МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Нижнекамский химико-технологический институт (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего профессионального образования
«Казанский национальный исследовательский
технологический университет»

А.Г. Багоутдинова, С.М. Ахметов

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Нижнекамск
2012

УДК 517.9
Б 14

Печатается по решению редакционно-издательского совета Нижнекамского химико-технологического института (филиала) ФГБОУ ВПО «КНИТУ».

Рецензенты:

Садыков А.В., кандидат технических наук, доцент кафедры математики;

Горская Т.Ю., кандидат технических наук, доцент кафедры «Высшая математика» КГАСУ.

Багоутдинова, А.Г.

Б 14 Обыкновенные дифференциальные уравнения : учебное пособие / А.Г. Багоутдинова, С.М. Ахметов. – Нижнекамск : Нижнекамский химико-технологический институт (филиал) ФГБОУ ВПО «КНИТУ», 2012. - 100 с.

Содержит основные понятия о дифференциальных уравнениях и методы решения отдельных типов уравнений первого и высших порядков. Приведены варианты заданий для самостоятельной работы студентов очного и заочного отделений.

Учебное пособие предназначено для студентов инженерно-технических специальностей вузов.

Подготовлено на кафедре математики Нижнекамского химико-технологического института.

УДК 517.9

Оглавление

Введение

При решении различных задач математики, физики, химии и других наук часто пользуются математическими моделями в виде уравнений, связывающих независимую переменную, искомую функцию и ее производные. Такие уравнения называются *дифференциальными* (ДУ).

Если искомая (неизвестная) функция зависит от одной переменной, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным* (ОДУ); в противном случае – дифференциальным уравнением *в частных производных* (ДУвЧП). Наивысший порядок производной, входящей в уравнение, называется *порядком* этого уравнения.

Например, уравнение

$xy''' - y'\sin x + y = 0$ - обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка, а уравнение

$x^2 y' - 3xy + 2 = 0$ - первого порядка;

$x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ - дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y\sin x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ - дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка.

В данном учебно-методическом пособии приведены основные типы обыкновенных дифференциальных уравнений, допускающих точные решения. Методы их решений подробно рассмотрены на большом числе примеров.

1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Определение. Уравнение

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

или

$$y' = f(x, y), \qquad (2)$$

связывающее между собой независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и её производную $y'(x)$, называется *дифференциальным уравнением первого порядка*.

Определение. *Решением* уравнения (1) или (2) называется такая дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение вместо неизвестной функции обращает его в тождество.

Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется *интегрированием* дифференциального уравнения.

Определение. *Общим решением* дифференциального уравнения (1) в области D называется функция $y = \varphi(x, C)$, обладающая следующими свойствами: 1) она является решением данного уравнения при любых значениях произвольной постоянной *C;* 2) для любого начального условия $y(x_0) = y_0$ такого, что $(x_0, y_0) \in D$, существует единственное значение $C = C_0$, при котором решение $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет заданному начальному условию.

Определение. Уравнение $\Phi(x, y, C) = 0$, определяющее общее решение как неявную функцию, называется *общим интегралом* дифференциального уравнения.

Определение. Всякое решение $y = \varphi(x, C_0)$, получающееся из общего решения $y = \varphi(x, C)$ при конкретном значении $C = C_0$, называется *частным решением*.

Пример 1. Доказать, что при каждом $C \in R$ функция $y = x^2 + C$ является решением дифференциального уравнения

$$y' - 2x = 0.$$

► Вычислим производную: $y' = (x^2 + C)' = 2x$.

Подставляя найденное значение y' в данное дифференциальное уравнение, получим тождество

$$2x - 2x = 0.$$

Значит, функция $y = x^2 + C$ является решением данного дифференциального уравнения, что и требовалось доказать.◄

Определение. Задача, в которой требуется найти частное решение уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, называется *задачей Коши*.

Построенный на плоскости *xOy* график всякого решения $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения называется *интегральной кривой* этого уравнения. Таким образом, общему решению $y = \varphi(x, C)$ на плоскости *xOy* соответствует семейство интегральных кривых, зависящее от одного параметра – произвольной постоянной *C,* а частному решению, удовлетворяющему начальному условию $y(x_0) = y_0$, – кривая этого семейства, проходящая через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$.

Теорема Коши. Если в дифференциальном уравнении (2) функция $f(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывную производную $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ в некоторой области *D*, то решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ при начальном условии $y(x_0) = y_0$ существует и притом единственно, т.е. через точку $(x_0, y_0) \in D$ проходит единственная интегральная кривая данного уравнения.

1.1. Уравнения с разделяющимися переменными

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ разлагаются на множители, зависящие каждый только от одной переменной:

$$f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)=0\,. \qquad (3)$$

Разделим обе части уравнения (3) на произведение $g_1(y)\cdot f_2(x)$, предполагая при этом, что $g_1(y)\cdot f_2(x)\neq 0$.

Имеем:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy=0\,.$$

Интегрируя обе части равенства, получим общий интеграл уравнения (3):

$$\int\frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx+\int\frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy=C\,.$$

Заметим, что деление обеих частей уравнения (3) на $g_1(y)\cdot f_2(x)\neq 0$ может привести к потере частных решений уравнения, обращающих в нуль $g_1(y)\cdot f_2(x)$. Поэтому, получив общий интеграл уравнения, надо проверить, содержит ли он упомянутые частные решения при некоторых значениях C. Если нет, то их следует включить в общий интеграл.

Пример 2. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$x\left(y^2-16\right)dx+ydy=0\,. \qquad (4)$$

► Разделим переменные в данном уравнении, деля обе его части на $y^2-16\neq 0$:

$$xdx+\frac{ydy}{\left(y^2-16\right)}=0.$$

Почленно интегрируя, находим:

$$\int xdx+\int\frac{ydy}{\left(y^2-16\right)}=C,$$

$$\int xdx+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(y^2-16\right)}{\left(y^2-16\right)}=C,$$

$\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|y^2-16\right|=C$ - искомый общий интеграл.

Выразив y, получим общее решение уравнения (4):

$$x^2+\ln\left|y^2-16\right|=\ln|C| \text{ или } y^2-16=Ce^{-x^2}.$$

Пусть теперь $y^2-16=0$, т.е. $y=\pm4$. Подстановкой в уравнение проверяем, что $y=\pm4$ - решение этого уравнения, его можно получить из общего решения при $C=0$.◄

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$\left(1+y^2\right)dy=\frac{y}{x}dx.$$

► Разделив обе части уравнения на y, считая, что $y\neq0$, получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{1+y^2}{y}dy=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя обе части равенства, получим

$$\int\frac{1+y^2}{y}dy=\int\frac{dx}{x}+C,$$

$$\frac{y^2}{2}+\ln|y|=\ln|x|+\ln C.$$

Здесь произвольную постоянную удобнее взять в виде $\ln C$.

$$\frac{y^2}{2}=\ln|x|-\ln|y|+\ln C, \quad \frac{y^2}{2}=\ln\left|\frac{Cx}{y}\right|.$$

Отсюда $\frac{Cx}{y}=e^{\frac{y^2}{2}}$, или $y=Cxe^{-\frac{y^2}{2}}$, где C - произвольная постоянная.

Заметим, что решение $y=0$ исходного дифференциального уравнения входит в полученное общее решение при $C=0$.◄

Пример 4. Найти частное решение уравнения

$$\left(1+e^x\right)ydy=e^x\left(1+y^2\right)dx,$$

удовлетворяющее начальному условию $y(0)=\sqrt{3}$.

► Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, так как коэффициент при dx представляет собой произведение двух сомножителей: e^x зависит только от *x*, а $\left(1+y^2\right)$– только от *y*. Аналогично, коэффициент при dy тоже является произведением двух сомножителей: $\left(1+e^x\right)$ зависит только от х, а второй сомножитель – *y*.

Разделим обе части уравнения на $\left(1+y^2\right)\left(1+e^x\right)$:

$$\frac{ydy}{1+y^2}=\frac{e^x dx}{1+e^x}.$$

Заметим, что $\left(1+y^2\right)\left(1+e^x\right)\neq 0$. Проинтегрируем

$$\int\frac{ydy}{1+y^2}=\int\frac{e^x dx}{1+e^x}+C_1.$$

Здесь постоянную C_1 удобнее записать в виде $\ln C$.

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right)=\ln\left(1+e^x\right)+\ln C, \quad \ln\sqrt{1+y^2}=\ln C\left(1+e^x\right).$$

Тогда общий интеграл уравнения: $\sqrt{1+y^2}=C\left(1+e^x\right)$. (5)

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=\sqrt{3}$. Подставив $\sqrt{3}$ вместо *y*, а 0 вместо *x*, в (5) получим:

$$\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}=C\left(1+e^0\right);\ 2=C\cdot 2.\ \text{Отсюда}\ C=1.$$

Подставив $C=1$ в (5), получим частный интеграл:

$$\sqrt{1+y^2}=1+e^x. \tag{6}$$

Если равенство (6) разрешить относительно *y*, то получим частное решение дифференциального уравнения:

$$y=\left(1+e^x\right)^2-1.$$ ◄

К уравнению с разделяющимися переменными можно привести и уравнение вида

$$y'=f(ax+by+c), \tag{7}$$

где *a*, *b*, *c* – постоянные. Для этого вводится новая функция

$$z=ax+by+c.$$

Поскольку $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{d(ax+by+c)}{dx}=a+by'$, $y'=\dfrac{z'-a}{b}$, и для z получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$z'=a+bf(z).$$

Пример 5. Решить уравнение $y'=2x+y+1$.

► Данное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными, если положить $2x+y+1=z$.

Имеем: $2+y'=z'$, $z'-2=z$. Разделим переменные:

$$\frac{dz}{dx}=z+2,\ \frac{dz}{z+2}=dx,\ \ln|z+2|=x+\ln C.$$

Отсюда $|z+2|=Ce^x$. Вспоминая, что $z=2x+y+1$ получаем $2x+y+1=-2+Ce^x$ или $y=-2x-3+Ce^x$ – общее решение дифференциального уравнения. ◄

1.2. Однородные уравнения и уравнения, приводящиеся к ним

1.2.1.Однородные уравнения

Определение. Функция $f(x,y)$ называется *однородной* функцией k-го порядка относительно переменных x, y, если для нее выполняется равенство $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x,y)$.

Например:

а) функция $f(x,y) = x^2 + y^2$ является однородной функцией 2-го порядка так как

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 = \lambda^2 (x^2 + y^2) = \lambda^2 f(x,y);$$

б) функция $f(x,y) = 3x^2 + y^3$ не является однородной функцией так как

$$f(\lambda x, \lambda y) = 3\lambda^2 x^2 + \lambda^3 y^3 = \lambda^2 (3x^2 + \lambda y^2) \neq \lambda^2 f(x,y);$$

в) функция $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ является однородной функцией нулевого порядка: $f(x,y) = \dfrac{\lambda x}{\lambda y} = \dfrac{x}{y} = f(x,y)$.

Однородную функцию нулевого порядка всегда можно представить как функцию, аргументом которой является отношение $\dfrac{y}{x}$, т.е. $f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Определение. Дифференциальное уравнение вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

называется *однородным уравнением*, если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ однородные функции одного порядка.

Однородное уравнение может быть записано в виде

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (8)$$

Уравнение (8) можно привести к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $t(x) = \frac{y}{x}$.

Пример 6. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$$

►Данное уравнение является уравнением вида $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Положим $t(x) = \frac{y}{x}$. Отсюда $y = tx$, $y' = t'x + t$.

Подставляя в уравнение, получим:

$$t'x + t = e^{-t} + t, \quad \text{отсюда } t'x = e^{-t}.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dt}{dx}x = e^{-t}.$$

Разделяя переменные, имеем:

$$\frac{dt}{e^{-t}} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируем обе части полученного равенства:

$$\int e^t dt = \int \frac{dx}{x},$$

$$e^t = \ln|x| + \ln C = \ln|Cx|,$$

$$t = \ln\ln|Cx|.$$

Учитывая, что $t(x) = \frac{y}{x}$, получаем $y = x\ln\ln|Cx|$ - общее решение дифференциального уравнения. ◄

Пример 7. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2},$$

и частное решение, удовлетворяющее начальному условию

$$y(1) = 0.$$

►Данное уравнение является однородным:

$$y' = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x}; \quad y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}.$$

Положим $t(x) = \frac{y}{x}$. Отсюда $y = tx$, $y' = t'x + t$.

Подставляя в уравнение, получаем $t'x + t = t + \sqrt{1 - t^2}$.

Отсюда $t'x = \sqrt{1 - t^2}$, $x\frac{dt}{dx} = \sqrt{1 - t^2}$ - дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными относительно t.

Разделим переменные

$$\frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получим

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \int \frac{dx}{x} + C;$$

$$\arcsin t = \ln|x| + \ln C; \quad \arcsin t = \ln|Cx|; \quad t = \sin \ln|Cx|.$$

Возвращаясь к переменной y, записываем общее решение уравнения $y = x \sin \ln|Cx|$.

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$:

$0 = \sin \ln|C|$, отсюда $\ln|C| = 0$. Следовательно, $C = 1$.

Подставив $C = 1$ в общее решение, получим частное решение

$$y = x \sin \ln|x|. ◄$$

1.2.2.Уравнения, приводящиеся к однородным

Дифференциальное уравнение вида

$$y'(x) = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right) \tag{9}$$

с помощью замены

$$x = u + \alpha\,,\ \ y = v + \beta \tag{10}$$

после соответствующего подбора постоянных α, β приводится к однородному уравнению относительно u, v.

Заменяя $dx = du$, $dy = dv$ и подставляя (10) в (9) имеем

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1 u + b_1 v + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{a_2 u + b_2 v + a_2\alpha + b_2\beta + c_2}\right). \tag{11}$$

Потребуем чтобы

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Тогда уравнение (9) становится однородным.

Если определитель матрицы системы уравнений (12) равен нулю, то подстановка $u = a_1 x + b_1 y$ приводит уравнение (9) к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример 8. Решить уравнение $(x - y + 4)\,y' = (2 - x - y)$.

►Применим подстановку $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$.

Тогда $y' = v'$, а уравнение примет вид

$$y' = \frac{2 - u - \alpha - v - \beta}{u + \alpha - v - \beta + 4} = \frac{-u - v - \alpha - \beta + 2}{u - v + \alpha - \beta + 4}.$$

Потребуем чтобы

$$\begin{cases} -\alpha - \beta + 2 = 0, \\ \alpha - \beta + 4 = 0. \end{cases}$$

Система имеет единственное решение $\alpha = -1,\ \beta = 3$.

После подстановки $x = u - 1$, $y = v + 3$ получим однородное уравнение $y' = -\dfrac{u+v}{u-v} = -\dfrac{1+v/u}{1-v/u}$.

Положим $t(x) = \dfrac{v}{u}$. Отсюда $v = tu$, $v' = t'u + t$. Подставляя в уравнение, получаем $t'u + t = -\dfrac{1+t}{1-t}$ или $t'u = -\dfrac{1+t}{1-t} - t;\ t'u = \dfrac{1+2t-t^2}{t-1}$.

Разделяем переменные

$$\frac{(t-1)\,dt}{1+2t-t^2} = \frac{du}{u}.$$

Интегрируя обе части равенства, найдем

$$\int \frac{(t-1)\,dt}{1+2t-t^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{d\left(1+2t-t^2\right)}{1+2t-t^2} = -\frac{1}{2}\ln\left|1+2t-t^2\right| + C,$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C,\quad \ln|u| + \frac{1}{2}\ln\left|1+2t-t^2\right| = \ln C,$$

или $u^2\left(1+2t-t^2\right) = C$.

Возвращаемся к переменным x, y:

$t = \dfrac{v}{u} = \dfrac{y-3}{x+1}$, $(x+1)^2\left(1 + \dfrac{2y-6}{x+1} - \dfrac{(y-3)^2}{(x+1)^2}\right) = C$, или

$$(x+1)^2 + (x+1)(2y-6) - (y-3)^2 = C. \ ◄$$

Пример 9. Найти общий интеграл уравнения

$$y' = \frac{2x+y-1}{4x+2y+5}.$$

► Это уравнение нельзя решить подстановкой $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, так как в этом случае система уравнений, служащая для определения α и β, неразрешима (определитель матрицы системы равен нулю).

Это уравнение можно свести к уравнению с разделяющимися переменными заменой $2x + y = z$. Тогда $y' = z' - 2$, и уравнение приводится к виду

$$z' - 2 = \frac{z-1}{2z+5}, \text{ или } z' = \frac{5z+9}{2z+5}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\frac{2}{5}z + \frac{7}{25}\ln|5z+9| = x + C.$$

Так как $z = 2x + y$, то общий интеграл уравнения запишем в виде:

$$\frac{2}{5}(2x+y) + \frac{7}{25}\ln|10x+5y+9| = x + C,$$

или

$$10y - 5x + 7\ln|10x+5y+9| = C_1. \blacktriangleleft$$

1.3. Линейные уравнения

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка называется *линейным*, если оно содержит y и y' в первой степени, т.е. имеет вид:

$$y' + p(x)y = q(x). \tag{13}$$

Если $q(x) = 0$, то уравнение (13) записывается в виде

$$y' + p(x)y = 0$$

и называется *линейным однородным.* Оно является уравнением с разделяющимися переменными, а его общее решение имеет вид

$y = Ce^{\int p(x)dx}$, где C - произвольная постоянная.

Интегрирование линейного неоднородного уравнения (13) можно провести ***методом Бернулли***. Изложим кратко суть метода.

Положим $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$. Подставляя выражения для y и y' в уравнение (13), получим:

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x),$$

$$u'v + u\left(v' + p(x)v\right) = q(x). \qquad (14)$$

Согласно методу Бернулли функцию $v(x)$ выберем так, чтобы $v' + p(x)v = 0$.

Интегрируем уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dv}{dx} = -p(x)v$$

и выбираем какое-либо его частное решение $v = v_1(x)$.

Подставляя найденную функцию $v = v_1(x)$ в уравнение (14), получаем уравнение с разделяющимися переменными относительно функции $u(x)$:

$$u'v_1 = q(x),\ \frac{du}{dx} = \frac{q(x)}{v_1},$$

$$du = \frac{q(x)}{v_1}dx,\ u = \int \frac{q(x)}{v_1}dx + C,$$

т.е. находим общее решение этого уравнения $u = u_1(x, C)$.

Учитывая, что $y = uv$, получаем общее решение уравнения (13):

$$y = v_1(x)u_1(x, C).$$

Пример 10. Найти общее решение уравнения

$$y' + \frac{2y}{x+1} = (x+1)^2.$$

►Данное уравнение является линейным неоднородным. Решим это уравнение методом Бернулли. Сделаем подстановку: $y = uv$, $y' = u'v + uv'$.

Имеем:

$$u'v + uv' + \frac{2uv}{x+1} = (x+1)^2,$$

$$u'v+u\left(v'+\frac{2v}{x+1}\right)=(x+1)^2. \qquad (15)$$

Функцию $v(x)$ выберем так, чтобы $v'+\frac{2v}{x+1}=0$, отсюда

$$\frac{dv}{dx}+\frac{2v}{x+1}=0.$$

Интегрируя обе части последнего равенства, получаем:

$$\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{2dx}{x+1}, \quad \ln v=-2\ln(x+1).$$

Отсюда

$$v=\frac{1}{(x+1)^2}.$$

Подставив функцию $v(x)$ в уравнение (15), получим:

$$u'v=(x+1)^2, \quad \frac{du}{dx}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}=(x+1)^2.$$

Разделяя переменные и интегрируя, имеем

$$u=\int(x+1)^4\,dx=\frac{(x+1)^5}{5}+C.$$

Вспоминая, что $y=u(x)v(x)$, получаем общее решение уравнения: $y=\left(\frac{(x+1)^5}{5}+C\right)\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^3}{5}+\frac{C}{(x+1)^2}$.◄

Пример 11. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'-y\operatorname{ctg}x=\sin x$, удовлетворяющее начальному условию $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

►Найдем общее решение линейного уравнения методом Бернулли. Применим подстановку $y=uv$, $y'=u'v+uv'$.

Тогда

$$u'v + uv' - uv\operatorname{ctg} x = \sin x;$$

$$u'v + u\left(v' - v \cdot \operatorname{ctg} x\right) = \sin x.$$

I. Найдем функцию $v(x)$:

$v' - v\operatorname{ctg} x = 0$;

$\frac{dv}{dx} = v\operatorname{ctg} x$;

$\int \frac{dv}{v} = \int \operatorname{ctg} x dx$;

$\ln|v| = \ln|\sin x|$;

$v = \sin x$;

II. Найдем функцию $u(x)$:

$u'v = \sin x$;

$\frac{du}{dx}\sin x = \sin x$;

$\int du = \int dx$;

$u = x + C$.

Запишем общее решение дифференциального уравнения:

$$y = (x + C)\sin x.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Подставим в общее решение $y = 0,\ x = \frac{\pi}{2}$:

$$0 = \left(\frac{\pi}{2} + C\right)\sin\frac{\pi}{2}.$$

Отсюда $C = -\frac{\pi}{2}$.

Тогда частное решение имеет вид:

$$y = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\sin x. \blacktriangleleft$$

Общее решение линейного неоднородного уравнения (13) можно найти исходя из общего решения соответствующего однородного уравнения ***методом Лагранжа,*** варьируя произвольную постоянную, т.е. полагая $y = C(x)e^{\int p(x)dx}$, где $C(x)$ - некоторая дифференцируемая функция от x.

Пример 12. Найти общее решение линейного уравнения
$$y'\cos^2 x + y = \operatorname{tg} x.$$

► Интегрируем соответствующее однородное уравнение
$$y'\cos^2 x + y = 0.$$

Разделим переменные
$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{\cos^2 x} = 0.$$

Проинтегрируем:
$$\ln|y| + \operatorname{tg} x = \ln C,$$
$$\ln|y| + \ln e^{\operatorname{tg} x} = \ln C, \qquad \ln\left|ye^{\operatorname{tg} x}\right| = \ln C.$$

Запишем общее решение однородного уравнения: $y = Ce^{-\operatorname{tg} x}$.

Решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y = C(x)e^{-tgx}$, где $C(x)$ – неизвестная функция.

Подставляя в исходное уравнение $y = C(x)e^{-\operatorname{tg} x}$
и
$$y' = C'(x)e^{-tgx} - C(x)e^{\operatorname{tg} x}\frac{1}{\cos^2 x},$$
придем к уравнению
$$\cos^2 x \cdot C'(x)e^{-tgx} - C(x)\frac{e^{-tgx}}{\cos^2 x}\cos^2 x + C(x)e^{-tgx} = \operatorname{tg} x,$$
т.е.
$$C'(x)\cos^2 xe^{-tgx} = \operatorname{tg} x.$$

Отсюда
$$C(x) = \int \frac{e^{tgx}\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}dx = e^{tgx}(\operatorname{tg} x - 1) + C.$$

Тогда общее решение исходного уравнения записывается в виде
$$y = \left(e^{tgx}(\operatorname{tg} x - 1) + C\right)e^{-tgx} = \operatorname{tg} x - 1 + Ce^{-\operatorname{tg} x}. ◄$$

1.4. Уравнение Бернулли

Определение. *Уравнением Бернулли* называется дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^n, \qquad (16)$$

где $n \neq 0$, $n \neq 1$ (при $n = 0$ уравнение (16) является линейным, а при $n = 1$ – уравнением с разделяющимися переменными).

Так же как и линейное уравнение, уравнение Бернулли можно проинтегрировать с помощью подстановки $y = uv$ или свести к линейному уравнению с помощью подстановки

$$z = y^{1-n},$$

$$z' = (1-n)\,y^{-n} \cdot y'.$$

Пример 13. Найти общее решение уравнения

$$y' + y\,\mathrm{tg}\,x = y^2 \sin x. \qquad (17)$$

◄ <u>Способ 1.</u> Разделим обе части уравнения (17) на y^2:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{\mathrm{tg}\,x}{y} = \sin x,$$

$$y^{-2}y' + y^{-1}\,\mathrm{tg}\,x = \sin x.$$

Положим $y^{-1} = z$, тогда $-y^{-2}y' = z'$.

Подставив эти значения в исходное уравнение, обе части которого надо предварительно умножить на (-1), приходим к линейному уравнению

$$z' - z\,\mathrm{tg}\,x = -\sin x.$$

Найдем решение этого уравнения методом Бернулли.

Пусть $z = uv$, тогда

$$u'v + uv' - uv\,\mathrm{tg}\,x = -\sin x,$$

$$u'v + u\left(v' - v\,\mathrm{tg}\,x\right) = -\sin x.$$

I. Найдем функцию $v(x)$:

$v' - v\,\mathrm{tg}\,x = 0$,

$\dfrac{dv}{dx} = v\,\mathrm{tg}\,x$,

$\int \dfrac{dv}{v} = \int \mathrm{tg}\,xdx$,

$\ln|v| = -\ln|\cos x|$,

$\ln|v| = \ln\left|\cos^{-1} x\right|$, $v = \dfrac{1}{\cos x}$.

II. Найдем функцию $u(x)$:

$u'v = -\sin x$,

$v\dfrac{du}{dx} = -\sin x$,

$vdu = -\sin xdx$,

$du = -\sin x \cdot \cos xdx$,

$\int du = -\int \sin x \cdot \cos xdx$,

$u = -\dfrac{\sin^2 x}{2} + C$.

Следовательно, $z = \dfrac{1}{\cos x}\left(-\dfrac{\sin^2 x}{2} + C\right) = \dfrac{-\sin^2 x + 2C}{2\cos x}$

Согласно подстановке $y^{-1} = \dfrac{1}{y} = z$ общим решением уравнения (17) будет $y = \dfrac{2\cos x}{-\sin^2 x + 2C}$.

Способ 2. Это уравнение Бернулли и $n = 2$. Положим $y = uv$.

Тогда уравнение (17) запишется в виде:

$$u'v + u\left(v' + v \cdot \mathrm{tg}\,x\right) = u^2 v^2 \sin x.$$

I. Найдем функцию $v(x)$:

$v' + v\,\mathrm{tg}\,x = 0$,

$\dfrac{dv}{dx} = -v\,\mathrm{tg}\,x$,

$\int \dfrac{dv}{v} = -\int \mathrm{tg}\,xdx$,

$\ln|v| = \ln|\cos x|$, $v = \cos x.$

II. Найдем функцию $u(x)$:

$u' = u^2 \cos x \cdot \sin x$,

$\int \dfrac{du}{u^2} = \int \cos x \cdot \sin xdx$,

$-\dfrac{1}{u} = \dfrac{\sin^2 x}{2} + C$,

$u = \dfrac{-2}{\sin^2 x + 2C}$.

Запишем общее решение: $y = \dfrac{-2\cos x}{\sin^2 x + 2C}$. ►

1.5. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Дифференциальное уравнение вида

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \qquad (18)$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его левая часть представляет полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, т.е.

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy \equiv du \equiv \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\ .$$

Теорема. Для того, чтобы уравнение (18) являлось уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой области D изменения переменных x, y выполнялось условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,.$$

Общий интеграл уравнения (18) имеет вид $u(x,y) = C$ или

$$\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C\,. \qquad (19)$$

(нижние пределы интегралов x_0, y_0 выбираются произвольно, но так, чтобы интегралы в левой части (19) имели смысл)

Пример 14. Решить дифференциальное уравнение

$$(x+y-1)\,dx + \left(e^{y} + x\right)dy = 0\,.$$

► Способ 1. Проверим, что данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах:

$$P(x,y) = x+y-1,\ Q(x,y) = e^{y} + x\,,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (x+y-1)'_y = 1,\quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \left(e^{y}+x\right)'_x = 1,\ \text{так что}\ \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,.$$

Следовательно, данное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах.

Найдем общий интеграл по формуле (19). Взяв $x_0 = 0, y_0 = 0$, получим

$$\int_0^x (x+y-1)dx + \int_0^y e^y dy = C .$$

Вычислим интегралы:

$$\int_0^x (x+y-1)dx = \left(\frac{x^2}{2} + xy - x\right)\Bigg|_0^x = \frac{x^2}{2} + xy - x + C_1 ,$$

$$\int_0^y e^y dy = e^y\Big|_0^y = e^y - 1 + C_2$$

и запишем общее решение $\frac{x^2}{2} + xy - x + e^y = C$, где $C = C_1 + 1$.

Выполним проверку: $u(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy - x + e^y = C$,

$$du = d\left(\frac{x^2}{2} + xy - x + e^y\right) = (x+y-1)dx + \left(e^y + x\right)dy = 0 .$$ ◄

Пример 15. Решить дифференциальное уравнение

$$\left(\sin xy + xy\cos xy\right)dx + x^2\cos xydy = 0 .$$

► Способ 2. Проверим, что данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах:

$$P(x, y) = \sin xy + xy\cos xy ,\ Q(x, y) = x^2\cos xydy .$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \left(\sin xy + xy\cos xy\right)'_y = x\cos xy + x\cos xy - x^2 y\sin xy =$$

$$= 2x\cos xy - x^2 y\sin xy,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \left(x^2\cos xy\right)'_x = 2x\cos xy - x^2 y\sin xy,$$ так что $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Следовательно, уравнение есть уравнение в полных дифференциалах и

$$P = \frac{\partial u}{\partial y} = \sin xy + xy\cos xy,\ Q = \frac{\partial u}{\partial x} = x^2 \cos xy.$$

Поэтому

$$u(x, y) = \int (\sin xy + xy\cos xy)\,dx + \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ пока неопределенная функция.

Интегрируя, получаем

$$u(x, y) = x\sin xy + \varphi(y).$$

Частная производная $\frac{\partial u}{\partial y}$ найденной функции $u(x, y)$ должна равняться $x^2 \cos xy$, что дает $x^2 \cos xy + \varphi'(y) = x^2 \cos xy$.

Отсюда $\varphi'(y) = 0$, так что $\varphi(y) = C$.

Таким образом

$$u(x, y) = x\sin xy + C.$$

Общий интеграл исходного дифференциального уравнения

$$x\sin xy = C_1.$$

Выполним проверку:

$$u(x, y) = x\sin xy,$$

$$du = d(x\sin xy) = (\sin xy + xy\cos xy)\,dx + x^2 \cos xy dy = 0. \blacktriangleleft$$

В некоторых случаях, когда уравнение (18) не является уравнением в полных дифференциалах, удается подобрать функцию $\mu(x, y)$, после умножения на которую левая часть (18) превращается в полный дифференциал

$$du = \mu P(x, y)dx + \mu Q(x, y)dy.$$

Такая функция $\mu(x, y)$ называется *интегрирующим множителем.*

Отметим некоторые частные случаи, когда удается относительно легко подобрать интегрирующий множитель.

1. Если уравнение имеет интегрирующий множитель, зависящий только от x, т.е. $\mu = \mu(x)$, то он вычисляется по формуле

$$\frac{d\ln\mu}{dx} = \frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q},$$

где отношение в правой части должно являться функцией, зависящей только от x.

2. Если уравнение имеет интегрирующий множитель, зависящий только от y, т.е. $\mu = \mu(y)$, то он вычисляется по формуле

$$\frac{d\ln\mu}{dy} = \frac{\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}}{P},$$

где отношение в правой части должно являться функцией, зависящей только от y.

Пример 16. Найти общий интеграл уравнения

$$ydx - (x + y^2)dy = 0.$$

►Имеем

$$P(x, y) = y,\ Q(x, y) = -(x + y^2)dy,\ \frac{\partial P}{\partial y} = 1,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = -1.$$

Т.к. $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то уравнение не является уравнением в полных дифференциалах. Вычислим

$$\frac{\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)}{P} = -\frac{2}{y}.$$

Последнее выражение указывает, что существует интегрирующий множитель, зависящий только от y.

Вычислим

$$\frac{d\ln\mu}{dy}=\frac{\frac{dQ}{dx}-\frac{dP}{dy}}{P};\;\; \frac{d\ln\mu}{dy}=-\frac{2}{y};$$

$$\int\frac{d\ln\mu}{dy}=-2\int\frac{dy}{y};$$

$$\ln\mu=-2\ln y=\ln y^{-2}.$$

Тогда $\mu(y)=\dfrac{1}{y^2}$.

Умножив данное уравнение на $\mu(y)$, получим уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{y}{y^2}dx-\frac{x+y^2}{y^2}dy=0,$$

$$\frac{1}{y}dx-\left(\frac{x}{y^2}+1\right)dy=0 .$$

Здесь $P(x,y)=\dfrac{1}{y},\;\; Q(x,y)=-\left(\dfrac{x}{y^2}+1\right)$.

Тогда $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-\dfrac{1}{y^2},\;\; \dfrac{\partial Q}{\partial x}=-\dfrac{1}{y^2},\;\; \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Воспользуемся формулой (19):

$$\int_0^x\frac{1}{y}dx-\int_1^y dy=\frac{x}{y}\bigg|_0^x-y\Big|_1^y=\frac{x}{y}-y=C.$$

Запишем общий интеграл уравнения

$$\frac{x}{y}-y=C. ◄$$

Сводная таблица видов дифференциальных уравнений первого порядка

Таблица 1.

Вид уравнния	Метод решения
Уравнение с разделяющимися переменными: $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$	Разделив на $g_1(y) \cdot f_2(x)$, и интегрируя обе части равенства, получим решение уравнения: $\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = C.$
Однородное уравнение: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$	Замена $y = tx, \quad y' = t'x + t$ приводит к уравнению с разделяющимися переменными.
Уравнение, приводящееся к однородному: $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$	1. Если $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, то замена $u = a_1x + b_1y$ приводит к уравнению с разделяющимися переменными. 2. Если $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, то замена $\begin{cases} x = u + \alpha, \\ y = v + \beta \end{cases}$, где (α, β) – решение системы $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$, приводит уравнение к однородному.
Линейное уравнение: $y' + P(x)y = Q(x)$	Применяется подстановка $y = uv$ и уравнение преобразуется к виду: $u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x)$. За v принимают частное решение уравнения $v' + P(x)v = 0$. Функцию u находят решая уравнение $u'v = Q(x)$.

Уравнение Бернулли: $y' + P(x)y = Q(x)\cdot y^n.$	Разделим обе части уравнения на y^n $\dfrac{y'}{y^n}+\dfrac{P(x)}{y^{n-1}}=Q(x).$ Замена $z=\dfrac{1}{y^{n-1}}, \quad z'=\dfrac{(1-n)y'}{y^n}$ приводит к линейному уравнению с неизвестной функцией z .
Уравнение в полных дифференциалах: $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}.$	Решение уравнения можно вычислить по формуле: $\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy=C$, или по формуле $\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy=C,$ где $\left(x_0,y_0\right)$ – произвольная точка из области определения функции $P\left(x,y\right)$ и $Q\left(x,y\right)$.
Интегрирующий множитель $\mu\left(x,y\right)$, $\mu P(x,y)dx+\mu Q(x,y)dy=0$ - уравнение в полных дифференциалах	1. Интегрирующий множитель, зависящий только от y , вычисляется по формуле $\mu(y)=e^{\int\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P}dy}$. 2. Интегрирующий множитель, зависящий только от x , вычисляется по формуле $\mu(x)=e^{\int\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}dx}$.

2. Дифференциальные уравнения высших порядков

Дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 .$$

Решением такого уравнения служит всякая n раз дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, которая обращает данное уравнение в тождество.

Задача Коши для этого уравнения состоит в том, чтобы найти решение уравнения, удовлетворяющее условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, ... , $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$, где x_0, y_0, y_1, ... , y_{n-1} - заданные числа, которые называются *начальными условиями*.

Функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ называется *общим решением* данного дифференциального уравнения n-го порядка, если при соответствующем выборе произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$ это функция является решением любой задачи Коши, поставленной для данного уравнения.

Всякое решение, получаемое из общего решения при конкретных значениях постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$, называется *частным решением* этого уравнения.

Функция вида $\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$, которая определяет неявно общее решение дифференциального уравнения, называется *общим интегралом уравнения.* Давая постоянным $C_1, C_2, ..., C_n$ конкретные допустимые числовые значения, получим *частный интеграл* дифференциального уравнения.

График частного решения или частного интеграла называется *интегральной кривой* данного дифференциального уравнения.

2.1. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Укажем некоторые виды дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка.

1. Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$**.** После n- кратного интегрирования получается общее решение.

Пример 17. Найти общее решение уравнения

$$y'' = 1 + x^2 + \cos x .$$

►Интегрируем это уравнение последовательно два раза:

$$y' = \int \left(1 + x^2 + \cos x\right) dx = x + \frac{x^3}{3} + \sin x + C_1 ,$$

$$y = \int (x + \frac{x^3}{3} + \sin x + C_1) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} - \cos x + C_1 x + C_2 .$$

Общим решением является функция $y = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} - \cos x + C_1 x + C_2$.◄

2. Уравнения вида $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$**, не содержащие искомой функции.**

Порядок такого уравнения можно понизить, взяв за новую неизвестную функцию производную наименьшего порядка данного уравнения, т.е. полагая $y^{(k)} = z$.

Пример 18. Найти общее решение уравнения

$$2xy' \cdot y'' = y'^2 - 1 .$$

►Данное уравнение не содержит искомой функции y, поэтому полагаем $y' = z$, тогда $y'' = z' = \frac{dz}{dx}$. После этого уравнение примет вид $2xz \frac{dz}{dx} = z^2 - 1$.

Разделяя переменные и интегрируя, находим z:

$$\int \frac{2zdz}{z^2-1} = \int \frac{dx}{x} + C,$$

$$\ln(z^2-1) = \ln x + \ln C_1 = \ln C_1 x,$$

$$z^2 = C_1 x + 1;\ z = \pm\sqrt{C_1 x + 1}.$$

Заменим z на y':

$$y' = \pm\sqrt{C_1 x + 1}.$$

Интегрируя, найдем общее решение уравнения

$$y = \pm\int \sqrt{C_1 x + 1}dx = \pm\frac{1}{C_1}\int \left(C_1 x + 1\right)^{\frac{1}{2}} d\left(C_1 x + 1\right) = \frac{\pm 2\left(C_1 x + 1\right)^{\frac{3}{2}}}{3C_1} + C_2. ◄$$

Пример 19. Найти общее решение уравнения

$$y''' = \sqrt{1 - \left(y''\right)^2}.$$

►Данное уравнение не содержит искомой функции y и ее производной, поэтому полагаем $y'' = z$. Тогда $y''' = z'$. После этого получаем уравнение первого порядка с разделяющимися переменными $\frac{dz}{dx} = \sqrt{1 - z^2}$.

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = dx,\ \arcsin z = x + C,\ z = \sin\left(x + C\right).$$

Заменим z на y'':

$$y'' = \sin\left(x + C\right).$$

Проинтегрируем обе части полученного равенства последовательно дважды:

$$y' = \int \sin\left(x + C\right)dx = -\cos(x + C),$$

$$y = \int (-\cos(x + C) + C_1)dx = -\sin\left(x + C\right) + C_1 x + C_2.$$

Получаем общее решение уравнения: $y = -\sin\left(x + C\right) + C_1 x + C_2$. ◄

3. **Уравнения вида** $F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$**, не содержащие независимой переменной** x.

Можно понизить порядок уравнения на единицу, если положить $y' = z$, а за новый аргумент принять y. В этом случае производные вычисляются по правилу дифференцирования сложной функции:

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dz(y)}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy},$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(z\frac{dz}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(z\frac{dz}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = z''\frac{d^2z}{dy^2} + z\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 \text{ и т.д.}$$

Пример 20. Найти общее решение уравнения

$$2yy'' = y'^2 + 1.$$

►Уравнение не содержит переменную x. Полагая $y' = z(y)$, $y'' = z\dfrac{dz}{dy}$, получаем уравнение первого порядка:

$$2yz\frac{dz}{dy} = z^2 + 1.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\int \frac{2zdz}{z^2+1} = \int \frac{dy}{y},\ \ln(z^2+1) = \ln y + \ln C_1,\ z^2 + 1 = C_1 y.$$

Отсюда $z = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$. Следовательно $y' = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$.

Интегрируя, получим общий интеграл уравнения:

$$\pm\int \frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = \int dx,\ \ 4(C_1 y - 1) = C_1^2 (x + C_2).$$

Выразив y, получим общее решение

$$y = \frac{C_1^2(x + C_2) + 4}{4C_1} = C_3 x + C_4. \text{ ◄}$$

2.2. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0, \qquad (20)$$

где коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ - некоторые действительные числа.

Для нахождения частных решений уравнения (20) составляют характеристическое уравнение

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

которое получается из уравнения (20) заменой в нем производных искомой функции соответствующими степенями λ, причем сама функция заменяется единицей.

Характеристическое уравнение является уравнением n степени и имеет n корней (среди них могут быть равные).

В зависимости от корней характеристического уравнения строится общее решение уравнения (20).

Таблица слагаемых в общем решении линейных однородных дифференциальных уравнений

Таблица 2.

Корень	Слагаемое
простой действительный корень λ	$Ce^{\lambda x}$
действительный корень λ кратности m	$\left(C_1 + C_2 x + \ldots + C_m x^{m-1}\right) e^{\lambda x}$
пара комплексных сопряженных простых корней $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$	$e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right)$
пара комплексных сопряженных корней $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ кратности m	$e^{\alpha x}\Big(\left(C_1 + C_2 x + .. + C_m x^{m-1}\right)\cos\beta x +$ $+\left(C_1 + C_2 x + .. + C_m x^{m-1}\right)\sin\beta x\Big)$

Пример 21. Найти общее решение однородного уравнения
$$y''-5y'+6y=0.$$

◀ Составляем характеристическое уравнение:
$$\lambda^2-5\lambda+6=0.$$

Находим его корни: $\lambda_1=3;\ \lambda_2=2$. Так как они действительные и различные, то общее решение записывается в виде $y=C_1e^{3x}+C_2e^{2x}$.▶

Пример 22. Найти общее решение уравнения
$$y'''-2y''-3y'=0.$$

◀Составляем характеристическое уравнение:
$$\lambda^3-2\lambda^2-3\lambda=0.$$

Находим его корни: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=3$. Так как все корни характеристического уравнения действительные и различные, то общее решение имеет вид $y=C_1+C_2e^{-x}+C_3e^{3x}$. ▶

Пример 23. Найти общее решение уравнения
$$y'''-2y''+y'=0.$$

◀Составляем характеристическое уравнение:
$$\lambda^3-2\lambda^2+\lambda=0.$$

Находим его корни: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=0$. Все корни характеристического уравнения действительные, причем один из них $(\lambda=1)$ двукратный, поэтому общее решение имеет вид
$$y=(C_1+C_2x)e^x+C_3.$$ ▶

Пример 24. Найти общее решение уравнения
$$y''-4y'+13y=0.$$

◀Характеристическое уравнение $\lambda^2-4\lambda+13=0$ имеет комплексные корни $\lambda_{1,2}=2\pm3i$. Поэтому общее решение имеет вид $y=e^{2x}(C_1\cos3x+C_2\sin3x)$. ▶

Пример 25. Найти общее решение уравнения

$$y^{IV}+2y'''+5y''=0.$$

◀Характеристическое уравнение $\lambda^4+2\lambda^3+5\lambda^2=0$ или $\lambda^2\left(\lambda^2+2\lambda+5\right)=0$ имеет комплексные корни $\lambda_{1,2}=-1\pm 2i$ и двукратный вещественный $\lambda_{3,4}=0$. Поэтому общее решение имеет вид $y=e^{-x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)+C_3+C_4x$. ▶

Пример 26. Найти общее решение дифференциального уравнения $2y''-3y'+y=0$ и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y\left(0\right)=3,\ y'\left(0\right)=1$.

◀ Характеристическое уравнение $2\lambda^2-3\lambda+1=0$ имеет простые вещественные корни $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\dfrac{1}{2}$, поэтому общее решение записывается в виде: $y=C_1e^x+C_2e^{\frac{x}{2}}$.

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальным условиям, и определим соответствующие C_1 и C_2.

С учетом первого условия находим: $3=C_1e^0+C_2e^{\frac{0}{2}}$, т.е. $C_1+C_2=3$. Заметив, что $y'=C_1e^x+\dfrac{1}{2}C_2e^{\frac{x}{2}}$, из второго условия получаем $1=C_1e^0+\dfrac{1}{2}C_2e^{\frac{0}{2}}$, т.е. $C_1+\dfrac{1}{2}C_2=1$.

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} C_1+C_2=3, \\ C_1+\dfrac{1}{2}C_2=1, \end{cases}$$

получим $C_1=-1$, $C_2=4$. Таким образом, искомое частное решение есть $y=-e^x+4e^x$. ▶

2.3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Метод подбора частного решения (метод неопределенных коэффициентов).

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x) \qquad (21)$$

с постоянными вещественными коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Теорема. Общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения неоднородного уравнения.

Для правых частей *специального вида* частное решение находится методом подбора.

Общий вид правой части $f(x)$ уравнения (21), при котором возможно применить этот метод, следующий:

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right),$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ есть многочлены степени n и m соответственно.

В этом случае частное решение уравнения (21) ищется в виде

$$f(x) = x^r \cdot e^{\alpha x}\left(\overline{P_k}(x)\cos\beta x + \overline{Q}_k(x)\sin\beta x\right),$$

где $k = \max(n, m)$, $\overline{P}_k(x)$ и $\overline{Q}_k(x)$ - многочлены от x k-й степени общего вида с неопределенными коэффициентами, а r - кратность корня $\lambda = \alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения (если $\alpha \pm i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, то $r = 0$).

Например, $\overline{P}_0(x) = A$ - многочлен нулевой степени, $\overline{P}_1(x) = Ax + B$ - многочлен первой степени, $\overline{P}_2(x) = Ax^2 + Bx + C$ - многочлен второй степени и т.д.

Сводная таблица видов частных решений для различных видов правых частей

Таблица 3.

№	Правая часть диф. уравнения	Корни характеристического уравнения	Вид частного решения
I	$P_n(x)$	1. Число 0 не является корнем характеристического уравнения	$\overline{P_n}(x)$
		2. Число 0 - корень характеристического уравнения кратности r	$x^r \cdot \overline{P_n}(x)$
II	$P_n(x)e^{\alpha x}$	1. Число α не является корнем характеристического уравнения	$\overline{P_n}(x)e^{\alpha x}$
		2. Число α - корень характеристического уравнения кратности r	$x^r \cdot \overline{P_n}(x)e^{\alpha x}$
III	$P_n(x)\cos\beta x+$ $+Q_m(x)\sin\beta x$	1. Числа $\pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения	$\overline{P_k}(x)\cos\beta x+$ $+\overline{Q_k}(x)\sin\beta x$
		2. Числа $\pm i\beta$ являются корнями характеристического уравнения кратности r	$x^r \cdot \left(\overline{P_k}(x)\cos\beta x+\right.$ $\left.+\overline{Q_k}(x)\sin\beta x\right)$
IV	$e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x+\right.$ $\left.+Q_m(x)\sin\beta x\right]$	1. Числа $\alpha\pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения	$\left[\overline{P}_k(x)\cos\beta x+\right.$ $\left.+\overline{Q_k}(x)\sin\beta x\right]e^{\alpha x}$
		2. Числа $\pm i\beta$ являются корнями характеристического уравнения кратности r	$x^r\left[\overline{P}_k(x)\cos\beta x+\right.$ $\left.+\overline{Q_k}(x)\sin\beta x\right]e^{\alpha x}$

Пример 27. Найти общее решение уравнения

$$y''' - y'' = 12x^2 + 6x .$$

► Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение этого уравнения можно записать в виде суммы $y(x) = \tilde{y}(x) + y^*(x)$, где $\tilde{y}(x)$ - общее решение соответствующего однородного уравнения, $y^*(x)$ - частное решение неоднородного уравнения.

Для однородного дифференциального уравнения $y''' - y'' = 0$ запишем характеристическое уравнение $\lambda^3 - \lambda^2 = 0$ и вычислим его корни: $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 1$.

Запишем общее решение однородного уравнения:

$$\tilde{y}(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^x .$$

Правая часть исходного уравнения имеет вид $f(x) = P_n(x)$. В этом случае частное решение $y^*(x)$ следует искать в виде $y^*(x) = x^r \cdot \overline{P}_n(x)$ (табл.2, случай I), где r - число нулевых корней характеристического уравнения. Так как ноль является двукратным корнем характеристического уравнения, то $r = 2$ и частное решение $y^*(x)$ надо искать в виде:

$$y^*(x) = x^2\left(Ax^2 + Bx + C\right) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 .$$

Вычислим

$$\left(y^*\right)' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx ,$$

$$\left(y^*\right)'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C ,\ \left(y^*\right)''' = 24Ax + 6B .$$

Подставляя выражения $y^*, y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}, y^{*\prime\prime\prime}$ в исходное уравнение имеем:

$$-12Ax^2 + \left(24A - 6B\right)x + \left(6B - 2C\right) = 12x^2 + 6x .$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

при x^2: $\quad -12A=12,$

при x^1: $\quad$ 24A – 6B=6,

при x^0: $\quad 6B-2C=0$.

Решая полученную систему уравнений

$$\begin{cases} -12A=12, \\ 24A - 6B=6, \\ \quad 6B-2C=0, \end{cases}$$

находим $A=1,\ B=-5,\ C=-15$.

Подставляя найденные значения A, B, C в выражение для $y^*(x)$, получим частное решение исходного дифференциального уравнения

$$y^*(x)=-x^4-5x^3-15x^2.$$

Тогда общее решение будет иметь вид:

$$y(x)=C_1+C_2x+C_3e^x-x^4-5x^3-15x^2. \blacktriangleleft$$

Пример 28. Найти общее решение уравнения

$$y''-2y'-3y=(x+2)e^{3x}.$$

► Характеристическое уравнение $\lambda^2-2\lambda-3=0$ имеет корни $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=3$. Значит общее решение однородного уравнения:

$$\tilde{y}(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}.$$

Правая часть исходного уравнения $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$. В этом случае частное решение $y^*(x)$ следует искать в виде $y^*(x)=x^r\cdot\overline{P}_n(x)e^{\alpha x}$ (табл.2, случай II), где r - число корней характеристического уравнения, совпадающих с коэффициентом α в показателе степени показательной функции. Так как $\alpha=3$ и $\lambda=3$ является корнем характеристического уравнения, то $r=1$ и частное решение $y^*(x)$ можно записать в виде

$$y^*(x) = x(Ax+B)e^{3x} = (Ax^2+Bx)e^{3x}.$$

Вычислим

$$(y^*)' = (2Ax+B)e^{3x} + 3(Ax^2+Bx)e^{3x},$$

$$(y^*)'' = 2Ae^{3x} + 6(2Ax+B)e^{3x} + 9(Ax^2+Bx)e^{3x}.$$

Подставляя выражения $y^*, y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}$ в исходное уравнение и сокращая на множитель $e^{3x} \neq 0$, получим тождество:

$$2A + 6(2Ax+B) + 9(Ax^2+Bx) - 2\left((2Ax+B) + 3(Ax^2+Bx)\right) -$$
$$-3(Ax^2+Bx) = x+2.$$

После привидения подобных членов получим

$$8Ax + 2A + 4B = x + 2.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x:

при x^1: $8A = 1,$

при x^0: $2A + 4B = 2.$

Решая полученную систему уравнений

$$\begin{cases} 8A = 1, \\ 2A + 4B = 2, \end{cases}$$

находим $A = \dfrac{1}{8}, B = \dfrac{7}{16}.$

Подставляя найденные значения A и B в выражение для $y^*(x)$, найдем частное решение исходного дифференциального уравнения

$$y^*(x) = \left(\frac{1}{8}x^2 + \frac{7}{16}x\right)e^{3x}.$$

Тогда общее решение будет иметь вид:

$$y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + \left(\frac{1}{8}x^2 + \frac{7}{16}x\right)e^{3x}. \blacktriangleleft$$

Пример 29. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' + 4y = \sin x + 2\cos x .$$

► Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + 4y = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 + 4 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm 2i$. Следовательно, $\tilde{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.

Правая часть дифференциального уравнения имеет вид $f(x) = P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x$. В этом случае частное решение $y^*(x)$ следует искать в виде (табл.2, случай III)

$$y^*(x) = x^r\left(\overline{P_k}(x)\cos\beta x + \overline{Q_k}(x)\sin\beta x\right),$$

где r - число корней характеристического уравнения, совпадающих с $i\beta$. Так как $\beta = 1$ и i не является корнем характеристического уравнения, то $r = 0$. Следовательно, решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y^* = A\cos x + B\sin x .$$

Вычислим

$$\left(y^*\right)' = A\sin x + B\cos x, \quad \left(y^*\right)' = -A\cos x - B\sin x .$$

Подставляя выражения $y^*, y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}$ в исходное уравнение, имеем: $\quad -A\cos x - B\sin x + 4A\cos x + 4B\sin x = \sin x + 2\cos x$.

Приравняем коэффициенты

при $\sin x$: $\quad -B + 4B = -1$,

при $\cos x$: $\quad -A + 4A = 2$.

Отсюда $A = \dfrac{2}{3}$, $B = -\dfrac{1}{3}$.

Итак, частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y^* = \frac{2}{3}\cos x - \frac{1}{3}\sin x .$$

Тогда общее решение неоднородного уравнения

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{3}(2\cos x - \sin x) . ◄$$

2. Принцип суперпозиции (наложения решений)

Теорема. Если функция $y_1(x)$ является решением уравнения

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_ny=f_1(x),$$

а функция $y_2(x)$ есть решение уравнения

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_ny=f_2(x),$$

то функция $y=y_1(x)+y_2(x)$ является решением уравнения

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_ny=f_1(x)+f_2(x).$$

Пример 30. Решить уравнение

$$y'''+y''-2y'=4x+3e^x.$$

► Запишем характеристическое уравнение $\lambda^3+\lambda^2-2\lambda=0$ и вычислим его корни: $\lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=-2$. Тогда общее решение однородного уравнения:

$$\overline{y}=C_1+C_2e^x+C_3e^{-2x}.$$

Частное решение ищем, пользуясь принцыпом суперпозиции, в виде:

$$y^*(x)=x(Ax+B)+Cxe^x.$$

Вычислим $\left(y^*\right)'=2Ax+B+Ce^x+Cxe^x$,

$\left(y^*\right)''=2A+2Ce^x+Cxe^x$, $\left(y^*\right)'''=3Ce^x+Cxe^x$.

Подставляя выражения $y^*, y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}, y^{*\prime\prime\prime}$ в исходное уравнение получим: $-4Ax+(2A-3B)x+3Ce^x=4x+3e^x$.

Отсюда $-4A=4,\ 2\text{A}-3B=0,\ 3C=3$, т.е. $A=-1,\ B=-\dfrac{2}{3},\ C=1$.

Следовательно, общее решение исходного уравнения

$$y=C_1+C_2e^x+C_3e^{-2x}-x\left(x+\frac{2}{3}\right)+xe^x.\ ◄$$

3. Метод вариации произвольных постоянных.

Этот метод применяется для отыскания частного решения линейного неоднородного уравнения n-го порядка как с переменными, так и с постоянными коэффициентами, если известно общее решение соответствующего однородного уравнения.

Метод вариации заключается в следующем. Пусть известно общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\tilde{y}(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n .$$

Тогда общее решение неоднородного уравнения следует искать в виде

$$y(x) = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \ldots + C_n(x) y_n ,$$

где функции $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 + \ldots + C_n'(x) y_n = 0, \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' + \ldots + C_n'(x) y_n' = 0, \\ C_1'(x) y_1'' + C_2'(x) y_2'' + \ldots + C_n'(x) y_n'' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ C_1'(x) y_1^{(n-1)} + C_2'(x) y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x) y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

Для уравнения второго порядка

$$y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = f(x) \tag{22}$$

соответствующая система имеет вид

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0, \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x). \end{cases}$$

Решение этой системы вычисляется по формулам:

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2 f(x) dx}{w(y_1, y_2)} + A_1 ,$$

$$C_2(x)=\int\frac{y_1 f(x)dx}{w(y_1,y_2)}+A_2,$$

где $w(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$, A_1, A_2 - постоянные интегрирования.

Тогда общее решение уравнения (22) определяется по формуле

$$y(x)=y_1\left(A_1-\int\frac{y_2 f(x)dx}{w(y_1,y_2)}\right)+y_2\left(\int\frac{y_1 f(x)dx}{w(y_1,y_2)}+A_2\right).$$

Пример 31. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''+y=\frac{1}{\cos x}$$

и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0)=0, y'(0)=1.$$

►Запишем соответствующее однородное уравнение

$$y''+y=0.$$

Его характеристическое уравнение $\lambda^2+1=0$ имеет мнимые корни $\lambda_1=-i, \lambda_2=i$, и общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\tilde{y}(x)=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

Общее решение исходного уравнения будем искать в виде

$$y(x)=C_1(x)\cos x+C_2(x)\sin x, \tag{23}$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ - неизвестные функции от x. Для их нахождения составим систему

$$\begin{cases}\cos x\cdot C_1'(x)_1+\sin x\cdot C_2'(x)=0,\\ -\sin x\cdot C_1'(x)+\cos x\cdot C_2'(x)=\dfrac{1}{\cos x}.\end{cases}$$

Вычислим решение системы уравнений методом Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}=\cos^2 x+\sin^2 x=1,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}0 & \sin x\\ \dfrac{1}{\cos x} & \cos x\end{vmatrix}=-\frac{\sin x}{\cos x}=-\operatorname{tg} x,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}\cos x & 0\\ -\sin x & \dfrac{1}{\cos x}\end{vmatrix}=1.$$

$$C_1'(x)=\frac{\Delta_1}{\Delta}=-\operatorname{tg} x,$$

$$C_2'(x)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=1.$$

Интегрированием, находим

$$C_1(x)=\ln|\cos x|+A_1,\ C_2(x)=x+A_2.$$

Подставляя выражения $C_1(x), C_2(x)$ в (23), получаем общее решение уравнения:

$$y(x)=\left(\ln|\cos x|+A_1\right)\cos x+\left(x+A_2\right)\sin x.$$

Определим постоянные A_1, A_2 из начальных условий.

Имеем:

$$y'(x)=\left(\left(\ln|\cos x|+A_1\right)\cos x+\left(x+A_2\right)\sin x\right)'=$$

$$=-\sin x\left(\ln|\cos x|+A_1\right)+\left(x+A_2\right)\cos x.$$

$$y(0)=\left(\ln|\cos 0|+A_1\right)\cos 0+\left(0+A_2\right)\sin 0=A_1=0,$$

$$y'(0)=-\sin 0\left(\ln|\cos 0|+A_1\right)+\left(0+A_2\right)\cos 0=A_2=1.$$

Итак, решение исходного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям, имеет вид

$$y(x)=\cos x\ln|\cos x|+\left(x+1\right)\sin x.$$ ◄

2.4. Система дифференциальных уравнений

Система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1\left(t, x_1, x_2, ..., x_n\right), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2\left(t, x_1, x_2, ..., x_n\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n\left(t, x_1, x_2, ..., x_n\right), \end{cases}$$

где $x_1, x_2, ..., x_n$ - неизвестные функции независимой переменной t, называется *нормальной системой*.

Если правые части нормальной системы дифференциальных уравнений являются линейными функциями относительно $x_1, x_2, ..., x_n$, то система дифференциальных уравнений называется *линейной.*

Иногда нормальную систему дифференциальных уравнений удается свести к одному уравнению n-го порядка, содержащему одну неизвестную функцию. Свести нормальную систему к одному уравнению можно дифференцированием одного из уравнений системы и исключением всех неизвестных, кроме одного.

Пример 32. Решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y, \end{cases} \qquad (24)$$

$$x\left(0\right) = 6, y\left(0\right) - 2. \qquad (25)$$

►Из второго уравнения системы (24) находим

$$x = -3y - \frac{dy}{dt}, \tag{26}$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = -3\frac{dy}{dt} - \frac{d^2y}{dt^2}. \tag{27}$$

Подставляя (26) и (27) в первое уравнение системы (24), получаем линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2y}{dt^2} - y = 0,$$

общее решение которого

$$y = C_1e^t + C_2e^{-t}.$$

Подставляя это выражение в (26), найдем

$$x = -4C_1e^t - 2C_2e^{-t}.$$

Следовательно, общее решение системы (24):

$$x = -4C_1e^t - 2C_2e^{-t},$$

$$y = C_1e^t + C_2e^{-t}.$$

При начальных условиях (25) получим систему уравнений для определения C_1, C_2:

$$\begin{cases} 6 = -4C_1 - 2C_2, \\ -2 = C_1 + C_2, \end{cases}$$

решая которую, найдем $C_1 = -1, \ \ C_2 = -1$.

Подставляя эти значения C_1 и C_2 в общее решение, получаем решение задачи Коши:

$$x = 4e^t + 2e^{-t},$$

$$y = -e^t - e^{-t}. \ ◄$$

3. ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

При решении задач на составление дифференциальных уравнений используются различные законы физики, химии и др. Записываются начальные условия, затем полученную задачу Коши решают одним из изложенных ранее методов.

Задача 1. (из геометрии).

Пусть кривая на плоскости задана уравнением $y = f(x)$. Какова должна быть функция f, чтобы отрезок касательной, заключенный между осями координат, делился точкой касания в заданном отношении $a:b$?

Решение. Так как значение производной в каждой точке совпадает с тангенсом угла наклона касательной к оси x, то условие задачи можно записать в виде

$$b \cdot \frac{f'}{f} + \frac{a}{x} = 0 .$$

Пример 33. Найти кривую, проходящую через точку $(2;1)$, зная, что отрезок любой касательной к ней, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам.

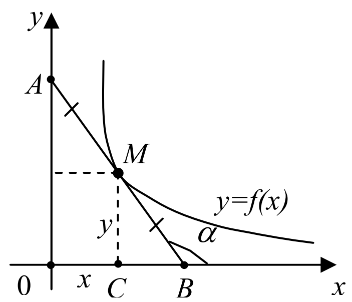

рис. 1.

► Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка кривой, заданной уравнением $y = f(x)$ (рис. 1). Воспользуемся геометрическим смыслом первой производной: $tg\alpha$ есть угловой коэффициент касательной, то есть $y' = tg\alpha$. Из рисунка видно, что $tg(\angle MBC) = MC/BC$. Так как $tg(\angle MBC) = tg(\pi - \alpha) = -tg\alpha$; $MC = y$; $AM = MB$ (по условию задачи), то

$OC = CB = x$. Следовательно, $-tg\alpha = {}^{y}\!/_{x}$ или $y' = -{}^{y}\!/_{x}$. Общим решением полученного уравнения является функция $y = {}^{C}\!/_{x}$. Найдем решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(2) = 1$: $1 = {}^{C}\!/_{2} \Rightarrow C = 2$.

Таким образом уравнение искомой кривой записывается в виде $y = {}^{2}\!/_{x}$ (гипербола). ◄

Задача 2. (поле скоростей).

Пусть тело движется на плоскости и в каждой точке известна его скорость $\vec{V} = a(x,y)\cdot\vec{i} + b(x,y)\cdot\vec{j}$. Требуется найти траекторию движения тела.

Решение. Пусть искомая траектория задается параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, где t - время. Так как скорость движения по кривой – это производные координат по t, то для определения траектории тела надо решить систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x' = a(x,y); \\ y' = b(x,y). \end{cases}$$

Пример 34. Тело движется по плоскости со скоростью $\vec{V} = \frac{1}{x}\vec{i} + \frac{1}{y}\vec{j}$. Найти траекторию движения тела.

► По условию задачи $a(x,y) = {}^{1}\!/_{x}$; $b(x,y) = -{}^{1}\!/_{y}$. Найдем решение системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{x}; \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{1}{y}. \end{cases}$$

Имеем

$$\begin{cases} xdx = dt; \\ ydy = -dt. \end{cases}$$

Отсюда $xdx + ydy = 0$. Интегрируя обе части, получим

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C \text{ или } x^2 + y^2 = 2C.$$

Следовательно, траекторией движения тела является окружность. ◄

<u>Задача 3.</u> («закон охлаждения тел»).

Закон изменения температуры тела в зависимости от времени описывается уравнением $\frac{dT}{dt} = k(T - t_0)$, где $T(t)$ - температура тела в момент времени t, k - коэффициент пропорциональности, t_0 - температура воздуха (среды охлаждения).

Пример 35. В комнате, где температура 200^0C, тело остыло за 20 минут от 100^0C до 60^0C. Найти закон охлаждения тела. Повышением температуры в комнате пренебречь.

► В силу закона Ньютона (скорость охлаждения пропорциональна разности температур тела и охлаждающей среды) можно записать: $\frac{dT}{dt} = k(T - 20)$.

Отсюда $\frac{dT}{T - 20} = kdt$. Интегрируя обе части, получим

$$\ln|T - 20| = kt + \ln C.$$

В начальный момент времени $t = 0$ температура тела $T = 100\ C^0$, отсюда

$$\ln(100 - 20) = 0 \cdot t + \ln C;\ C = 80.$$

Если $t = 20$, то $T = 60\ C^0$. Значит $\ln 40 = 20 \cdot k + \ln 80$. Отсюда $k = -\frac{1}{20}\ln 2$.

Тогда закон охлаждения тела имеет вид

$$\ln(T - 20) = -\frac{t}{20}\ln 2 + \ln 80 \text{ или } T = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}. \blacktriangleleft$$

Задача 4. (Закон Гука).

Закон Гука гласит, что сила реакции пружины (сила упругости) пропорциональна длине ее растяжения.

Пусть вся масса пружины сосредоточена на одном из ее концов и равна m. Если пружину закрепить другим концом к началу координат и растягивать вдоль оси x направо, то из второго закона Ньютона следует, что

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -kx,\ k > 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$x = C_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

где C_1, C_2 - произвольные постоянные.

Задача 5.

Если тело брошено в воздух и сопротивлением воздуха можно пренебречь, то уравнениями движения является

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0;\ \frac{d^2y}{dt^2} = -g,$$

где g - ускорение свободного падения.

Решения этих уравнений содержат произвольные постоянные, которые можно найти, если известны координаты точки, из которой производилось бросание, и начальная скорость.

4. Задачи для самостоятельного решения

4.1. Для студентов дневного и вечернего отделений

Задача 1. Проверить, является ли заданная функция y решением дифференциального уравнения (1).

1.1. $y=(x^2+1)e^{x^2}$, $y'-2xy=2xe^{x^2}$ (1)

1.2. $y=\sqrt{x}$, $2yy'=1$ (1)

1.3. $y=(x+1)(e^x-1)$, $(x+1)y'-y=e^x(1+x)^2$ (1).

1.4. $y=5e^{-2x}+e^x/3$, $y'+2y=e^x$ (1)

1.5. $y=(x^2+1)e^{x^2}$, $y'-2xy=2xe^{x^2}$ (1)

1.6. $y=e^{\mathrm{tg}(x/2)}$, $y'\sin x-y\ln y=0$ (1)

1.7. $y=\sqrt{x^2-x}$, $2xyy'=x^2+y^2$ (1)

1.8. $y=-1/(3x+1)$, $y'=3y^2$ (1)

1.9. $y=x+2e^y$, $(x-y+1)y'=1$ (1)

1.10. $y=xe^{-x^2/2}$, $xy'=(1-x^2)y$ (1)

1.11. $y=-x\cos x+3x$, $xy'=y+x^2\sin x$ (1)

1.12. $y=\dfrac{3+x}{1+3x}$, $y-xy'=3(1+x^2y')$ (1)

1.13. $y=\sin x$, $y'\sin x-y\cos x=0$ (1)

1.14. $y=x^2$, $x(x-1)y'+y=x^2(2x-1)$ (1)

1.15. $y=\sqrt[3]{2+3x-3x^2}, \quad y^2y'=1-2x \ (1)$

1.16. $y=1+\dfrac{7x}{x+1}, \ y-xy'=1+x^2y' \ (1)$

1.17. $y=\operatorname{tg}\ln 3x, \quad \left(1+y^2\right)dx=x\,dy \ (1)$

1.18. $y=-\sqrt{x^4-x^2}, \ xyy'-y^2=x^4 \ (1)$

1.19. $y=-\sqrt{2x^{-2}-1}, \quad 1+y^2+xyy'=0 \ (1)$

1.20. $y=x(4-\ln x), \ xy'=y-x(1)$

1.21. $y=\cos^{-1}x, \quad y'-\operatorname{tg}x\cdot y=0 \ (1)$

1.22. $y=\dfrac{x}{\cos x}, \quad y'-y\operatorname{tg}x=\dfrac{1}{\cos x} \ (1)$

1.23. $y=e^{x+x^2}+2e^x, \quad y'-y=2xe^{x+x^2} \ (1)$

1.24. $y=2+\sqrt{1-x^2}, \quad \left(1-x^2\right)y'+xy=2x \ (1)$

1.25. $y=\dfrac{x}{x-1}+x^2, \ x\left(x-1\right)y'+y=x^2\left(2x-1\right)(1)$

1.26. $y=\ln\left(1+e^x\right), \quad y'=e^{x-y} \ (1)$

1.27. $y=\operatorname{tg}\ln 3x, \quad \left(1+y^2\right)dx=x\,dy \ (1)$

1.28. $y=\sqrt{x^2-2x}, \ \left(x^2+y^2\right)dx-2xy\,dy=0\,(1)$

1.29. $y=x\sqrt{1-x^2}, \quad yy'=x-2x^3 \ (1)$

1.30. $y=x\left(1-\ln x\right), \quad \left(x-y\right)dx+x\,dy=0 \ (1)$

<u>Задача 2.</u> Найти общий интеграл дифференциальных уравнений.

2.1. а) $y'e^{y}\sqrt{1-x^4}+x(e^{2y}+4)=0$;

б) $x^2e^{\frac{y}{x}}=(xy'-y)y$;

в) $(3x-y-2)y'=x+y-2$;

г) $xy'-y=x^3e^x$;

д) $xy'+4y=2\sqrt{y}e^{x+1}$;

е) $\left(3x^2y-y^3\right)dx+\left(x^3-3y^2x\right)dy=0$.

2.2. а) $y\left(9+x^2\right)dy+xe^{y^2}dx=0$;

б) $xy'=y\sin^2\ln\dfrac{y}{x}$;

в) $\left(8x-y-7\right)y'=x+6y-7$;

г) $x\left(1-x^2\right)y'=2x^2y+1$;

д) $x^3y'-2x^2y+y^2(1+2x^2)=0$;

е) $(2x\cos x-y^2\sin x)dx+(2y\cos x-x^2\sin y)dy=0$.

2.3. а) $y'\operatorname{ctg}^2x-\operatorname{ctg}y=0$;

б) $y^2+x^2y'=2xyy'$;

в) $\left(x+y-2\right)y'=2\left(y-1\right)$;

г) $\left(1+x^2\right)dy=x\left(y+\sqrt{1+x^2}\right)dx$;

д) $y^2y'-2xy^3=(1-6x)e^x$;

е) $2xydx+(x^2-y^2)dy=0$.

2.4. а) $x(x\ \ +4)y'=\cos^2 4y$;

б) $(x-y)y'=x+y$;

в) $(5x-y-1)y'=x+3y-1$;

г) $(x-1)y'+2y=e^x$;

д) $y'x\ln x-y=y^3\ln x$;

е) $\left(\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}\right)dx-\left(\frac{x}{y^2}-\frac{1}{x}\right)dy=0$.

2.5. а) $(1+y^2)ydx=x(1+2y^2)dy$;

б) $xy'\ln\frac{y}{x}=2x+y\ln\frac{y}{x}$;

в) $2(x+1)y'=-x+2y-3$;

г) $(\sin x-1)dy=(1-y\cos x)dx$;

д) $(yy'-1)x\ln x+y^2=0$;

е) $\left(\sqrt{y}-\frac{y}{3\sqrt[3]{x^4}}\right)dx+\left(\frac{x}{2\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dy=0$.

2.6. а) $y'=x(y+2)\sin x$;

б) $y'=\frac{x^2+xy-y^2}{x^2-2xy}$;

в) $(2x+y-1)y'=3y+3$;

г) $xy'-2y=x^4\sin x$;

д) $y'\sin x+y\cos x=y^4\sin 2x$;

е) $y\cdot x^{y-1}dx+x^y\ln xdy=0$.

2.7. а) $yy'\cos^2 x + y^2 = 4$;

б) $(x+y)dx - (x+2y)dy = 0$;

в) $\dfrac{(2x+y-4)\,y'}{y+2} = 1$;

г) $(x-2)\,y' - 3y = (x-2)^5 \cos x$;

д) $(y' \cdot \sin 2x + 2y\sin 4x)\sqrt{y} = 3\sin 4x$;

е) $2x\cos^2 y dx - (x^2-3)\sin 2y dy = 0$.

2.8. а) $(1+y)e^{x^2} y' = xy^2$;

б) $y' = \dfrac{y^6 - 4x^6}{3x^4 y^2}$;

в) $(3x+2y-1)\,y' = 4(y-2)$;

г) $(\sin x - 1)y' + y\cos x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

д) $xyy' + 3y^2 = 3e^{-3x^3}$;

е) $(e^y + 1)dx + xe^y dy = 0$.

2.9. а) $e^y \sin^2 x dy + \cos x\sqrt{4+e^y}\,dx = 0$;

б) $xy' = y\cos\ln\dfrac{y}{x}$;

в) $4(x-1)\,y' = 2x + y - 3$;

г) $xy' + (x+1)y = 3e^{-x}\cos 3x$;

д) $y'\sin x + y\cos x = -y^3 \sin^4 x$;

е) $ydx + (x+6y^2)\,dy = 0$.

2.10. а) $(y+1)\operatorname{tg} x dy=(4-y^2)dx$;

б) $xe^{\frac{y}{x}}dy=\left(ye^{\frac{y}{x}}+x+xe^{\frac{2y}{x}}\right)dx$;

в) $(x-1)y'=x+2y-3$;

г) $y'-\dfrac{4xy}{1+x^2}=(1+x^2)$;

д) $y'-y\operatorname{tg}x+y^2\cos^2 x=0$;

е) $2xydx+(x^2-e^y)dy=0$.

2.11. а) $(1-x^2)^2yy'+x\cos^2 x=0$;

б) $xdy=\left(y-2\sqrt{x^2-y^2}\right)dx$;

в) $(9x-y-8)y'=x+7y-8$;

г) $y'+y\operatorname{tg}x=4xe^{2x}\cos x$;

д) $y'\cos x+y\sin(1+y)=0$;

е) $(2x^3-xy^2)dx+(2y^3-x^2y)dy=0$.

2.12. а) $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$;

б) $x(x-3y)y'=x^2+xy-2y^2$;

в) $(3x-6)y'=x+3y+4$;

г) $xy'-y=x^3\sin x$;

д) $y'x\cos^2 x+2y\cos^2 x=2x\sqrt{y}$;

е) $\left(4-\dfrac{y^2}{x^2}\right)dx+\dfrac{2y}{x}dy=0$.

2.13. а) $20xdx-3ydy=3x^2ydy-5xy^2dx$;

б) $y^2+2x^2y'=xyy'$;

в) $(2x+2y-2)y'=y$;

г) $(1+x^2)(y'-4x)+2xy=0$;

д) $xy'-4y=x^2\sqrt{y}$;

е) $3x^2e^ydx+(x^3e^y-1)dy=0$.

2.14. а) $yy'\sin x=(9+y)\cos x$;

б) $2x=(y-xy')\operatorname{ctg}\dfrac{y}{x}$;

в) $(x+1)y'=3x+2y-1$;

г) $y'-\dfrac{y}{x}=8x^2\cos^2 x$;

д) $3xy'+(x+1)y^2-3y=0$;

е) $\dfrac{y}{x}dx+(\ln x+\cos y)dy=0$.

2.15. а) $(x^2-1)e^ydx=x(x^2+1)dy$;

б) $xy'=y(1-3\ln y/x)$;

в) $3(x+1)y'=3y-2x+1$;

г) $y+(xy'-1)\ln x=0$;

д) $xy'+y=y^2\ln x$;

е) $\dfrac{y^2}{2\sqrt{x}}dx+2\sqrt{x}\cdot ydy=0$.

2.16. а) $x(1+y)y'+(x^2+\ln x)(1+y^2)=0$;

б) $(xy'-y)\arcsin\dfrac{y}{x}=x$;

в) $(7x-y-6)y'=x+5y-6$;

г) $y'-y\operatorname{tg}x=\sin xe^{\sin x}$;

д) $2yy'-\cos x=(x-y^2)\operatorname{ctg}x$;

е) $\dfrac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx+\left(\dfrac{e^y}{1+x^2}+1\right)dy=0$.

2.17. а) $\sqrt{4+y^2}+y'y\sqrt{9-x^2}=0$;

б) $x^2y'=y^2+2xy-6x^2$;

в) $(4x-y-3)y'=x+2y-3$;

г) $(\sin x-1)y'+y\cos x=4\sin^2 x$;

д) $x(y'-e^xy^2)=y$;

е) $(3x^2y+y^3)dx+(x^3+3xy^2)dy=0$.

2.18. а) $xy'\cos y+\sin y=\sin^2 y$;

б) $(2xy-x^2)-xyy'=0$;

в) $(3x-y-2)y'=x+y-2$;

г) $y'+2xy=2e^{-(x+1)^2}$;

д) $2y=(x+1)y'+11y^3\sqrt{x+1}$;

е) $\dfrac{2x}{y}dx-\dfrac{x^2}{y^2}dy=0$.

2.19. а) $(1+\cos x)yy'=(y^2+1)\sin x$;

б) $y'=\dfrac{y(3x^2-y^2)}{3x^3}$;

в) $2y'=\dfrac{2x+y-1}{x-1}$;

г) $xy'+2y=x^{-2}\ln x$;

д) $y'-3y\operatorname{ctg}x=3\sqrt{y}\sin 2x$;

е) $(x+2xy)dx+x^2dy=0$.

2.20. а) $6x(y+1)dy-(y^2+4)\ln x dx=0$;

б) $x^2y'=y^2-xy-3x^2$;

в) $(x-1)y'=y-2x+3$;

г) $y'-y\cos x=4\cos xe^{\sin x}$;

д) $2xyy'-y^2=x^2+1$;

е) $xy^2dx+(x^2y+\cos y)dy=0$.

2.21. а) $y'(x^2+4)\operatorname{arctg}^2 y=(1+y^2)x$;

б) $(4x-y)dx+(x+y)dy=0$;

в) $\dfrac{(x-1)y'}{2x+y-3}=1$;

г) $xdy=(\cos x-2y)dx$;

д) $y=x(y'-xy^2)$;

е) $\dfrac{1}{y}dx-\dfrac{x}{y^2}dy=0$.

2.22. а) $y' = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$;

б) $xy' - y = (x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}$;

в) $\dfrac{(x-2)y'}{x+y-1} = 1$;

г) $y' - 32\sin^3 x + y\operatorname{ctg} x = 0$;

д) $y'\sin 2x = y\left(2\cos 2x + 3y^4\right)$;

е) $3x^2y^2dx + 2x^3ydy = 0$.

2.23. а) $(x-1)yy' + \left(x^2+1\right)(y-4) = 0$;

б) $x^2y' = y^2 - 2xy + 2x^2$;

в) $(2x-2)y' = x + 2y - 3$;

г) $xy' + \left(1+2x^2\right)y = 2x$;

д) $e^x(xy'+y) = x^3y^3$;

е) $2x\sqrt{y}dx + \dfrac{x^2}{2\sqrt{y}}dy = 0$.

2.24. а) $ye^x dy + xe^{y^2}dx = 0$;

б) $x\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}dy - \left(x + y\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\right)dx = 0$;

в) $(4x+3y-1)y' = 5y+5$;

г) $xdy = (\sin x - 2y)dx$;

д) $(x+1)y' + y = -6xy^3$;

е) $2xy^2dx + \left(3y^2 + 2x^2y\right)dy = 0$.

2.25. а) $2x(y+2)dx=(1-x^2)dy$;

б) $xydx=(x^2+4y^2)dy$;

в) $(10x-y-9)y'=x+8y-9$;

г) $y'+y\operatorname{tg}x=(3x^2+1)\cos x$;

д) $yy'\sin 2x+y^2=2\operatorname{tg}x$;

е) $(2x+y)dx+xdy=0$.

2.26. а) $x^2+(1+x^6)\sqrt{2y-1}\cdot y'=0$;

б) $(\sqrt{xy}+x)y'-y=0$;

в) $5(x-1)y'=2x+3y-5$;

г) $y'-2xy+4x=0$;

д) $y'+y\operatorname{tg}x=2y^2\cos x$;

е) $\dfrac{2x}{y^3}dx-\left(\dfrac{3x^2}{y^4}+y^3\right)dy=0$.

2.27. а) $(2+e^x)dy-y^2e^xdx=0$;

б) $y'=\dfrac{y(3x+y)}{x^2}$;

в) $y'=\dfrac{6y-6}{5x+4y-9}$;

г) $y'-y\cos x=4\cos^2 xe^{\sin x}$;

д) $yy'\sin 2x+2y^2\sin 4x=4\sin 4x$;

е) $(2x+y^3)dx+(3xy^2+y^3)dy=0$.

2.28. а) $(x^2+x)y'-(2x+1)y=0$;

б) $(3x-y)y'=x+3y$;

в) $y'=\dfrac{3y-x-4}{3x+3}$;

г) $xy'-2y=x^4\cos x$;

д) $xy'+y=3x^2y^2$;

е) $y^2\cos x dx+2y\sin x dy=0$.

2.29. а) $\cos^2 x dy-xe^y dx=0$;

б) $\left(1+e^{\frac{y}{x}}\right)xy'=(y-x)e^{\frac{y}{x}}$;

в) $(2x-2)y'=2x+y-3$;

г) $(x+1)(y'-e^x)+y=0$;

д) $xy'-y=xy^2\sin x$;

е) $(2x+y^3)dx+(3xy^2+y^3)dy=0$.

2.30. а) $2^{x+y}y\cdot y'=1$;

б) $2x^2y'=x^2+y^2$;

в) $2y'=\dfrac{x+y-2}{x-1}$;

г) $xdy=2\left(x^4e^{x^2}+y\right)dx$;

д) $2xy'-y=4xy^3$;

е) $\dfrac{2x}{y^3}dx-\left(\dfrac{3x^2}{y^4}+y^3\right)dy=0$.

<u>Задача 3.</u> Найти интегральную кривую, проходящую через точку М.

3.1. $\left(y^4-3x^2\right)dy+xydx=0$, $M\left(4;1\right)$.

3.2. $y+1=2y'\left(y+2x\right)$, $M\left(2;0\right)$.

3.3. $ydx-\left(x+y^2\right)dy=0$, $M\left(0;1\right)$.

3.4. $\left(2xy^2-3y^3\right)dx+\left(7-3xy^2\right)dy=0$, $M\left(2;1\right)$.

3.5. $y'x^3\sin y=xy'-2y$, $M\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

3.6. $dx=\left(2y+x\operatorname{tg}y\right)dy$, $M\left(2;0\right)$.

3.7. $y'=(4x+y^2\sqrt{x})y$, $M\left(1;1\right)$.

3.8. $y\ln ydx=\left(x+\ln y-1\right)dy$, $M\left(0;e\right)$.

3.9. $\left(\cos ydx-x\sin ydy\right)\cos^2 x=dy$, $M\left(2;0\right)$.

3.10. $y^2-1=2\left(2\cos^2 y-xy\right)y'$, $M\left(1;0\right)$.

3.11. $e^y=xy'\left(x+2xy-2ye^y\right)$, $M\left(1;0\right)$.

3.12. $y=xy'(x\ln y-1)$, $M\left(1;1\right)$.

3.13. $y^3dx+\left(x^3\ln^2 y-xy^2\right)dy=0$ $M\left(2;1\right)$.

3.14. $\left(x^2\cos x-y\right)dx+xdy=0$, $M\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

3.15. $dx=\left(\sin 2y+x\cos y\right)dy$, $M\left(0;0\right)$.

3.16. $\left(x^2+y^2+2x\right)dx+2ydy=0$, $M\left(0;1\right)$.

3.17. $\left(1+y^2\right)dx=2y\left(2y^2-x\right)dy$, $M\left(1;0\right)$.

3.18. $y\left(1+xy\right)dx-xdy=0$, $M\left(1;0\right)$.

3.19. $(2xy+3)dy-y^2dx=0$, $M\left(1;1\right)$.

3.20. $y^3dx+\left(x^3\ln y-xy^2\right)dy=0$, $M\left(1;1\right)$.

3.21. $dx=x\left(\operatorname{tg} y-x\cos y\right)dy$, $M\left(1;0\right)$.

3.22. $\left(2x^2y\ln y-x\right)y'=y$, $M\left(1;1\right)$.

3.23. $2x^2ydy-\left(1+x^2\right)dx=0$, $M\left(1;2\right)$.

3.24. $\left(x+y^2\cos y\right)dy=ydx$, $M\left(2\pi;\pi\right)$.

3.25. $dx-\left(2x+ye^y\right)dy=0$, $M\left(0;0\right)$.

3.26. $ydx=x\left(1-3x^2y\right)dy$, $M\left(2;1\right)$.

3.27. $ydx-\left(x+y^3e^y\right)dy=0$, $M\left(2;1\right)$.

3.28. $\left(1+y^2\right)dx+\left(2xy-y^3\right)dy=0$, $M\left(1;0\right)$.

3.29. $\left(2e^y-x\right)y'=1$, $M\left(2;0\right)$.

3.30. $\left(x^2+y\right)dx-xdy=0$, $M\left(2;1\right)$.

<u>Задача 4.</u> Найти общее решение дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка.

4.1. а) $xy''=y'$; б) $\sqrt{y}y''=1$.

4.2. а) $xy''=(1+x^2)y'$; б) $y''-y'e^{-y}=(y')^2$.

4.3. а) $xy''=y'+x^2$; б) $y''ctgy=2(y')^2$.

4.4. а) $x^2y''=(y')^2$; б) $y''=2yy'$.

4.5. а) $2y'y''+x=0$; б) $(y')^2+yy''=0$.

4.6. а) $y''(e^x+1)+y'=0$; б) $y''-(y')^2=0$.

4.7. а) $y''x\ln x=y'$; б) $yy''-(y')^2=y^2$.

4.8. а) $(1+x^2)y''-4xy'=0$; б) $y''tgy=2(y')^2$.

4.9. а) $2xy'y''=(y')^2-1$; б) $y''+2(y')^2=0$.

4.10. а) $xy''+y'=0$; б) $yy''-2yy'\ln y=(y')^2$.

4.11. а) $xy''=(1+x^2)y'$; б) $yy''+y^2-(y')^2=0$.

4.12. а) $2xy''=y'$; б) $yy''+y=(y')^2$.

4.13. а) $x^2y''+xy'=1$; б) $y''y=y^2+(y')^2$.

4.14. а) $xy''=y'\ln\dfrac{y'}{x}$; б) $(y-1)y''=2(y')^2$.

4.15. а) $xy'' = x^2 - y'$; б) $y''+(y')^2 = 2e^{-y}$.

4.16. а) $xy''-y' = e^x x^2$; б) $(1+y)y'' = (y')^2 + y'$.

4.17. а) $xy''+2y' = 0$; б) $2(y')^2 = y''(y-1)$.

4.18. а) $y''+y' tgx = \sin 2x$; б) $\cos y y''+(y')^2 \sin y = y'$.

4.19. а) $(1+x^2)y'' = 2xy'$; б) $2yy'' = 1+(y')^2$.

4.20. а) $xy''-xy' = x^2 e^{2x}$; б) $(y')^2 + 2yy'' = 0$.

4.21. а) $2y''y' = x$; б) $\sqrt{y}y'' - y' = 0$.

4.22. а) $y'' = (x+x^{-1})y'$; б) $y''y+1 = (y')^2$.

4.23. а) $(1+x^2)y''-12xy' = 0$; б) $yy'' = (y')^2 - (y')^3$.

4.24. а) $(1+\cos x)y'' = y'\sin x$; б) $y'' = \sqrt{1-(y')^2}$.

4.25. а) $y''x\ln x = y'$; б) $y''y^2 = 1$.

4.26. а) $(1+x^2)y'' = 2xy'$; б) $yy''-(y')^2 = y^2 \ln y$.

4.27. а) $(1-x^2)y''-xy' = 0$; б) $y'' - 4(y')^2 tg4y = 0$.

4.28. а) $xy''+2y' = 0$; б) $y''-4yy' = 0$.

4.29. а) $y'' + 2y' + x = 0$; б) $6yy'' - 5(y')^2 = 0$.

4.30. а) $xy'' = y' + x^2$; б) $y'' = 2e^{4y}$.

<u>Задача 5.</u> Найти общее решение (и частное решение в пункте а.) линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

5.1. а) $y''-4y'+5y=0$, $y(0)=0; y'(0)=2;$ б) $y''+4y'+3y=0$; в) $y''+6y'+9y=0$;

5.2. а) $y''-6y'+13y=0$, $y(0)=1; y'(0)=2;$ б) $y''-5y'+6y=0$; в) $y''-6y'+9y=0$;

5.3. а) $y''+4y'+4y=0$, $y(0)=2; y'(0)=1;$ б) $y''+3y'+2y=0$; в) $y''+4y'+5y=0$;

5.4. а) $y''+9y=0$, $y(\pi/3)=1; y'(\pi/3)=2;$ б) $y''+3y'-4y=0$; в) $y''+12y'+36y=0$;

5.5. а) $y''-2y'+5y=0$, $y(0)=2; y'(\pi)=1;$ б) $y''-6y'+5y=0$; в) $y''+2y'+y=0$;

5.6. а) $y''-10y'+24y=0$, $y(0)=1; y'(0)=1;$ б) $y''-7y'+12y=0$; в) $y''+2y'-3y=0$;

5.7. а) $y''+4y'+4=0$, $y(0)=0; y'(0)=1;$ б) $y''-4y'+8y=0$; в) $y''-4y'+4y=0$;

5.8. а) $y''+y'-2y=0$, $y(1)=0; y'(1)=1;$ б) $y''-2y'+y=0$; в) $y''+16y'+64y=0$;

5.9. а) $y''-4y'+5y=0$, $y(\pi/2)=0; y'(\pi/2)=e;$ б) $y''+4y'+5y=0$; в) $y''+y=0$;

5.10. а) $y''+3y'=0$ $y(1)=e; y'(1)=2e;$

б) $y''+6y'+5y=0$;

в) $y''+6y'+9y=0$;

5.11. а) $y''-3y'+2,5y=0$ $y(0)=0; y'(0)=1;$

б) $y''-6y'+8y=0$;

в) $y''+16y'+64y=0$;

5.12. а) $y''-8y'+16y=0$ $y(0)=1; y'(0)=2;$

б) $y''+18y'+81y=0$;

в) $y''+6y'+10y=0$;

5.13. а) $y''+16y=0$ $y(\pi/4)=0; y'(\pi/4)=1;$

б) $y''-20y'+100y=0$;

в) $y''-4y'-60y=0$;

5.14. а) $y''-4y'+5y=0$ $y(\pi/2)=e^{\pi}; y'(\pi/2)=0;$

б) $y''+2y'-3y=0$;

в) $y''-12y'+36y=0$;

5.15. а) $y''+3y'=0$ $y(1)=1; y'(1)=1;$

б) $y''-12y'+37y=0$;

в) $y''-8y'+16y=0$;

5.16. а) $y''+14y'+50y=0$ $y(0)=1; y'(0)=1;$

б) $y''+12y'+36y=0$;

в) $y''-3y'-18y=0$;

5.17. а) $y''+8y'=0$ $y(0)=0; y'(0)=1;$

б) $y''+6y'+9y=0$;

в) $y''+16y=0$;

5.18. а) $y''+y'-2y=0$ $y(1)=e; y'(1)=e^{-1};$

б) $y''+6y'+18y=0$;

в) $y''+y'-20y=0$;

5.19. а) $y''-2y'+5y=0$ $y(0)=2; y'(\pi)=1;$

б) $y''-6y'+8y=0$;

в) $y''+y'-2y=0$.

5.20. а) $y''+4y'+4y=0$ $y(0)=2; y'(0)=1;$ б) $y''-5y'+6y=0$ в) $y''+8y'=0$.

5.21. а) $y''-4y'-21y=0$ $y(0)=1; y'(0)=1;$ б) $y''+16y'+65y=0$; в) $y''+4y'+4y=0$;

5.22. а) $y''+y'-2y=0$ $y(1)=0; y'(1)=1;$ б) $y''+81y=0$; в) $y''+4y'+4y=0$

5.23. а) $y''-4y'+3y=0$ $y(0)=2; y'(0)=1;$ б) $y''+2y'+y=0$; в) $y''+4y=0$;

5.24. а) $y''-3y'+2,5y=0$ $y(\pi/2)=0; y'(\pi/2)=1;$ б) $y''+4y'=0$; в) $y''-6y'+9y=0$;

5.25. а) $y''-3y'-40y=0$ $y(0)=2; y'(0)=0;$ б) $y''+4y=0$; в) $y''-2y'+y=0$;

5.26. а) $y''+4y'+8y=0$ $y(0)=1; y'(\pi/3)=0;$ б) $y''-11y'+10y=0$; в) $y''-40y'+400y=0$;

5.27. а) $y''+y'-6y=0$ $y(0)=2; y'(0)=1;$ б) $y''-y'+0,25y=0$; в) $y''+6y'+13y=0$;

5.28. а) $y''+7y'-30y=0$ $y(0)=1; y'(0)=0;$ б) $y''+14y'+49y=0$; в) $9y''+25y=0$;

5.29. а) $y''-y'-6y=0$ $y(0)=1; y'(0)=0;$ б) $y''+y=0$; в) $y''+4y'+4y=0$;

5.30. а) $y''+y'-2y=0$ $y(1)=e; y'(1)=e^{-1};$ б) $9y''+16y=0$; в) $y''-8y'+16y=0$;

Задача 6. Найти общее решение уравнения методом вариации произвольных постоянных.

6.1. $y'' + y = \sin^{-1} x$

6.2. $y'' - 8y' + 16y = e^{4x} \cdot x^{-3}$

6.3. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{\sqrt{9 - x^2}}$

6.4. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{1 - x^2}}$

6.5. $y'' + 25y = ctg5x$

6.6. $y'' + y = ctgx$

6.7. $y'' + 16y = \sin^3 x$

6.8. $y'' + 4y = \cos^{-2} x$

6.9. $y'' - 2y' + y = e^x \ln x$

6.10. $y'' - y = \dfrac{e^{-x}}{2 + e^{-x}}$

6.11. $2y'' - 4y' + 2y = \dfrac{e^x}{x}$

6.12. $y'' + y = \left(2 + \sin^3 x\right) \sin^{-2} x$

6.13. $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\sin \pi x}$

6.14. $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$

6.15. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^3}$

6.16. $y'' - y = \left(e^{2x} + 1\right)^{-1}$

6.17. $y'' + y = \cos^{-1} x$

6.18. $y'' - y' = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$

6.19. $y'' + 5y' + 6y = \dfrac{1}{1 + e^{2x}}$

6.20. $y'' - y' = e^{2x} \cos e^x$

6.21. $y'' - 2y' + y = \sqrt{x} e^x$

6.22. $y'' + y = ctg^2 x$

6.23. $y'' - 3y' + 2y = 3^x$

6.24. $y'' + 4y = tg2x$

6.25. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}$

6.26. $y'' + y' = \dfrac{e^x}{1 + e^{2x}}$

6.27. $y'' - 2y' + y = e^x \sin^{-2} x$

6.28. $y'' + y = \dfrac{2 + \cos^3 x}{\cos^2 x}$

6.29. $y'' - 2y' + y = \dfrac{xe^x}{x^2 + 4}$

6.30. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2 + 4}$

<u>Задача 7.</u> Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения методом подбора частного решения.

7.1. а) $y'' + 2y' + 10y = 5x^2 + 2x + 11$;

б) $y''' - 5y'' + 6y' = 12x + 8$;

в) $y'' - 9y = 15e^{2x}$;

г) $y'' - 9y' = 3e^{-3x}$;

д) $y'' + 25y = 2\cos 4x + \sin 4x$;

е) $y'' - 2y' - 3y = x + e^x$.

7.2. а) $y'' + 2y' + 5y = 10x - 1$;

б) $y''' + 2y'' + y' = x^2 + 4x + 5$;

в) $y'' - 8y' + 7y = 5e^{2x}$;

г) $y'' - 8y' + 7y = 3e^x$;

д) $y'' - 2y' + 2y = 5\sin 2x$;

е) $y'' + 4y' = x + e^{-4x}$.

7.3. а) $y''' - 4y'' + 4y' = 2x - 3$;

б) $y'' + 2y' - 3y = 50e^{2x}$;

в) $y'' + 2y' - 3y = 4e^x$;

г) $y'' + 2y' + 5y = 26\cos 3x$;

д) $y''' + 25y' = \sin x$;

е) $y'' + 4y' = xe^{2x} + x^2$.

7.4. а) $y'' - 2y' + 10y = 5x + 14$;

б) $y''' - 4y' = 2x^2 - 3$;

в) $y'' + 2y' - 8y = 14e^{3x}$;

г) $y'' + 2y' - 8y = 3e^{2x}$;

д) $y'' - 8y' + 16y = 4\sin 4x$;

е) $y'' + 16y = \sin^2 x$.

7.5. а) $y'' - 4y' - 5y = 5x + 19$;

б) $y''' + 36y' = 18x^2 + 7$;

в) $y'' - 6y' + 8y = -2e^{3x}$;

г) $y'' - 6y' + 8y = 2e^{2x}$;

д) $y'' + 2y' + y = 25\cos 3x$;

е) $y'' - 2y' + 5y = 10(e^{2x} + x)$.

7.6. а) $y'' - 2y' + 2y = x^2 - x$;

б) $y''' - y'' - 2y' = -4x + 2$;

в) $y'' + y' - 12y = 6e^{2x}$;

г) $y'' + y' - 12y = 14e^{3x}$;

д) $y'' - 8y' + 17y = 20\cos x$;

е) $y'' + 36y = 22\sin 5x + 10e^{-2x}$.

7.7. а) $y'' - 6y' + 9y = -6x + 7$;

б) $y''' - 2y'' + 17y' = 17x^2 - 4x - 15$;

в) $y'' - 4y' - 5y = 7e^{-2x}$;

г) $y'' - 4y' - 5y = 3e^{-x}$;

д) $y'' + y' - 6y = 13\cos 2x$;

е) $y'' + y = \sin^2 x$.

7.8. а) $y'' - 2y' - 15y = -15x^2 + 4x - 17$;

б) $y''' - 6y'' + 9y' = 3x - 5$;

в) $y'' - 5y' + 4y = -e^{3x}$;

г) $y'' - 5y' + 4y = 3e^{x}$;

д) $y'' + y' - 2y = 10\sin 2x$;

е) $y'' + 4y = 6\sin x + 5e^{-x}$.

7.9. а) $y'' + 16y = 8x^2 - 4x - 3$;

б) $y''' + y'' - 2y' = 4x + 8$;

в) $y'' - 2y' - 3y = 5e^{-2x}$;

г) $y'' - 2y' - 3y = 2e^{-x}$;

д) $y'' - 6y' + 10y = 15\cos 2x$;

е) $y'' - 2y' + y = 4(e^{-x} - 1) + 2x$.

7.10. а) $y'' + 2y' + 10 = 5x^2 + 2x + 11$;

б) $y''' - 2y'' + 5y' = 10x - 19$;

в) $y'' - y' - 6y = 8e^{2x}$;

г) $y'' - y' - 6y = 5e^{-2x}$;

д) $y'' - 5y' + 4y = 50\sin 3x$;

е) $y'' + 4y = 8\,\mathrm{sh}\,2x$.

7.11. а) $y'' - 2y' - 3y = 9x + 9$;

б) $y''' - 4y'' + 5y' = 15x^2 - 24x + 1$;

в) $y'' - y = 4e^{3x}$;

г) $y'' - y = 2e^{x}$;

д) $y'' + 6y' + 9y = 6\cos 3x$;

е) $4y'' + y = \cos^2 x$.

7.12. а) $y'' - 3y' - 4y = 2x^2 + 3x - 3$;

б) $y''' - 8y'' + 16y' = 4x - 2$;

в) $y'' + y' - 2y = 2e^{-3x}$;

г) $y'' + y' - 2y = 3e^{x}$;

д) $y'' - 4y' + 5y = 20\cos 3x$;

е) $y'' + 25y = \cos^2 x$.

7.13. а) $y'' + 25y = 25x^2 - 23$;

б) $y''' - y'' - 6y' = -3x + 4$;

в) $y'' - y' - 12y = -3e^{-2x}$;

г) $y'' - y' - 12y = 7e^{4x}$;

д) $y'' + 2y' + 2y = 5\sin 2x$;

е) $y'' + 2y' + y = 2x + e^{-2x}$.

7.14. а) $y'' + 2y' + 2y = x^2 - 1$;

б) $y''' - 3y'' - 4y' = -8x + 6$;

в) $y'' + 6y' - 7y = 3e^{2x}$;

г) $y'' + 6y' - 7y = 4e^{x}$;

д) $y'' + 4y' + 13y = 20\sin 3x$;

е) $36y'' + y = 2x + 10e^{0,5x}$.

7.15. а) $y'' + 8y' + 17y = 17x^2 - x - 6$;

б) $y''' + y' = -2x + 3$;

в) $y'' + 3y' - 4y = 2e^{-3x}$;

г) $y'' + 3y' - 4y = 5e^{x}$;

д) $y'' - 9y = 18\cos 3x - 9\sin 3x$;

е) $y'' - 8y' + 16y = 8 + 4e^{2x}$.

7.16. а) $y'' + 9y = 9x^2 + 9x + 2$;

б) $y''' + 4y'' + 4y' = 16x + 20$;

в) $y'' + y' - 6y = 2e^{3x}$;

г) $y'' + y' - 6y = 5e^{2x}$;

д) $y'' - 2y' + 5y = 13\sin 3x$;

е) $y'' - 9y' = 5e^{2x} + 8\cos x$.

7.17. а) $y'' + 4y' + 4y = -3x - 2$;

б) $y''' - 2y'' + 5y' = 15x^2 - 12x - 4$;

в) $y'' - 7y' + 6y = 2e^{2x}$;

г) $y'' - 7y' + 6y = 5e^{x}$;

д) $y'' + 9y = 5\cos 2x - 10\sin 2x$;

е) $y'' - 4y' + 3y = 3x - 4 + e^{2x}$.

7.18. а) $y'' + 2y' + 5y = 5x^2 + 4x - 18$;

б) $y''' + 16y' = 8x + 4$;

в) $y'' - 3y' - 4y = 3e^{-2x}$;

г) $y'' - 3y' - 4y = 5e^{-x}$;

д) $y'' + 4y' + 4y = 4\sin 2x$;

е) $y''' - 16y' = 8 + 17\cos x$.

7.19. а) $y'' + 8y' + 16y = -8x + 4$;

б) $y''' - 2y'' - 3y' = 3x^2 + 4x - 4$;

в) $y'' - 5y' + 6y = 4e^{-x}$;

г) $y'' - 5y' + 6y = -e^{2x}$;

д) $y'' - 2y' + 10y = 25\sin 4x$;

е) $9y''' + y' = \sin^2 x$.

7.20. а) $y'' + 4y = 2x^2 + 9$;

б) $y''' + 2y'' + 17y' = 17x + 19$;

в) $y'' - 2y' - 8y = 5e^{3x}$;

г) $y'' - 2y' - 8y = 3e^{-2x}$;

д) $y'' + 4y' + 4y = 15\cos 3x$;

е) $y'' + 4y' + 4y = 9chx$.

7.21. а) $y'' - 8y' + 16y = 8x - 36$;

б) $y''' - 3y'' + 2y' = x^2 - 3x - 2$;

в) $y'' + 4y' - 5y = 7e^{2x}$;

г) $y'' + 4y' - 5y = 3e^{x}$;

д) $y'' + 2y' + 10y = 25\cos 4x$;

е) $y'' - 4y' + 4y = 8 + e^{x}$.

7.22. а) $y'' - 6y' + 10y = 15x - 14$;

б) $y''' - 25y' = 25x^2 - 2$;

в) $y'' - 6y' + 5y = 3e^{2x}$;

г) $y'' - 6y' + 5y = 2e^{x}$;

д) $y'' + 4y' + 4y = 25\sin 4x$;

е) $16y''' + y = \sin^2 2x$.

7.23. а) $y'' - 2y' + y = x^2 - 5x + 4$;

б) $y''' + 4y'' + 5y' = 10x - 2$;

в) $y'' - 4y = 5e^{3x}$;

г) $y'' - 4y = 2e^{-2x}$;

д) $y'' - y' - 6y = 26\cos 2x$;

е) $y'' + 9y = sh3x$.

7.24. а) $y'' + 6y' + 10y = 5x + 13$;

б) $y''' + 2y'' - 3y' = 3x^2 - 4x - 11$;

в) $y'' + 5y' - 6y = 2e^{2x}$;

г) $y'' + 5y' - 6y = 7e^{x}$;

д) $y'' - 2y' + y = 25\sin 3x$;

е) $y''' + 4y' = 8 + 15\cos 3x$.

7.25. а) $y'' - 4y = -2x^2 - 3$;

б) $y''' + 2y'' + 2y' = 2x - 3$;

в) $y'' - 7y' - 8y = 5e^{-2x}$;

г) $y'' - 7y' - 8y = 3e^{-x}$;

д) $y'' + 8y' + 16y = 4\cos 4x$;

е) $4y'' + y = sh2x$.

7.26. а) $y'' + 10y' + 25y = -5x + 8$;

б) $y''' - 2y'' + 10y' = 5x^2 - 2x - 4$;

в) $y'' - 6y' - 7y = 3e^{-2x}$;

г) $y'' - 6y' - 7y = 4e^{-x}$;

д) $y'' + 36y = 11\cos 5x + 22\sin 5x$;

е) $y'' + 2y' = 2 + e^{-x}$.

7.27. а) $y'' - 5y' + 4y = 2x^2 - 5x + 5$;

б) $y''' - 6y'' + 10y' = 20x - 2$;

в) $y'' - 4y' + 3y = 2e^{-x}$;

г) $y'' - 4y' + 3y = -2e^x$;

д) $y'' + 16y = 7\cos 3x + 14\sin 3x$;

е) $y'' - 6y' + 9y = 8\sin x - 6\cos x + 18$.

7.28. а) $y'' + 2y' + y = 3x + 7$;

б) $y''' + 6y'' + 10y' = 15x^2 + 18x + 13$;

в) $y'' - 9y' + 8y = 3e^{2x}$;

г) $y'' - 9y' + 8y = 7e^x$;

д) $y'' - 5y' + 6y = 5\cos x$;

е) $y'' + 4y = 5e^x + 3\sin x$.

7.29. а) $y'' + 6y' + 9y = 9x^2 + 3x - 4$;

б) $y''' + 3y'' - 4y' = 8x + 10$;

в) $y'' + 7y' - 8y = 5e^{2x}$;

г) $y'' + 7y' - 8y = 3e^x$;

д) $y'' + 6y' + 10y = 15\sin 2x$;

е) $25y''' + y' = \cos^2 x$.

7.30. а) $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 + 8x - 3$;

б) $y''' + y' = 2x - 1$;

в) $y'' - y' - 2y = 2e^{3x}$;

г) $y'' - y' - 2y = 3e^{-x}$;

д) $y'' - 4y' + 3y = 15\cos 3x$;

е) $y'' + 4y' + 4y = 12\sin 2x - 8\cos 2x + e^{-x}$.

Задача 8. Решить задачу Коши для системы линейных дифференциальных уравнений.

8.1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases},$
$x(0) = -1, y(0) = 0$.

8.2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases},$
$x(0) = -2, y(0) = 0$.

8.3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -6x - 3y \end{cases},$
$x(0) = -2, y(0) = 1$.

8.4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 2y \end{cases},$
$x(0) = -5, y(0) = 0$.

8.5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - x + y = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} + 4x - 4y = 0 \end{cases},$
$x(0) = -1, y(0) = 0$.

8.6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases},$
$x(0) = 1, y(0) = 2$.

8.7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 9y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 8y \end{cases},$
$x(0) = -2, y(0) - 1$.

8.8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + y \end{cases},$
$x(0) = -1, y(0) = 1$.

8.9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y \end{cases},$
$x(0) = 0, y(0) = -1$.

8.10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 2y \end{cases},$
$x(0) = 2, y(0) = -2$.

8.11. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 2y = x \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$, $x(0) = 1, y(0) = -2$.

8.12. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$, $x(0) = 0, y(0) = 2$.

8.13. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 3y \end{cases}$, $x(0) = 0, y(0) = -2$.

8.14. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + y \end{cases}$, $x(0) = 1, y(0) = 0$.

8.15. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -5x - 3y \end{cases}$, $x(0) = 1, y(0) = 0$.

8.16. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y \end{cases}$, $x(0) = -2, y(0) = 1$.

8.17. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$, $x(0) = -1, y(0) = 0$.

8.18. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y \end{cases}$, $x(0) = -1, y(0) = 4$.

8.19. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + 4y \end{cases}$, $x(0) = -1, y(0) = 2$.

8.20. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$, $x(0) = -3, y(0) = 0$.

8.21. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$, $x(0) = -1, y(0) = 0$.

8.22. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$, $x(0) = 0, y(0) = -5$.

8.23. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases}$, $x(0) = -1, y(0) = 0$.

8.24. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 4y \end{cases}$, $x(0) = -1, y(0) = 2$.

8.25. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 4y \end{cases}$, $x(0) = 0, y(0) = 1$.

8.26. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y \end{cases}$, $x(0) = -2, y(0) = 1$.

8.27. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y \end{cases}$, $x(0) = 1, y(0) = -1$.

8.28. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x - y \end{cases}$, $x(0) = -2, y(0) = 1$.

8.29. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 2y \end{cases}$, $x(0) = -1, y(0) = 0$.

8.30. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$, $x(0) = -2, y(0) = 1$.

Задача 9.

9.1. Найти кривую, у которой любая касательная пересекается с осью ординат в точке, одинаково удаленной от точки касания и от начала координат.

9.2. Найти кривую, у которой начальная ордината любой касательной на две единицы масштаба меньше абсциссы точки касания.

9.3. Найти кривую, у которой квадрат длины отрезка, отсекаемого любой касательной от оси ординат, равен произведению координат точки касания.

9.4. Площадь треугольника, образованного радиус-вектором OM любой точки M(x,y) кривой, касательной MP в этой точке и осью Ox, равна 2. Кривая проходит через точку A(2,-2). Найти ее уравнение.

9.5. Найти уравнение кривой, у которой длина отрезка, отсекаемого касательной на оси абсцисс, равна квадрату ординаты точки касания.

9.6. Найти кривую, проходящую через точку N(0,4) и обладающую следующим свойством: площадь криволинейной трапеции, ограниченной любой другой кривой, двумя ординатами и осью абсцисс, пропорциональна длине этой дуги. Коэффициент пропорциональности равен 4.

9.7. Найти кривую, проходящую через точку (2,3) и обладающую тем свойством, что отрезок любой ее касательной, заключенный между координатными осями, делится пополам в точке касания.

9.8. Найти кривую, у которой квадрат длины отрезка, отсекаемого любой касательной от оси ординат, равен произведению координат точки касания.

9.9. Найти кривую, для которой угловой коэффициент касательной в какой-либо точке в 5 раз больше углового коэффициента прямой, соединяющей ту же точку с началом координат.

9.10. Найти кривые, для которых площадь фигуры, заключенной между осями координат, проходящей через произвольную точку кривой, равна кубу ординаты этой точки.

9.11. Найти кривую, для которой площадь фигуры, ограниченной осями координат, данной кривой и ординатой произвольной точки кривой, равна четвертой степени ординаты этой точки.

9.12. Найти кривую, у которой отрезок касательной в любой точке кривой, заключенный между точкой касания и осью абсцисс, равен раастоянию от точки пересечения касательной оси абсцисс до точки (0,2).

9.13. Найти кривые, обладающие тем свойством, что квадрат расстояния от произвольной точки кривой до начала координат, умноженный на отрезок, отсекаемый на оси абсцисс нормалью к кривой в данной точке, равен кубу абсциссе этой точки.

9.14. Найти кривые, у которых отрезок, отсекаемый касательной на оси ординат, равен среднему геометрическому постоянной величины а и абсциссы точки касания.

9.15. Найти кривые, у которых любая касательная пересекается с осью ординат в точке, одинако воудаленной от точки касания и от начала координат.

9.16. Найти кривую, проходящую через точку (4,3), если угловой коэффициент касательной к ней в любой точке в два раза меньше углового коэффициента радиуса-вектора точки касания.

9.17. Найти кривые, у которых площадь трапеции, образованной осями координат, ординатой произвольной кривой (прямой, параллельной оси ординат) и касательной кривой в этой точке, равна половине квадрата абсциссы данной точки.

9.18. Найти кривые, у которых тангенс угла между касательной и положительным направлением оси Ox обратно пропорционален абсциссе точки касания.

9.19. Найти кривые, у которых тангенс угла между касательной и положительным направлением оси Ox равен квадрату абсциссы точки касания.

9.20. Записать уравнение кривой, проходящей через точку A(5,2), если известно, что угловой коэффициент касательной в любой ее точке в 3 раза больше углового коэффициента прямой, соединяющей точку A с началом координат.

9.21. Найти уравнение кривой, проходящей через точку B(3,4) и, обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси ординат любой касательной, равен удвоенному модулю радиус-вектора точки касания.

9.22. Найти кривую, для которой длина отрезка, отсекаемого на оси ординат нормалью, проведенной в какой-нибудь точке кривой, равна расстоянию от этой точки до начала координат.

9.23. Найти кривую, проходящую через точку M(2,0) и, обладающую тем свойством, что отрезок касательной между точкой касания и осью ординат имеет постоянную длину, равную 2.

9.24. Найти кривую, для которой треугольник, образованный осью Oy, касательной и радиус-вектором точки касания, является равнобедренным.

9.25. Найти кривую, любая касательная к которой отсекает на оси ординат отрезок, меньший абсциссы точки касания на 3 единицы.

9.26. Найти кривую, каждая касательная к которой образует с осями координат треугольник постоянной площади $S = 2a^2$.

9.27. Найти уравнение кривой, проходящей через точку A(0,5), если угловой коэффициент касательной в любой ее точке равен ординате этой точки.

9.28. Записать уравнение кривой, проходящей через точку A(3,-1), если угловой коэффициент касательной в любой ее точке в 1,5 раза больше углового коэффициента прямой, соединяющей ту же точку с началом координат.

9.29. Найти кривую, у которой отрезок касательной в любой точке кривой, заключенный между точкой касания и осью абсцисс, равен раастоянию от точки пересечения касательной оси абсцисс до точки (0,1).

9.30. Найти кривую, проходящую через точку (2,1), если угловой коэффициент касательной к ней в любой точке в два раза меньше углового коэффициента радиуса-вектора точки касания.

4.2. Для студентов заочного отделения

В заданиях 1-6 каждого варианта найти общий интеграл (общее решение) и частный интеграл (частное решение) там, где указано начальное условие. Уравнение 3 решить двумя способами: методом вариации произвольной постоянной и методом Бернулли.

Вариант 1.	1. $e^x dx-(4+e^x)y^2dy=0$; 2. $(x^2-y^2)y'=2xy$; $y(1)=2$; 3. $y'\sin x-y\cos x=1$; 4. $y''x\ln x=y'$; $y(e)=e-1$, $y'(e)=1$; 5. $y''-5y'+6y=2\cos x$; 6. $\begin{cases} y'=2y+z, \\ z'=y+2z, \end{cases}$ $y(0)=2, z(0)=1.$
Вариант 2.	1. $(4+x^2)y'+x(1+y^2)=0$; 2. $x^2y'-2xy+y^2=0$; 3. $y'-2xy+x^2=0$; 4. $2xy''=y'$; $y(9)=8$, $y'(9)=3$; 5. $y''-2y'+5y=x^2+1$; $y(0)=-3$, $y'(0)=4$; 6. $\begin{cases} y'=y-z, \\ z'=y+z, \end{cases}$ $y(0)=z(0)=1.$
Вариант 3.	1. $\left(x-xy^2\right)dx+\left(y-yx^2\right)dy=0$; 2. $2\left(x^3-xy^2\right)dx-\left(x^2y-y^3\right)dy=0$; 3. $xy'+y-3=0$; 4. $y''=x\sin x$; $y(0)=0$, $y'(0)=0$; 5. $y''+2y'+5y=13e^{2x}$; $y(0)=1$, $y'(0)=4$; 6. $\begin{cases} y'=-y+5z, \\ z'=2y+3z, \end{cases}$ $y(0)=1, z(0)=1.$

Вариант 4.	1. $y' = -y\sin x$; 2. $xy' = y\ln\left(\frac{y}{x}\right)$; $y(1) = 1$; 3. $y' - \frac{2xy}{x^2+1} = 2x$; 4. $y''\cos x + y'\sin x = 0$; 5. $y'' + 6y' + 13y = 8e^{-x}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$; 6. $\begin{cases} y' = 4y - z, \\ z' = y + 3z, \end{cases}$ $y(0) = z(0) = 1.$
Вариант 5.	1. $y'\operatorname{ctg} x = y$; 2. $x\ln(x/y)dy - ydx = 0$; 3. $y' - y\sin x = e^{-\cos x}\sin 2x$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$; 4. $y^2 + (y')^2 - 2yy'' = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = 1$; 5. $y'' - 2y' + y = x^2e^x$; 6. $\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = y - 2z, \end{cases}$ $y(0) = 0, z(0) = 1.$
Вариант 6.	1. $e^x(y-1)dx = (1+e^x)dy$; 2. $(x-2y)y' - 2x + y = 0$; 3. $xy' - y = x^2\sin x$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; 4. $y''y^3 + 4 = 0$, $y(0) = -1, y'(0) = -2$; 5. $y'' + 4y' + 5y = x^2 + 1$; 6. $\begin{cases} y' = y + z, \\ z' = y - z, \end{cases}$ $y(0) = 2, z(0) = 0.$

Вариант 7.	1. $(1+2y)xdx+(1+x^2)dy=0$; 2. $xy'=2\left(y-\sqrt{xy}\right)$; 3. $y'+2xy=e^{-x^2}\sin x$; $y(0)=1$; 4. $y''=\dfrac{y'}{x}\left(1+\ln\dfrac{y'}{x}\right),\quad y(1)=1, y'(1)=1$; 5. $y''-2y'-3y=(x+1)e^{2x}$; 6. $\begin{cases} y'=2y+z, \\ z'=2y+3z, \end{cases}\quad y(0)=z(0)=2.$
Вариант 8.	1. $3x^2y+2y'\sqrt{4-x^3}=0$; 2. $y'=2^{\frac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}$; 3. $y'-y\,\mathrm{tg}\,x=2\cos x$; 4. $y''=72y^3, y(2)=1,\ y'(2)=6$; 5. $y''-4y'+8y=(2x-1)e^x$, $y(0)=0$, $y'(0)=\dfrac{1}{2}$; 6. $\begin{cases} y'=2y+z, \\ z'=y+2z, \end{cases}\quad y(0)=2, z(0)=1.$
Вариант 9.	1. $(2x+3)ydx=(3y+7)xdy$; 2. $(2x^2-2xy)y'=x^2+2xy-y^2$; 3. $y'-y\,\mathrm{ctg}\,x=2x\sin x,\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$; 4. $yy''+(y')^2=1,\ y(0)=1, y'(0)=1$; 5. $y''-8y'-9y=\sin x$; 6. $\begin{cases} y'=5y-3z, \\ z'=-2y+4z, \end{cases}\quad z(0)=y(0)=1.$

Вариант 10.	1. $xy\left(1+x^2\right)y'=1+y^2$; 2. $x^2y'=y^2+4yx+2x^2$; 3. $y'=\frac{2y}{x}+\frac{3}{x^2}$; 4. $\left(x+1\right)y''+x\left(y'\right)^2=y'$; 5. $y''+4y'+8y=e^{3x}$, $y(0)=1$, $y'(0)=3$; 6. $\begin{cases} y'=4y-3z, \\ z'=-4y+5z, \end{cases}$ $z(0)=y(0)=1.$
Вариант 11.	1. $\left(1-x\right)dy-ydx=0$; 2. $y'=\frac{y^2}{x^2}+4,\ y\left(1\right)=2$; 3. $y'+2xy=xe^{-x^2}$; 4. $y^3y''=y^4-16,\ \ y\left(0\right)=2\sqrt{2},y'\left(0\right)=\sqrt{2}$; 5. $y''-3y'+2y=e^{3x}$, $y(0)=2$, $y'(0)=1$; 6. $\begin{cases} y'=3y+8z, \\ z'=y+2z, \end{cases}$ $z(0)=0, y(0)=1.$
Вариант 12.	1. $xyy'=1-x^2$; 2. $3y'=\frac{y^2}{x^2}+8\frac{y}{x}+4$; 3. $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$; 4. $3y'y''=y+\left(y'\right)^3+1,\ \ y(0)=-2, y'(0)=0$; 5. $y''-4y'+5y=e^{-2x}(x+1)$; 6. $\begin{cases} y'=5y+11z, \\ z'=y+4z, \end{cases}$ $z(0)=y(0)=1.$

Вариант 13.	1. $2x^2yy'+y^2=2$; 2. $y'=2\sqrt{3+\frac{y^2}{x^2}}+\frac{y}{x}$; 3. $x+y=xy'$; $y(1)=4$; 4. $xy''=(1+2x^2)y'$; 5. $y''+y=e^{2x}\cos x,\quad y(0)=1,\ y'(0)=2$; 6. $\begin{cases} y'=2y-z, \\ z'=-y+3z, \end{cases} \quad z(0)=y(0)=0.$
Вариант 14.	1. $yy'+x=1$; 2. $3y'=\frac{y^2}{x^2}+8\frac{y}{x}+4$; 3. $2(y'+xy)=(x-1)e^x,\ y(0)=2$; 4. $x\ln x\cdot y''=y'$; 5. $y''+4y'-12y=8\sin 2x,\quad y(0)=0,\ y'(0)=0$; 6. $\begin{cases} y'=2y+5z, \\ 5z'=y+15z, \end{cases} \quad z(0)=y(0)=1.$
Вариант 15.	1. $3(x^2y+y)dy+\sqrt{4+y^2}dx=0$; 2. $(xy'-y)arctg\frac{y}{x}=x$; 3. $3xy'+5y=4x-5,\quad y(1)=1$; 4. $xy''=y'\ln\frac{y'}{x}$; 5. $y''-8y'-9y=e^{-x},\ y(0)=0,\ y'(0)=\frac{1}{4}$; 6. $\begin{cases} y'=2y, \\ z'=5y+3z, \end{cases} \quad z(0)=y(0)=1.$

Вариант 16.	1. $xy+(x+1)y'=0$; 2. $y'=\sqrt{2+\frac{y^2}{x^2}}+\frac{y}{x}$; 3. $xy'-2x^2y=(2-x)e^{x^2}$; 4. $\frac{y''}{y'}=\ln y', y(0)=0, y'(0)=1$; 5. $y''-5y'+6y=(12x-7)e^{-x}$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$; 6. $\begin{cases} y'=3y+z, \\ z'=y+2z, \end{cases}$ $z(0)=y(0)=2.$
Вариант 17.	1. $(3x-1)y'+y^2=0$; 2. $xy'=xe^{\frac{y}{x}}+y$; 3. $y'x^2=2xy+3$; 4. $y''=y'(1+y')$; 5. $y''+6y'+9y=10e^{-3x}$, $y(0)=3$, $y'(0)=2$; 6. $\begin{cases} y'=4y-11z, \\ z'=y+5z, \end{cases}$ $z(0)=y(0)=2.$
Вариант 18.	1. $y'=y\cos x$; 2. $y'=4+\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2$; 3. $xy'-y=x^2\cos x$; 4. $yy''+(y')^2=(y')^3$, $y(0)=1, y'(0)=1$; 5. $y''-2y'+y=16e^x$; 6. $\begin{cases} y'=5y+2z, \\ z'=3y+4z, \end{cases}$ $z(0)=y(0)=1.$

Вариант 19.	1. $dx-\sqrt{1-x^2}dy=0$; 2. $y'=3\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}+\frac{y}{x}$; 3. $xy'+y=2x^2+4,\ y(1)=2$; 4. $xy''=y'\left(1+2x^2\right)$; 5. $y''-4y'=6x^2+1,\ y(0)=2,\ y'(0)=3$; 6. $\begin{cases} y'=y+3z, \\ z'=2y+z, \end{cases}\ z(0)=y(0)=0.$
Вариант 20.	1. $\left(1-x^2\right)y'=1+y^2,\ y(0)=1$; 2. $xy+y^2=\left(2x^2+xy\right)y'$; 3. $3\left(y'-\frac{y}{x}\right)=\ln x,\ y(1)=3$; 4. $2yy''-3y'^2=4y^2$; 5. $y''-4y'+13y=26x+5,\ y(0)=1,\ y'(0)=0$; 6. $\begin{cases} y'=5y+z; \\ z'=y+4z; \end{cases}\ z(0)=y(0)=1.$
Вариант 21.	1. $2yy'=\cos x,\ y(0)=2$; 2. $y'=\frac{y^2+2x^2}{xy}$; 3. $x^2y'+xy+1=0$; 4. $3y'y''=2y, y(0)=1, y'(0)=1$; 5. $y''+5y'+6y=12\cos 2x$; 6. $\begin{cases} y'=z+y, \\ z'=2z-y, \end{cases}\ y(0)=z(0)=1.$

Вариант 22.	1. $\sqrt{y^2+1}=xyy'$; 2. $xy'-y=x\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$; 3. $x^2y'+(1-2x)y=x^2,\ y(1)=1$; 4. $y''=2yy', y(0)=1, y'(0)=1$; 5. $y''-6y'+9y=x^2-x+3$; 6. $\begin{cases} y'=4y+2z, \\ z'=y+5z, \end{cases}\quad z(0)=y(0)=1.$
Вариант 23.	1. $xy'+1=y^2$; 2. $xy'\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)=x+y\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$; 3. $(x^2+1)y'+4xy=1$; 4. $2y'+\left((y')^2-6x\right)y''=0,\quad y(2)=0, y'(2)=2$; 5. $y''-2y'+5y=xe^{2x},\ \ y(0)=1,\ y'(0)=0$; 6. $\begin{cases} y'=5y+3z, \\ z'=-3y-z, \end{cases}\quad y(0)=3, z(0)=-1.$
Вариант 24.	1. $xy'=y+1$; 2. $y'=\dfrac{y}{x}+\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)$; 3. $(x^2+1)y'-xy=x^3-x$; 4. $y'''x\ln x-y''=0$; 5. $y''+4y=e^{-2x},\ y(0)=0,\ y'(0)=0$; 6. $\begin{cases} y'=3y-z, \\ z'=4y-z, \end{cases}\quad y(0)=2, z(0)=3.$

Вариант 25.	1. $y'\cos x=(y+1)\sin x$; 2. $y^2+x^2y'=xyy'$; 3. $y'-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3,\ \ y(0)=1$; 4. $y''=2x\ln x,\ \ y(1)=1,\ \ y'(1)=3$; 5. $y''-4y'+5y=5x^2-4$; 6. $\begin{cases} y'=2y-z, \\ z'=y-2z, \end{cases}\ \ z(1)=y(1)=1.$
Вариант 26.	1. $2\left(1-x^2\right)y'+xy=0$; 2. $xy'-yy'=x+y$; 3. $y'-y\operatorname{tg}x=\frac{1}{\cos x};\ \ y(0)=1$; 4. $y''-(x+2)^5=1;\ \ y(-1)=1,\ \ y'(-1)=\frac{1}{2}$; 5. $y''+2y'-8y=16x+4$; 6. $\begin{cases} y'=y+z, \\ z'=y-z, \end{cases}\ \ y(0)=z(0)=1.$
Вариант 27.	1. $y'-\frac{(2x-5)y}{x^2}=0$; 2. $xy'-y=\sqrt{x^2+y^2}$; 3. $xy'-2y=x^3\cos x;\ \ y(\pi)=1$; 4. $y''\left(x^2+1\right)=2xy',\ y(0)=1,\ y'(0)=3$; 5. $y''-4y'+3y=e^{5x}$; 6. $\begin{cases} y'=-y+5z, \\ z'=-2y-3z, \end{cases}\ \ y(0)=1, z(0)=1.$

Вариант 28.	1. $\left(x+2\right)y'-y=0$; 2. $\left(y^2-3x^2\right)dy+2xydx=0$; 3. $y'-\dfrac{y}{x}=-2\ln x;\ y\left(1\right)=1$; 4. $xy''=\left(1+2x^2\right)y',\ y\left(2\right)=0,\ y'\left(2\right)=e$; 5. $y''-4y'+8y=8x^2+4$; 6. $\begin{cases} y'=4y-z, \\ z'=y+3z, \end{cases}$ $y(0)=z(0)=2.$
Вариант 29.	1. $y'=2e^x\cos x$; 2. $xy'+xe^{\frac{y}{x}}-y=0$; 3. $y'+\dfrac{2y}{x}=-x^2,\ y\left(3\right)=1$; 4. $y''=y'\ln y';\ y\left(0\right)=0,\ y'\left(0\right)=1$; 5. $y''+2y'+10y=-\sin 2x$; *6.* $\begin{cases} y'=y+z, \\ z'=y-z, \end{cases}$ $y(0)=2, z(0)=0.$
Вариант 30.	1. $\left(3x^2+6xy^2\right)dx+\left(6x^2y+4y^3\right)dy=0$; 2. $x^2y'+y^2-2xy=0$; 3. $xy'-3y=x^4e^x,\ y\left(1\right)=e$; 4. $y''=\sqrt{1-y'^2};\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=3,\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$; 5. $y''+2y'-8y=3\sin x$; 6. $\begin{cases} y'=2y-z, \\ z'=y-2z, \end{cases}$ $y(0)=0, z(0)=1.$

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

Таблица 4.

№	Условие	Возможные ответы
1	Уравнение $$y' + xy = x^2 y'$$ является…	□ уравнением с разделяющимися переменными; □ линейным уравнением; □ уравнением Бернулли.
2	Общий интеграл дифференциального уравнения $$dy = xy^2 dx$$ равен…	□ $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{y} = C$; □ $x^2 + \frac{1}{y} = C$; □ $\frac{x^2}{2} = y + C$.
3	Общее решение дифференциального уравнения $$y'' = x + 2$$ имеет вид…	□ $y = \frac{x^3}{6} + x^2 + C_1 x + C_2$; □ $y = 6x^3 + C_1 x^2 + C_2 x + 1$; □ $y = x^3 + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$.
4	Порядок дифференциального уравнения $$y'' - y' \operatorname{tg} x = \cos x$$ можно понизить заменой…	□ $y' = z(x)$; □ $y' = z(y)$; □ $y'' = z(x)$; □ $y'' = zz'$.
5	Общее решение дифференциального уравнения $y'' + y' - 2y = 0$ имеет вид…	□ $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$; □ $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$; □ $y = (C_1 + C_2 x) e^{-2x}$.
6	Частное решение уравнения $y'' - 9y = e^{3x}$ следует искать в виде …	□ $y^* = Axe^{3x}$; □ $y^* = Ae^{3x}$; □ $y^* = (Ax + B)e^{3x}$;

7	Частным решением уравнения $y''-2y'+y=0$, удовлетворяющим условиям $y=2$, $y'=1$ при $x=0$ является…	□ $y=2e^x$; □ $y=(2+x)e^x$; □ $y=e^x+e^{-x}$; □ $y=(2-x)e^x$.
8	Частное решение уравнения $y''-2y'+y=x+1$ имеет вид …	□ $y^*=Ax^2+Bx+C$; □ $y^*=Ax+B$; □ $y^*=x(Ax+B)$.
9	Дифференциальное уравнение $y^2+xy=x^2y'$ является…	□ уравнением в полных дифференциалах; □ линейным уравнением; □ однородным уравнением.
10	Решением уравнения $xy'=1$ является…	□ $y=\ln x$; □ $y=e^x$; □ $y=x+1$.
11	Общим решением линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и характеристическими корнями $\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=1$ является…	□ $y=(C_1+C_2x)e^{2x}+C_3e^x$; □ $y=(C_1+C_2x)e^x+C_3e^{2x}$; □ $y=C_1+C_2x+C_3e^x$; □ $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$; □ $y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^x$.
12	Линейным дифференциальным уравнением называется уравнение вида…	□ $y'+p(x)y=q(x)$; □ $y'+\dfrac{p(x)}{y}=q(x)$; □ $y'+p(x)y=q(x)y^n$; □ $p(x)dx+q(y)dy=0$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 2 / П.Е. Данко, А.С. Попов, Т.Я. Кожевникова. - М. : Высшая школа, 2003. - 415 с.

2. Краснов, М.Л. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям : учебное пособие для втузов / М.Л. Краснов [и др.]. - М. : Высшая школа, 1978.

3. Кузнецов, Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты) : учебное пособие / Л.А. Кузнецов. – Спб. : Лань, 2006. – 240 с.

4. Сборник типовых расчетов по высшей математике : учебное пособие / под ред. В.Б.Миносцева. - М. : МГИУ, 2001. - 511 с.

5. Лунгу, К.Н. Сборник задач по высшей математике / К.Н. Лунгу, В.П. Норин, Д.Т. Письменный. – М. : Айрис-пресс, 2004.

6. Запорожец, Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу / Г.И. Запорожец. - М. : Высшая школа, 1966.- 460 с.

Учебное издание

Багоутдинова А.Г.
кандидат технических наук

Ахметов С.М.
кандидат физико-математических наук, доцент

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Корректор Габдурахимова Т.М.
Худ. редактор Федорова Л.Г.

Сдано в набор 01.02.2012.
Подписано в печать 02.02.2012.
Бумага писчая. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 6,25. Тираж 100.
Заказ №7.

НХТИ (филиал) ФГБОУ ВПО «КНИТУ»,
г. Нижнекамск, 423570, ул. 30 лет Победы, д. 5а.