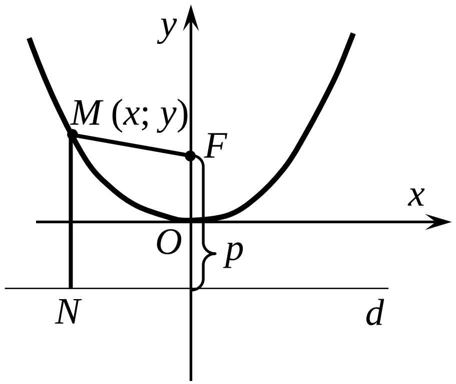
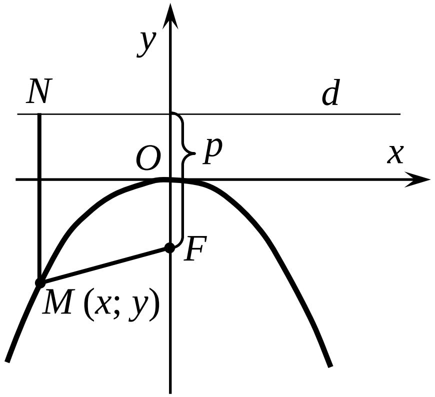
Фокусное расстояние	$\lvert F_1F_2 \rvert = 2c$	$\lvert F_1F_2 \rvert = 2c$
Эксцентриситет	***Эксцентриситетом*** эллипса называется отношение расстояния между фокусами к длине большой оси. Эксцентриситет обозначается буквой ε:	
	$\varepsilon = \dfrac{c}{a}$	$\varepsilon = \dfrac{c}{b}$
	Так как по определению $2a > 2c$, то эксцентриситет всегда выражается правильной дробью, т.е. $0 \le \varepsilon < 1$. Если величина эксцентриситета приближается к единице ($\varepsilon \approx 1$), то эллипс сильно вытянут; если же величина эксцентриситета ближе к нулю ($\varepsilon \approx 0$), то эллипс имеет более округлую форму. Если эксцентриситет равен нулю, то эллипс вырождается в окружность.	
3.3. Гипербола		
Определение	***Гиперболой*** называется множество точек плоскости, разность расстояний от каждой из которых до двух заданных точек (называемых ***фокусами***) есть величина постоянная. Эта постоянная величина положительна и меньше расстояние между фокусами.	
Каноническое уравнение	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$

		
Действительная ось	$\lvert A_1A_2 \rvert = 2a$	$\lvert B_1B_2 \rvert = 2b$
Мнимая ось	$\lvert B_1B_2 \rvert = 2b$	$\lvert A_1A_2 \rvert = 2a$
Положение фокусов	$F_1;\ F_2 \in Ox$	$F_1;\ F_2 \in Oy$
Соотношение между a, b и c	$a^2 + b^2 = c^2$	
Координаты фокусов	$F_1(-c;0),\ F_2(c;0)$	$F_1(0;c),\ F_2(0;-c)$
Фокусное расстояние	$\lvert F_1F_2 \rvert = 2c$	$\lvert F_1F_2 \rvert = 2c$

Эксцентриситет	***Эксцентриситетом*** гиперболы называется отношение расстояния между фокусами к длине действительной оси. Эксцентриситет обозначается буквой ε:	
	$\varepsilon = \frac{c}{a}$	$\varepsilon = \frac{c}{b}$
	Так как по определению $2a < 2c$, то эксцентриситет всегда выражается неправильной дробью, т.е. $\varepsilon > 1$.	
Асимптоты	Прямые l_1 и l_2 называются асимптотами; их уравнения имеют вид: $y = \pm\frac{b}{a}x$.	

3.4. Парабола

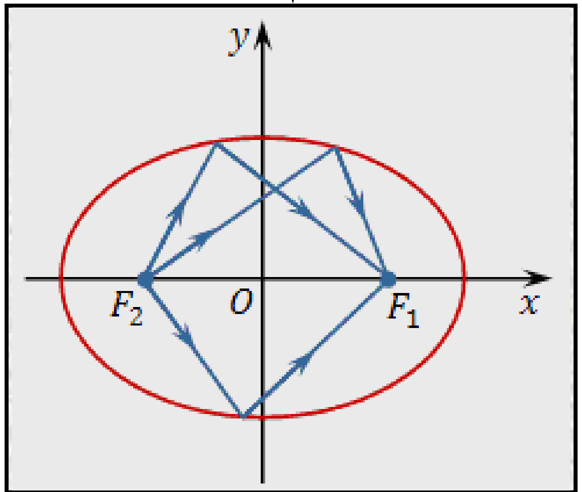
Определение	***Параболой*** называется множество точек на плоскости, равноудаленных от заданной точки (называемой ***фокусом***) и данной прямой (называемой ***директрисой***).	
Каноническое уравнение параболы, фокус которой расположен на оси абсцисс	$y^2 = 2px$	$y^2 = -2px$
		

Положение фокуса	На положительной полуоси *Ox*	На отрицательной полуоси *Ox*
Координаты фокуса	$F\left(\frac{p}{2};0\right)$	$F\left(-\frac{p}{2};0\right)$
Уравнение директрисы *d*	$x=-\frac{p}{2}$	$x=\frac{p}{2}$
Каноническое уравнение параболы, фокус которой расположен на оси ординат	$x^2=2py$	$x^2=-2py$
		
Положение фокуса	На положительной полуоси *Oy*	На отрицательной полуоси *Oy*
Координаты фокуса	$F\left(0;\frac{p}{2}\right)$	$F\left(0;-\frac{p}{2}\right)$
Уравнение директрисы *d*	$y=-\frac{p}{2}$	$y=\frac{p}{2}$

3.5. Оптические свойства кривых второго порядка

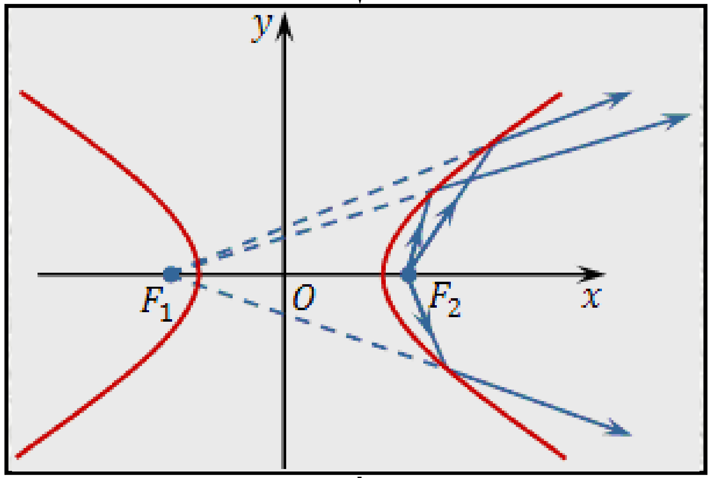
Эллипс

Лучи света, выходящие из одного фокуса эллипса, отразившись от эллипса, попадают в другой фокус эллипса.



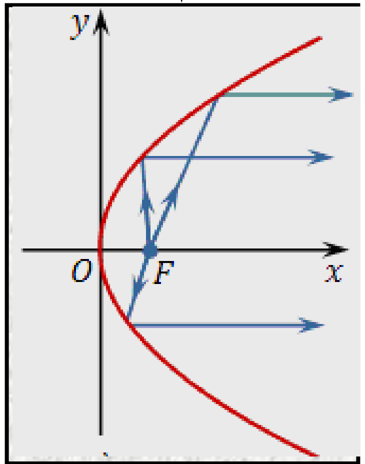
Гипербола

Лучи света, выходящие из одного из фокусов гиперболы, отражаются второй ветвью гиперболы таким образом, что продолжения отраженных лучей пересекаются во втором фокусе.



Парабола

Лучи света, выходящие из фокуса параболы, отражаясь от нее, дальше движутся по лучам, параллельным оси параболы. И наоборот, поток параллельных лучей собирается в фокусе после отражения их от параболы.



Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы широко используются в инженерном деле. Например, на оптическом свойстве параболы основаны конструкции прожекторов, автомобильных фар, телескопов, передающих и принимающих антенн, в том числе телеантенн и радиоантенн.

3.6. Решение задач

Пример 5: Определить тип каждого из следующих уравнений, привести уравнения к каноническому виду и установить какой геометрический образ они определяют:

1) $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$;

2) $4x^2-25y^2-24x+50y-89=0$;

3) $9x^2-16y^2-36x+32y+20=0$;

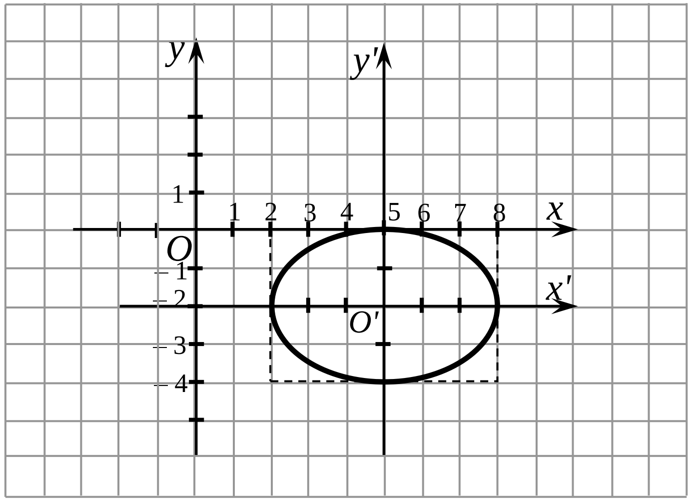
4) $4y^2-2x-8y-1=0$;

5) $5x^2+5y^2-10x+20y-25=0$;

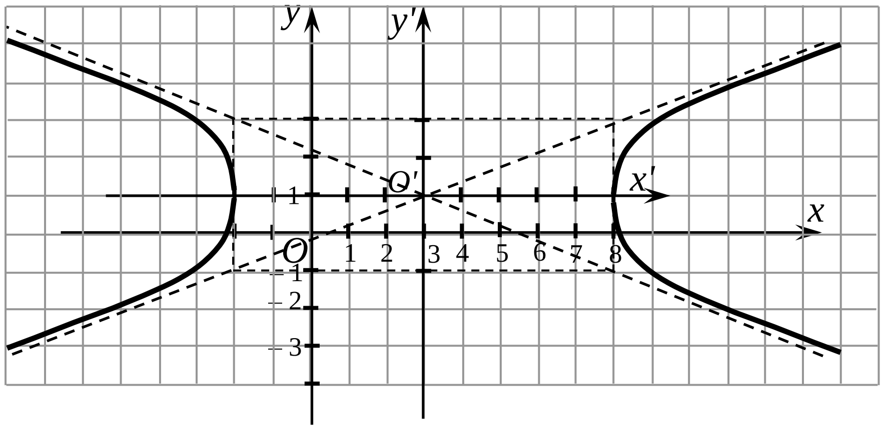
6) $x^2+xy+y^2-3x-6y+3=0$.

Что следует делать	*Как следует делать*
1) $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$.	
I. Определим вид кривой второго порядка.	Рассмотрим заданное уравнение: $$4x^2+9y^2-40x+36y+100=0.$$ Это уравнение вида (7). Для него можно записать, что $B = 0$, $A = 4$, $C = 9$. Таким образом, из условия $A \cdot C = 4 \cdot 9 = 36 > 0$, определяем, что это уравнение представляет ***уравнение эллипса***.
II. Приведем уравнение к каноническому	Проводим преобразования с уравнением:

Что следует делать	*Как следует делать*
виду.	$$4x^2+9y^2-40x+36y+100=0.$$ $$4x^2+9y^2-40x+36y=-100.$$ Группируем переменные и выделяем полный квадрат: $$\left(4x^2-40x\right)+\left(9y^2+36y\right)=-100, \quad 4\cdot\left(x^2-10x\right)+9\cdot\left(y^2+4y\right)=-100,$$ $$4\cdot\left(x^2-10x+25-25\right)+9\cdot\left(y^2+4y+4-4\right)=-100,$$ $$4\cdot\left[(x-5)^2-25\right]+9\cdot\left[(y+2)^2-4\right]=-100,$$ $$4\cdot(x-5)^2-100+9\cdot(y+2)^2-36=-100,$$ $$4\cdot(x-5)^2+9\cdot(y+2)^2=-100+100+36,$$ $$4\cdot(x-5)^2+9\cdot(y+2)^2=36.$$ Чтобы привести последнее уравнение к каноническому виду, разделим обе его части на 36, получим: $$\frac{4\cdot(x-5)^2}{36}+\frac{9\cdot(y+2)^2}{36}=\frac{36}{36},$$ $$\frac{(x-5)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1 \quad \text{или} \quad \frac{(x-5)^2}{3^2}+\frac{(y+2)^2}{2^2}=1.$$ Последнее уравнение представляет собой каноническое уравнение эллипса с центром в точке $C\,(5;\,-2)$ и полуосями: $a=3$ и $b=2$ (см. рис. 16).

Что следует делать	*Как следует делать*
III) Выполним рисунок.	 **Рис. 16**
2) $4x^2-25y^2-24x+50y-89=0$.	
I. Определим вид кривой второго порядка.	Рассмотрим заданное уравнение: $$4x^2-25y^2-24x+50y-89=0.$$ Это уравнение вида (7). Для него можно записать, что $B = 0$, $A = 4$, $C = -25$. Таким образом, из условия $A \cdot C = 4 \cdot (-25) = -100 < 0$, определяем, что это уравнение представляет ***уравнение гиперболы***.
II. Приведем уравнение к каноническому виду.	Проводим преобразования с уравнением: $$4x^2-25y^2-24x+50y-89=0.$$

Что следует делать	*Как следует делать*
	$$4x^2-25y^2-24x+50y=89.$$ Группируем переменные и выделяем полный квадрат: $$\left(4x^2-24x\right)+\left(-25y^2+50y\right)=89,\qquad 4\cdot\left(x^2-6x\right)-25\cdot\left(y^2-2y\right)=89,$$ $$4\cdot\left(x^2-6x+9-9\right)-25\cdot\left(y^2-2y+1-1\right)=89,$$ $$4\cdot\left[(x-3)^2-9\right]-25\cdot\left[(y-1)^2-1\right]=89,$$ $$4\cdot(x-3)^2-36-25\cdot(y-1)^2+25=89,$$ $$4\cdot(x-3)^2-25\cdot(y-1)^2=89-25+36,$$ $$4\cdot(x-3)^2-25\cdot(y-1)^2=100.$$ Чтобы привести последнее уравнение к каноническому виду, разделим обе его части на 100, получим: $$\frac{4\cdot(x-3)^2}{100}-\frac{25\cdot(y-1)^2}{100}=\frac{100}{100},$$ $$\frac{(x-3)^2}{25}-\frac{(y-1)^2}{4}=1 \quad \text{или} \quad \frac{(x-3)^2}{5^2}+\frac{(y-1)^2}{2^2}=1.$$ Последнее уравнение представляет собой каноническое уравнение гиперболы с центром в точке C (3; 1) и полуосями: a = 5 и b = 2 (см. рис. 17).

Что следует делать	*Как следует делать*
III) Выполним рисунок.	 **Рис. 17**
3) $9x^2 - 16y^2 - 36x + 32y + 20 = 0$.	
I. Определим вид кривой второго порядка.	Рассмотрим заданное уравнение: $$9x^2 - 16y^2 - 36x + 32y + 20 = 0.$$ Это уравнение вида (7). Для него можно записать, что $B = 0$, $A = 9$, $C = -16$. Таким образом, из условия $A \cdot C = 9 \cdot (-16) = -144 < 0$, определяем, что это уравнение представляет ***уравнение гиперболической кривой***.
II. Приведем уравнение к каноническому виду.	Проводим преобразования с уравнением: $$9x^2 - 16y^2 - 36x + 32y + 20 = 0.$$ $$9x^2 - 16y^2 - 36x + 32y = -20.$$

Что следует делать	*Как следует делать*
	Группируем переменные и выделяем полный квадрат: $\left(9x^2-36x\right)+\left(-16y^2+32y\right)=-20$, $9\cdot\left(x^2-4x\right)-16\cdot\left(y^2-2y\right)=-20$, $9\cdot\left(x^2-4x+4-4\right)-16\cdot\left(y^2-2y+1-1\right)=-20$, $9\cdot\left[(x-2)^2-4\right]-16\cdot\left[(y-1)^2-1\right]=-20$, $9\cdot(x-2)^2-36-16\cdot(y-1)^2+16=-20$, $9\cdot(x-2)^2-16\cdot(y-1)^2=-20-16+36$, $9\cdot(x-2)^2-16\cdot(y-1)^2=0$. По формуле сокращенного умножения $a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$, получим уравнение вида: $\left[3\cdot(x-2)-4\cdot(y-1)\right]\cdot\left[3\cdot(x-2)+4\cdot(y-1)\right]=0$, которое распадается на два уравнения $3x-4y-2=0$ или $3x+4y-10=0$. Последнее уравнение определяет две прямые, пересекающиеся в точке C (2; 1). Построим полученные прямые (рис. 18):
	$3x-4y-2=0$, $-4y=-3x+2$, $y=\dfrac{-3x}{-4}+\dfrac{2}{-4}$, $y=\dfrac{3x}{4}-\dfrac{1}{2}$	$3x+4y-10=0$, $4y=-3x+10$, $y=\dfrac{-3x}{4}+\dfrac{10}{4}$, $y=-\dfrac{3x}{4}+\dfrac{5}{2}$

<table>
<tr><th>Что следует делать</th><th colspan="2">Как следует делать</th></tr>
<tr><td></td><td>Для построения данной прямой подберем следующие точки:

x	2	– 2
y	1	– 2

</td><td>Для построения данной прямой подберем следующие точки:

x	– 2	2
y	4	1

</td></tr>
<tr><td>III) Выполним рисунок.</td><td colspan="2">

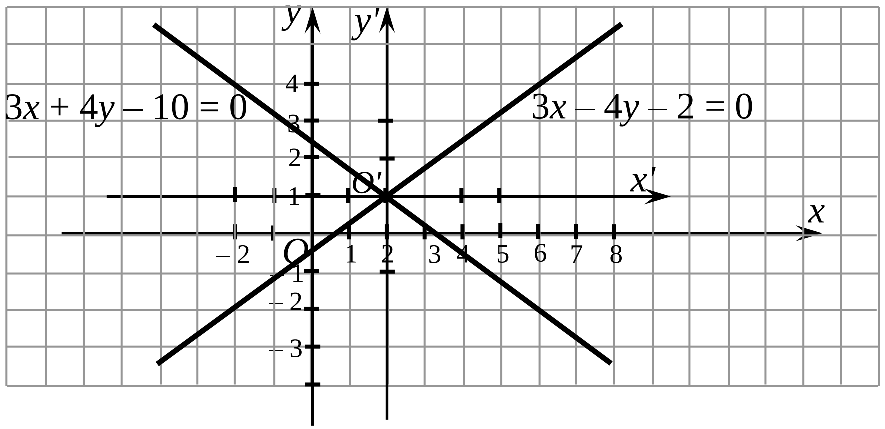
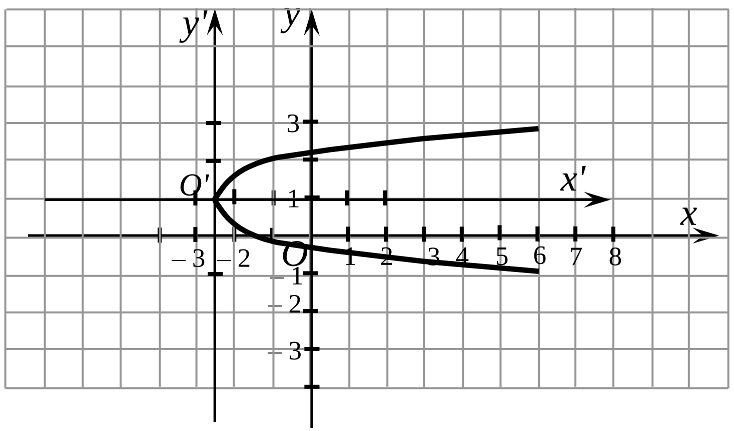


Рис. 18</td></tr>
<tr><td colspan="3">4) $4y^2-2x-8y-1=0$.</td></tr>
<tr><td>I. Определим вид кривой второго порядка.</td><td colspan="2">Рассмотрим заданное уравнение:

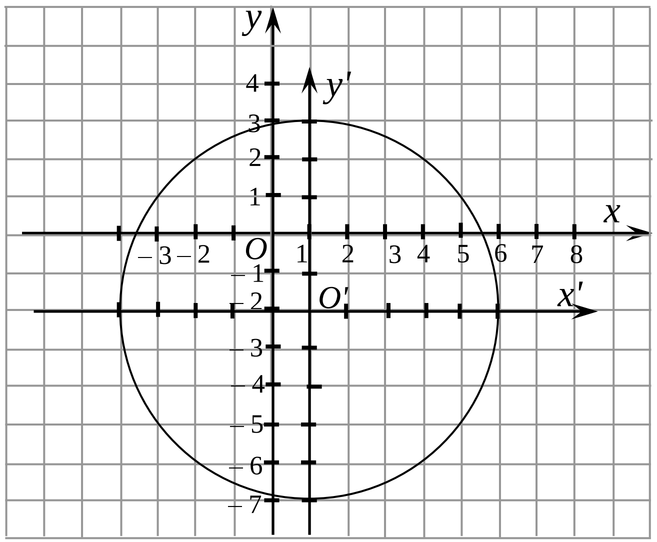
$$4y^2-2x-8y-1=0.$$

Это уравнение вида (7). Для него можно записать, что $B = 0$, $A = 0$, $C = 4$. Таким образом, из условия $A \cdot C = 0 \cdot 4 = 0$, определяем, что это урав-</td></tr>
</table>

Что следует делать	*Как следует делать*
	нение представляет ***уравнение параболы***.
II. Приведем уравнение к каноническому виду.	Проводим преобразования с уравнением: $$4y^2-2x-8y-1=0.$$ Группируем переменные и выделяем полный квадрат: $$\left(4y^2-8y\right)-2x-1=0,\qquad 4\cdot\left(y^2-2y\right)-2x-1=0,$$ $$4\cdot\left(y^2-2x+1-1\right)-2x-1=0,$$ $$4\cdot\left[(y-1)^2-1\right]-2x-1=0,$$ $$4\cdot(y-1)^2-4=2x+1,$$ $$4\cdot(y-1)^2=2x+1+4,$$ $$4\cdot(y-1)^2=2x+5.$$ Чтобы привести последнее уравнение к каноническому виду, разделим обе его части на 4, получим: $$\frac{4\cdot(y-1)^2}{4}=\frac{2x+5}{4},$$ $$(y-1)^2=\frac{2}{4}\left(x+\frac{5}{2}\right)\quad \text{или}\quad (y-1)^2=\frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{2}\right).$$ Последнее уравнение представляет собой каноническое уравнение пара-

Что следует делать	*Как следует делать*
	болы с центром в точке $C\left(-\frac{5}{2};1\right)$ и параметром $p=\frac{1}{4}$. Для того чтобы построить данную параболу, возьмем дополнительную точку, например, $x=\frac{1}{2}$, тогда $(y-1)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\right)$, $(y-1)^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{2}$, $(y-1)^2=\frac{3}{2}$, $y-1=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$, $y=1\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$, т.е. при $x=\frac{1}{2}$, получили два значения $y_1=1+\sqrt{\frac{3}{2}}\approx 1{,}22$ и $y_2=1-\sqrt{\frac{3}{2}}\approx -0{,}22$ в системе xOy. После чего выполним чертеж (рис. 19).
III) Выполним рисунок.	 **Рис. 19**

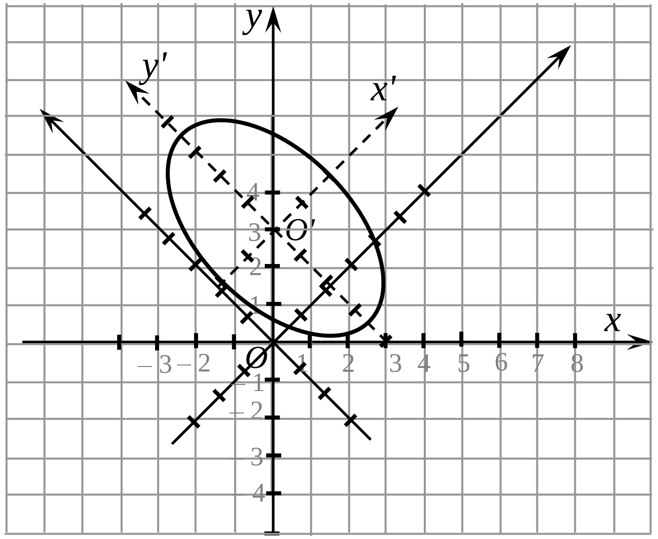
Что следует делать	*Как следует делать*
4) $5x^2+5y^2-10x+20y-100=0$.	
I. Определим вид кривой второго порядка.	Рассмотрим заданное уравнение: $$5x^2+5y^2-10x+20y-100=0.$$ Это уравнение вида (7). Для него можно записать, что $B=0$, $A=5$, $C=5$. Таким образом, из условия $A=C=5$, определяем, что это уравнение представляет ***уравнение окружности***.
II. Приведем уравнение к каноническому виду.	Проводим преобразования с уравнением: $$5x^2+5y^2-10x+20y-100=0.$$ $$5x^2+5y^2-10x+20y=100.$$ Группируем переменные и выделяем полный квадрат: $$\left(5x^2-10x\right)+\left(5y^2+20y\right)=100, \qquad 5\cdot\left(x^2-2x\right)+5\cdot\left(y^2+4y\right)=100,$$ $$5\cdot\left(x^2-2x+1-1\right)+5\cdot\left(y^2+4y+4-4\right)=100,$$ $$5\cdot\left[(x-1)^2-1\right]+5\cdot\left[(y+2)^2-4\right]=100,$$ $$5\cdot(x-1)^2-5+5\cdot(y+2)^2-20=100,$$ $$5\cdot(x-1)^2+5\cdot(y+2)^2=100+20+5,$$

Что следует делать	*Как следует делать*
	$5\cdot(x-1)^2+5\cdot(y+2)^2=125.$ Чтобы привести последнее уравнение к каноническому виду, разделим обе его части на 5, получим: $\frac{5\cdot(x-1)^2}{5}+\frac{5\cdot(y+2)^2}{5}=\frac{125}{5},$ $(x-1)^2+(y+2)^2=25$ или $(x-1)^2+(y+2)^2=5^2.$ Последнее уравнение представляет собой каноническое уравнение окружности с центром в точке C (1; – 2) и радиусом r = 5 (см. рис. 20).
III) Выполним рисунок.	 **Рис. 20**

Что следует делать	*Как следует делать*
1) $x^2+xy+y^2-3x-6y+3=0$.	
I. Определим вид кривой второго порядка. Кривая представлена уравнением вида (6) (таблица). Приведем его к виду (7) поворотом системы координат xOy на угол величины α. Угол α определим из соотношения $\operatorname{ctg}2\alpha=\dfrac{A-C}{2B}$.	Рассмотрим заданное уравнение: $$x^2+xy+y^2-3x-6y+3=0.$$ Это уравнение вида (6). Для него можно записать, что $A = 1$, $B = 1$, $C = 1$. Таким образом, можно записать, что $\operatorname{ctg}2\alpha=\dfrac{A-C}{2B}=\dfrac{1-1}{2\cdot 1}=0$, т.е. $2\alpha=\operatorname{arcctg}0$, откуда следует $2\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ или $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$.
II. Чтобы перейти к новой системе координат $x'O'y'$ найдем $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.	$$\sin\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos2\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$ $$\cos\alpha=\sqrt{\frac{1+\cos2\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1+\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$
III. По формулам (8) найдем x и y: $$\begin{cases}x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha\end{cases}$$	$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha=\frac{x'\sqrt{2}}{2}-\frac{y'\sqrt{2}}{2}=\frac{(x'-y')\sqrt{2}}{2},$$ $$x=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha=\frac{x'\sqrt{2}}{2}+\frac{y'\sqrt{2}}{2}=\frac{(x'+y')\sqrt{2}}{2}.$$

Что следует делать	*Как следует делать*
IV. Найденные значения x и y подставим в исходное уравнение кривой.	Имеем исходное уравнение: $$x^2+xy+y^2-3x-6y+3=0.$$ После подстановки получаем: $$\left(\frac{(x'-y')\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{(x'-y')\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{(x'+y')\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{(x'+y')\sqrt{2}}{2}\right)^2-$$ $$-3\cdot\frac{(x'-y')\sqrt{2}}{2}-6\cdot\frac{(x'+y')\sqrt{2}}{2}+3=0.$$ Раскрывая скобки и приводя подобные, получаем: $$\frac{1}{2}\left(x'^2-2x'y'+y'^2\right)+\frac{1}{2}\left(x'^2-y'^2\right)+\frac{1}{2}\left(x'^2+2x'y'+y'^2\right)-$$ $$-\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot(x'-y')-3\sqrt{2}\cdot(x'+y')+3=0,$$ Умножим последнее равенство на 2: $$x'^2-2x'y'+y'^2+x'^2-y'^2+x'^2+2x'y'+y'^2-$$ $$-3\sqrt{2}\cdot(x'-y')-6\sqrt{2}\cdot(x'+y')+6=0,$$ $$x'^2-2x'y'+y'^2+x'^2-y'^2+x'^2+2x'y'+y'^2-$$ $$-3\sqrt{2}x'+3\sqrt{2}\cdot y'-6\sqrt{2}x'-6\sqrt{2}y'+6=0,$$ $$3x'^2+y'^2-9\sqrt{2}x'-3\sqrt{2}y'+6=0.$$

Что следует делать	*Как следует делать*
V. Приведем уравнение к каноническому виду, выделив полные квадраты.	Проводим преобразования с уравнением: $$3x'^2 + y'^2 - 9\sqrt{2}x' - 3\sqrt{2}y' + 6 = 0.$$ Группируем переменные и выделяем полный квадрат: $$\left(3x'^2 - 9\sqrt{2}x'\right) + \left(y'^2 - 3\sqrt{2}y'\right) = -6, \quad 3\cdot\left(x'^2 - 3\sqrt{2}x'\right) + \left(y'^2 - 3\sqrt{2}y'\right) = -6,$$ $$3\cdot\left(x'^2 - 3\sqrt{2}x' + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) + \left(y'^2 - 3\sqrt{2}y + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) = -6,$$ $$3\cdot\left[\left(x' - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{9}{2}\right] + \left[\left(y' - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{9}{2}\right] = -6,$$ $$3\cdot\left(x' - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{27}{2} + \cdot\left(y' - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} = -6,$$ $$3\cdot\left(x' - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y' - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -6 + \frac{9}{2} + \frac{27}{2},$$ $$3\cdot\left(x' - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y' - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 12.$$ Чтобы привести последнее уравнение к каноническому виду, разделим обе его части на 12, получим:

Что следует делать	*Как следует делать*
	$$\frac{3\cdot\left(x'-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}{12}+\frac{\left(y'-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}{12}=\frac{12}{12},$$ $$\frac{\left(x'-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}{4}+\frac{\left(y'-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}{12}=1 \quad \text{или} \quad \frac{\left(x'-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2^2}+\frac{\left(y'-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\left(2\sqrt{3}\right)^2}=1.$$ Последнее уравнение представляет собой каноническое уравнение эллипса с центром в точке $C\left(\frac{3\sqrt{2}}{2};\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ и полуосями: a = 2 и $b = 2\sqrt{3}$ (см. рис. 21).
VI. Выполним рисунок.	 **Рис. 21**

Пример 6: Определить тип уравнения кривой второго порядка $x^2 - 2y^2 - 3y + 2 = 0$, привести уравнение к каноническому виду и установить какой геометрический образ оно определяет. Найти точки пересечения данной кривой второго порядка и прямой $2x + y + 2 = 0$. Сделать чертеж.

Что следует делать	*Как следует делать*
I. Определим вид кривой второго порядка.	Рассмотрим заданное уравнение: $$x^2 - 2y^2 - 3y + 2 = 0.$$ Это уравнение вида (7). Для него можно записать, что $B = 0$, $A = 1$, $C = -2$. Таким образом, из условия $A \cdot C = 1 \cdot (-2) = -2 < 0$, определяем, что это уравнение представляет ***уравнение гиперболы***.
II. Приведем уравнение кривой второго порядка к каноническому виду.	Проводим преобразования с уравнением: $$x^2 - 2y^2 - 3y + 2 = 0.$$ $$x^2 - 2y^2 - 3y = -2.$$ Группируем переменные и выделяем полный квадрат: $$x^2 + \left(-2y^2 - 3y\right) = -2, \qquad x^2 - 2\cdot\left(y^2 + \frac{3}{2}y\right) = -2,$$ $$x^2 - 2\cdot\left(y^2 + 2\cdot\frac{3}{4}y + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right) = -2,$$ $$x^2 - 2\cdot\left[\left(y + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right] = -2,$$

Что следует делать	*Как следует делать*
Последнее уравнение соответствует каноническому уравнению гиперболы вида: $$\boxed{\frac{(y-y_0)^2}{b^2}-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=1}.$$ Данная гипербола называется ***сопряженной гиперболой***. Для нее a – мнимая полуось, b – действительная полуось.	$$x^2-2\cdot\left(y+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{18}{16}=-2,$$ $$x^2-2\cdot\left(y+\frac{3}{4}\right)^2=-\frac{9}{8}-2,$$ $$x^2-2\cdot\left(y+\frac{3}{4}\right)^2=-\frac{25}{8}.$$ Чтобы привести последнее уравнение к каноническому виду, разделим обе его части на $-\frac{25}{8}$, получим: $$\frac{x^2}{-25/8}-\frac{2\cdot(y+3/4)^2}{-25/8}=\frac{-25/8}{-25/8},$$ $$\frac{x^2}{-25/8}+\frac{(y+3/4)^2}{25/16}=1 \quad \text{или} \quad \frac{(y+3/4)^2}{25/16}-\frac{x^2}{25/8}=1.$$ Таким образом, уравнение $\frac{(y+3/4)^2}{25/16}-\frac{x^2}{25/8}=1$ представляет собой каноническое уравнение сопряженной гиперболы с центром в точке $C\left(0;-\frac{3}{4}\right)$ и полуосями: мнимой полуосью $a=\sqrt{\frac{25}{8}}\approx 1{,}77$ и действительной полуосью

Что следует делать	*Как следует делать*
	$b=\sqrt{\dfrac{25}{16}}=\dfrac{5}{4}=1{,}25$.
III) Задачу о пересечении кривой второго порядка и прямой линии решим аналитически. Для определения точек пересечения линий составим систему, в которую входят уравнения данных линий, и решим полученную систему.	Итак, составляем систему уравнений: $$\begin{cases} x^2-2y^2-3y+2=0 & (9) \\ 2x+y+2=0 & (10) \end{cases}$$ Решим систему методом подстановки. Для этого выразим из уравнения (10) одну из переменных, например, $y=-2x-2$ и подставим в уравнение (9): $$x^2-2y^2-3y+2=0,$$ $$x^2-2\cdot(-2x-2)^2-3\cdot(-2x-2)+2=0,$$ $$x^2-2\cdot\left(4x^2+8x+4\right)+6x+6+2=0,$$ $$x^2-8x^2-16x-8+6x+6+2=0,$$ $$-7x^2-10x=0.$$ Таким образом, окончательно остается неполное квадратное уравнение, решая которое получаем две точки: $$7x^2+10x=0, \quad \text{или} \quad x\cdot(7x+10)=0,$$ Тогда $x_1=0$ или $7x+10=0$, откуда $x_2=-\dfrac{10}{7}$.
Найдем y_1 и y_2. Для этого подставим полученные x_1 и x_2 в какое-либо из уравнений системы. Удобнее всего использовать урав-	Используя уравнение данной прямой в виде $y=-2x-2$, получаем значения y_1 и y_2:

<table>
<tr><th>Что следует делать</th><th>Как следует делать</th></tr>
<tr><td>нение прямой.

Получаем координаты точек пересечения $M\ (x_1;\ y_1)$ и $N\ (x_2;\ y_2)$.</td><td>$$y_1 = -2\cdot 0 - 2 = -2,$$
$$y_2 = -2\cdot\left(-\frac{10}{7}\right) - 2 = \frac{20}{7} - 2 = \frac{20-14}{7} = \frac{6}{7}.$$
Точки пересечения $M(0;-2)$ и $N\left(-\frac{10}{7};\frac{6}{7}\right)$.</td></tr>
<tr><td>IV) Проверим аналитическое решение графически. Построим данные линии (см. рис. 22).</td><td>Для построения данной прямой запишем ее уравнение в виде $y=-2x-2$. После чего задаем следующие точки:

x	0	– 2
y	– 2	2

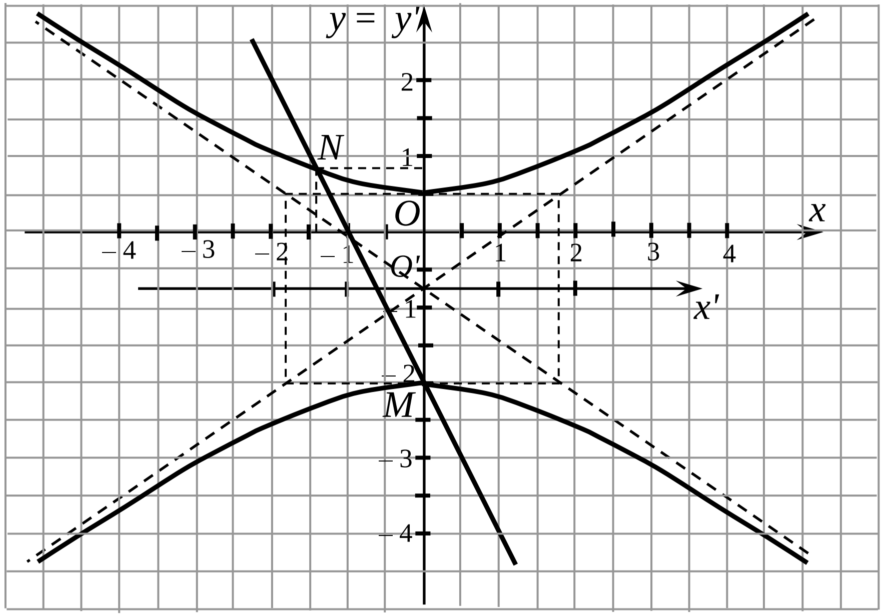


Рис. 22</td></tr>
</table>

Пример 7: Даны координаты точек $A\left(2\sqrt{6};-4\right)$ и $B\left(6;2\sqrt{2}\right)$, а также окружность Π, радиус которой равен $R=2\sqrt{10}$, а центр находится в начале координат. Требуется:

1) Составить каноническое уравнение эллипса Γ, проходящего через заданные точки A и B.

2) Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет эллипса Γ.

3) Найти все точки пересечения эллипса Γ с окружностью Π.

4) Построить эллипс Γ и окружность Π.

<table>
<tr><th>ЧТО СЛЕДУЕТ ДЕЛАТЬ</th><th>КАК СЛЕДУЕТ ДЕЛАТЬ</th></tr>
<tr><td colspan="2">1) Составить каноническое уравнение эллипса Γ, проходящего через данные точки $A\left(2\sqrt{6};-4\right)$ и $B\left(6;2\sqrt{2}\right)$.</td></tr>
<tr><td>Чтобы составить каноническое уравнение эллипса Γ, проходящего через данные точки $A\left(x_1;y_1\right)$ и $B\left(x_2;y_2\right)$, следует координаты каждой точки подставить в каноническое уравнение эллипса в общем виде
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}.$$
В результате получается система нелинейных уравнений с неизвестными параметрами a и b. Решая систему, находим величины полуосей и составляем каноническое уравнение искомого эллипса Γ.</td><td>Подставим в каноническое уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ координаты точки A: $x_A=2\sqrt{6}$; $y_A=-4$:
$$\frac{\left(2\sqrt{6}\right)^2}{a^2}+\frac{(-4)^2}{b^2}=1; \qquad \Rightarrow \qquad \frac{24}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1.$$
Аналогично, подставим в это же уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ координаты точки B: $x_B=6$; $y_B=2\sqrt{2}$:
$$\frac{6^2}{a^2}+\frac{\left(2\sqrt{2}\right)^2}{b^2}=1; \quad \Rightarrow \quad \frac{36}{a^2}+\frac{8}{b^2}=1.$$
Полученные уравнения записываются в систему:</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Что следует делать</th><th>Как следует делать</th></tr>
<tr><td></td><td>

$$\begin{cases}\dfrac{24}{a^2}+\dfrac{16}{b^2}=1,\\ \dfrac{36}{a^2}+\dfrac{8}{b^2}=1,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{24}{a^2}+2\cdot\dfrac{8}{b^2}=1,\\ \dfrac{8}{b^2}=1-\dfrac{36}{a^2},\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{24}{a^2}+2\cdot\left(1-\dfrac{36}{a^2}\right)=1,\\ \dfrac{8}{b^2}=1-\dfrac{36}{a^2},\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\dfrac{24}{a^2}+2-\dfrac{72}{a^2}=1,\\ \dfrac{8}{b^2}=1-\dfrac{36}{a^2},\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-\dfrac{48}{a^2}=-1,\\ \dfrac{8}{b^2}=1-\dfrac{36}{a^2},\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a^2=48,\\ \dfrac{8}{b^2}=1-\dfrac{36}{48},\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a^2=48,\\ \dfrac{8}{b^2}=\dfrac{12}{48},\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a^2=48,\\ b^2=32.\end{cases}$$

Таким образом, каноническое уравнение эллипса Γ имеет вид:

$$\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{32}=1.$$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">2) Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет эллипса Γ.</td></tr>
<tr><td>Полуоси a и b эллипса определяются из его канонического уравнения $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1}$</td><td>

Рассмотрим каноническое уравнение эллипса Γ:

$$\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{32}=1, \Rightarrow \frac{x^2}{\left(\sqrt{48}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{32}\right)^2}=1, \Rightarrow \frac{x^2}{\left(4\sqrt{3}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(4\sqrt{2}\right)^2}=1.$$

Таким образом, полуоси эллипса Γ: $a=4\sqrt{3}$, $b=4\sqrt{2}$.

</td></tr>
</table>

Что следует делать	*Как следует делать*
Чтобы определить координаты фокусов эллипса, необходимо вычислить параметр c из соотношения $\boxed{a^2 - b^2 = c^2}$, учитывая, что в данном случае $a > b$. В этом случае фокусы лежат на оси Ox и имеют координаты $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$. Эксцентриситет эллипса определяется по формуле: $$\boxed{\varepsilon = \frac{c}{a}},$$ в случае если $a > b$.	Учитывая значения параметров $a = 4\sqrt{3}$ и $b = 4\sqrt{2}$, а также выполнение условия $a > b$, вычислим величину параметра c: $$c^2 = a^2 - b^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2 - \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 48 - 32 = 16;$$ $$c = 4.$$ Тогда координаты фокусов эллипса Γ: $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$. При известных значениях $a = 4\sqrt{3}$ и $c = 4$, найдем эксцентриситет Γ: $$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$
3) Найти все точки пересечения эллипса Γ с окружностью Π.	
Напишем уравнение окружности Π. Каноническое уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом R имеет вид: $x^2 + y^2 = R^2$ Чтобы найти точки пересечения эллипса и окружности, решаем систему, составлен-	Учитывая радиус окружности $R = 2\sqrt{10}$, записываем уравнение окружности Π: $$x^2 + y^2 = \left(2\sqrt{10}\right)^2;$$ $$x^2 + y^2 = 40.$$ Составляется и решается система нелинейных уравнений:

Что следует делать	*Как следует делать*
ную из канонических уравнений этих кривых.	$\begin{cases} x^2+y^2=40, \\ \dfrac{x^2}{48}+\dfrac{y^2}{32}=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=40-y^2, \\ \dfrac{40-y^2}{48}+\dfrac{y^2}{32}=1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=40-y^2, \\ \dfrac{2(40-y^2)+3y^2}{96}=\dfrac{96}{96}, \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} x^2=40-y^2, \\ 80-2y^2+3y^2=96, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=40-y^2, \\ y^2=16, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=40-16, \\ y=\pm 4, \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} x^2=24, \\ y=\pm 4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm 2\sqrt{6}, \\ y=\pm 4. \end{cases}$ Таким образом, точки пересечения эллипса Γ и окружности Π: $M_1(2\sqrt{6};4)$, $M_2(2\sqrt{6};-4)$, $M_3(-2\sqrt{6};4)$, $M_4(-2\sqrt{6};-4)$.
4) Построить эллипс Γ и окружность Π.	
Построение кривых выполняем по их каноническим уравнениям. Каноническое уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом R имеет вид: $x^2+y^2=R^2$. Каноническое уравнение эллипса с центром в начале координат и полуосями a и b имеет вид: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.	В данной задаче имеем уравнение окружности $x^2+y^2=40$ или $x^2+y^2=\left(2\sqrt{10}\right)^2$. Следовательно, строим окружность радиуса $R=2\sqrt{10}\approx 6{,}32$ (рис. 23). В результате вычислений было получено каноническое уравнение эллипса $\dfrac{x^2}{48}+\dfrac{y^2}{32}=1$. Следовательно, строим эллипс с полуосями $a=\sqrt{48}=4\sqrt{3}\approx 6{,}93$, $b=\sqrt{32}=4\sqrt{2}\approx 5{,}66$ (рис. 23).

Что следует делать	*Как следует делать*

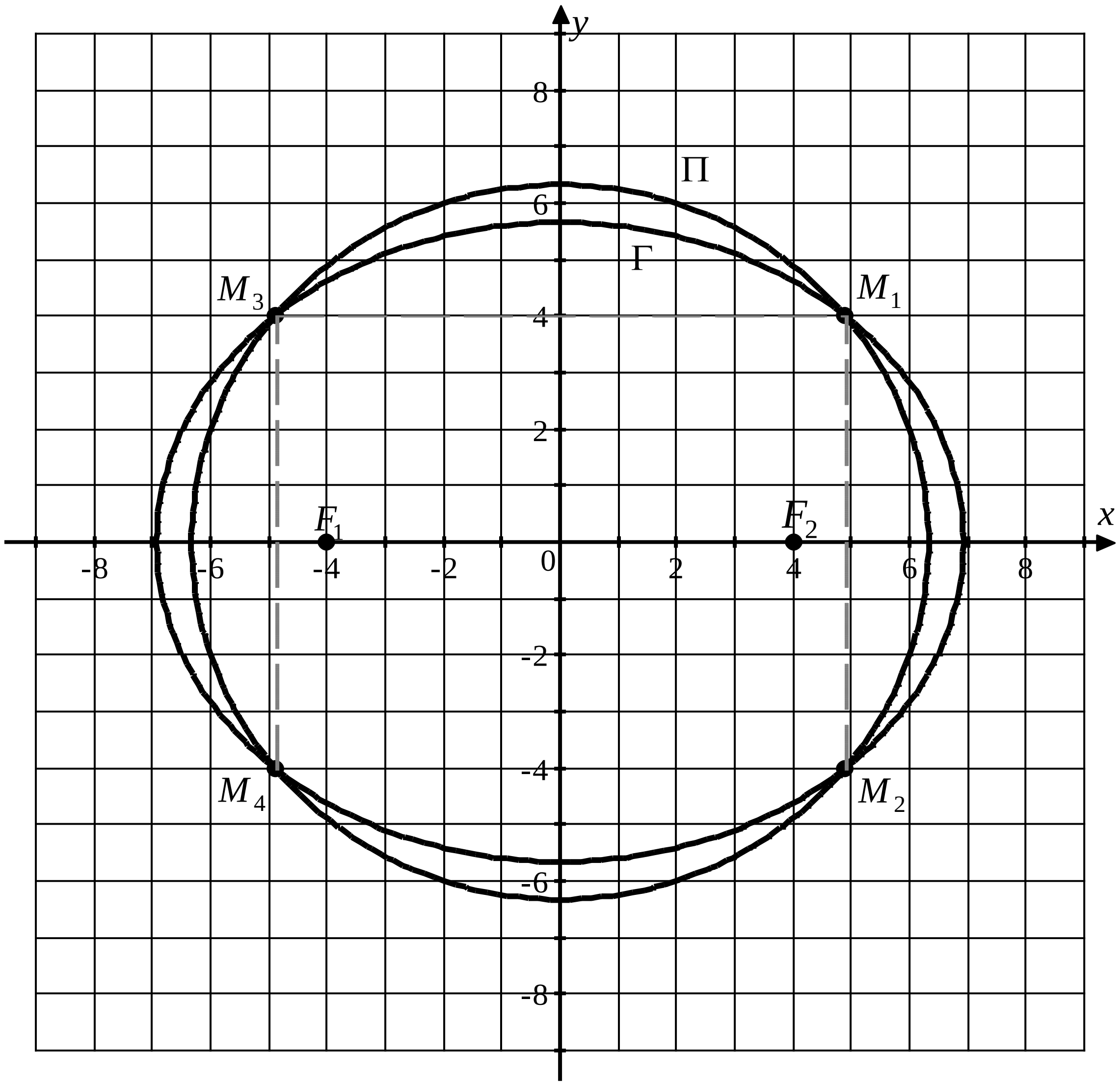


Рис. 23

3.7. Задачи для самостоятельного решения

Задача VII. Общее уравнение кривой второго порядка Г привести к каноническому. Найти координаты центра, координаты вершин и фокусов. Написать уравнения асимптот и директрис. Найти точки пересечения кривой второго порядка Г и прямой *l*. Построить линии на графике.

Вари-ант			Вари-ант		
1.	**а)** Г: $16x^2 + 9y^2 - 128x - 36y + 148 = 0$;	l: $4x + 3y - 10 = 0$.	2.	**а)** Г: $4x^2 + 25y^2 + 8x - 150y + 129 = 0$;	l: $3x - 4y + 12 = 0$.
	б) Г: $9x^2 - 4y^2 - 72x + 24y + 72 = 0$;	l: $x - 3y + 3 = 0$.		**б)** Г: $4x^2 - 9y^2 + 16x + 72y - 164 = 0$;	l: $2x + 9y - 18 = 0$.
	в) Г: $x^2 - 7x + 2y + 4 = 0$;	l: $x - y - 2 = 0$.		**в)** Г: $3x^2 - 6x - y + 1 = 0$;	l: $9x - 2y + 2 = 0$.
3.	**а)** Г: $9x^2 + 16y^2 + 36x + 64y - 44 = 0$;	l: $x + 2y + 4 = 0$.	4.	**а)** Г: $25x^2 + 9y^2 - 50x + 36y - 164 = 0$;	l: $5x - 3y - 26 = 0$.
	б) Г: $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 29 = 0$;	l: $x - 3y + 3 = 0$.		**б)** Г: $4x^2 - y^2 + 40x - 2y + 83 = 0$;	l: $2x - 3y + 6 = 0$.
	в) Г: $2y^2 - x - 8y + 3 = 0$;	l: $x + 2y + 1 = 0$.		**в)** Г: $y^2 + 3x - 4y + 7 = 0$;	l: $3x - 4y + 12 = 0$.
5.	**а)** Г: $9x^2 + 25y^2 - 18x - 100y - 116 = 0$;	l: $x - y = 0$.	6.	**а)** Г: $4x^2 + y^2 + 32x - 2y + 49 = 0$;	l: $x - 4y + 6 = 0$.
	б) Г: $x^2 - y^2 + 8x + 6y + 3 = 0$;	l: $x - 8y + 24 = 0$.		**б)** Г: $x^2 - y^2 + 8x + 6y + 11 = 0$;	l: $x - 2y + 6 = 0$.
	в) Г: $x^2 - 6x - 4y + 1 = 0$;	l: $2x - 5y - 10 = 0$.		**в)** Г: $x^2 + 6x + 2y + 1 = 0$;	l: $x - y + 3 = 0$.
7.	**а)** Г: $9x^2 + 25y^2 + 54x - 144 = 0$;	l: $7x - 2y - 14 = 0$.	8.	**а)** Г: $9x^2 + y^2 + 54x + 72 = 0$;	l: $3x + 5y + 15 = 0$.
	б) Г: $x^2 - 4y^2 - 6x - 16y - 11 = 0$;	l: $x + 5y + 5 = 0$.		**б)** Г: $x^2 - 4y^2 - 6x - 16y - 3 = 0$;	l: $4x - 3y - 15 = 0$.
	в) Г: $y^2 - 3x - 4y + 10 = 0$;	l: $x + y - 4 = 0$.		**в)** Г: $y^2 + 2x + 8y + 10 = 0$;	l: $x + y + 5 = 0$.

9.	**а)** Γ: $4x^2 + y^2 + 24x - 10y + 45 = 0$; l: $2x + y + 5 = 0$. **б)** Γ: $x^2 - 25y^2 + 8x + 100y - 109 = 0$; l: $5x + 4y - 20 = 0$. **в)** Γ: $x^2 + 2x - 2y - 9 = 0$; l: $x - y = 0$.	**10.**	**а)** Γ: $25x^2 + 4y^2 + 150x + 24y + 161 = 0$; l: $5x + 2y + 11 = 0$. **б)** Γ: $9x^2 - 16y^2 + 72x + 64y - 64 = 0$; l: $3x - 7y + 21 = 0$. **в)** Γ: $y^2 - 3x + 10y + 16 = 0$; l: $x - y - 2 = 0$.
11.	**а)** Γ: $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0$; l: $x - 2y + 5 = 0$. **б)** Γ: $4x^2 - 9y^2 + 54y - 117 = 0$; l: $x + 3y - 9 = 0$. **в)** Γ: $y^2 - 2x - 6y + 3 = 0$; l: $5x - 2y + 10 = 0$.	**12.**	**а)** Γ: $9x^2 + y^2 - 18x - 4y + 4 = 0$; l: $2x + 3y - 6 = 0$. **б)** Γ: $9x^2 - 4y^2 + 24y - 72 = 0$; l: $3x - 5y + 15 = 0$. **в)** Γ: $x^2 + 6x + 2y + 3 = 0$; l: $3x - 5y + 15 = 0$.
13.	**а)** Γ: $x^2 + 9y^2 + 2x - 36y + 28 = 0$; l: $2x - y + 3 = 0$. **б)** Γ: $x^2 - y^2 + 6y - 13 = 0$; l: $5x - y - 15 = 0$. **в)** Γ: $y^2 - x - 6y + 6 = 0$; l: $x - y + 4 = 0$.	**14.**	**а)** Γ: $9x^2 + 4y^2 + 54x + 45 = 0$; l: $3x + 2y + 3 = 0$. **б)** Γ: $4x^2 - y^2 + 6y - 13 = 0$; l: $x - y + 3 = 0$. **в)** Γ: $x^2 + 6x + y + 6 = 0$; l: $3x + 4y + 12 = 0$.
15.	**а)** Γ: $4x^2 + 9y^2 + 24x = 0$; l: $3x - 2y = 0$. **б)** Γ: $9x^2 - 4y^2 - 16y - 52 = 0$; l: $x - 3y - 6 = 0$. **в)** Γ: $y^2 - 3x - 6y = 0$; l: $x + y = 0$.	**16.**	**а)** Γ: $9x^2 + 4y^2 + 16y - 20 = 0$; l: $3x + 2y - 2 = 0$. **б)** Γ: $x^2 - 4y^2 - 16y - 20 = 0$; l: $x - 4y - 10 = 0$. **в)** Γ: $y^2 + 2x + 4y - 2 = 0$; l: $3x - 2y - 6 = 0$.
17.	**а)** Γ: $9x^2 + y^2 + 4y - 5 = 0$; l: $2x - 3y - 6 = 0$. **б)** Γ: $9x^2 - 4y^2 + 36x = 0$; l: $x - 2y + 4 = 0$. **в)** Γ: $y^2 + 3x + 4y - 5 = 0$; l: $5x + 2y + 10 = 0$.	**18.**	**а)** Γ: $4x^2 + 9y^2 - 32x + 28 = 0$; l: $5x - y - 18 = 0$. **б)** Γ: $4x^2 - 9y^2 + 16x - 20 = 0$; l: $2x + 7y - 2 = 0$. **в)** Γ: $x^2 - 6x - 2y + 5 = 0$; l: $x - y - 3 = 0$.
19.	**а)** Γ: $4x^2 + y^2 - 32x + 48 = 0$; l: $x - 2y - 6 = 0$. **б)** Γ: $16x^2 - y^2 + 64x + 48 = 0$; l: $4x - 5y + 20 = 0$. **в)** Γ: $x^2 - 6x - 3y + 3 = 0$; l: $x - 2y - 4 = 0$.	**20.**	**а)** Γ: $x^2 + 4y^2 - 8x = 0$; l: $3x - y - 9 = 0$. **б)** Γ: $9x^2 - y^2 + 36x + 27 = 0$; l: $x - 4y - 4 = 0$. **в)** Γ: $x^2 - 6x - y + 7 = 0$; l: $x - 2y = 0$.

21.	**а)** Г: $9x^2 + 16y^2 - 90x - 96y + 225 = 0$; **б)** Г: $x^2 - y^2 + 10x - 8y + 5 = 0$; **в)** Г: $y^2 - 2x - 6y - 1 = 0$;	l: $3x - 4y + 9 = 0$. l: $2x - 7y - 14 = 0$. l: $2x - y + 6 = 0$.	**22.**	**а)** Г: $x^2 + 4y^2 - 10x - 24y + 45 = 0$; **б)** Г: $4x^2 - y^2 + 40x - 8y + 80 = 0$; **в)** Г: $y^2 - 3x - 6y - 6 = 0$;	l: $x - 2y - 3 = 0$. l: $x + 2y + 16 = 0$. l: $2x + y + 2 = 0$.
23.	**а)** Г: $9x^2 + 25y^2 - 90x - 150y + 225 = 0$; **б)** Г: $9x^2 - 4y^2 + 90x - 32y + 125 = 0$; **в)** Г: $y^2 - 4x - 6y - 11 = 0$;	l: $3x + 5y - 15 = 0$. l: $3x - 7y - 7 = 0$. l: $x + y + 2 = 0$.	**24.**	**а)** Г: $16x^2 + 9y^2 - 160x - 54y + 337 = 0$; **б)** Г: $9x^2 - y^2 + 90x - 8y + 200 = 0$; **в)** Г: $x^2 + 10x + 2y + 19 = 0$;	l: $3x - 5y = 0$. l: $2x - 5y - 10 = 0$. l: $x - 3y + 6 = 0$.
25.	**а)** Г: $4x^2 + y^2 - 40x - 6y + 93 = 0$; **б)** Г: $4x^2 - 9y^2 + 40x - 72y - 80 = 0$; **в)** Г: $x^2 + 10x + y + 22 = 0$;	l: $x - y = 0$. l: $4x - y - 4 = 0$. l: $x + 5y + 5 = 0$.	**26.**	**а)** Г: $25x^2 + 9y^2 - 250x - 54y + 481 = 0$; **б)** Г: $x^2 - y^2 - 10x - 8y + 5 = 0$; **в)** Г: $x^2 + 10x + 3y + 16 = 0$;	l: $3x + 2y - 12 = 0$. l: $3x - 5y - 35 = 0$. l: $2x + 5y = 0$.
27.	**а)** Г: $9x^2 + 16y^2 + 90x - 96y + 225 = 0$; **б)** Г: $4x^2 - y^2 - 40x - 8y + 80 = 0$; **в)** Г: $y^2 + 2x - 6y - 1 = 0$;	l: $6x + 5y = 0$. l: $4x + 5y = 0$. l: $3x - y - 3 = 0$.	**28.**	**а)** Г: $x^2 + 4y^2 + 10x - 24y + 45 = 0$; **б)** Г: $4x^2 - 9y^2 - 40x - 72y - 80 = 0$; **в)** Г: $y^2 + x - 6y + 4 = 0$;	l: $3x + 5y = 0$. l: $2x + y + 4 = 0$. l: $3x - 2y + 6 = 0$.
29.	**а)** Г: $9x^2 + 4y^2 + 90x - 24y + 225 = 0$; **б)** Г: $9x^2 - y^2 - 90x - 8y + 200 = 0$; **в)** Г: $x^2 - 10x + 3y + 16 = 0$;	l: $3x + 2y + 3 = 0$. l: $x + 2y + 2 = 0$. l: $2x - 3y - 6 = 0$.	**30.**	**а)** Г: $16x^2 + 9y^2 + 160x - 54y + 337 = 0$; **б)** Г: $9x^2 - 16y^2 - 90x - 128y - 175 = 0$; **в)** Г: $x^2 - 10x + 2y + 19 = 0$;	l: $x - y + 5 = 0$. l: $7x + 2y + 14 = 0$. l: $2x + 7y - 14 = 0$.

<u>Задача VIII.</u> Определить тип кривой, привести уравнение к каноническому виду и установить какой геометрический образ оно определяет. Построить график.

Вариант	***Задание***	***Вариант***	***Задание***	***Вариант***	***Задание***
1.	$-x^2-y^2+4xy+2x-4y+1=0.$	**11.**	$x^2+y^2+4xy-8x-4y+1=0.$	**21.**	$5x^2+5y^2-2xy+10x-2y+1=0.$
2.	$2x^2+2y^2-2xy-2x-2y+1=0.$	**12.**	$x^2+y^2-2xy-2x+2y-7=0.$	**22.**	$2x^2+2y^2+4xy+8x+8y+1=0.$
3.	$4xy+4x-3y=0.$	**13.**	$2xy+2x+2y-3=0.$	**23.**	$-x^2-y^2+2xy+2x-2y+1=0.$
4.	$-2x^2-2y^2+2xy-6x+6y+3=0.$	**14.**	$4x^2+4y^2+2xy+12x+12y+1=0.$	**24.**	$2x^2+2y^2-4xy-8x+8y+1=0.$
5.	$-3x^2-3y^2+4xy-6x+4y+2=0.$	**15.**	$3x^2+3y^2+4xy+8x+12y+1=0.$	**25.**	$3x^2+3y^2+2xy-12x-4y+1=0.$
6.	$-2xy-2x-2y+1=0.$	**16.**	$x^2+y^2-8xy-20x+20y+1=0.$	**26.**	$-4xy+8x+8y+1=0.$
7.	$-x^2-y^2-4xy-4x-2y+2=0.$	**17.**	$3x^2+3y^2-2xy-6x+2y+1=0.$	**27.**	$2x^2+2y^2-2xy+6x-6y-6=0.$
8.	$-4x^2-4y^2+2xy+10x-10y+1=0.$	**18.**	$4xy+4x+4y+1=0.$	**28.**	$x^2+y^2+4xy+4x+2y-5=0.$
9.	$4xy+4x-4y-1=0.$	**19.**	$3x^2+3y^2-4xy+6x-4y-7=0.$	**29.**	$4xy+4x-4y+1=0.$
10.	$x^2+y^2+2xy-8x-8y+1=0.$	**20.**	$-4xy-4x+4y+6=0.$	**30.**	$3x^2+3y^2-4xy+4x+4y+1=0.$

Задача IX. (*вариант 1–15*) Даны координаты точек A и B, а также радиус окружности Π, радиус которой равен R, а центр находится в начале координат. Требуется:

1) Составить каноническое уравнение эллипса Γ, проходящего через данные точки A и B.

2) Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет эллипса Γ.

3) Найти все точки пересечения эллипса Γ с окружностью Π.

4) Построить эллипс Γ и окружность Π.

Вариант		***Вариант***	
1.	$A\left(2;1{,}5\sqrt{15}\right),\ B\left(-4\sqrt{3};-3\right),\ R=7$.	**9.**	$A\left(4\sqrt{7};2\right),\ B(8;-4),\ R=4\sqrt{5}$.
2.	$A\left(-6;2\sqrt{6}\right),\ B\left(3\sqrt{2};6\right),\ R=8$.	**10.**	$A\left(-2;-\sqrt{7}\right),\ B(4;2),\ R=2\sqrt{5}$.
3.	$A\left(\sqrt{6};-2\right),\ B\left(-3;\sqrt{2}\right),\ R=3$.	**11.**	$A(-7;0),\ B\left(3{,}5\sqrt{3};-2\right),\ R=5$.
4.	$A(-8;4),\ B\left(4\sqrt{7};-2\right),\ R=4\sqrt{5}$.	**12.**	$A\left(2;2\sqrt{5}\right),\ B\left(-1{,}5\sqrt{3};-3\right),\ R=5$.
5.	$A(4;-2),\ B\left(2;\sqrt{7}\right),\ R=2\sqrt{5}$.	**13.**	$A\left(1;-\frac{12\sqrt{3}}{7}\right),\ B\left(-\frac{7\sqrt{5}}{3};2\right),\ R=4$.
6.	$A\left(-2\sqrt{6};-4\right),\ B\left(-6;2\sqrt{2}\right),\ R=2\sqrt{10}$.	**14.**	$A\left(-\frac{4\sqrt{5}}{3};-4\right),\ B\left(2;-4\sqrt{3}\right),\ R=5$.
7.	$A\left(-3\sqrt{2};6\right),\ B\left(6;-2\sqrt{6}\right),\ R=8$.	**15.**	$A(-4;-1{,}2),\ B(0;2),\ R=3$.
8.	$A\left(-3;-\sqrt{2}\right),\ B\left(-\sqrt{6};2\right),\ R=3$.		

Задача IX. (*вариант 16–30*) Даны координаты точек A и B. Требуется:

1) Составить каноническое уравнение гиперболы Γ, проходящей через данные точки A и B, если фокусы гиперболы расположены на оси абсцисс.

2) Найти полуоси, фокусы, эксцентриситет и уравнения асимптот гиперболы Γ.

3) Найти все точки пересечения гиперболы Γ с окружностью Π с центром в начале координат, если эта окружность проходит через фокусы гиперболы.

4) Построить гиперболу Γ, ее асимптоты и окружность Π.

Вариант		***Вариант***	
16.	$A(-3;4),\ B\left(-5;4\sqrt{5}\right).$	**24.**	$A\left(6;-2\sqrt{15}\right),\ B(-8;12).$
17.	$A(4;-6),\ B\left(6;4\sqrt{6}\right).$	**25.**	$A\left(-10;-3\sqrt{10}\right),\ B(-8;6).$
18.	$A(-4;-3),\ B(8;9).$	**26.**	$A\left(2\sqrt{2};4\right),\ B\left(-4;-4\sqrt{3}\right).$
19.	$A(8;12),\ B\left(-6;2\sqrt{15}\right).$	**27.**	$A(-4;0),\ B\left(6;-2{,}5\sqrt{5}\right).$
20.	$A(8;6),\ B\left(10;-3\sqrt{10}\right).$	**28.**	$A\left(-6;-2\sqrt{5}\right),\ B\left(4\sqrt{2};4\right).$
21.	$A\left(5;-4\sqrt{5}\right),\ B(3;4).$	**29.**	$A\left(-4\sqrt{2};2\right),\ B\left(6;-\sqrt{5}\right).$
22.	$A\left(-6;4\sqrt{6}\right),\ B(4;6).$	**30.**	$A\left(-3\sqrt{10};3\right),\ B\left(6;\sqrt{3}\right).$
23.	$A(-8;-9),\ B(4;3).$		

Задача X.

1) Определить тип кривой. Общее уравнение кривой второго порядка привести к каноническому. Построить все кривые своего варианта. Для каждой кривой найти координаты центра, координаты вершин и фокусов, написать уравнения асимптот и директрис (если они имеются).

2) *Варианты 1–10.* Написать уравнение прямой L, проходящей через один из фокусов эллипса, перпендикулярно прямой $6x + y = 0$.

Варианты 11–20. Написать уравнение прямой L, проходящей через один из фокусов гиперболы, параллельно прямой $2x - 5y = 0$.

Варианты 21–30. Написать уравнение прямой L, проходящей через фокус параболы, параллельно прямой $3x + 5y - 15 = 0$.

3)* Определить точки пересечения полученной прямой L и соответствующей кривой.

Вариант	*Задание*	*Вариант*	*Задание*	*Вариант*	*Задание*
1.	**а)** $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0$; **б)** $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$; **в)** $25x^2 - 49y^2 - 1225 = 0$; **г)** $y^2 - 9x = 0$	**2.**	**а)** $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 30 = 0$; **б)** $4x^2 + 49y^2 - 196 = 0$; **в)** $16x^2 - 25y^2 - 400 = 0$; **г)** $y^2 - 7x = 0$	**3.**	**а)** $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$; **б)** $25x^2 + 36y^2 - 900 = 0$; **в)** $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$; **г)** $y^2 - 5x = 0$
4.	**а)** $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$; **б)** $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$; **в)** $25x^2 - 64y^2 - 1600 = 0$; **г)** $y^2 - 16x = 0$	**5.**	**а)** $x^2 + y^2 + 6x + 6y + 14 = 0$; **б)** $25x^2 + 49y^2 - 1225 = 0$; **в)** $x^2 - 4y^2 - 36 = 0$; **г)** $y^2 - 3x = 0$	**6.**	**а)** $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$; **б)** $x^2 + 4y^2 - 16 = 0$; **в)** $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$; **г)** $y^2 - 4x = 0$

7.	**а)** $x^2+y^2+4x-2y-31=0$; **б)** $4x^2+9y^2-36=0$; **в)** $x^2-4y^2-16=0$; **г)** $y^2-2x=0$	**8.**	**а)** $x^2+y^2-8x+4y-29=0$; **б)** $36x^2+49y^2-1764=0$; **в)** $9x^2-25y^2-225=0$; **г)** $y^2-6x=0$	**9.**	**а)** $x^2+y^2+8x-8y+23=0$; **б)** $x^2+9y^2-36=0$; **в)** $4x^2-9y^2-144=0$; **г)** $y^2-x=0$
10.	**а)** $x^2+y^2-10x+2y+22=0$; **б)** $9x^2+16y^2-144=0$; **в)** $9x^2-49y^2-441=0$; **г)** $y^2-8x=0$	**11.**	**а)** $x^2+y^2+10x-12y+45=0$; **б)** $4x^2+25y^2-100=0$; **в)** $25x^2-36y^2-900=0$; **г)** $y^2-9x=0$	**12.**	**а)** $x^2+y^2-2x+10y+25=0$; **б)** $4x^2+9y^2-144=0$; **в)** $4x^2-25y^2-100=0$; **г)** $y^2+7x=0$
13.	**а)** $x^2+y^2+2x-6y-15=0$; **б)** $9x^2+49y^2-441=0$; **в)** $16x^2-49y^2-784=0$; **г)** $y^2+5x=0$	**14.**	**а)** $x^2+y^2-6x-2y-26=0$; **б)** $25x^2+64y^2-1600=0$; **в)** $x^2-9y^2-36=0$; **г)** $y^2+16x=0$	**15.**	**а)** $x^2+y^2+4x+8y-29=0$; **б)** $16x^2+49y^2-784=0$; **в)** $9x^2-16y^2-576=0$; **г)** $y^2+3x=0$
16.	**а)** $x^2+y^2-6x-4y+4=0$; **б)** $25x^2+9y^2-225=0$; **в)** $25x^2-49y^2+1225=0$; **г)** $y^2+4x=0$	**17.**	**а)** $x^2+y^2-10x+6y+30=0$; **б)** $49x^2+4y^2-196=0$; **в)** $16x^2-25y^2+400=0$; **г)** $y^2+7x=0$	**18.**	**а)** $x^2+y^2+2x+2y-14=0$; **б)** $36x^2+25y^2-900=0$; **в)** $9x^2-16y^2+144=0$; **г)** $y^2+6x=0$

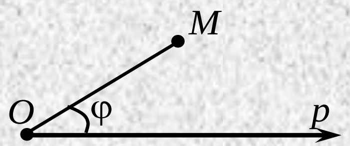
19.	**а)** $x^2+y^2+8x-6y=0$; **б)** $25x^2+16y^2-400=0$; **в)** $25x^2-64y^2+1600=0$; **г)** $y^2+x=0$	**20.**	**а)** $x^2+y^2-6x-6y+14=0$; **б)** $49x^2+25y^2-1225=0$; **в)** $x^2-4y^2+36=0$; **г)** $y^2+8x=0$	**21.**	**а)** $x^2+y^2+2x-2y+1=0$; **б)** $4x^2+y^2-16=0$; **в)** $4x^2-9y^2+36=0$; **г)** $x^2-9y=0$
22.	**а)** $x^2+y^2-2x+4y-31=0$; **б)** $9x^2+4y^2-36=0$; **в)** $x^2-4y^2+16=0$; **г)** $x^2-7y=0$	**23.**	**а)** $x^2+y^2+4x-8y-29=0$; **б)** $49x^2+36y^2-1764=0$; **в)** $9x^2-25y^2+225=0$; **г)** $x^2-5y=0$	**24.**	**а)** $x^2+y^2-8x+8y+23=0$; **б)** $4x^2+y^2-36=0$; **в)** $4x^2-9y^2+144=0$; **г)** $x^2-16y=0$
25.	**а)** $x^2+y^2+2x-10y+22=0$; **б)** $16x^2+9y^2-144=0$; **в)** $9x^2-49y^2+441=0$; **г)** $x^2-3y=0$	**26.**	**а)** $x^2+y^2-12x+10y+45=0$; **б)** $25x^2+4y^2-144=0$; **в)** $25x^2-36y^2+100=0$; **г)** $x^2-4y=0$	**27.**	**а)** $x^2+y^2+10x-2y+25=0$; **б)** $9x^2+4y^2-144=0$; **в)** $4x^2-25y^2+100=0$; **г)** $x^2-2y=0$
28.	**а)** $x^2+y^2-6x+2y-15=0$; **б)** $49x^2+9y^2-441=0$; **в)** $16x^2-49y^2+784=0$; **г)** $x^2-6y=0$	**29.**	**а)** $x^2+y^2-4x-6y-23=0$; **б)** $49x^2+16y^2-784=0$; **в)** $x^2-9y^2+36=0$; **г)** $x^2-y=0$	**30.**	**а)** $x^2+y^2+8x+4y-25=0$; **б)** $64x^2+25y^2-1600=0$; **в)** $9x^2-16y^2+576=0$; **г)** $x^2-8y=0$

4. ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ

ПОЛЯРНОЕ УРАВНЕНЕНИЕ ЛИНИИ – уравнение $\Phi(\rho,\varphi)=0$, связывающее полярные координаты ее текущей точки. Уравнение, разрешенное относительно ρ имеет вид $\rho=\rho(\varphi)$.

ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ определяется заданием некоторой точки *O*, которая называется **ПОЛЮСОМ**, а также луча *Op*, исходящего из этой точки, который называется **ПОЛЯРНОЙ ОСЬЮ**. Кроме того, задается единица масштаба *e*.

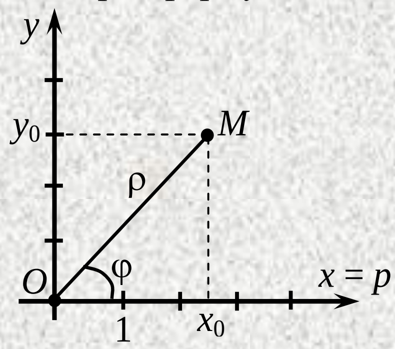
ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОЧКИ $M(\rho;\varphi)$ – полярный радиус $\rho=OM$ и полярный угол $\varphi=\angle pOM$, отсчитываемый от полярной оси *Op* против движения часовой стрелки. На луче полярного угла откладывается полярный радиус с учетом единицы масштаба.



СВЯЗЬ МЕЖДУ ДЕКАРТОВЫМИ И ПОЛЯРНЫМИ КООРДИНАТАМИ, при соответствующем выборе координатных систем, осуществляется через формулы:

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi \qquad (11)$$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\ \operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}.$$



Переход от уравнения линии $F(x,y)=0$, заданного в декартовых координатах, к уравнению $\Phi(\rho,\varphi)=0$, заданному в полярных координатах, осуществляется следующим образом:
в уравнение $F(x,y)=0$ вместо *x* и *y* подставляют выражения (11). Обратный переход от уравнения $\Phi(\rho,\varphi)=0$ к уравнению в декартовых координатах осуществляется с помощью формул:

$$\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\qquad \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\qquad \rho=\sqrt{x^2+y^2}. \qquad (12)$$

Уравнения эллипса гиперболы и параболы в полярной системе координат имеют общий вид:

$$\boxed{\rho = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}},$$

где p – фокальный параметр. Форма кривой зависит от значения параметров. Так, значение фокального параметра p для эллипса и гиперболы равно $p = \frac{b^2}{a}$.

Величина параметра e также влияет на форму кривой: при $e = 1$, уравнение представляет собой уравнение параболы, при $e > 1$ – уравнение гиперболы, при $e < 1$ – уравнение эллипса.

4.1. Решение задач

Пример 8. Записать полярное уравнение прямой $x = 2$.

Что следует делать	*Как следует делать*
Используем формулу $x = \rho\cos\varphi$.	Подстановка $x = \rho\cos\varphi$ в уравнение прямой $x = 2$ дает уравнение $$2 = \rho\cos\varphi,$$ которое приводится к виду $\rho = \rho(\varphi)$ путем выражения ρ из полученного уравнения, т.е. $$\rho = \frac{2}{\cos\varphi}$$ – полярное уравнение прямой $x = 2$.

Пример 9. Линия задана уравнением $\rho = \dfrac{144}{13 - 5\cos\varphi}$ в полярной системе координат. Требуется: **1)** построить линию по точкам, начиная от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$ и придавая φ значения через промежуток $\dfrac{\pi}{8}$; 2) найти уравнение данной линии в прямоугольной декартовой системе координат, у которой начало координат совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью; 3) по полученному уравнению определить, какая это линия.

<table>
<tr><th>Что следует делать</th><th>Как следует делать</th></tr>
<tr><td>

I. Составляется таблица для вычисления значений ρ.

Например, если $\varphi = \dfrac{\pi}{8}$, то $\cos\varphi = \cos\dfrac{\pi}{8} \approx 0{,}9239$.

Тогда ρ принимает значение:

$$\rho = \frac{144}{13 - 5\cos\varphi} = \frac{144}{13 - 5\cdot 0{,}9239} \approx 17{,}18.$$

По условию шаг равен $\dfrac{\pi}{8}$, следовательно, следующее значение угла будет $\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{8} = \dfrac{2\pi}{8} = \dfrac{\pi}{4}$, и т.д.

</td><td>

φ	$\rho = \dfrac{144}{13 - 5\cos\varphi}$
0^0	$\rho(0) = \dfrac{144}{13 - 5\cos 0} = \dfrac{144}{13 - 5\cdot 1} = \dfrac{144}{8} = 18$
$\dfrac{\pi}{8} = 22{,}5^0$	$\rho\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{144}{13 - 5\cos\dfrac{\pi}{8}} = \dfrac{144}{13 - 5\cdot 0{,}92388} \approx 17{,}18254$
$\dfrac{2\pi}{8} = \dfrac{\pi}{4} = 45^0$	$\rho\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{144}{13 - 5\cdot\cos\dfrac{\pi}{4}} = \dfrac{144}{13 - 5\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}} \approx \dfrac{144}{9{,}4645} \cong 15{,}215$
$\dfrac{3\pi}{8} = 67{,}5^0$	$\rho\left(\dfrac{3\pi}{8}\right) = \dfrac{144}{13 - 5\cdot\cos\dfrac{3\pi}{8}} = \dfrac{144}{13 - 5\cdot 0{,}382684} \approx 12{,}989$

</td></tr>
</table>

Что следует делать	*Как следует делать*

$\frac{4\pi}{8}=\frac{\pi}{2}=90^0$	$\rho\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{144}{13-5\cos\frac{\pi}{2}}=\frac{144}{13-5\cdot 0}=\frac{144}{13}\approx 11{,}0769$
$\frac{5\pi}{8}=112{,}5^0$	$\rho\left(\frac{5\pi}{8}\right)=\frac{144}{13-5\cdot\cos\frac{5\pi}{8}}=\frac{144}{13+5\cdot 0{,}382684}\approx 9{,}6566$
$\frac{6\pi}{8}=\frac{3\pi}{4}=135^0$	$\rho\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{144}{13-5\cdot\cos\frac{3\pi}{4}}=\frac{144}{13+5\cdot 0{,}707107}\approx 8{,}7087$
$\frac{7\pi}{8}=157{,}5^0$	$\rho\left(\frac{7\pi}{8}\right)=\frac{144}{13-5\cdot\cos\frac{7\pi}{8}}=\frac{144}{13+5\cdot 0{,}923879}\approx 8{,}1729$
$\frac{8\pi}{8}=\pi=180^0$	$\rho(\pi)=\frac{144}{13-5\cdot\cos\pi}=\frac{144}{13+5\cdot 1}=\frac{144}{18}=8$
$\frac{9\pi}{8}=202{,}5^0$	$\rho\left(\frac{9\pi}{8}\right)=\frac{144}{13-5\cos\frac{9\pi}{8}}\approx 8{,}1729$
$\frac{10\pi}{8}=\frac{5\pi}{4}=225^0$	$\rho\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{144}{13-5\cos\frac{5\pi}{4}}\approx 8{,}7087$

Что следует делать	*Как следует делать*

$\frac{11\pi}{8}=247{,}5^0$	$\rho\left(\frac{11\pi}{8}\right)=\frac{144}{13-5\cos\frac{11\pi}{8}}\approx 9{,}6566$
$\frac{12\pi}{8}=\frac{3\pi}{2}=270^0$	$\rho\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{144}{13-5\cos\frac{3\pi}{2}}\approx 11{,}0769$
$\frac{13\pi}{8}=292{,}5^0$	$\rho\left(\frac{13\pi}{8}\right)=\frac{144}{13-5\cos\frac{13\pi}{8}}\approx 12{,}989$
$\frac{14\pi}{8}=\frac{7\pi}{4}=315^0$	$\rho\left(\frac{7\pi}{8}\right)=\frac{144}{13-5\cos\frac{7\pi}{8}}\approx 15{,}215$
$\frac{15\pi}{8}=337{,}5^0$	$\rho\left(\frac{15\pi}{8}\right)=\frac{144}{13-5\cos\frac{15\pi}{8}}\approx 17{,}18254$
$\frac{16\pi}{8}=2\pi=360^0$	$\rho(2\pi)=\frac{144}{13-5\cos 2\pi}=18$

<table>
<tr><th>Что следует делать</th><th>Как следует делать</th></tr>
<tr><td>

II. Построим заданную кривую.

Для построения линии проводим из полюса лучи, соответствующие выбранным значениям φ, и на каждом луче откладываем соответствующее значение полярного радиуса (значение ρ). Полученные точки соединяем плавной кривой (см. рис. 24).

</td><td>

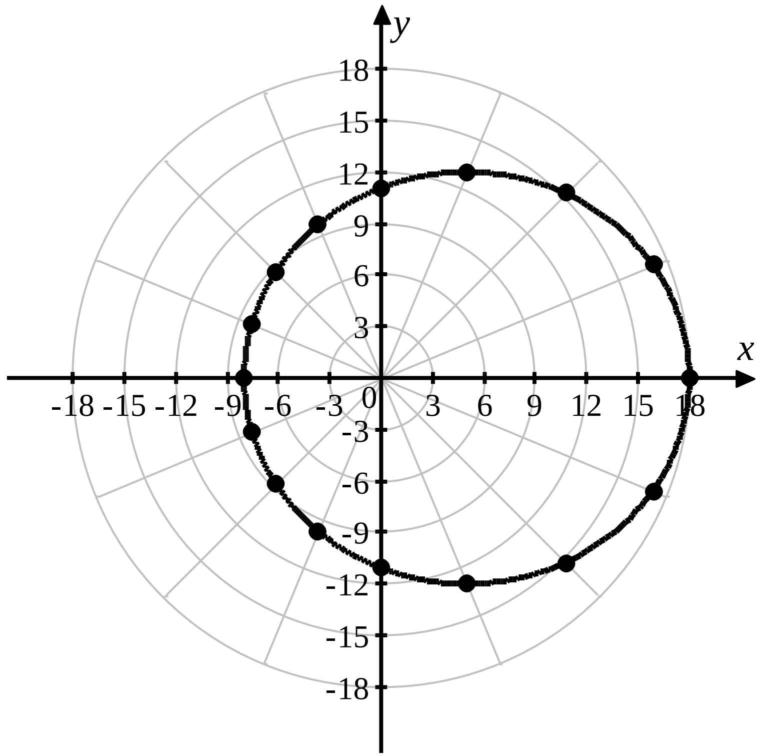


Рис. 24

</td></tr>
<tr><td>

III. Найдем уравнение данной линии в прямоугольной декартовой системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс *Ox* – с полярной осью p. Для этого воспользуемся формулами перехода к прямоугольной декар-

</td><td>

Подставим эти формулы в данное уравнение $\rho = \dfrac{144}{13-5\cos\varphi}$, получаем

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{144}{13-5\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}};$$

</td></tr>
</table>

Что следует делать	*Как следует делать*
товой системе координат $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, откуда $\rho^2=x^2+y^2$, $\cos\varphi=\dfrac{x}{r}$.	$\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{144\sqrt{x^2+y^2}}{13\sqrt{x^2+y^2}-5x}$; $1=\dfrac{144}{13\sqrt{x^2+y^2}-5x}$; $13\sqrt{x^2+y^2}-5x=144$; $13\sqrt{x^2+y^2}=144+5x$. Возведем в квадрат обе части последнего равенства: $169\left(x^2+y^2\right)=144^2+2\cdot 144\cdot 5x+25x^2$; $169x^2+169y^2-20736-1440x-25x^2=0$; $\left(144x^2-1440x+3600\right)-3600+169y^2-20736=0$; $144\left(x^2-10x+25\right)+169y^2=3600+20736$; $144(x-5)^2+169y^2=24336$. Разделим обе части последнего уравнения на 24336: $\dfrac{(x-5)^2}{169}+\dfrac{y^2}{144}=1$. Полученное уравнение – уравнение эллипса с центром в точке $A(5;\ 0)$, полуоси которого $a=\sqrt{169}=13$, $b=\sqrt{144}=12$.

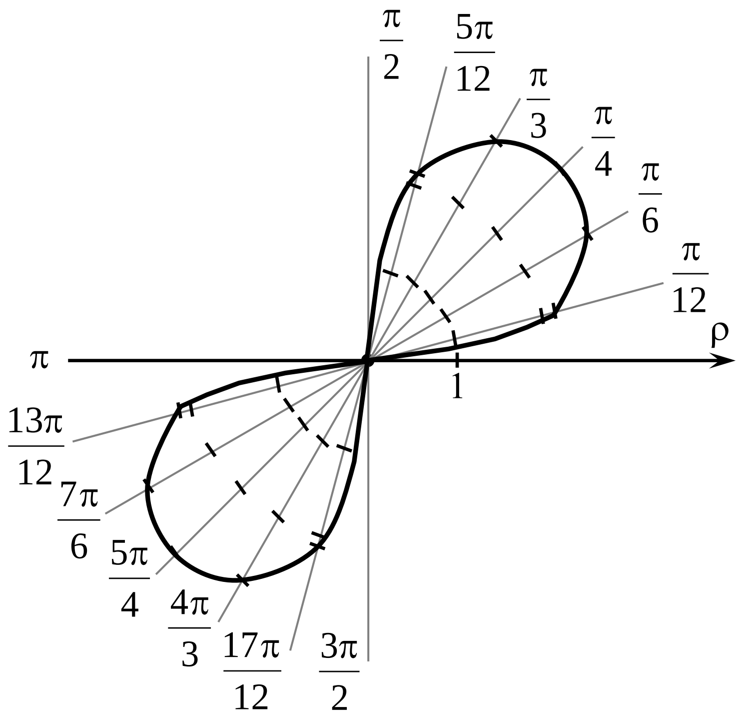
Пример 10. Дано полярное уравнение линии $\rho^2 = 9\sin 2\varphi$. Построить эту линию по точкам, придавая углу φ значения через промежуток $\dfrac{\pi}{12}$. Записать полярное уравнение линии в декартовых координатах.

<table>
<tr><th>Что следует делать</th><th>Как следует делать</th></tr>
<tr><td>I. Определим, как может изменяться угол φ, исходя из области определения исходной функции.</td><td>Так как $\rho^2 \ge 0$, то решаем неравенство
$$9\sin 2\varphi \ge 0 \quad \text{или} \quad \sin 2\varphi \ge 0.$$
Так как решением неравенства $\sin t \ge 0$ определяется объединением бесконечного множества промежутков вида $[2k\pi; \pi + 2k\pi]$, $k \in Z$, то имеем
$$2k\pi \le 2\varphi \le (2k+1)\cdot\pi.$$
При $k = 0$ получаем $0 \le 2\varphi \le \pi$ или $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.
При $k = 1$ получаем $2\pi \le 2\varphi \le 3\pi$ или $\pi \le \varphi \le \dfrac{3\pi}{2}$.</td></tr>
<tr><td>II. Учитывая полученные значения для угла φ, составляется таблица для вычисления значений ρ.
Например, если $\varphi = \dfrac{\pi}{12}$, то $2\varphi = 2\cdot\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6}$.
Так как $\sin 2\varphi = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$, то ρ принимает значение:</td><td>
<table>
<tr><td></td><td>2φ</td><td>$\sin 2\varphi$</td><td>$\rho = 3\sqrt{\sin 2\varphi}$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$ (I четверть)</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{\pi}{12}$</td><td>$\dfrac{\pi}{6}$</td><td>0,5</td><td>2,12</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{2\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6}$</td><td>$\dfrac{\pi}{3}$</td><td>0,87</td><td>2,79</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

$$\rho = \sqrt{9\sin 2\varphi} = 3\sqrt{\sin 2\varphi} = 3 \cdot \sqrt{0{,}5} \approx 2{,}12.$$

По условию шаг равен $\frac{\pi}{12}$, следовательно, следующее значение угла будет $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$, и т.д.

$\frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	1	3
$\frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	0,87	2,79
$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$	0,5	2,12
$\frac{6\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$	π	0	0
$\pi \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}$ **(III четверть)**			
π	2π	0	0
$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{13\pi}{6}$	0,5	2,12
$\frac{14\pi}{12} = \frac{7\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{3}$	0,87	2,79
$\frac{15\pi}{12} = \frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$	1	3
$\frac{16\pi}{12} = \frac{4\pi}{3}$	$\frac{8\pi}{3}$	0,87	2,79
$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{17\pi}{6}$	0,5	2,12
$\frac{18\pi}{12} = \frac{3\pi}{2}$	3π	0	0

III. Построим заданную кривую. При построении будем учитывать следующее. Как видно из полученной таблицы, при изменении угла φ в пределах третьей четверти $\sin 2\varphi$ будет принимать те же значения, что и в первой четверти. Поэтому линия будет располагаться симметрично относительно начала координат. Для построения линии проводим из полюса лучи, соответствующие выбранным значениям φ, и на каждом луче откладываем соответствующее значение полярного радиуса (значение ρ). Полученные точки соединяем плавной кривой (см. рис. 25).	 **Рис. 25** Линия носит название ***лемнискаты Бернулли***.
VI. Приведем исходное уравнение кривой в декартову систему координат. Для этого воспользуемся формулой $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$ и формулами (12).	Приводим исходное уравнение к виду: $$\rho^2 = 9\sin 2\varphi = 18\sin\varphi\cos\varphi,$$ $$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = 18\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$ $$x^2+y^2 = \frac{18xy}{x^2+y^2},$$

	$\left(x^2+y^2\right)^2=18xy$ – уравнение лемнискаты Бернулли в декартовых координатах.

4.2. Задачи для самостоятельного решения

Полярные координаты

Задача XI. Построить графики функций в полярной системе координат по точкам, давая значения углу φ от нуля через интервал, указанный в квадратных скобках. Найти уравнения в прямоугольной системе координат (отрицательное r не учитывается).

Вариант	Задание		Вариант	Задание		Вариант	Задание	
1.	**а)** $r=\cos 4\varphi$,	$\left[\frac{\pi}{16}\right]$	**2.**	**а)** $r=3\cos^2 2\varphi$,	$\left[\frac{\pi}{12}\right]$	**3.**	**а)** $r=2+\cos 3\varphi$,	$\left[\frac{\pi}{18}\right]$
	б) $r=\frac{5}{1-\cos\varphi}$,	$\left[\frac{\pi}{8}\right]$		**б)** $r=3+\cos\varphi$,	$\left[\frac{\pi}{8}\right]$		**б)** $r=1+\sin\varphi$,	$\left[\frac{\pi}{8}\right]$
4.	**а)** $r=2+\sin 3\varphi$,	$\left[\frac{\pi}{18}\right]$	**5.**	**а)** $r=\frac{6}{1-\cos\varphi}$,	$\left[\frac{\pi}{8}\right]$	**6.**	**а)** $r=6\cos 4\varphi$,	$\left[\frac{\pi}{16}\right]$
	б) $r=\frac{1}{1+\cos\varphi}$,	$\left[\frac{\pi}{8}\right]$		**б)** $r=2\cos 4\varphi$,	$\left[\frac{\pi}{16}\right]$		**б)** $r=6(1+\cos 3\varphi)$,	$\left[\frac{\pi}{18}\right]$

7.	**а)** $r=\dfrac{1}{2-2\cos\varphi}$, $\left[\dfrac{\pi}{8}\right]$	**8.**	**а)** $r^2=9\cos 2\varphi$, $\left[\dfrac{\pi}{12}\right]$	**9.**	**а)** $r=\dfrac{9}{4-5\cos\varphi}$, $\left[\dfrac{\pi}{8}\right]$
	б) $r=3+3\cos\varphi$, $\left[\dfrac{\pi}{18}\right]$		**б)** $r=3+3\sin\varphi$, $\left[\dfrac{\pi}{8}\right]$		**Б)** $r=5+\sin\varphi$, $\left[\dfrac{\pi}{8}\right]$
10.	**а)** $r=6\cos 3\varphi$, $\left[\dfrac{\pi}{18}\right]$	**11.**	**а)** $r=6\cos 2\varphi$, $\left[\dfrac{\pi}{12}\right]$	**12.**	**а)** $r=7\cos 4\varphi$, $\left[\dfrac{\pi}{16}\right]$
	б) $r=\dfrac{5}{2+\cos\varphi}$, $\left[\dfrac{\pi}{8}\right]$		**б)** $r=12(1+\cos\varphi)$, $\left[\dfrac{\pi}{8}\right]$		**б)** $r=\dfrac{2}{1-\cos\varphi}$, $\left[\dfrac{\pi}{8}\right]$
13.	**а)** $r=6\sin 3\varphi$, $\left[\dfrac{\pi}{18}\right]$	**14.**	**а)** $r=\dfrac{9}{5-4\cos\varphi}$, $\left[\dfrac{\pi}{8}\right]$	**15.**	**а)** $r=4(1+\cos\varphi)$, $\left[\dfrac{\pi}{8}\right]$
	б) $r=8(1+\sin\varphi)$, $\left[\dfrac{\pi}{8}\right]$		**б)** $r=4+\sin 3\varphi$, $\left[\dfrac{\pi}{18}\right]$		**б)** $r=5\cos 2\varphi$, $\left[\dfrac{\pi}{12}\right]$
16.	**а)** $r=2+\sin 2\varphi$, $\left[\dfrac{\pi}{12}\right]$	**17.**	**а)** $r=6(1+2\cos\varphi)$, $\left[\dfrac{\pi}{8}\right]$	**18.**	**а)** $r=2+\cos 2\varphi$, $\left[\dfrac{\pi}{12}\right]$
	б) $r=\dfrac{3}{5-4\cos\varphi}$, $\left[\dfrac{\pi}{8}\right]$		**б)** $r=7\cos^2 2\varphi$, $\left[\dfrac{\pi}{12}\right]$		**б)** $r=5+5\sin\varphi$, $\left[\dfrac{\pi}{8}\right]$
19.	**а)** $r^2=8\cos 2\varphi$, $\left[\dfrac{\pi}{12}\right]$	**20.**	**а)** $r=\dfrac{2}{3-2\cos\varphi}$, $\left[\dfrac{\pi}{8}\right]$	**21.**	**а)** $r=2+\cos\varphi$, $\left[\dfrac{\pi}{8}\right]$
	б) $r=9+\sin\varphi$, $\left[\dfrac{\pi}{8}\right]$		**б)** $r=8\cos 2\varphi$, $\left[\dfrac{\pi}{12}\right]$		**б)** $r=5\cos^2 2\varphi$, $\left[\dfrac{\pi}{12}\right]$

22.	**а)** $r=4-\cos 2\varphi$, $\left[\frac{\pi}{12}\right]$ **б)** $r=\frac{1}{1-2\cos\varphi}$, $\left[\frac{\pi}{8}\right]$	**23.**	**а)** $r^2=4\cos 2\varphi$, $\left[\frac{\pi}{12}\right]$ **б)** $r=11(1+\cos 2\varphi)$, $\left[\frac{\pi}{12}\right]$	**24.**	**а)** $r=\frac{3}{5+6\cos\varphi}$, $\left[\frac{\pi}{8}\right]$ **б)** $r=12+\cos 2\varphi$, $\left[\frac{\pi}{12}\right]$
25.	**а)** $r=\frac{3}{2+\cos\varphi}$, $\left[\frac{\pi}{8}\right]$ **б)** $r=5+\sin 3\varphi$, $\left[\frac{\pi}{18}\right]$	**26.**	**а)** $r=3+2\cos 2\varphi$, $\left[\frac{\pi}{12}\right]$ **б)** $r=\frac{8}{3-2\sin\varphi}$, $\left[\frac{\pi}{8}\right]$	**27.**	**а)** $r=2-\cos 3\varphi$, $\left[\frac{\pi}{18}\right]$ **б)** $r=14+\sin\varphi$, $\left[\frac{\pi}{8}\right]$
28.	**а)** $r=8\sin^2 2\varphi$, $\left[\frac{\pi}{12}\right]$ **б)** $r=\frac{3}{5+2\cos\varphi}$, $\left[\frac{\pi}{8}\right]$	**29.**	**а)** $r=4(1+3\cos\varphi)$, $\left[\frac{\pi}{8}\right]$ **б)** $r^2=2\cos 3\varphi$, $\left[\frac{\pi}{18}\right]$	**30.**	**а)** $r=\frac{3}{1-\cos\varphi}$, $\left[\frac{\pi}{8}\right]$ **б)** $r=5+4\sin 3\varphi$, $\left[\frac{\pi}{18}\right]$

4.3. Теоретическая справка

Некоторые известные кривые, заданные параметрически, в декартовых и полярных координатах

Рассмотрим несколько классических кривых, определяемых как геометрические места точек, носящих имена ученых, занимавшихся их изучением.

1) Лемниската Бернулли – это линия, по форме напоминающая восьмерку (рис. 26). Ее автор – швейцарский математик Якоб Бернулли (1654 – 1705). Уравнение лемнискаты в прямоугольных координатах:

$$\left(x^2+y^2\right)^2-2a^2\left(x^2-y^2\right)=0,$$

уравнение в полярных координатах:

$$\rho^2=2a^2\cos2\varphi.$$

2) Спираль Архимеда – кривая, задаваемая уравнением

$$\rho=a\varphi,$$

где a – некоторое фиксированное число. На рис. 27 изображена кривая, которая называется спиралью Архимеда – в честь ученого, ее открывшего и изучившего.

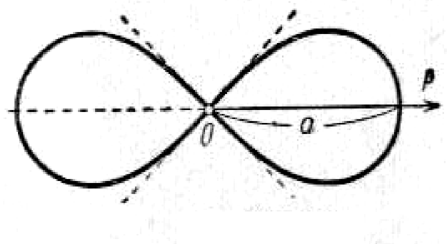


Рис. 26

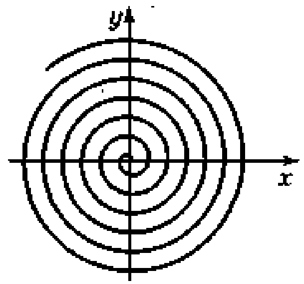


Рис. 27

Геометрическим свойством, характеризующим спираль Архимеда, является постоянство расстояний между соседними витками. Каждое из них равно $2\pi a$. Действительно, если угол φ увеличивается на 2π, то есть точка делает один оборот против часовой стрелки, то радиус увеличивается на $2\pi a$, что и составляет расстояние между соседними витками. В некоторых готовальнях в старину в состав рабочих инструментов входила металлическая пластинка с тщательно выгравированной на ней спиралью Архимеда. С помощью такого приспособления было нетрудно разделить угол на несколько равных частей.

Спираль Архимеда находит широкое применение в механике, например в кулачковых механизмах, которые преобразуют вращательное движение кулачка в поступательное движение толкателя. По спирали Архимеда идет звуковая дорожка на грампластинке. Туго свернутый рулон бумаги в профиль также представляет собой спираль Архимеда. Металлическая пластинка с профилем в виде половины витка архимедовой спирали часто используется в конденсаторе переменной емкости. Одна из деталей швейной машины – механизм для равномерного наматывания ниток на шпульку – имеет форму спирали Архимеда.

Спираль Архимеда дает линию кроя декоративного элемента – волан. Этим способом можно нарисовать волан прямо на ткани и выкроить его с минимальными отходами ткани. Таким способом можно из небольшого кусочка ткани выкроить волан достаточно большой длины. Этот способ хорош, если нужны воланы для оформления платья или юбки с ассиметричной линией кроя – то есть в тех случаях, когда равномерность и одинаковость завихрений волана не важна. На рис. 28 представлен орнамент ткани с применением спирали Архимеда.

3) Логарифмическая спираль или **изогональная спираль** — особый вид спирали, часто встречающийся в природе (рис. 29).

Логарифмическая спираль была впервые описана Декартом и позже интенсивно исследована Бернулли, который называл её *Spira mirabilis* — «удивительная спираль». Декарт искал кривую, обладающую свойством, подобным свойству окружности, так чтобы касательная в каждой точке образовывала с радиус-вектором в каждой точке один и тот же угол. Он показал, что это условие равносильно тому, что полярные углы для точек кривой пропорциональны логарифмам радиус-векторов.

Рис. 28

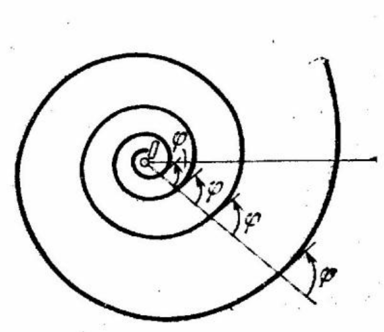


Рис. 29

В полярных координатах кривая может быть записана как $\rho = ae^{b\varphi}$, либо $\varphi = \frac{1}{b}\ln\left(\frac{r}{a}\right)$, где φ – угол отклонения точки от нуля, ρ – радиус-вектор точки, a – коэффициент, отвечающий за расстояние между витками, b – коэффициент, отвечающий за густоту витков.

В параметрической форме может быть записана как

$$\begin{cases} x(t) = \rho\cos t = ae^{bt}\cos t, \\ y(t) = \rho\sin t = ae^{bt}\sin t, \end{cases}$$

где a, b – действительные числа, t – аналог φ в выражении в полярный координатах.

Многие вещи в природе могут дать представление о логарифмической спирали, например раковина улитки, последовательные витки которой не одинаковы, а все более и более утолщаются. Семена подсолнуха расположены в соцветии по дугам логарифмической спирали, длина листьев растений от нижних к верхним часто подчинена логарифмическому закону.

По логарифмическим спиралям закручены и многие галактики, в частности Галактика, которой принадлежит Солнечная система.

Логарифмическая спираль встречается и в горном деле. План трассы спиральной формы является логарифмической спиралью.

4) Конхоида Никомеда – кривая, определяемая следующим образом. Через точку O, называемую *полюсом* конхоиды и отстоящую от прямой a, называемой ее *базисом*, на расстояние d, проведем прямую c, пересекающую прямую a в точке C. Отложим на прямой c по обе стороны от точки C на данном расстоянии l от нее точки C_1 и C_2, $CC_1 = CC_2 = l$. Проводя всевозможные прямые c, получим геометрическое место точек C_1 и C_2, образующих две ветви конхоиды. На рис. 30 показан случай, когда $d < l$.

5) Улитка Паскаля определяется так же, как и конхоида, только в качестве базиса берется не прямая, а окружность. А именно, через точку O, называемую *полюсом* и расположенную на окружности радиуса R, называемой *базисом*, проведем прямую c, пересекающую окружность в точке C. Отложим на прямой c по обе стороны от точки C, на данном расстоянии l от нее точки C_1 и C_2, $CC_1 = CC_2 = l$. Проводя всевозможные прямые c, получим геометрическое место точек C_1 и C_2, образующих улитку Паскаля. На рис. 31 показан случай, когда $2R > l$.

Полярное уравнение улитки Паскаля будет иметь вид

$$\rho = 2R\cos\varphi + l.$$

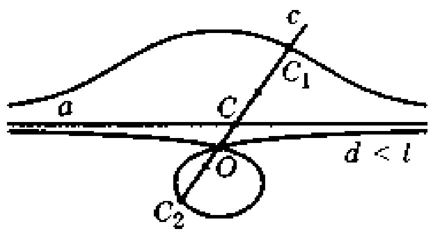


Рис. 30

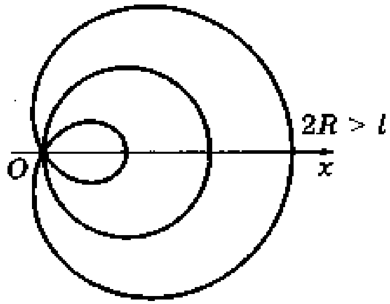


Рис. 31

Заметим, что в случае $l = 2R$ улитка Паскаля является кардиоидой.

6) Лист Декарта. Листом Декарта называется кривая, задаваемая уравнением $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (см. рис. 32).

Полагая в этом уравнении $y = tx$ и решая его относительно x, получим параметрические уравнения декартова листа:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$$

Помимо именных кривых представляют интерес следующие кривые.

7) Трилистник – кривая, задаваемая уравнением

$$\rho = \sin 3\varphi .$$

См. рис. 33.

8) Розы – семейство кривых, полярные уравнения которых имеют вид $\rho = a\sin k\varphi$, где a – положительное число, k – положительное рациональное число. Частным случаем роз является трилистник. Некоторые другие розы представлены на рис. 34.

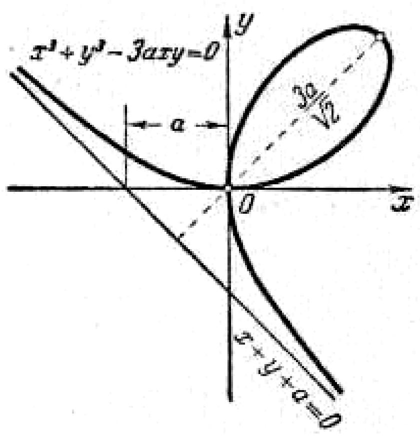


Рис. 32

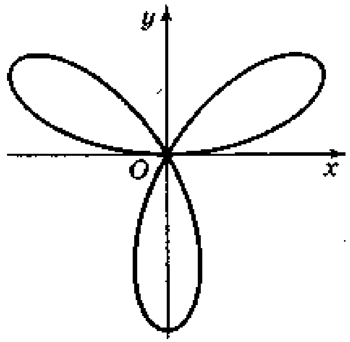


Рис. 33

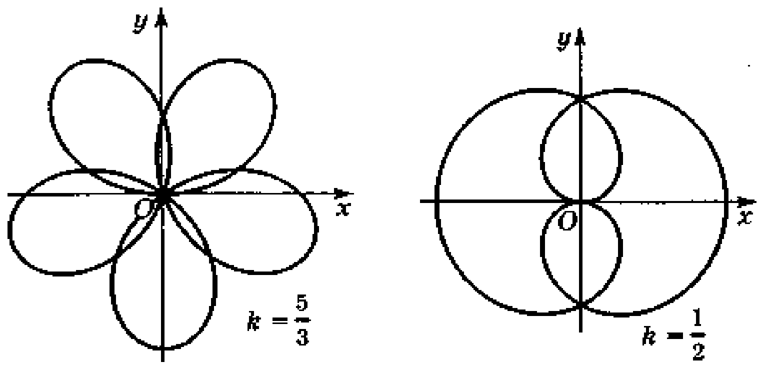


Рис. 34

9) Конхоида. Тогда полярное уравнение конхоиды (см. рис. 35) будет иметь вид

$$\rho = \frac{a}{\sin\varphi} + l .$$

10) Строфоида. Полярное уравнение строфоиды (см. рис. 36) имеет вид: $\rho = \dfrac{d}{\cos\varphi} \pm d \cdot \operatorname{tg}\varphi = d \cdot \dfrac{1 \pm \sin\varphi}{\cos\varphi}$

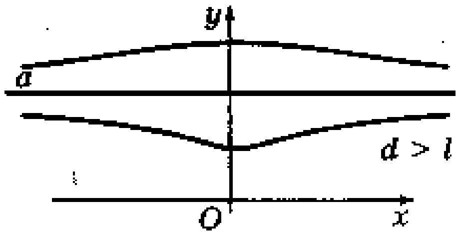


Рис. 35

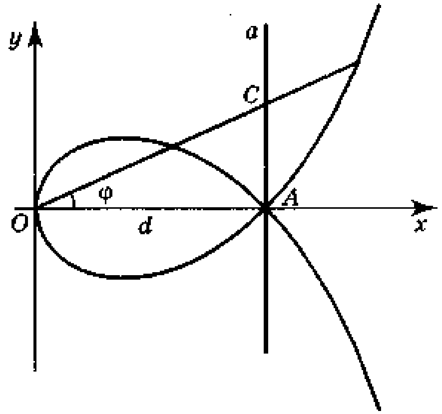


Рис. 36

11) Астроида. Уравнение астроиды (рис. 37) может быть задано как параметрически

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$

так и уравнением в декартовой системе

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

12) Лист щавеля. С помощью уравнения в полярных координатах можно задавать самые различные формы цветов и листов. В качестве примера рассмотрим лист щавеля (рис. 38), задаваемый уравнением

$$\rho = 4 \cdot (1 + \cos 3\varphi) + 4\sin^2 3\varphi.$$

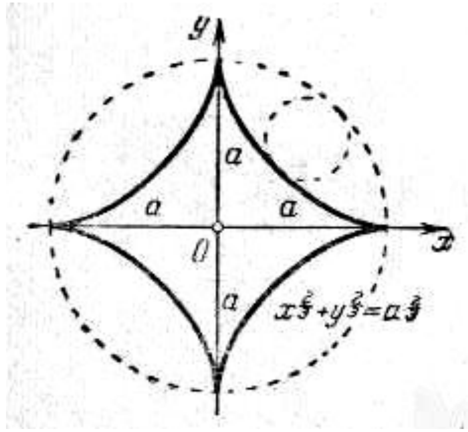


Рис. 37

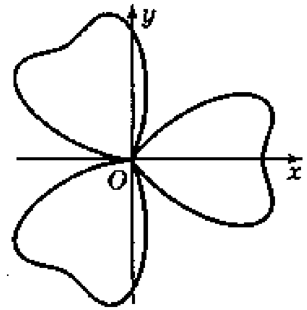


Рис. 38

13) Циклоида. Рассмотрим циклоиду – кривую, которая описывается точкой, закрепленной на окружности радиуса *R*, когда эта окружность катится по оси *Ox* (рис. 39).

Параметрическими уравнениями циклоиды являются уравнения $\begin{cases} x = R(t - \sin t), \\ y = R(1 - \cos t). \end{cases}$

Уравнение циклоиды в декартовых координатах:

$$x = R\arccos\frac{R - y}{R} - \sqrt{2Ry - y^2}.$$

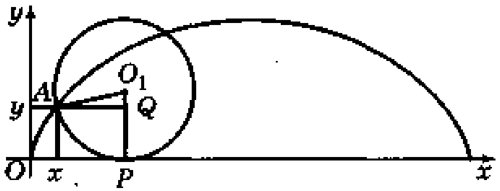


Рис. 39

14) Трохоида. Обобщением циклоиды является трохоида – траектория движения точки, закрепленной на радиусе окружности или его продолжении, когда эта окружность катится по прямой.

Параметрическими уравнениями трохоиды являются

$$\begin{cases} x = Rt - d\sin t, \\ y = R - d\cos t, \end{cases}$$

где d – расстояние от точки до центра окружности.

Если $d < R$, то кривая называется *укороченной циклоидой* (рис. 40). Если $d > R$, то кривая называется *удлиненной циклоидой* (рис. 41).

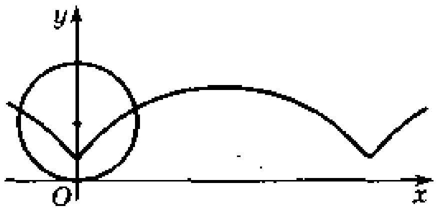


Рис. 40

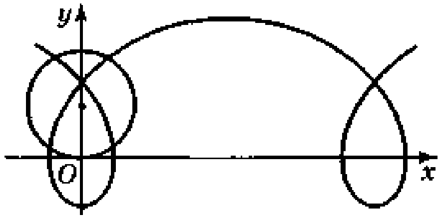


Рис. 41

15) Кардиоида – кривая, являющаяся траекторией движения точки, закрепленной на окружности, катящейся по окружности того же радиуса. Уравнение кардиоиды (рис. 42) будет имеет вид

$$\rho = 2a(1 - \cos\varphi).$$

Уравнение в декартовых координатах:

$$\left(x^2 + y^2 - 2ax\right)^2 = 4a\left(x^2 + y^2\right).$$

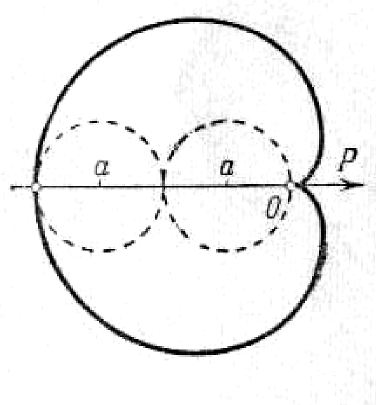


Рис. 42

Одним из основных элементов графических построений, используемых при конструировании одежды, является построение кривых второго порядка с помощью проективных дискриминантов.

В основу алгоритма графических построений, осуществляемых в автоматизированном режиме, положен метод проективных дискриминантов кривой. Такой способ графического построения кривых второго порядка является более сложным и в то же время более точным способом оформления криволинейных срезов деталей. Проективный дискриминант (f) характеризует степень кривизны кривой линии. Он определяется отношением отрезка A_1A_2, отсекаемого кривой на медиане треугольника *ABC* (рис. 43), образованного касательными к кривой в начальной и конечной точках, и хордой *BC*, к длине медианы AA_2

$$f = \frac{A_1A_2}{AA_2}.$$

Пример использования проективных дискриминантов ($f_1 = f_4 = 0{,}5$ и $f_2 = f_3 = 0{,}42$) для построения линии среза проймы показан на рис. 43.

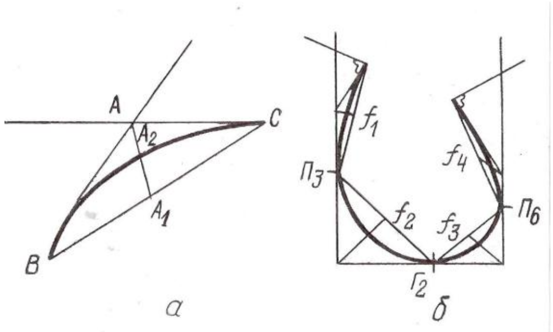
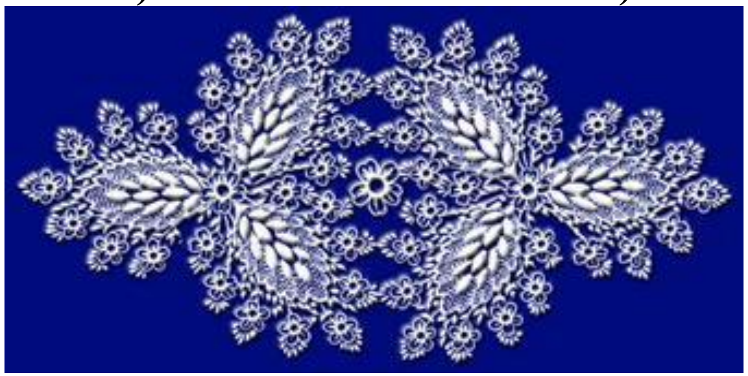


Рис. 43

Кривые второго порядка широко применяются в построении орнаментов кружева. Вот несколько примеров: на рис. 44а мы видим гипоциклоиду в качестве основного мотива; на рис. 44б листья образуют логарифмическую спираль; на рисунке 44в – трехлепестковые розы.

а)

б)



в)

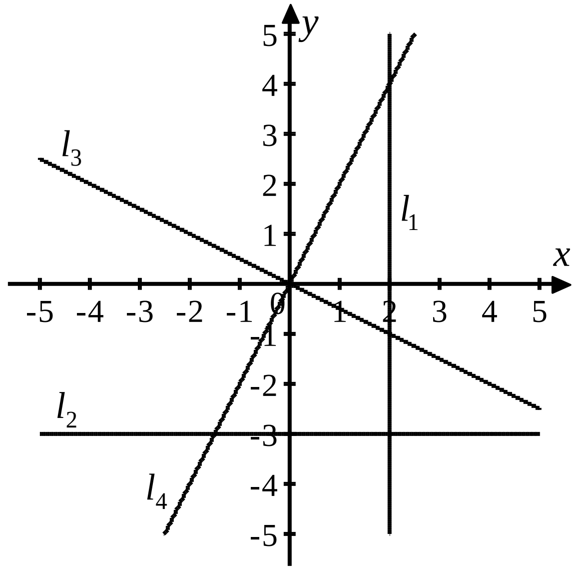
Рис. 44

Тесты по аналитической геометрии на плоскости

№ п/п	Задание	Ответ	Как решать	Правильный ответ
1.	Прямая на плоскости задана уравнением $2y-8x+11=0$. Тогда параллельными к ней являются прямые…	***Укажите не менее двух вариантов ответа:*** 1) $4x-y+5=0$; 2) $3y+12x-13=0$; 3) $3y-12x+7=0$; 4) $4x+y-9=0$.	Две прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ параллельны, если выполняется условие $\boxed{\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}}$ (разд. 2.2). Проверим выполнение этого условия для всех пар уравнений. 1) $\begin{cases}2y-8x+11=0,\\4x-y+5=0,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-8x+2y+11=0,\\4x-y+5=0,\end{cases} \Rightarrow$ $\frac{-8}{4}=\frac{2}{-1} \Rightarrow -2=-2 \Rightarrow$ условие выполняется; 2) $\begin{cases}2y-8x+11=0,\\3y+12x-13=0,\end{cases} \Rightarrow \frac{2}{3}=\frac{-8}{12} \Rightarrow \frac{2}{3}\neq-\frac{2}{3} \Rightarrow$ условие не выполняется; 3) $\begin{cases}2y-8x+11=0,\\3y-12x+7=0,\end{cases} \Rightarrow \frac{2}{3}=\frac{-8}{-12} \Rightarrow \frac{2}{3}=\frac{2}{3} \Rightarrow$ условие выполняется; 4) $\begin{cases}2y-8x+11=0,\\4x+y-9=0,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-8x+2y+11=0,\\4x+y-9=0,\end{cases} \Rightarrow \frac{-8}{4}=\frac{2}{1}$ $\Rightarrow -2\neq 2 \Rightarrow$ условие не выполняется.	*Правильные варианты ответа:* 1, 3.

2.	Точка $(-1;\,0)$ лежит на прямой, заданной уравнением …	***Укажите не менее двух вариантов ответа:*** 1) $y=-x-1$; 2) $2x+3y+1=0$; 3) $3x-y+3=0$; 4) $y=5x-5$.	Если некоторая точка $M(x_0;\,y_0)$ принадлежит прямой l, то ее координаты удовлетворяют уравнению этой прямой, т.е. подстановка координат этой точки в уравнение дает справедливое тождество. Проверим выполнение равенства для данной точки с координатами $x_0=-1,\ y_0=0$. 1) $y=-x-1,\ \Rightarrow\ \begin{array}{l}0=-(-1)-1,\\ 0=0\end{array}\ \Rightarrow$ равенство выполняется; 2) $2x+3y+1=0,\ \Rightarrow\ \begin{array}{l}2\cdot(-1)+3\cdot 0+2=0,\\ -2+1=0,\\ -1\neq 0,\end{array}\ \Rightarrow$ равенство не выполняется; 3) $3x-y+3=0,\ \Rightarrow\ \begin{array}{l}3\cdot(-1)-0+3=0,\\ -3+3=0,\\ 0=0,\end{array}\ \Rightarrow$ равенство выполняется; 4) $y=5x-5,\ \Rightarrow\ \begin{array}{l}0=5\cdot(-1)-5,\\ 0\neq -10\end{array}\ \Rightarrow$ равенство не выполняется.	*Правильные варианты ответа:* 1, 3.
3.	Если уравнение окружности имеет вид $(x-3)^2+(y-5)^2=36$, то ее центром C и радиусом R являются …	***Варианты ответов:*** 1) $C(3;\,5),\ R=6$; 2) $C(3;\,5),\ R=36$; 3) $C(-3;\,-5),\ R=36$; 4) $C(-3;\,-5),\ R=6$.	Каноническое уравнение окружности (разд. 7) с центром в точке $C(x_0;\,y_0)$ радиусом R имеет вид: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$. Рассматривая заданное уравнение $(x-3)^2+(y-5)^2=6^2$, делаем вывод, что центр сферы расположен в точке $C(3;\,5)$, а радиус этой окружности $R=6$.	*Правильный вариант ответа:* **1**.

4.	Среди прямых, заданных уравнениями $l_1:\ x-2=0$; $l_2:\ y+3=0$; $l_3:\ x+2y=0$; $l_4:\ 2x-y=0$ число неупорядоченных взаимно перпендикулярных пар прямых равно…	***Вычислите ответ:*** ______________	Условие перпендикулярности прямых $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ имеет вид: $\boxed{A_1A_2+B_1B_2=0}$. Проверим это условие для различных пар прямых. $l_1:\ x-2=0$ и $l_2:\ y+3=0;\ \Rightarrow\ 1\cdot 0+0\cdot 1=0$ – выполняется; $l_1:\ x-2=0$ и $l_3:\ x+2y=0;\Rightarrow 1\cdot 1+0\cdot 2=1\neq 0$ – не выполняется; $l_1:\ x-2=0$ и $l_4:\ 2x-y=0;\ \Rightarrow 1\cdot 2+0\cdot(-1)=2\neq 0$ – не выполняется; $l_2:\ y+3=0$ и $l_3:\ x+2y=0;\ \Rightarrow\ 0\cdot 1+1\cdot 2=2\neq 0$ – не выполняется; $l_2:\ y+3=0$ и $l_4:\ 2x-y=0;\ \Rightarrow\ 0\cdot 2+1\cdot(-1)=-1\neq 0$ – не выполняется; $l_3:\ x+2y=0$ и $l_4:\ 2x-y=0;\ \Rightarrow\ 1\cdot 2+2\cdot(-1)=0$ – выполняется. Таким образом, условие перпендикулярности выполняется для двух пар прямых: $l_1\perp l_2$ и $l_3\perp l_4$. Наличие перпендикулярных прямых можно проверить также, построив эти прямые в плоскости xOy. $l_1:\ x-2=0;\Rightarrow\ x=2$, $l_2:\ y+3=0;\ \Rightarrow\ y=-3$, $l_3:\ x+2y=0;\ \Rightarrow\ y=-\dfrac{1}{2}x$, $l_4:\ 2x-y=0\ \Rightarrow\ y=2x$.	*Ответ:* 2.

			Из графика (рис. 45) видно, что взаимно перпендикулярными являются прямые l_1 и l_2, а также l_3 и l_4. Следовательно, количество неупорядоченных взаимно перпендикулярных пар прямых равно 2.  **Рис. 45**	
5.	Ордината точки пересечения прямой $3x-2y+12=0$ с осью Oy равна…	***Варианты ответов:*** 1) 6; 2) – 2; 3) – 6; 4) – 4.	Чтобы найти точки пересечения графика функции с осью Oy, в уравнение линии следует подставить значение $x=0$. В данном случае получаем: $3x-2y+12=0;$ $3\cdot 0-2y+12=0;$ $-2y=-12;$ $y=6.$	*Правильный вариант ответа:* 1.

<table>
<tr>
<td>6.</td>
<td>Даны две смежные вершины квадрата $A(3;-7)$ и $B(-1;4)$. Тогда площадь квадрата равна …</td>
<td>Варианты ответов:
1) 25;
2) 5;
3) 137;
4) $\sqrt{137}$.</td>
<td>Площадь квадрата вычисляется по формуле: $S=a^2$.
Требуется найти длину стороны квадрата. Для этого вычислим расстояние между смежными вершинами $A(3;-7)$ и $B(-1;4)$ по формуле (разд. 2.1):
$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.
Тогда величина стороны квадрата
$a=AB=\sqrt{(-1-3)^2+(4-(-7))^2}=\sqrt{16+121}=\sqrt{137}$,
а площадь квадрата $S=a^2=\left(\sqrt{137}\right)^2=137$ ед^2.</td>
<td>Правильный вариант ответа: 3.</td>
</tr>
<tr>
<td>7.</td>
<td>Установите соответствие между кривой второго порядка и ее уравнением.
1. Парабола.
2. Эллипс.
3. Гипербола.</td>
<td>Укажите соответствие для каждого нумерованного элемента задания:
☐ $x^2+4y^2=1$
☐ $y^2=4x$
☐ $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$
☐ $x^2-4y^2=0$
☐ $x+4y=1$</td>
<td>Для того, чтобы установить соответствие, необходимо вспомнить канонические уравнения кривых второго порядка (разд. 3).
Парабола: $\begin{cases} x^2=2py, \\ y^2=2px, \end{cases} \Rightarrow$ из данных уравнений уравнением параболы является $y^2=4x$.
Эллипс: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow$ $x^2+4y^2=1$; $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{1/4}=1$
Гипербола: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow$ $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$</td>
<td>Ответ:
$\boxed{2}$
$\boxed{1}$
$\boxed{3}$
☐
☐</td>
</tr>
</table>

8.	Прямая линия проходит через точки $M_1(1;-2)$ и $M_2(2;3)$. Тогда она пересекает ось Ox в точке…	***Варианты ответов:*** 1) $(1{,}4;0)$ 2) $(1{,}6;0)$ 3) $(0;7)$ 4) $(0;-7)$	Составим уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(1;-2)$ и $M_2(2;3)$ по формуле: $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$; $\frac{y+2}{3+2}=\frac{x-1}{2-1}$; $\frac{y+2}{5}=\frac{x-1}{1}$; $y+2=5(x-1)$; $y+2-5x+5=0$; $5x-y-7=0$. Чтобы найти точки пересечения графика функции с осью Ox, в уравнение линии следует подставить значение $y=0$. В данном случае получаем: $5x-0-7=0$; $5x=7$; $x=1{,}4$.	*Правильный вариант ответа:* **1**.
9.	Длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, заданную уравнением $3x-4y-10=0$, равна…	***Варианты ответов:*** 1) 2 2) 10 3) 17 4) 5	Длину искомого перпендикуляра можно определить как расстояние от точки $A(x_0;y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ по формуле: $\boxed{d=\frac{\lvert Ax_0+By_0+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}}$. Применим формулу для прямой $3x-4y-10=0$ и точки $O(0;0)$: $d=\frac{\lvert 3\cdot 0-4\cdot 0-10\rvert}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{\lvert -10\rvert}{\sqrt{9+16}}=\frac{10}{\sqrt{25}}=\frac{10}{5}=2$.	*Правильный вариант ответа:* **1**.

10.	Уравнение прямой линии $x-y-1=0$ в полярных координатах имеет вид…	***Варианты ответов:*** 1) $r=-\dfrac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi}$ 2) $r=\dfrac{1}{\sin\varphi-\cos\varphi}$ 3) $r=\dfrac{1}{\cos\varphi-\sin\varphi}$ 4) $r=\dfrac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi}$	Для того, чтобы составить полярное уравнение линии $x-y-1=0$, используем формулы перехода от декартовых координат к полярным координатам (разд. 4): $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$. Подставим выражения для x и y в уравнение прямой: $x-y-1=0;$ $r\cos\varphi-r\sin\varphi-1=0;$ $r(\cos\varphi-\sin\varphi)=1;$ $r=\dfrac{1}{\cos\varphi-\sin\varphi}.$	*Правильный вариант ответа:* **3**.

Тесты для самостоятельного выполнения

ЗАДАНИЕ N 1. Окружность задана уравнением $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. Тогда правильными утверждениями являются …	**Укажите не менее двух вариантов ответа:** **1)** если $a>0>b$, то центр окружности лежит в четвертой четверти **2)** если $0<b<R$, то окружность пересекается с осью абсцисс **3)** точка с координатами $(a-0{,}4R;b+0{,}6R)$ лежит на окружности **4)** если $b=0$, то центр окружности лежит на оси ординат
ЗАДАНИЕ N 2. Вектор $\bar{c}=2\bar{i}+\bar{j}$ коллинеарен вектору …	**ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:** **1)** $\bar{e}=\bar{i}+2\bar{j}$ **2)** $\bar{d}=4\bar{i}+2\bar{j}$ **3)** $\bar{f}=\bar{i}-2\bar{j}$ **4)** $\bar{i}$
ЗАДАНИЕ N 3. Радиус окружности, заданной уравнением $x^2-4x+y^2=0$, равен …	**ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:** **1)** 2 **2)** 4 **3)** – 2 **4)** 1
ЗАДАНИЕ N 4. На плоскости введены прямоугольная и полярная системы координат, причем полюс расположен в точке с декартовыми координатами $(1;0)$, и полярная ось по направлению совпадает с положительной полуосью абсцисс. Если (ρ,φ) – полярные координаты точки M, то абсцисса этой точки равна …	**ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:** **1)** $1+\rho\sin\varphi$ **2)** $1+\rho\cos\varphi$ **3)** $\rho\sin\varphi$ **4)** $\rho\cos\varphi$

ЗАДАНИЕ N 5. Прямая на плоскости задана уравнением $2y-8x+11=0$. Тогда параллельными к ней являются прямые …	**Укажите не менее двух вариантов ответа:** **1)** $4x-y+5=0$ **2)** $3y+12x-13=0$ **3)** $3y-12x+7=0$ **4)** $4x+y-9=0$
ЗАДАНИЕ N 6. Полюс полярной системы координат совмещен с началом декартовой системы координат, а полярная ось совпадает с положительной полуосью абсцисс. Тогда точка $(6;y)$, заданная в декартовой системе координат, имеет полярный радиус $\rho=10$ при y равном …	**ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:** **1)** ± 8 **2)** ± 4 **3)** 16 **4)** 4
ЗАДАНИЕ N 7. Среди прямых, заданных уравнениями l_1: $y=3x+1$; l_2: $x+3y-1=0$; l_3: $3x+1=0$; l_4: $3y-1=0$, число неупорядоченных взаимно перпендикулярных пар прямых равно …	**ВЫЧИСЛИТЕ ОТВЕТ:**
ЗАДАНИЕ N 8. Точка M с декартовыми координатами $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$ имеет полярные координаты …	**ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:** **1)** $r=2,\ \varphi=\frac{7\pi}{6}$ **2)** $r=\sqrt{2},\ \varphi=\frac{7\pi}{6}$ **3)** $r=\sqrt{2},\ \varphi=\frac{5\pi}{6}$ **4)** $r=1,\ \varphi=\frac{7\pi}{6}$
ЗАДАНИЕ N 9. На плоскости введены прямоугольная и полярная системы координат, причем положительная полуось абсцисс совпадает с полярной осью. Если $(2;7)$ – прямоугольные координаты точки M, то точка M лежит …	**ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:** **1)** в четвертой четверти **2)** в третьей четверти **3)** во второй четверти **4)** в первой четверти

ЗАДАНИЕ N 10. Если $C(1;1)$ – центр окружности, которая проходит через точку $A(9;7)$, то уравнение этой окружности имеет вид …	**ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:** **1)** $(x-1)^2+(y-1)^2=100$ **2)** $(x-1)^2+(y-1)^2=10$ **3)** $(x-9)^2+(y-7)^2=100$ **4)** $(x+1)^2+(y+1)^2=100$
ЗАДАНИЕ N 11. Полярные координаты точки A (2; 1) имеют вид…	**ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:** **1)** $\left(\sqrt{5};\mathrm{arctg}2\right)$ **2)** $\left(\sqrt{5};\mathrm{arctg}\frac{1}{2}\right)$ **3)** $(5;\mathrm{arctg}2)$ **4)** $\left(5;\mathrm{arctg}\frac{1}{2}\right)$
ЗАДАНИЕ N 12. Расстояние между точками B (– 3; – 4) и D (6; 8) равно…	**ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:** **1)** 13 **2)** 16 **3)** 14 **4)** 15
ЗАДАНИЕ N 13. Параболой является …	**Укажите не менее двух вариантов ответа:** **1)** $x^2=4y$ **2)** $y^2=4x$ **3)** $x^2+4y^2=1$ **4)** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$
ЗАДАНИЕ N 14. Укажите правильное соответствие между уравнениями и типами уравнений прямой на плоскости. 1. $2x-5y-9=0$ 2. $y=-3x+7$ 3. $x=6$	**Укажите соответствие для каждого нумерованного элемента задания:** ☐ уравнение прямой, параллельной оси ординат ☐ общее уравнение прямой ☐ уравнение прямой в отрезках на осях ☐ уравнение прямой с угловым коэффициентом ☐ уравнение прямой, параллельной оси абсцисс

ЗАДАНИЕ N 15. Полярные координаты точки $A\left(3;-3\sqrt{3}\right)$ имеют вид…	**ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:** **1)** $\left(6;\frac{\pi}{3}\right)$ **2)** $\left(6;\frac{\pi}{6}\right)$ **3)** $\left(36;-\frac{\pi}{3}\right)$ **4)** $\left(6;\frac{5\pi}{3}\right)$
ЗАДАНИЕ N 16. Кривая в полярной системе координат задана уравнением $r=2\cos\varphi$. Тогда ее уравнение в прямоугольной системе координат имеет вид…	**ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:** **1)** $(x-1)^2+y^2=1$ **2)** $(x+1)^2+y^2=1$ **3)** $x^2+(y-1)^2=1$ **4)** $x^2+y^2=2$
ЗАДАНИЕ N 17. Прямые $4x-5y-1=0$ и $5x+4y-2=0$ …	**ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:** **1)** пересекаются под острым углом **2)** совпадают **3)** параллельны **4)** перпендикулярны
ЗАДАНИЕ N 18. Уравнение $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{25}=1$ на плоскости определяет…	**ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:** **1)** гиперболу **2)** эллипс **3)** параболу **4)** пару прямых
ЗАДАНИЕ N 19. В полярной системе координат дана точка $M\left(8;\frac{\pi}{6}\right)$. Тогда расстояние от нее до полярной оси равно…	**ВАРИАНТЫ ОТВЕТОВ:** **1)** 8 **2)** 4 **3)** 16 **4)** 2

Вопросы для самоконтроля

1. Метод координат. Прямоугольная система координат на плоскости. Простейшие задачи на плоскости: деление отрезка в данном соотношении, расстояние между двумя точками, площадь треугольника. Полярные координаты. Связь между полярными и прямоугольными координатами.

2. Алгебраические линии первого порядка. Прямая на плоскости, различные способы задания уравнения прямой: общее уравнение прямой, уравнение прямой в отрезках, уравнение прямой с угловым коэффициентом, нормальное уравнение прямой. Нахождение точки пересечения прямых, угла между двумя прямыми. Угловые соотношения между прямыми. Проведение прямой через одну или две заданные точки. Расстояние от точки до прямой.

3. Линии второго порядка на плоскости: окружность, эллипс, гипербола и парабола. Их определение, канонические уравнения. Общее уравнение второй степени. Приведение общего уравнения к каноническому виду.

4. Полярная система координат. Связь между полярными и декартовыми координатами.

Список используемой литературы

1. Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л. Прямые и кривые. – 3-е изд. – М.: МЦНМО, 2000. – 256 с.

2. Волкова Е., Епишева О. Развитие математики: этапы, проблемы, достижения. // Математика. – 1996. – № 37.– С. 11–13.

3. Гусак А.А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: справочное пособие к решению задач / А.А. Гусак. – Изд. 3-е, стереотип. – Мн.: ТетраСистемс, 2003. – 288 с.

4. Дорофеева А.В. Из истории векторного исчисления. // Математика в школе. – 1998. – №2. – С. 91–93.

5. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика: Учеб. пособие для техникумов. – М.: Высш. шк., 1991. – 480 с.

6. Маркушевич А.И. Замечательные кривые. – М.-Л.: Гос. изд. техн.-теор. лит., 1951. – 245 с.

7. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики: Учебное пособие. – Л.: Физматгиз, 1963. – 748 с.

8. Савелов А.А. Плоские кривые. – М.: Физматгиз, 1960. – 458 с.

9. Задачник-практикум по аналитической геометрии и высшей алгебре: Учебное пособие под общей редакцией В.А. Волкова – Ленинград: ЛГУ, 1986. – 260 с.

10. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учебное пособие / Под ред. В.И. Ермакова. – М.: Инфра-М, 2002. – 575 с.

11. Полный курс современного рукоделия. — Издательство: Харвест, 2007 г, 336 с.

12. Радченко И.А. Конструирование и моделирование одежды на нетиповые фигуры. Учеб пособие. – издательство «Академия» 2009 г.