Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Казанский государственный технологический университет»
**Нижнекамский химико-технологический институт**

# НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ. НАТУРАЛЬНАЯ ВЕЛИЧИНА ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

**Нижнекамск**
**2009**

**УДК 515**
**Н 36**

Начертательная геометрия. Натуральная величина плоской фигуры : методические указания / сост. О.А. Маркова. – Нижнекамск : Нижнекамский химико-технологический институт (филиал) КГТУ, 2009. – 16 с.

Содержат основные положения различных преобразований чертежа, на которых базируются решения метрических и позиционных задач начертательной геометрии.

Предназначены для студентов технических специальностей, изучающих начертательную геометрию. Содержание методических указаний позволит студентам закрепить знания ряда тем начертательной геометрии и самостоятельно в каждом конкретном случае выбрать вариант решения задач.

Подготовлены на кафедре «Техника и физика низких температур» НХТИ КГТУ.

Печатаются по решению редакционно-издательского совета Нижнекамского химико-технологического института (филиала) КГТУ.

**Рецензенты:**
**Закиров М.А.,** кандидат технических наук, доцент;
**Гарипов М.Г.,** кандидат технических наук, доцент.

**УДК 515**

Методические указания составлены в соответствии с программой курса «Начертательная геометрия». Цель настоящего указания - научить студентов применять различные способы решения при выполнении задания, выбирая предпочтительный способ в каждом конкретном случае.

**Темы, необходимые для решения задачи.**

1. Задание точки, прямой, плоскости.
2. Прямые плоскости.
3. Конкурирующие точки.
4. Способ прямоугольного треугольника.
5. Способ замены плоскостей проекций.
6. Способ вращения.
7. Способ совмещения.
8. Способ плоскопараллельного перемещения.

**Принятые обозначения и сокращения**

| | |
|---|---|
| Плоскости проекций | $\pi_1$ – *горизонтальная,*<br>$\pi_2$ – *фронтальная,*<br>$\pi_3$ – *профильная* |
| Оси проекций | *OX, OY, OZ* |
| Точки | *A, B, C…* или *1, 2, 3…* |
| Прямые | *AB, CD…* или *a, b, c…* |
| Плоскости | $\alpha, \beta, \lambda, \gamma \ldots$ |
| Проекции на плоскость $\pi_1$ | $A_1, B_1, C_1\ldots$ или $1_1, 2_1, 3_1\ldots$ |
| Проекции на плоскость $\pi_2$ | $A_2, B_2, C_2\ldots$ или $1_2, 2_2, 3_2\ldots$ |
| Проекции на плоскость $\pi_3$ | $A_3, B_3, C_3\ldots$ или $1_3, 2_3, 3_3\ldots$ |
| Горизонталь (проекции горизонтали) | $H\ (h_1, h_2)$ |
| Фронталь (проекции фронтали) | $F\ (f_1, f_2)$ |
| Точка | тчк |
| Треугольник | $\Delta$ |
| Прямой угол | ┐ |
| Натуральная величина | н.в. |
| Прямоугольный треугольник | ◺ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Совпадение | $\equiv$ | Перпендикулярность | $\perp$ |
| Равенство | $=$ | Параллельность | // |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Взаимная принадлежность | $\in$ | Пересечение | $\cap$ |
| Логическое следствие | $\Rightarrow$ | Приблизительное равенство | $\approx$ |

**Задача**: Определить натуральную величину треугольника, задающего плоскость (рис.1).

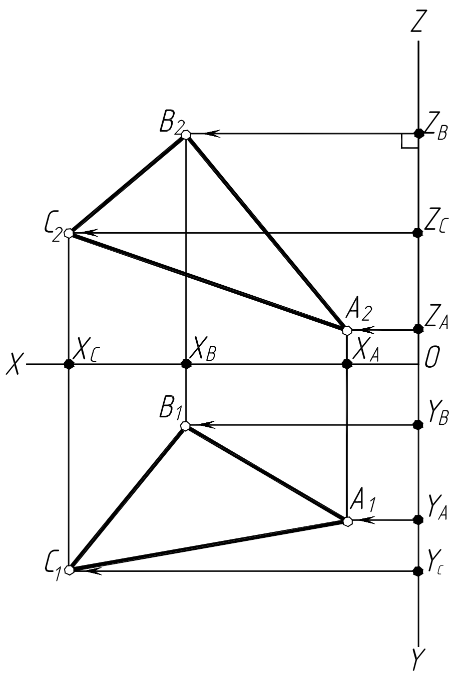


Рис. 1.

**Анализ задачи:**

1. Плоскость, заданная треугольником *ABC*, относительно системы плоскостей проекций $\pi_1\ \pi_2\ \pi_3$ занимает общее положение, поэтому ни одна из проекций не отображается в натуральную величину треугольника.

Рассмотрим решение данной задачи пятью способами.

## Способ прямоугольного треугольника

Способ прямоугольного треугольника – метрический способ решения данной задачи.

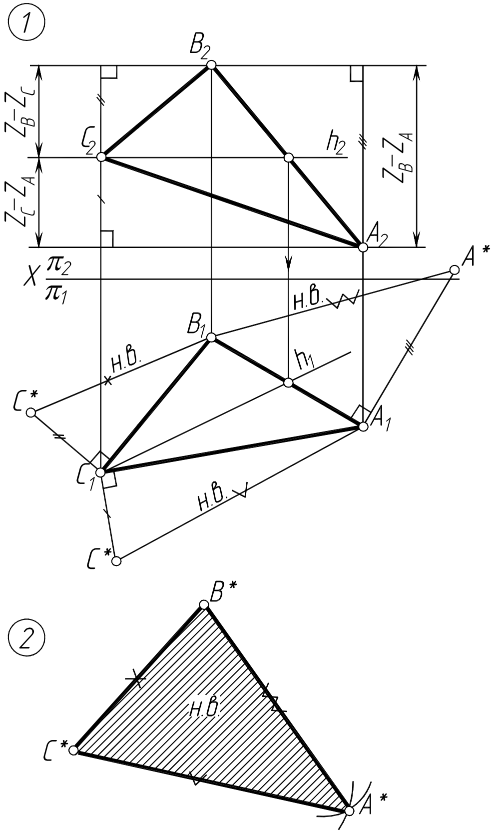


Рис. 2.

**План решения и построения:**

Способом прямоугольного треугольника определим величину каждой стороны треугольника и построим его натуральный вид.

**Построение:**

1. Заключим фронтальную проекцию [$C_2B_2$] стороны $\Delta$ $ABC$ как гипотенузу в прямоугольный треугольник, вертикальный катет которого равен $|Z_B\text{-}\ Z_C|$. Отложим этот катет под прямым углом к горизонтальной проекции [$C_1B_1$]. Гипотенуза [$C^*B_1$] треугольника

$C^*C_1B_1$получается в натуральную величину стороны $\Delta\ ABC$ - [$CB$] (рис. 2, этап 1).

2. Аналогично находим натуральные величины сторон $\Delta ABC$ -[$BA$] и [$CA$] (рис.2, этап 1).

3. В произвольном положении отложим одну из сторон треугольника (в нашем случае [$C^*B^*$]), с помощью циркуля засечками найдем положение точки $A^*$. Построенный треугольник $C^*B^*A^*$ имеет действительный вид $\Delta\ ABC$ (рис. 2, этап 2).

**Алгоритм решения:**

1. Способом  находим н.в. всех сторон $\Delta\ ABC$.
2. С помощью циркуля строим н.в. $\Delta\ ABC$ - $\Delta\ C^*B^*A^*$.

Задачу можно решить по аналогии, если первоначально найти натуральные величины сторон $\Delta\ ABC$ на плоскости проекций $\pi_2$.

Способы перемены плоскости, вращения, совмещения, перемещения – способы преобразования проекций.

## Способ перемены (замены) плоскостей проекции

**Положения:**

При проецировании предмета на дополнительную плоскость проекций предмет не меняет своего положения в пространстве по отношению к плоскостям проекций, а исходная система основных плоскостей проекций дополняется новыми, дополнительными, плоскостями проекций, которые выбираются так, чтобы получить наиболее удобные виды дополнительных проекций.

**План решения и построения:**

1. Введем в систему плоскостей проекций $\pi_1$ $\pi_2$ дополнительную плоскость так, чтобы она была перпендикулярна одновременно и одной из плоскостей проекций и плоскости, заданной треугольником, тогда последний спроецируется на новую плоскость отрезком прямой – плоскость треугольника станет проецирующей.

2. В новую систему плоскостей введем вторую дополнительную плоскость так, чтобы она была параллельна плоскости

треугольника $A_4B_4C_4$, тогда новая плоскость треугольника станет плоскостью уровня и треугольник спроецируется на вторую дополнительную плоскость в действительную величину.

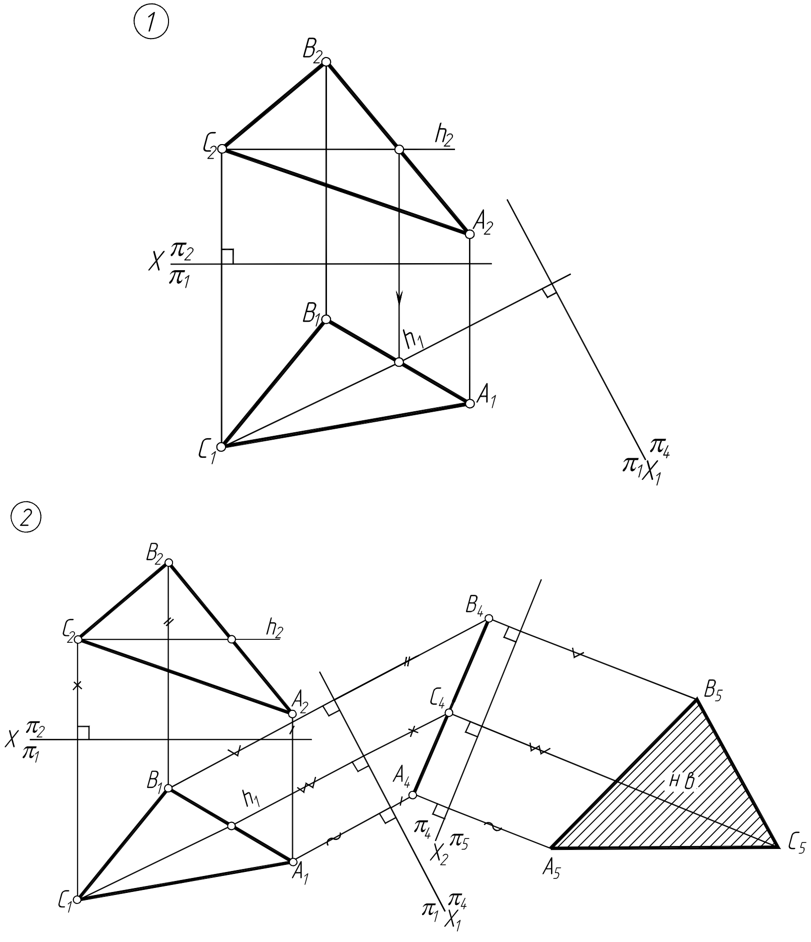


Рис. 3.

**Построение:**

1. В проекциях $\Delta$ *ABC* проведем проекции горизонтали $H - h_2$, $h_1$ (рис. 3, этап 1).

2. Введем в систему плоскостей проекций $\pi_1$ $\pi_2$ дополнительную плоскость $\pi_4$ так, чтобы $\pi_4$ была перпендикулярна к $\pi_1$ и к $\Delta$ *ABC*, тогда новая ось $X_1$ пройдет перпендикулярно $h_1$ (рис. 3, этап 1).

3. На эпюре на плоскости $\pi_4$ находим проекции вершин треугольника $A_4$, $B_4$, $C_4$. От оси $X_1$ откладываем для каждой точки координату *Z*, треугольник проецируется в прямую - $A_4C_4B_4$ (рис. 3, этап 2).

4. Введем в систему плоскостей вторую дополнительную плоскость $\pi_5$, которая параллельна $\Delta$ $A_4B_4C_4$ и перпендикулярна плоскости $\pi_4$, ось $X_2$ пройдет параллельно $|A_4C_4B_4|$ (рис. 3, этап 3).

5. На плоскость $\pi_5$ треугольник спроецируется в натуральную величину - $\Delta A_5B_5C_5$ (рис. 3, этап 3).

**Алгоритм решения:**

1. В $\Delta$ *ABC* проводим $H - h_2, h_1$.
2. Систему $\pi_1\pi_2$ дополняем $\pi_4$ ($\pi_4 \perp \pi_1$; $\pi_4 \perp \Delta ABC$). Ось $X_1 \perp h_1$.
3. От $X_1$ откладываем $Z_A$, $Z_C$, $Z_B$ и получаем $|A_4C_4B_4|$.
4. Систему $\pi_1\pi_4$ дополняем $\pi_5$ ($\pi_5 \perp \pi_4$; $\pi_5 \parallel \Delta ABC$).
Ось $X_2 \parallel |A_4C_4B_4|$.
5. Проекция $\Delta A_5B_5C_5$ – н.в.

## Способ вращения

**Положения:**

Вращением фигуры вокруг оси называется такое движение, при котором каждая точка фигуры перемещается по окружности, плоскость которой перпендикулярна к оси вращения, центр расположен в точке пересечения оси вращения с плоскостью вращения, а радиус равен расстоянию от точки до оси вращения.

Свойства вращения:

1) если вращать отрезок или плоскую фигуру вокруг оси, перпендикулярной к плоскости проекций, то проекция на эту плоскость не меняется ни по виду, ни по величине – изменяется лишь положение;

2) все точки другой проекции перемещаются по прямым, параллельным оси проекций и перпендикулярным оси вращения, и проекция изменяется как по форме, так и по величине.

**План решения и построения:**

1. Сделаем плоскость треугольника *ABC* проецирующей, вращая ее вокруг проецирующей оси $i$ ($i_1$; $i_2$), которую для удобства построения выберем проходящей через одну из вершин треугольника.

2. Затем плоскость треугольника *ABC* повернем до плоскости уровня, чтобы определить его натуральную величину.

**Построение:**

1. Выбираем ось вращения $i$, которая перпендикулярна одной из плоскостей проекций, например $\pi_2$, и проходит через вершину $A$ $\Delta$ *ABC*. (т. *A*, находясь на оси, при вращении $\Delta$ *ABC* остается на месте) (рис. 4, этап 1).

2. Через вершину *A* проводим линию уровня, в нашем случае фронталь $F(f_1, f_2)$ (рис. 4, этап 1).

3. Фронталь вращаем до проецирующего положения, т.е. на эпюре проекция фронтали $f_2$ повернута до положения перпендикуляра к оси проекции $\underline{X}$ (рис. 4, этап 1).

4. На базе новой проекции $f_2$ строим с помощью засечек $\Delta$ $A_2B_2C_2$ конгруэнтный треугольнику $A_2B_2C_2$. Горизонтальная проекция $\Delta$ *ABC* спроецировалась отрезком прямой $\overline{C_1}\ \overline{A_1}\overline{B_1}$ (рис.4, этап 1).

5. Выбираем вторую ось вращения $i'$, перпендикулярную $\pi_1$. $I'$ проходит через вершину треугольника $A\ B\ C - B$ (рис. 4, этап 2).

6. Повернем горизонтальную проекцию треугольника $C_1\ A_1B_1$ до параллельности с осью $X$, получим новую проекцию $|\ B_1\ A_1C_1\ |$. Проекция $\Delta$ $A_2\ B_2\ C_2$ является натуральной величиной заданного треугольника (рис.4, этап 2).

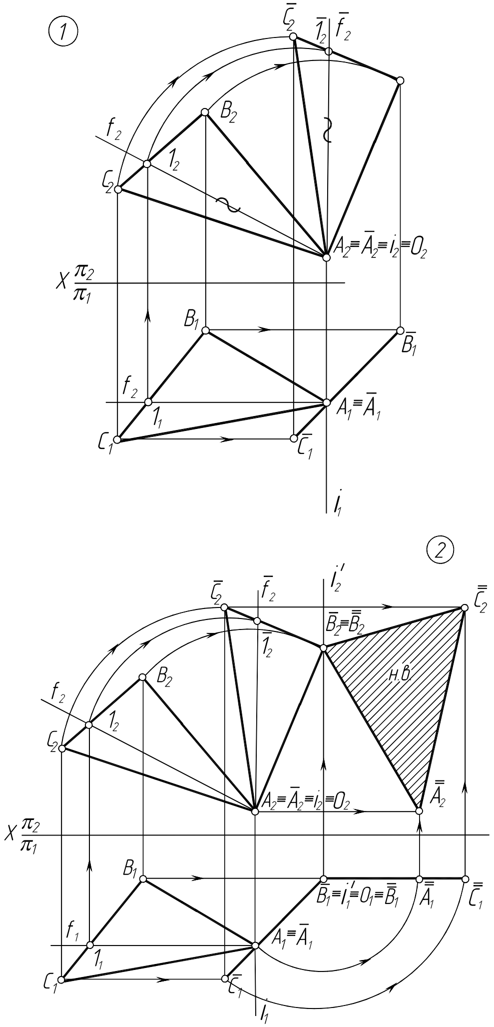


Рис. 4.

**Алгоритм решения:**

1. Проводим $i \perp \pi_2$; $A \in i$.
2. Проводим $F \in \Delta\ ABC$; $A \in F$.
3. Вращаем $f_2$ до $\perp$ оси $X$.
4. Засечками строим $\Delta\ A_2B_2C_2$; $F \perp \pi_1 \Rightarrow \Delta\ ABC \perp \pi_1$ - $|C_1A_1B_1|$.
5. Проводим $i' \perp \pi_1$; $B \in i'$.

6. Повернем $|C_1A_1B_1| \parallel$ оси$X \Rightarrow | B_1A_1C_1|$. Проекция $\Delta\ A_2B_2C_2$ – н.в. $\Delta\ ABC$.

Задачу можно решить по аналогии, если начать с построения горизонтали $H$ и выбора первой оси вращения $\perp\ \pi_1$.

## Способ совмещения

**Положения:**

Способом совмещения можно считать преобразование плоскости в плоскость уровня посредством вращения вокруг ее линии уровня.

Используя вращение вокруг линий уровня (включая и следы), можно преобразить плоскость общего положения в плоскость уровня лишь одним вращением (а не двумя, как, например, при вращении вокруг проецирующих прямых), что дает преимущество способу (при прочих равных условиях).

**План решения и построения:**

1. Совместим плоскость, заданную треугольником $ABC$, например, с положением горизонтальной плоскости, проходящей через горизонталь $H$.
2. При вращении плоскости треугольника останутся неподвижными точки, лежащие на $H$.

**Построение:**

1. В $\Delta\ ABC$ через вершину $A$ проведем горизонталь $H$ $(h_2, h_1)$, которая будет являться осью вращения. Точка $A$ останется неподвижной (рис. 5, этап 1).
2. Точки $C$ и $B$ будут вращаться в плоскостях, перпендикулярных горизонтали $H$, проведем следы этих плоскостей $\alpha_1 \perp\ h_1$ и $\beta_1 \perp\ h_1$ $(C \in\ \alpha, B \in \beta)$ (рис. 5, этап 1).
3. Плоскость $\beta$ перпендикулярна оси вращения $H$. Центр вращения $O(O_1,\ O_2)$ определяется в пересечении оси вращения с плоскостью вращения: $\beta \cap H = O$ (рис. 5, этап 1).
4. Натуральную величину радиуса вращения $OB$ $(R_B)$ определяем способом прямоугольного треугольника, отложив на перпендикуляре к $B_1O_1$ отрезок $B^*B_1$, равный разности высот точек $B$ и $O$ - $\Delta Z_{BO} = Z_B - Z_A$. Гипотенуза $B^*O_1$ будет натуральной величиной $OB$, которую отложим от $O_1$ на горизонтальном следе $\beta_1$. Получим проекцию $B_1$ повернутой точки $B$ (рис. 5, этап 2).

5. Соединим проекцию $B_1$ повернутой точки $B$ с проекцией $1_1$ неподвижной точки $1$ и отметим точку пересечения этой линии с $\alpha_1$. Это будет проекция $C_1$ повернутой точки $C$ (положение $C_1$ можно определить и аналогично нахождению нового положения точки $B$ - $B_1$). Соединив $A_1B_1C_1$, получим натуральную величину треугольника $ABC$ (рис. 5, этап 2).

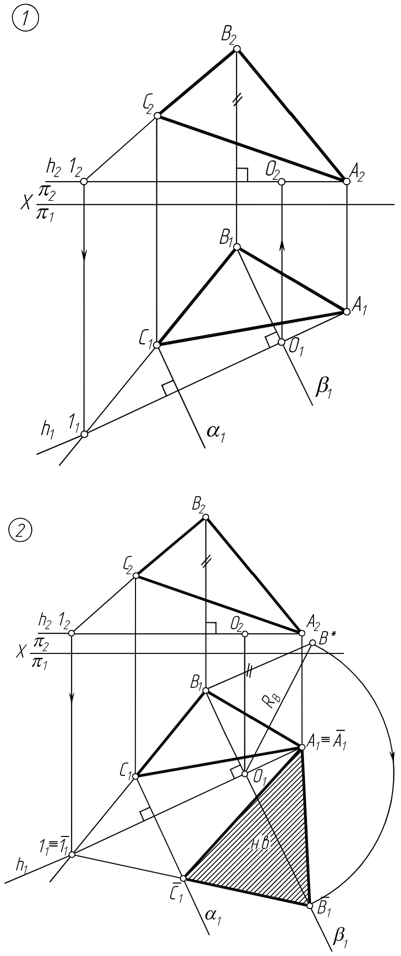


Рис.5.

**Алгоритм решения:**

1. Проводим $H$ $\Delta$ $ABC$ через $A$ - $h_2$, $h_1$.

2. Проводим следы плоскостей вращения: $\alpha_1$ и $\beta_1 \perp h_1$ - $C \in \alpha$, $B \in \beta$.

3. $\beta \perp H = O$. Определим н.в. радиуса вращения $OB$ и найдем новое положение тчк $B - B_1$.

4. Найдем новое положение тчк $C - B_1 1_1 \cap \alpha_1 = C_1$.

5. $\Delta A_1B_1C_1$ – искомая величина.

Задачу можно решить по аналогии, если совместить плоскость $\Delta ABC$ с фронтальной плоскостью уровня, при этом начинают с построения фронтали $F$.

## Способ плоскопараллельного перемещения

**Положения:**

Плоскопараллельным перемещением называется такое перемещение, при котором все точки перемещаются в параллельных плоскостях. При таком перемещении движется сам предмет, плоскости проекций остаются неподвижными.

Способ вращения без указания осей, радиусов и центров вращения (при этом соблюдаются все свойства и правила) можно рассматривать как частный случай плоскопараллельного перемещения.

**План решения и построения:**

1. Переместим плоскость, заданную треугольником $ABC$, из общего положения в частное проецирующее положение, чтобы одна из ее проекций стала прямой линией.

2. Вторым перемещением плоскость треугольника приведем в положение плоскости уровня, тогда одна из проекций треугольника будет в натуральную величину.

**Построение:**

1. В проекциях $\Delta ABC$ через вершину С проводим проекции горизонтали $H$ ($h_2$, $h_1$) (рис.6, этап 1).

2. Перемещаем проекцию $\Delta A_1B_1C_1$ в новое положение так, чтобы $h_1$ расположилась вертикально, при этом размеры проекции остаются неизменными. При таком положении горизонтали

заданная плоскость стала фронтально проецирующей и на $\pi_2$ спроецировалась отрезком прямой – $B_2C_2A_2$ (рис.6, этап 2).

3. Перемещаем $B_2C_2A_2$ параллельно оси $X$ - $B_2C_2A_2$ (рис. 6, этап 3).

4. После перемещения плоскость треугольника стала горизонтальной плоскостью уровня и проекция $\Delta$ $A_1B_1C_1$ - натуральная величина $\Delta$ $ABC$ (рис. 6, этап 3).

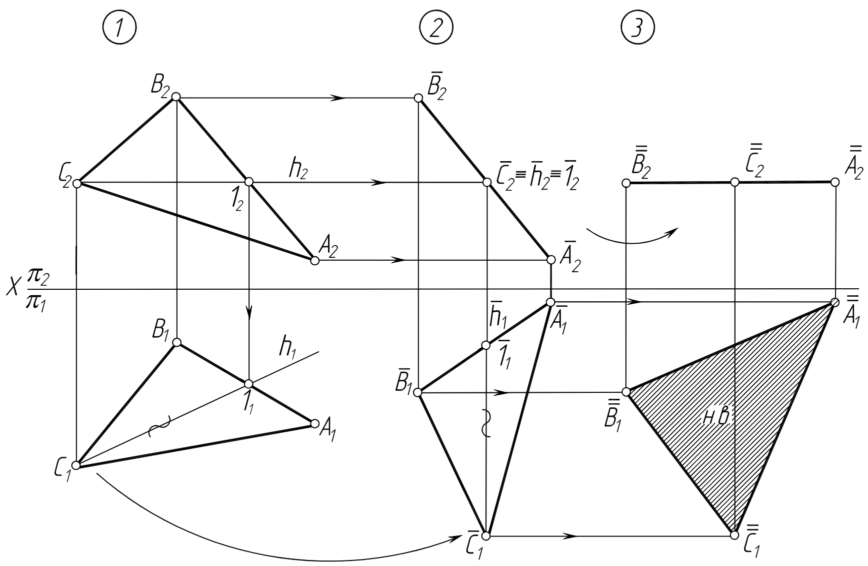


Рис. 6.

**Алгоритм решения:**

1. Через вершину $C$ $\Delta$ $ABC$ проводим $H$ ($h_2$, $h_1$).
2. Перемещаем $\Delta$ $A_1B_1C_1$ в положение, когда $h_1 \perp$ оси $X$ - $\Delta$ $A$ $B$ $C \perp \pi_2 \Rightarrow B_2C_2A_2$ - прямая линия.
3. Перемещаем $|B_2C_2A_2|$ - $B_2C_2A_2 \parallel$ оси $X$. $\Delta$ $A_1B_1C_1$ - н.в.

Задачу можно решить по аналогии, если начать с построения фронтали $F$ и перемещать фронтальную проекцию $\Delta$ $ABC$ до горизонтально проецирующего положения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гордон, В.О. Курс начертательной геометрии : учебное пособие для вузов / В.О. Гордон, М.А. Семенцов-Огиевский; под. ред. В.О. Гордона, Ю.Б. Иванова. – М. : Высшая школа, 1998. – 272 с.
2. Кузнецов, Н.С. Начертательная геометрия : учебник для вузов / Н.С. Кузнецов. - М. : Высшая школа, 1981. – 262 с.
3. Павлова, А.А. Начертательная геометрия : учебник для вузов / А.А. Павлова. – М. :, 2001. – 304 с.
4. Расчетно-графические работы по начертательной геометрии. Эпюр №2 : методические указания / Р.К. Низамов, Д.Н. Латыпов, Г.Ф. Гайсина. - Казань : Изд-во Казан. гос. технол. ун-та, 1991. - 12 с.
5. Чекмарев, А.А. Начертательная геометрия и черчение : учебник для студентов вузов / А.А. Чекмарев. - М. : ВЛАДОС, 1999. – 471 с.
6. Эпюр №1 : методические указания / Г.Ф. Гайсина, Д.Н. Латыпов, Р.К. Низамов. – Казань : Изд-во Казан. гос. технол. ун-та, 1989. -12 с.

**СОДЕРЖАНИЕ**

**Учебное издание**

**Маркова**
**Ольга Анатольевна**
кандидат педагогических наук

# НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ. НАТУРАЛЬНАЯ ВЕЛИЧИНА ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Корректор Габдурахимова Т.М.
Худ. редактор Федорова Л.Г.
Тех. редактор Горшенин Д.Г.

Сдано в набор 24.09.2009.
Подписано в печать 29.09.2009.
Бумага писчая. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 1. Тираж 100.
Заказ №26.

НХТИ (филиал) ГОУ ВПО «КГТУ», г. Нижнекамск, 423570,
ул. 30 лет Победы, д. 5а.