Министерство образования и науки РФ
Нижнекамский химико-технологический институт (филиал)
Федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего профессионального образования
«Казанский национальный исследовательский технологический
университет»

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ

Нижнекамск
2012

УДК 531
Б 60

Печатаются по решению редакционно-издательского совета Нижнекамского химико-технологического института (филиал) ФГБОУ ВПО «КНИТУ».

Рецензенты:
Сагдеев А.А., кандидат технических наук, доцент;
Латыпов Д.Н., кандидат технических наук, доцент.

Биктагиров, В.В.
Б 60 Динамика твердого тела : методические указания к лабораторным работам / В.В.Биктагиров, А.М.Абдуллин, Д.Б. Вафин. – Нижнекамск : Нижнекамский химико-технологический институт (филиал) ФГБОУ ВПО «КНИТУ». – 2012. – 28 с.

Приведены методические указания к лабораторным работам по динамике твердого тела.

Предназначены для студентов, обучающихся в бакалавриате по техническим и технологическим направлениям.

Подготовлены на кафедре физики НХТИ ФГБОУ ВПО «КНИТУ».

УДК 531

Содержание

Введение

Глубокое усвоение физики вообще и механики в частности возможно путем изучения теории и в процессе ее применения для решения различных физических, качественных и экспериментальных задач. Физика – наука опытная, поэтому теоретическое изучение физики должно сопровождаться физическим экспериментом.

Методикой проведения физических экспериментов и их результатами студент частично знакомится уже на лекционных занятиях по физике. Но приобщение его к экспериментальным методам и приемам начинается с лабораторного практикума, где происходит закрепление теоретического материала, и, кроме того, формируются практические умения и навыки в проведении физических измерений, в обработке и представлении результатов.

Лабораторные работы, описываемые в данных методических указаниях, предназначены для студентов – бакалавров и отвечает требованиям, предъявляемым к этому виду занятий. Это позволяет использовать их при постановке практикума по физике для студентов многих направлений.

Практикум по механике содержит инструкции и методические указания к выполнению работ, построенных единообразно, по примерной форме: *цель работы, краткая теория, описание экспериментальной установки, проведение эксперимента, обработка результатов и их анализ.* В заданиях к работам описаны методики проведения лабораторных экспериментов и даны указания к обработке их результатов.

Качественное выполнение и успешная защита результатов лабораторных работ студентами невозможны без самостоятельной предварительной подготовки к лабораторным занятиям. В процессе подготовки к очередному занятию, прежде всего, необходимо изучить по данному руководству описание выполняемой работы. Однако ограничиться только этим нельзя, так как теоретическое введение к каждой работе, приведенное в данном пособии, не может рассматриваться как достаточный минимум для глубокого понимания физических основ работы. Поэтому при выполнении каждой работы необходимо изучить теоретический материал, соответствующий теме работы, по учебнику и лекционному курсу. Нельзя приступать к работе без усвоения ее основных теоретических положений, не осознав логики процедуры измерений, не умея пользоваться измерительными приборами, относящимися к этой работе. Приступая к работе, студент должен твердо представлять цель данной работы, общий план работы, т.е. последовательность действий при проведении измерений.

Приступая к выполнению лабораторной работы, студент должен проверить правильность сборки и настройки лабораторной установки, соблюдая при этом указания настоящего руководства и правила техники безопасности. Тщательная подготовка приборов и проведение самих измерений являются залогом хороших окончательных результатов. Готовность к работе проверяется преподавателем или лаборантом, после чего студент получает разрешение к проведению опыта.

Результаты измерений и вычислений должны быть оформлены в виде краткого отчета. В методических указаниях показано, какие именно таблицы, графики, расчеты обязательны в отчетах. Отчеты должны содержать выводы, сделанные на основании результатов работы. При обработке результатов измерений следует уделять большое внимание определению погрешностей измерений и критическому анализу полученных результатов, которые должны быть представлены в выводах.

Изучение основ физики является важным этапом при подготовке инженерных кадров технического профиля.

Лабораторная работа № 1.2.1

Определение момента инерции махового колеса и силы трения в опоре

Цель работы: изучение законов вращательного движения с помощью маятника Обербека.

1. Краткая теория

Абсолютно твёрдым телом называют тело, расстояние между любыми двумя точками которого в условиях данной задачи остается постоянным. Иначе говоря, это тело, форма и размеры которого не изменяются при его движении. Всякое твёрдое тело можно мысленно разбить на большое число частей, малых по сравнению с размерами всего тела, и рассматривать его как систему (совокупность) материальных точек, жёстко связанных друг с другом.

Центром масс системы материальных точек (центром инерции) называют точку, масса которой равна массе всего тела, а положение в пространстве определяется радиус-вектором $\vec{\mathbf{r}}_c$:

$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{m} , \qquad (1)$$

где m_i и $\vec{\mathbf{r}}_i$ - массы и радиус-векторы отдельных точек (частиц), m – масса всего тела.

Произвольное движение тела можно представить как совокупность поступательного движения его центра инерции и вращательного движения относительно центра инерции.

Поступательным называется движение, при котором любая прямая, проведенная в теле, остаётся параллельной самой себе. При поступательном движении все точки тела получают за один и тот же промежуток времени равные по величине и направлению перемещения, вследствие чего скорости и ускорения всех точек в каждый момент времени оказываются одинаковыми. Поэтому достаточно определить движение одной из точек тела (например, центра масс) для того, чтобы охарактеризовать движение всего тела.

Второй закон Ньютона для движения центра масс твёрдого тела записывается в виде:

$$\frac{d(m\vec{\mathbf{v}}_c)}{dt} = \vec{\mathbf{F}}_{\text{внешн}}, \qquad (2)$$

где $\vec{\mathbf{v}}_c$ – скорость центра масс, $\vec{\mathbf{F}}_{\text{внешн}}$ – векторная сумма всех внешних сил, приложенных к телу (обычно индекс опускается).

При вращательном движении тела все его точки описывают окружности, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения. Окружности, описываемые точками, находятся в плоскостях, перпендикулярных оси вращения. Ось вращения может находиться как внутри тела, так и вне него.

Чтобы твёрдое тело с закреплённой осью привести во вращательное движение, необходимо хотя бы к одной из его точек приложить силу $\vec{\mathbf{F}}$, не проходящую через ось вращения и не параллельную ей, другими словами, чтобы эта сила создавала вращающий момент.

Пусть на твердое тело в точке **A** действует сила **F** (рис. 1). Под действием этой силы тело вращается относительно неподвижной оси O_1–O_2. Действие силы зависит от ее величины и направления, а также от точки приложения **A**. Под радиус–вектором точки приложения силы **A** будем понимать отрезок ***r***, направленный перпендикулярно от оси вращения к этой точке. *Моментом силы* **F** *относительно точки O* называется векторное произведение радиус-вектора ***r*** на силу **F**:

$$\mathbf{M}_o = [\boldsymbol{r},\mathbf{F}]. \qquad (3)$$

Момент силы **F** относительно точки O есть вектор, перпендикулярный к плоскости, содержащей векторы ***r*** и **F**.

Произвольную силу **F** можно разложить на три взаимно перпендикулярные составляющие: $\mathbf{F} = \mathbf{F}_o + \mathbf{F}_r + \mathbf{F}_\tau$. Здесь $\mathbf{F}_o$ – осевая составляющая силы, проекция силы на направление оси вращения O_1–O_2: $F_o = F\cos\theta$; $\mathbf{F}_r$ – радиальная составляющая силы, проекция силы на направление радиус–вектора точки приложения силы **A**; $\mathbf{F}_\tau$ – ***тангенциальная составляющая силы***, которая направлена по касательной к траектории движения точки приложения силы **A**. Пусть $\mathbf{F}'$ – составляющая силы **F** на плоскость, перпендикулярную оси вращения (можно представить: $\mathbf{F} = \mathbf{F}_o + \mathbf{F}'$): $F' = F\sin\theta$. Тогда радиальная составляющая определяется как $F_r = F'\cos\alpha = F\sin\theta\cos\alpha$; а тангенциальная составляющая – $F_\tau = F'\sin\alpha = F\sin\theta\sin\alpha$. Вращение тела относительно оси O_1 – O_2 происходит только за счет тангенциальной составляющей силы.

Вращающим моментом, или моментом силы, относительно оси вращения $O_1 - \mathbf{O_2}$ ***называется величина, равная произведению численного значения радиус-вектора точки приложения силы r и тангенциальной составляющей силы*** $\boldsymbol{F_\tau}$:

$$M_z = r\,F_\tau\,. \qquad (4)$$

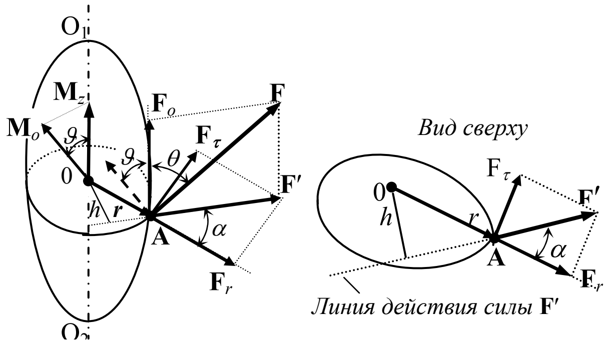

Рис. 1. К определению вращающего момента

Учитывая выражение для F_τ:

$$M_z = r\sin\alpha\,F' = h\,F',$$

где $h = r\sin\alpha$ – *плечо силы* F', это кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы $\mathbf{F}'$. Таким образом, получается другое выражение для вращающего момента:

$$M_z = h\,F'. \qquad (5)$$

Вращающий момент считают векторной величиной, направленной по оси вращения так, что если посмотреть из конца вектора M_z, то вращение будет происходить против часовой стрелки (рис. 1). Тогда вращающий момент можно представить как векторное произведение радиус–вектора $\boldsymbol{r}$ и силы $\mathbf{F}'$:

$$\mathbf{M}_z = [\,\boldsymbol{r}, \mathbf{F}'\,]\,. \qquad (6)$$

Вращающий момент M_z является составляющей (проекцией) момента силы M_o вдоль оси вращения, т.е. вдоль оси z: $M_z = M_o\cos\vartheta$.

Моментом инерции *J* материальной точки относительно некоторой оси называется скалярная величина, равная произведению массы материальной точки m_i на квадрат расстояния r_i от этой точки до оси вращения:

$$J = m_i r_i^2\,,\ [\text{кг.м}^2]\,. \qquad (7)$$

Момент инерции сплошного тела определяется как сумма моментов инерции всех его частиц:

$$J = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i\, r_i^2 \ = \int_m r^2 dm\ , \tag{8}$$

где r_i – расстояние от i-*ой* частицы массой Δm_i до оси вращения.

Момент инерции есть скалярная величина, которая определяет инертность тела при вращательном движении и равняется сумме произведений масс отдельных частиц тела на квадрат расстояний от них до оси вращения.

Если тело однородно, т.е. его плотность ρ одинакова по всему объёму. Тогда:

$$J = \rho \int_V r^2 dV\ \ . \tag{9}$$

Используя формулу (9), можно вычислить моменты инерции однородных тел правильной геометрической формы, результаты некоторых расчетов из них приведены в таблице 1.

Таблица 1

Моменты инерции тел правильной геометрической формы

Тело	Положение оси	Момент инерции
Полый тонкостенный цилиндр радиусом R	Ось симметрии	mR^2
Сплошной цилиндр или диск радиусом R	То же	$\frac{mR^2}{2}$
Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$\frac{ml^2}{12}$
Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец	$\frac{ml^2}{3}$
Шар радиусом R	Ось проходит через центр шара	$\frac{2mR^2}{5}$

Если ось вращения O_1O_2 не проходит через центр инерции C (рис. 2), то можно воспользоваться теоремой Штейнера: ***момент инерции тела J относительно произвольной оси вращения*** O_1O_2

равен сумме момента инерции тела J_c относительно параллельной оси O′O′, ***проходящей через центр инерции тела С, и произведения массы тела m на квадрат расстояния l от оси вращения до центра инерции***:

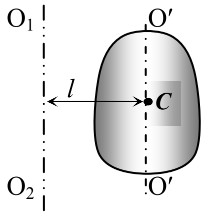

Рис. 2. К теореме Штейнера

$$J = J_c + m\,l^2 \qquad (10)$$

Закон динамики для тела, вращающегося относительно неподвижной оси O_1O_2 (рис. 3), записывается в виде

$$\mathbf{M} = J\,\vec{\boldsymbol{\beta}}, \qquad (11)$$

где $\vec{\boldsymbol{\beta}} = \dfrac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}}{dt}$ – угловое ускорение. Поэтому:

$$\mathrm{M} = J\,\vec{\boldsymbol{\beta}} = J\,\frac{d\vec{\boldsymbol{\omega}}}{dt} = \frac{dJ\vec{\boldsymbol{\omega}}}{dt} = \frac{d\mathbf{L}}{dt},$$

где

$$\mathbf{L} = J\,\vec{\boldsymbol{\omega}} \qquad (12)$$

– ***момент импульса тела относительно оси***, т.е. вектор, направленный по оси вращения, как и угловая скорость $\vec{\boldsymbol{\omega}}$.

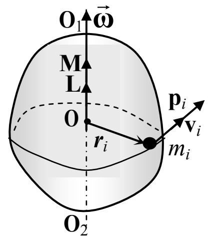

Рис. 3. К определению момента импульса

Для i-ой частицы твердого тела второй закон Ньютона: $F_i dt = dp_i$. Умножим это уравнение на r_i: $r_iF_idt = r_idp_i$, $M_idt = d(r_ip_i)$. Назовем $L_i = r_ip_i$ – моментом импульса материальной точки относительно оси. Для этой величины выполняется правило векторного произведения: $\mathbf{L}_i = [\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{p}_i]$. Момент импульса тела определяется как сумма моментов импульса всех его частиц:

$$\mathbf{L}_i = \Sigma\,[\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{p}_i]. \qquad (13)$$

При вращательном движении момент импульса играет роль импульса тела.

Основной закон динамики вращательного движения гласит, что ***скорость изменения момента импульса тела относительно неподвижной оси вращения равна результирующему моменту относительно этой же оси всех внешних сил, действующих на тело***:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}. \qquad (14)$$

Сравнивая формулы второго закона Ньютона в дифференциальной форме

$$\frac{dm\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \quad \text{и} \quad \frac{dJ\vec{\boldsymbol{\omega}}}{dt} = \mathbf{M},$$

убеждаемся, что эти формулы аналогичны. Аналогом силы **F**, входящей в уравнение динамики поступательного движения, является вращающий момент **M** в случае вращательного движения твёрдого тела, линейной скорости **v** поступательного движения – угловая скорость вращающегося тела $\vec{\boldsymbol{\omega}}$, массы m – момент инерции тела J.

По учебникам [1 – 3] выучите (выпишите) определения потенциальной и кинетической энергии тел.

Кинетическая энергия вращающегося твердого тела складывается из кинетических энергий его материальных точек и определяется формулой:

$$W_к = \frac{J\omega^2}{2}, \tag{15}$$

где J – момент инерции тела, ω- угловая скорость вращения тела.

2. Описание лабораторной установки и методики измерения

Приборы и принадлежности: маятник Обербека, груз, штангенциркуль, масштабная линейка, секундомер.

Для изучения законов вращательного движения используется маятник Обербека (рис. 4). Прибор состоит из шкива радиусом r, закрепленного на валу, четырех стержней, расположенных под углом 90° друг к другу, и четырех одинаковых цилиндрических грузов m_1, которые можно перемещать вдоль стержней и закреплять на определенном расстоянии от оси вала. Грузы закрепляются симметрично, т.е. так, чтобы центр инерции совпадал с осью вращения. Вращающиеся части прибора представляют собой маховое колесо, момент инерции J которого можно менять за счет перемещения грузов.

Маховое колесо приводится в движение грузом массой m, прикрепленным к концу шнура. Груз на высоте h_1 относительно нижней точки падения обладает потенциальной энергией:

$$W_{п1} = F_т h_1 = mgh_1,$$

где $F_т$ – сила тяжести груза m; g – ускорение свободного падения.

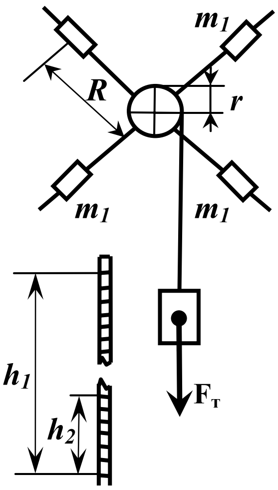

Рис.4. Маятник Обербека

При падении груза m его потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию поступательного движения груза $\frac{m\upsilon^2}{2}$, кинетическую энергию вращательного движения махового колеса $\frac{J\omega^2}{2}$ и затрачивается на работу по преодолению сил трения в опорах и сопротивления воздуха. Если сила трения f постоянна, то работа сил трения будет равняться $A = f h_1$.

По закону сохранения энергии потенциальная энергия груза в верхней точке равняется сумме кинетических энергий груза, махового колеса, когда груз опустится до нижней точки, и работе против сил трения:

$$mgh_1 = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} + fh_1, \qquad (16)$$

где υ – скорость груза; ω – угловая скорость маховика.

Движение груза равноускоренное, без начальной скорости, поэтому ускорение a и скорость υ соответственно равны:

$$a = \frac{2h_1}{t^2}, \ \upsilon = \frac{2h_1}{t},$$

где t – время падения груза с высоты h_1.

Угловая скорость махового колеса связана с линейной скоростью груза

$$\omega = \frac{\upsilon}{r} = \frac{2h_1}{tr}$$

где r – радиус шкива.

Маховое колесо, вращаясь по инерции за счет своей кинетической энергии вращательного движения, поднимает груз m на высоту $h_2 < h_1$, при этом потенциальная энергия груза увеличивается и на высоте h_2 будет $W_{п2} = mgh_2$.

Уменьшение потенциальной энергии при подъеме груза равно работе по преодолению сил трения:

$$mgh_1 - mgh_2 = f(h_1 + h_2),$$

откуда

$$f = mg\frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2}. \tag{17}$$

Подставляя в формулу (16) выражения для υ, ω и f, получим выражение для вычисления момента инерции махового колеса:

$$J = mr^2\left(gt^2 \cdot \frac{h_2}{h_1(h_1 + h_2)} - 1\right). \tag{18}$$

3. Измерения и обработка результатов измерений

Расположение цилиндрических грузов на стержнях маховика, количество грузов и высота h_1 задаются преподавателем. Каждое измерение повторите 3 раза. Результаты занесите в таблицу 2.

1. На технических весах измерьте общую массу грузов m, результаты занесите во второй столбец табл. 2.
2. С помощью штангенциркуля измерьте радиус шкива r в трех разных сечениях.
3. Наматывая шнур на шкив, поднимите груз на высоту h_1 и с помощью секундомера измерьте время его падения t до нижней точки, и сразу же определите высоту h_2, на которое поднимается тело.

Таблица 2

Результаты измерений и расчетов

№ п/п	m_i, кг	Δm_i, кг	r_i, м	Δr_i, м	t_i, с	Δt_i, с	h_2, м	Δh_2, м
1 2 3								
Ср.								

4. Вычислите средние значения измеренных величин и результаты запишите в последней строке табл. 2 в соответствующих столбцах.

5. По средним значениям измеренных величин по формуле (17) вычислите силу трения f и момент инерции махового колеса J по формуле (18).

6. По методике определения доверительного интервала для прямых измерений определите доверительные интервалы $\Delta\overline{m}$, $\Delta\bar{r}$ и $\Delta\overline{h}_2$, а результаты запишите в последней строке табл. 2 в соответствующих столбцах.

7. Подсчитайте доверительный интервал для силы трения f по методике определения доверительного интервала при косвенных измерениях по формуле:

$$\Delta\bar{f} = \bar{f}\cdot\varepsilon = \bar{f}\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial m}\right)^2(\Delta\overline{m})^2 + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial h_2}\right)(\Delta h_2)^2} =$$

$$= \bar{f}\cdot\sqrt{\left(\frac{\Delta\overline{m}}{\overline{m}}\right)^2 + \left(\frac{2\overline{h}_2}{\overline{h}_1^2 - \overline{h}_2^2}\right)^2\left(\Delta\overline{h}_1^2 + \Delta\overline{h}_2^2\right)}.$$

Поскольку точность измерения h_1 в основном определяется точностью масштабной линейки, в качестве $\Delta\overline{h}_1$ можно взять половину цены деления шкалы линейки ($\Delta\overline{h}_1 = 0{,}005$ м).

Контрольные вопросы

1. Что называется вращательным моментом, моментом инерции, моментом импульса?
2. Сформулируйте основной закон динамики вращательного движения.
3. Что называется потенциальной и кинетической энергией.
4. Напишите закон сохранения энергии применительно к данной работе.
5. Как будет опускаться груз m (быстрее или медленнее), если цилиндрические грузы на крестовинах махового колеса подвинуть к оси вращения? Ответ обоснуйте.

Лабораторная работа № **1.2.2**

Определение центра инерции оборотного маятника

Цель работы: освоение метода определения центра инерции твердого тела и ускорения свободного падения на примере физического маятника,

1. Краткая теория

Колебания являются одним из наиболее распространенных видов движения. При достаточно малых отклонениях системы от положения равновесия колебания обычно имеют гармонический характер.

Колебания называются гармоническими, если уравнение движения системы записывается с помощью косинусоидальных или синусоидальных формул:

$$x = A\cos(\omega_o t + \varphi_o) \quad \text{или} \quad x = A\sin(\omega_o t + \varphi'_o),$$

где x – значение колеблющейся величины в момент времени t (или смещение от положения равновесия); A – *амплитуда колебания*, максимальное смещение от положения равновесия, или максимальное значение колеблющейся величины; $\varphi = (\omega_o t + \varphi_o)$ – *фаза колебания*, аргумент тригонометрической функции в уравнении движения, от значения которого в каждый момент времени зависит значение колеблющейся величины x; $\omega_o = 2\pi\nu = 2\pi/T$ – *циклическая* (круговая) *частота* собственных колебаний, скорость изменения фазы; $\nu = 1/T$ – *частота колебания*, число колебаний за одну секунду ($[\omega] = [\nu] = \text{с}^{-1}$ – герц); T – *период колебания*, время одного полного колебания; φ_o и φ'_o – начальная фаза.

Физический маятник*. Твердое тело, которое может совершать колебания под действием своей силы тяжести* **F** *относительно горизонтальной оси O* (*оси качения*), *не проходящей через центр инерции C, называется физическим маятником* (рис. 4).

Точка O пересечения оси качения маятника с вертикальной плоскостью, проходящей через центр инерции и перпендикулярной оси качения, называется *точкой подвеса* маятника.

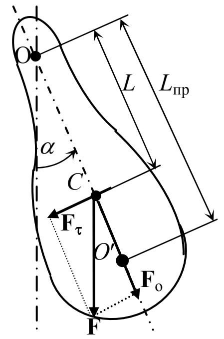

Рис. 4. Физический маятник

Если маятник отклонить от положения равновесия на угол α, то тангенциальная составляющая силы тяжести $F_\tau = -mg\sin\alpha$ создает вращающий момент

$$M = -mgL\sin\alpha,$$

где знак минус показывает, что направление действия вращающего момента противоположно направлению отклонения α.

Второй закон Ньютона при вращательном движении имеет вид

$$M = J\beta,$$

где J – момент инерции маятника относительно оси качения; β – угловое ускорение, равное второй производной от угла поворота по времени, $\beta = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$.

С учетом выражения для вращающего момента уравнение закона динамики можно представить в виде

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgL\sin\alpha.$$

При малых углах отклонения α значение $\sin\alpha$ можно заменить значением угла α, выраженного в радианах: $\sin\alpha \approx \alpha$. Поэтому уравнение динамики при отсутствии сил трения можно записать в виде

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgL}{J}\alpha = 0.$$

Данное уравнение является уравнением гармонического осциллятора. Следовательно, малые колебания ($\alpha < 5^\circ$) физического маятника являются гармоническими, и угол отклонения от положения равновесия изменяется по закону

$$\alpha = \alpha_m \cos(\omega_o t + \varphi_o),$$

где α_m – амплитуда колебаний угла α; φ_o – начальная фаза; а циклическая частота ω_o и период колебания T определяются по формулам

$$\omega_o = \sqrt{mgL/J}, \quad T = 2\pi\sqrt{J/(mgL)}. \qquad (19)$$

Иногда используется понятие *приведенной длины физического маятника* – это длина такого математического маятника $L_{пр}$, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

Из данного определения

$$L_{пр} = J/(mL). \qquad (20)$$

Из пункта 1 описания лабораторной работы 1.2.1 выпишите формулу (1) для центра инерции тела, формулу (8) для момента инерции и формулу (10) теоремы Штейнера, ознакомьтесь их смыслом.

2. Описание лабораторной установки и методики измерений

Приборы и принадлежности: оборотный маятник, секундомер, измерительная линейка.

Частным случаем физического маятника является оборотный маятник (рис. 5), состоящий из стальной пластины, на которой укреплены две опорные призмы $П_1$ и $П_2$. Период колебаний маятника можно менять перемещением груза $Г_1$. С помощью формулы (19) для периода колебаний T физического маятника можно вычислить ускорение свободного падения g или расстояние L_i от оси качения до центра инерции (m – масса маятника). Период колебаний можно измерить с большей точностью, чем J или L_i. Периоды колебаний маятника относительно призм $П_1$ и $П_2$:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J_1}{mgL_1}};\; T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J_2}{mgL_2}}\;.$$

Отсюда

$$J_1 = \frac{T_1^2 mgL_1}{4\pi^2}; \qquad (21)$$

$$J_2 = \frac{T_2^2 mg\left(L - L_1\right)}{4\pi^2}; \qquad (22)$$

где J_1 , J_2 – моменты инерции маятника относительно призм $П_1$ и $П_2$.

По теореме Штейнера:

$J_1 = J_o + m\,L_1^2\,,\quad J_2 = J_o + m\,L_2^2\,,$

где J_o – момент инерции маятника относительно центра масс.

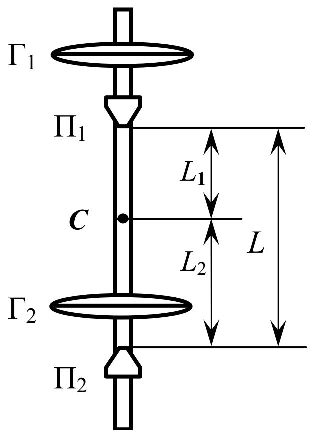

Рис. 5. Оборотный маятник

Вычитая первое уравнение из второго, получаем:

$$J_2 - J_1 = mL(L - 2L_1). \qquad (23)$$

Вычитая из выражения (22) формулу (21), находим:

$$\frac{mg[(L - L_1)T_2^2 - L_1T_1^2]}{4\pi^2} = mL(L - 2L_1)$$

откуда

$$L_1 = \frac{4\pi^2 L^2 - gLT_2^2}{8\pi^2 L - g\left(T_2^2 + T_1^2\right)}. \tag{24}$$

Здесь $L = L_1 + L_2$ – расстояние между призмами, которое может быть легко измерено.

С помощью формулы (24) при известном g можно вычислить L_1.

Путем перемещения можно добиться такого положения грузов $Г_1$, $Г_2$, при котором периоды колебаний маятника T_1 и T_2 на призмах $П_1$ и $П_2$ совпадут, т.е. $T_1 = T_2 = T$. Это достигается при условии равенства приведенных длин маятника:

$$\frac{J_1}{mL_1} = \frac{J_1}{mL_2}, \tag{25}$$

В этом случае исключая из выражений (23) и (24) J_2 и подставив выражение для J_1 в формулу для T_1, получим выражение для ускорения свободного падения:

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}. \tag{26}$$

3. Измерения и обработка результатов измерений

1. С помощью миллиметровой линейки измерьте расстояние между призмами L. Измерения повторите 3 раза, результаты занесите в таблицу 3.

Таблица 3

Результаты измерений и расчетов к работе 1.2.2

№ опыта	L, м	ΔL, м	T_{1i}, с	T_{2i}, с	T_i, с	ΔT_i, с
1						
2						
3						
Ср.						

2. Зафиксируйте грузы маятника и установите его ребром первой призмы $П_1$ на опорную площадку. Отклоните маятник от положения равновесия на небольшой угол ~5°, предоставив ему возможность совершать свободные колебания. Измерьте время 20 полных колебаний маятника и определите период T_1 (тоже 3 раза).

3. Установив маятник на ребро призмы $П_2$, определите период колебаний T_2.

4. По средним значениям $\overline{L}, \overline{T}_1, \overline{T}_2$ и табличному значению g вычислите L_1 по формуле (24).

5. Придумайте простой опытный способ, позволяющий быстро определить центр инерции маятника и сравните вычисленные значения L_1 и L_2 с опытными.

6. Перемещая груз $Г_1$, добейтесь совпадения периодов колебаний T_1 и T_2.

7. Три раза измерив, время 20 колебаний, определите период колебаний Ti и по среднему значению $\overline{T}$ вычислите ускорение свободного падения g по формуле (26). Сравните его с табличным значением.

8. Вычислите доверительный интервал определения g по методике косвенных измерений, предварительно определив доверительные интервалы $\Delta\overline{L}$ и $\Delta\overline{T}$:

$$\Delta\,\overline{g} = \overline{g}\sqrt{\left(\frac{\Delta\overline{L}}{\overline{L}}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta\overline{T}}{\overline{T}}\right)^2}$$

Контрольные вопросы

1. Какие колебания называются гармоническими?
2. Что называется периодом и частотой колебаний?
3. Что называется амплитудой и фазой колебаний?
4. Дайте определение физического маятника.
5. Сформулируйте теорему Штейнера.
6. Что называется приведенной длиной физического маятника?
7. Какую точку называют центром инерции тела?

Лабораторная работа № 1.2.3

Определение осевого момента инерции тела методом физического маятника

Цель работы: освоение метода экспериментального определения момента инерции вращающегося тела с помощью дополнительного груза.

1. Краткая теория

Теория данной работы практически совпадает с теорией, изложенной в пункте 1 описания лабораторной работы №1.2.2. Поэтому прежде чем приступить к работе, конспектируйте указанный теоретический материал.

2. Описание методики измерения и лабораторной установки

Приборы и принадлежности: цилиндр или шар с прикрепленным дополнительным грузом, штангенциркуль, секундомер.

На практике часто возникает необходимость в определении осевого момента инерции тела, вращающегося относительно оси, проходящей через его центр инерции. Тело находится в этом случае в уравновешенном состоянии и не способно совершать колебания вокруг оси вращения. Однако, если к исследуемому телу прикрепить вспомогательный груз m_o (вне оси вращения), то состояние безразличного равновесия системы под действием силы тяжести дополнительного груза заменяется состоянием устойчивого равновесия. В этом случае исследуемое тело с дополнительным грузом можно рассматривать как физический маятник. Период колебаний такого физического маятника можно вычислить по формуле:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{[(m_o + m)gL]}},$$

откуда момент инерции J системы относительно оси вращения:

$$J = \frac{T^2(m_o + m)gL}{4\pi^2}, \qquad (27)$$

где m – масса исследуемого тела, L – расстояние центра инерции системы относительно оси вращения.

Для определения момента инерции исследуемого тела J_m из общего момента инерции системы J необходимо вычесть момент инерции дополнительного груза относительно общей оси колебания J_{m_0}:

$$J_m = J - J_{m_0} \ . \tag{28}$$

В качестве дополнительного груза обычно берут однородные тела правильной геометрической формы, момент инерции которых относительно оси симметрии можно точно вычислить. Например, цилиндр или шар, моменты инерции, которых приведены в таблице 1 теоретической части работы № 1.2.1.

Момент инерции дополнительного груза можно вычислить по теореме Штейнера (10).

Координата центра инерции находится по формуле:

$$L = \frac{l \cdot m_0}{\left(m_o + m\right)} . \tag{29}$$

Чтобы иметь возможность проверить результаты экспериментального определения момента инерции тела, в данной работе применяются тела в виде диска (рис. 6) или шара.

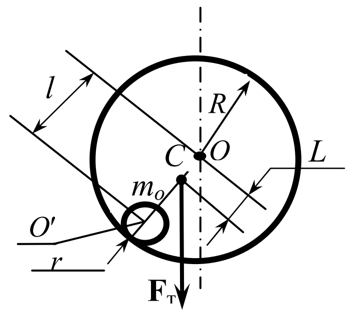

Рис. 6. Физический маятник с дополнительным грузом

3. Измерения и обработка результатов измерений

Вид физического маятника для исследования задается преподавателем.

1. С помощью штангенциркуля измерьте диаметры исследуемого тела *D* и дополнительного груза *d* в трех разных сечениях и определите радиусы *R* и *r*. Вычислите расстояние *l* между центрами инерции тел.
2. Измерив время определенного количества колебаний (в пределах 5–10), определите период колебаний системы,. Измерения проводите три раза для разного количества колебаний.
3. По формуле (29) по среднему значению *l* вычислите расстояние от оси вращения до центра инерции *L*. Массы считаются заданными.

4. По формуле (27) вычислите момент инерции системы J для каждого измерения.

5. По средним значениям r и l вычислите момент инерции дополнительного груза J_{m_0} по формуле (10).

6. Рассчитайте момент инерции исследуемого тела J_m по формуле (28). Результаты измерений и расчетов занесите в таблицу 4.

Таблица 4

Результаты измерений и расчетов

№ опыта	R, м	r, м	l, м	L, м	T, с	J, кг·м^2	J_{mo}, кг·м^2	J_m, кг·м^2	ΔJ, кг·м^2
1 2 3									
Ср.									

7. Вычислите доверительный интервал для момента инерции исследуемого тела:

$$\Delta\bar{J}_m = t_{\alpha,n}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{3}\left(\Delta J_{m_i}\right)^2}{6}},$$

где t_α - коэффициент Стьюдента, (строгое определение $\Delta\bar{J}_m$ производится по методу косвенных измерений). Результат занесите в последнюю ячейку тал. 4.

8. Вычислите момент инерции исследуемого тела, по формуле, приведенной в табл. 1 и сравните с экспериментальным значением.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение физического маятника.
2. В чем заключается суть метода определения момента инерции тела методом дополнительного груза?
3. Что называется моментом инерции? Сформулируйте и запишите теорему Штейнера.
4. Что называется центром инерции тела?

Лабораторная работа № **1.2.4**

Определение момента инерции тела методом крутильных колебаний

Цель работы: изучение сдвиговых деформаций, определение момента инерции тел методом крутильных колебаний.

1. Краткая теория

При скручивании твердого тела (металлической проволоки) возникает вращающий момент, стремящийся вернуть тело в исходное положение. Определим зависимость этого момента от угла скручивания и от параметров проволоки. При скручивании проволоки отдельные слои поворачиваются друг относительно друга – возникают деформации сдвига. Рассмотрим столбик твердого тела высотой l и с площадью основания S (рис. 7). Приложим к его основаниям две одинаковые силы **F** по касательным к основаниям в противоположных направлениях. Верхнее основание относительно нижнего сместится на величину x. Относительная деформация может быть вычислена как отношение:

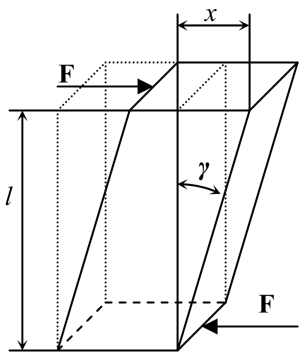

Рис. 7. Деформация сдвига

$$\varepsilon = \frac{x}{l} = \mathrm{tg}\gamma \approx \gamma,$$

поскольку при упругих деформациях $x << l$.

Отношение силы F к площади основания S называют тангенциальным напряжением $\sigma_\tau = F/S$. Для малых деформаций сдвига оно оказывается пропорционально относительной деформации:

$$\sigma_\tau = G\,\gamma,$$

где G – коэффициент пропорциональности, называемый ***модулем сдвига***.

Если приложить к проволоке с радиусом сечения R и длиной l вращающий момент M, так, что угол поворота верхнего основания относительно нижнего будет равен α (рис. 8), в проволоке появятся деформации сдвига, возрастающие по мере удаления от оси:

$$\gamma = \frac{\alpha \cdot r}{l}.$$

Рассмотрим тонкий слой проволоки радиуса r и толщиной dr. Этот слой создает вращающий момент:

$$dM = r(\sigma_\tau dS) = r\frac{G\alpha}{l}2\pi r^2 dr = \frac{2\pi G\alpha}{l}r^3 dr.$$

Проинтегрировав это выражение по всему сечению проволоки, найдем суммарный вращающий момент:

$$M = \int_0^R \frac{2\pi G\alpha}{l}r^3 dr = \frac{\pi GR^4}{2l}\alpha = D\alpha,$$

где $D = \dfrac{\pi GR^4}{2l}$ – модуль кручения проволоки (стержня).

Таким образом, вращающий момент, необходимый для скручивания проволоки на угол α пропорционален величине этого угла. Деформированная проволока создает вращающий момент противоположного направления.

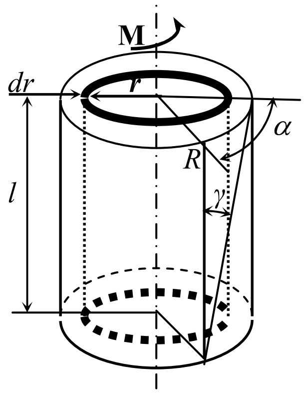

Рис. 8. Деформация сдвига проволоки

2. Описание методики измерения и лабораторной установки

Приборы и принадлежности: кронштейн с закрепленной проволокой, испытуемое тело, два цилиндра, штангенциркуль, масштабная линейка, секундомер.

Одним из методов экспериментального определения момента инерции тела является метод крутильных колебаний. Твердое тело, подвешенное на проволоке, верхний конец которой закреплен неподвижно, и совершающее вращательное движение вокруг вертикальной оси, называется ***крутильным маятником*** (рис. 9). Колебания такого маятника обусловлены упругими силами, возникающими в стержне при его скручивании. Вращательный момент M, с которым эти силы действуют на тело, как было показано выше, пропорционален углу поворота α тела из положения равновесия:

$$M = -D\alpha, \tag{30}$$

где D – модуль кручения стержня.

Деформация скручивания стержня подчиняется основному закону динамики вращательного движения:

$$J\beta = M \quad \text{или} \quad J\cdot\frac{d^2\alpha}{dt^2} = M\,, \qquad (31)$$

где J – момент инерции системы относительно вертикальной оси, проходящей через его центр инерции проволоки; $\beta = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$ – угловое ускорение. Подставим выражение (30) в уравнение (31) и преобразуем последнее к виду:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{D}{J}\alpha = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_o^2\alpha = 0 \qquad (32)$$

Полученные уравнения (32) представляют собой дифференциальное уравнение гармонических колебаний. Исходя из этих уравнений циклическая частота крутильного маятника равна:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{D}{J}}\,, \qquad (33)$$

а период крутильных колебаний равен:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}}\,. \qquad (34)$$

Схема установки приведена на рис. 9.

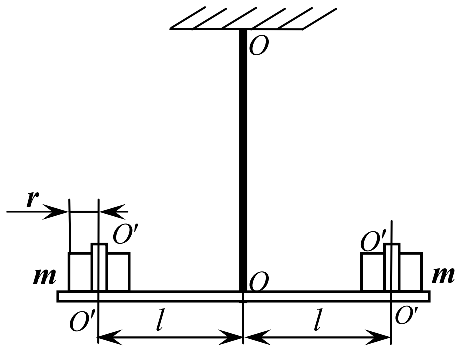

Рис. 9. Крутильный маятник

Определение момента инерции горизонтальной планки (тела) можно осуществить и без конкретного значения модуля кручения D проволоки. Чтобы исключить из формулы (34) неизвестную величину D, поступают следующим образом: на тело симметрично оси колебаний O-O помещают добавочные грузы m (например, два одинаковых цилиндра).

Общий момент инерции J_o двух грузов определяется по теореме Штейнера (10) и рассчитывается по формуле:

$$J_o = mr^2 + 2ml^2\,, \qquad (35)$$

где l – расстояние от оси вращения до оси симметрии цилиндра, r – радиус цилиндра.

Принимая J как момент инерции тела без грузов можно определить период свободных крутильных колебаний исследуемого тела с дополнительными грузами:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\left(J + J_o\right)}{D}}\,, \tag{36}$$

откуда

$$D = \frac{4\pi^2\left(J + J_o\right)}{T_1^2}\,.$$

Данное выражение для D подставим в формулу (34) и решив ее относительно J, получим:

$$J = \frac{T^2 J_o}{\left(T_1^2 - T^2\right)}, \tag{37}$$

где T – период крутильных колебаний тела без грузов.

Подставив выражение (35) в формулу (37) получим расчетную формулу момента инерции исследуемого тела:

$$J = m\left(2l^2 + r^2\right)\cdot\frac{T^2}{T_1^2 - T^2}\,. \tag{38}$$

3. Измерения и обработка результатов измерений

Каждое измерение повторите три раза, результаты занесите в таблицу 5.

1. С помощью секундомера измерьте время 20-ти полных колебаний исследуемого тела и вычислите период колебаний T.
2. На одинаковых расстояниях от оси O-O закрепите добавочные грузы и определите период колебаний T_1 .
3. Измерьте радиус r и массу цилиндров m . Лучше измерить суммарную массу цилиндров $2m$ и определить m.
4. По формуле (38) рассчитайте момент инерции J тела.
5. Подсчитайте доверительный интервал для момента инерции тела:

$$\Delta\bar{J} = t_{\alpha,n}\cdot\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{3}\left(\Delta J_i\right)^2}{6}}\,,$$

где $t_{\alpha,n}$ - коэффициент Стьюдента.

Результат занесите в последнюю ячейку табл 5.

Таблица 5

Результаты измерений и расчетов работы № 1.2.4.

№ опыта	T_i, с	T_{1i}, с	r_i, м	m_i, кг	l_i, м	J_i, $кг \cdot м^2$	ΔJ_i, $кг \cdot м^2$
1							
2							
3							
Ср.							

Контрольные вопросы

1. Когда возникают деформации сдвига?
2. От чего зависит модуль кручения стержня?
3. В чем сходство и отличие крутильных колебаний от колебаний физического маятника?
4. Что называется моментом инерции тела? Сформулируйте теорему Штейнера.

Использованная литература:

1. Детлаф, А.А. Курс физики : учебное пособие для втузов / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М. : Высш. шк., 2001. – 718 с.
2. Трофимова, Т.И. Курс физики : учебное пособие для вузов / Т.И. Трофимова. – М. : Высш. шк., 1990. – 478 с.
3. Вафин, Д.Б. Физика. Часть 1 : учебное пособие / Д.Б. Вафин. – Казань : Изд-во МОиН РТ, 2010. –316 с.
4. Вафин, Д.Б. Физика. Часть 2 : учебное пособие / Д.Б. Вафин. – Казань : Изд-во МОиН РТ, 2011. – 460 с.

Учебное издание

Биктагиров Вахит Валиахметович
кандидат химических наук, доцент

Абдуллин Айрат Махмутович
кандидат технических наук, доцент

Вафин Данил Билалович
доктор технических наук, доцент

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКЗАНИЯ
К ЛАБОРАТОРЫМ РАБОТАМ

Корректор Габдурахимова Т.М.
Худ. редактор Федорова Л.Г.

Сдано в набор 13.06.2012.
Подписано в печать 17.09.2012.
Бумага писчая. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 1,72. Тираж 100.
Заказ №44.

НХТИ (филиал) ФГБОУ ВПО «КНИТУ», г. Нижнекамск, 423570,
ул. 30 лет Победы, д. 5а