Министерство образования и науки РФ
ГОУ ВПО «Казанский государственный технологический университет»
Нижнекамский химико–технологический институт

Л.В. БАКЕЕВА

Т.Г. МАКУСЕВА

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЕСКИЕ ФУНКЦИИ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ АЛГЕБРЫ

Справочное пособие

2011

УДК 51 (075.3)
ББК 22.1я721
Бакеева, Л.В., Макусева, Т.Г.
Обратные тригонометрические функции в школьном курсе алгебры: справочное пособие / Л.В. Бакеева, Т.Г. Макусева. – Нижнекамск: Нижнекамский химико-технологический институт (филиал) RUNE? 2011. – ? с.

Рецензенты:
Шемелова О.В., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики НХТИ К Г ТУ;
Сытяк С.Ф., заместитель директора по УВР, учитель математики средней школы №2 г. Нижнекамска.

Данное справочное пособие включает один из разделов школьной программы по математике – обратные тригонометрические функции.
Пособие содержит необходимые теоретические сведения и методы решения задач, иллюстрируемые подробно разобранными примерами. Упражнения для самостоятельного решения включают задачи, предлагавшиеся в различные годы при тестировании. Приводятся ответы, указания или решения ко всем упражнениям.
Справочное пособие адресовано учащимся старших классов, абитуриентам и учителям математики.

УДК 51 (075.3)
ББК 22.1я721

Содержание

Введение

Возникновение тригонометрии обусловлено потребностями вычислительной практики, а именно, необходимостью создания аппарата для вычисления элементов различных геометрических фигур по достаточному количеству их заданных элементов.

Каждому приходилось наблюдать за движением различных частей всевозможных машин и станков. Характерной особенностью часто встречающихся движений является их повторяемость через один и тот же промежуток времени. Такие движения называются периодическими.

Клапаны парораспределительного механизма паровой машины периодически открываются и закрываются, поршень машины, подобно маятнику часов, периодически повторяет своё прямолинейное движение от одного своего крайнего положения к другому и обратно, маховик и коленчатый вал совершают повторяющиеся круговые движения и т. д.

Но не только механические движения могут иметь периодический характер. Таким свойством обладают многие световые, звуковые и электромагнитные явления, а также целый ряд явлений, наблюдаемых нами в самой природе (движение планет, смена дня и ночи, смена времён года, приливы и отливы на морях и т. п.) и в организме человека (работа сердца и кровообращение).

Периодические процессы и явления изучаются физиками, механиками, астрономами, математиками и другими учёными. Закономерности тех или иных периодических явлений учёные записывают в виде функций, а затем, исследуя эти функции, раскрывают внутреннее содержание таких явлений и указывают пути практического использования их на благо человека.

К концу X века учёные исламского мира уже оперировали наряду с синусом и косинусом другими функциями - тангенсом и котангенсом (аль-Баттани и Абу-ль-Вефа).

Быстрое развитие естествознания требовало дальнейшего развития математического аппарата, в частности теории обратных круговых функций. Швейцарский математик Даниил Бернулли

(1700-1782), являвшийся академиком Петербургской Академии наук, в 1729 году рассматривал обратную функцию относительно $y = \sin x$, а немного позднее, в 1736 году, Леонард Эйлер рассматривал обратную функцию относительно $y = \mathrm{tg}\, x$; а дальше стали изучаться и остальные обратные круговые функции.

В настоящее время тригонометрия продолжает оставаться весьма важной самостоятельной учебной дисциплиной. В школьном курсе математики тригонометрия по справедливости имеет значительный удельный вес.

Задачи по тригонометрии постоянно предлагаются при тестировании на ЕГЭ, на вступительных экзаменах в университеты и вузы.

Особый интерес представляют задачи, опирающиеся на обратные тригонометрические функции. Они вызывают наибольшие затруднения при изучении всего курса тригонометрии.

Обратным тригонометрическим функциям в школе уделяется мало времени, и в результате многие о них остается смутное представление. Вся теория этих функций кажется туманной, сложной и заполнений большим количеством головоломных формул, которые невозможно ни вывести, ни запомнить. Связано это, прежде всего, с тем, что в действующих учебниках и учебных пособиях подобным задачам уделяется не слишком большое внимание, и если с задачами на вычисление значений обратных тригонометрических функций учащиеся ещё как-то справляются, то уравнения и неравенства, содержащие эти функции, нередко ставят их в тупик. Последнее не удивительно, поскольку практически ни в одном учебнике (включая учебники для классов с углублённым изучением математики) не излагается методика решения даже простейших уравнений и неравенств такого рода.

На самом же деле обратные тригонометрические функции далеко не так страшны. Исходные определения очень просты, а для того, чтобы работать с ними, достаточно знать обычную тригонометрию. Что же касается головоломных формул, то знание тригонометрии позволит запомнить их и научиться выводить.

Теория обратных тригонометрических функций является своеобразным «зеркальным» отражением теории тригонометрических функций и содержит столько же интересных задач. Решение задач, содержащих аркфункции, будет способствовать наилучшему усвоению теории тригонометрических функций и развитию функционального мышления, а также навыков тождественных преобразований.

Это обстоятельство и побудило нас подробно рассмотреть теоретические вопросы и практические задачи, касающиеся обратных тригонометрических функций.

Определения аркфункций

Прежде всего, дадим определения и приведем обозначения.

Из свойств функции $y = \sin x$ следует, что при $-1 \le y \le 1$ существует бесконечное множество углов x, удовлетворяющих уравнению $\sin x = a$. Решая простейшие тригонометрические уравнения, мы видим, что каждому значению тригонометрических функций соответствует не одно, а бесконечное множество значений аргумента.

Например.

1) $y = \sin x$.

При $y = \frac{1}{2}$ аргумент x может принимать значения: 30°; 390°; 750°; …; 30°+360°·n, т.к. период функции равен 360° или 2π.

2) $y = \cos x$

При $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ аргумент x может принимать значения: $\frac{\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}; \frac{17\pi}{4}; ...; \frac{\pi}{4} + 2\pi n$.

3) $y = \operatorname{tg} x$

При $y = \sqrt{3}$ аргумент x может принимать значения: $\frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}; ...; \frac{\pi}{3} + \pi n$, т.к. период функции $y = \operatorname{tg} x$ равен π.

Одно из этих значений будем называть главным.

Если $\sin x = a$, то главное значений аргумента обозначим $\arcsin a$.

Аналогично,

$\cos x = a$, $x = \arccos a$.

$\operatorname{tg} x = a$, $x = \operatorname{arctg} a$.

$\operatorname{ctg} x = a$, $x = \operatorname{arcctg} a$.

Отметим, что главные значения углов – это одно из бесконечного множества значений аргумента, тригонометрическая функция которого равна a, и поэтому

$$\sin(\arcsin a) = a \qquad (1.1)$$
$$\cos(\arccos a) = a \qquad (1.2)$$
$$\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\, a) = a \qquad (1.3)$$
$$\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}\, a) = a \qquad (1.4)$$

(1)

Дадим определения обратных тригонометрических функций.

Определения.

arcsin a – это угол, синус которого равен x и который лежит в отрезке между $-\dfrac{\pi}{2}$ и $\dfrac{\pi}{2}$. Можно записать это определение так: $x = \arcsin a, \textit{если } 1) \sin x = a,\ 2) -\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}$.

arccos a – это угол, косинус которого равен x и который лежит в отрезке между *0* и π.

arctg a – это угол, тангенс которого равен x и который лежит в интервале между $-\dfrac{\pi}{2}$ и $\dfrac{\pi}{2}$.

arcctg a – это угол, котангенс которого равен x и который лежит в интервале между 0 и π.

Пример 1. Используя тождества (1), найти $\boldsymbol{x}$ из уравнений:

а) $\arccos x = \dfrac{\pi}{3}$;

б) $\arcsin x = -\dfrac{\pi}{2}$;

в) $\mathrm{arctg} x = \dfrac{\pi}{4}$;

г) $\mathrm{arcctg} x = -30^\circ$;

д) $\arcsin x = 45^\circ$;

е) $\arccos x = 120^\circ$;

ж) $\mathrm{arctg} x = -30^\circ$;

Функции y=sin x, y=tg x, y=ctg x нечетные, т.е.
sin$(-x)$=-sin x,
tg$(-x)$=-tg x,
ctg$(-x)$=-ctg x.
Функция y=cos x четная, т.е cos$(-x)$=cos x.

з) $\operatorname{arcctg} x = 150°$.

Решение. Приведем решение примеров а), г) и е). Остальные попробуйте решить самостоятельно, используя подсказки, указания и ответы.

а) $\arccos x = \frac{\pi}{3}$.

Воспользуемся формулой (1.2).

$\cos(\arccos x) = \cos\frac{\pi}{3}$, $x = \cos\frac{\pi}{3}$, $x = \frac{1}{2}$.

г) $\operatorname{arcctg} x = -30°$.

По формуле (1.4): $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = \operatorname{ctg}(-30°)$,

по подсказке: $x = -\operatorname{ctg} 30°$,

$x = -\sqrt{3}$.

е) $\arccos x = 120°$,

$\cos(\arccos x) = \cos 120°$, $x = \cos 120°$, $x = -\frac{1}{2}$.

Или, используя формулы приведения,

$\cos 120° = \cos(90° + 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$.

Ответ. а) $x = \frac{1}{2}$; г) $x = -\sqrt{3}$; е) $x = -\frac{1}{2}$.

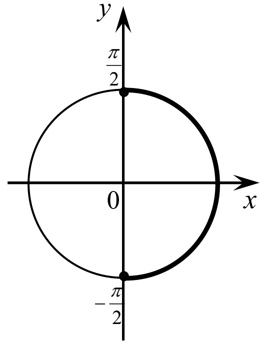
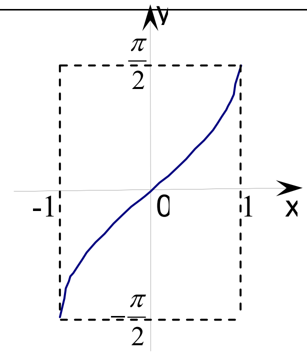
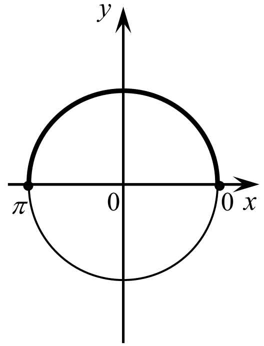
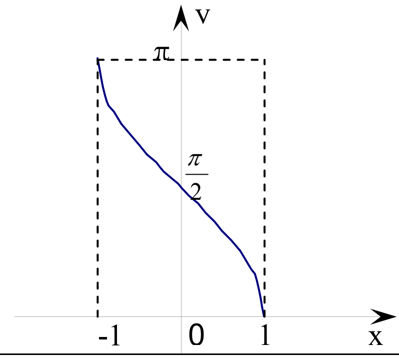
Разобравшись с символами, укажем интервалы, в которых заключены главные значения (Таблица 1).

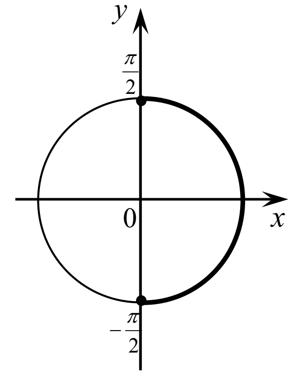
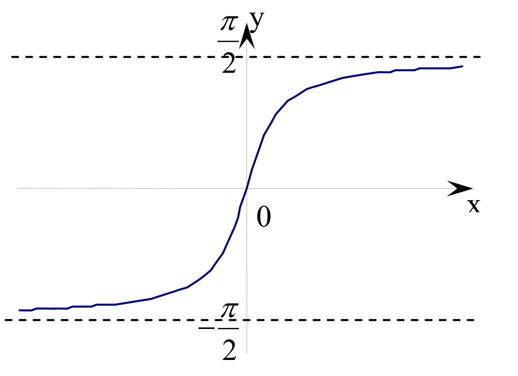
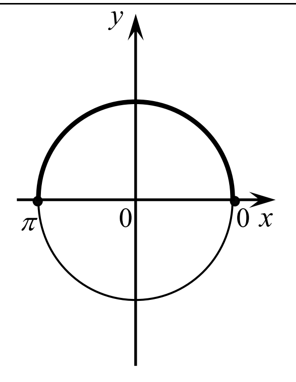
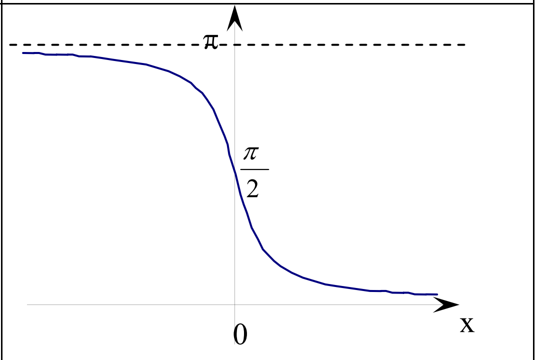
Таблица 1.

$x = \arcsin a$	$x = \arccos a$	$x = \operatorname{arctg} a$	$x = \operatorname{arcctg} a$
$\sin x = a$ $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ $-1 \le a \le 1$	$\cos x = a$ $0 \le x \le \pi$ $-1 \le a \le 1$	$tgx = a$ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ $a \in R$	$ctgx = a$ $0 < x < \pi$ $a \in R$

(2)

Рассмотрим все аркфункции и их свойства. Представим все исследования в таблице.

Функция	Свойства	График	График
y=arcsin x	D(x)=[-1;1]. E(Y)=$\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Функция возрастает при x $\in$ [-1;1]. Функция нечетная: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ Функция непрерывна на [-1;1].		
y=arccos x	D(x)=[-1;1]. E(Y)=$[0;\pi]$. Функция убывает при x $\in$ [-1;1]. Функция не является ни четной, ни нечетной: $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ Функция непрерывна на [-1;1].		

y=arctg x	D(x)=R. E(Y)= $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ Функция возрастает во всей области определения. Функция нечетная: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$. Функция непрерывна при x ∈ (-∞;+∞)		
y=arcctg x	D(x)=R. E(Y)= $(0;\pi)$. Функция убывает во всей области определения Функция не является ни четной, ни нечетной: $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$. Функция непрерывна при x ∈ (-∞;+∞).		

Пример 2. Записать главные значения углов, используя введенные обозначения и свойства обратных тригонометрических функций:

а) $\sin x = \dfrac{1}{7}$; б) $\sin x = -\dfrac{2}{3}$;

в) $\cos x = 0{,}3$; г) $\cos x = -0{,}6$;

д) $\operatorname{tg} x = 2$; е) $\operatorname{tg} x = -1{,}7$;

ж) $\operatorname{ctg} x = 1$; з) $\operatorname{ctg} x = -4$.

Решение.

а) $\sin x = \dfrac{1}{7}$, по формулам (1)

$x = \arcsin\dfrac{1}{7}$;

г) $\cos x = -0{,}6$,

$x = \arccos(-0{,}6)$,

$x = \pi - \arccos(0{,}6)$.

Ответ. а) $\arcsin\dfrac{1}{7}$; г) $\pi - \arccos(0{,}6)$.

Пример 3. Какие из следующих выражений не имеют смысла и почему?

а) $\arccos\dfrac{1}{3}$; б) $\arcsin(1{,}5)$; в) $\operatorname{arctg}(0{,}8)$;

г) $\arcsin\dfrac{5\pi}{3}$; д) $\arccos(-2{,}5)$; е) $\arccos(0{,}3)$.

Решение.

б) $\arcsin(1{,}5)$. Согласно таблице (2), для $x = \arcsin a$, $a \in [-1;1]$, поэтому $\arcsin(1{,}5)$ не существует, т.к. $a = 1{,}5$, $1{,}5 \notin [-1;1]$.

Ответ. б) не имеет смысла.

Пример 4. Установить, что больше, используя график функции $y=\sin x$ или $y=\cos x$.

а) $\arcsin(-0{,}56)$ или $\arcsin(-0{,}34)$;

б) $\arcsin 0{,}47$ или $\arcsin 0{,}29$;

в) $\arccos 0{,}51$ или $\arccos(-0{,}3)$;

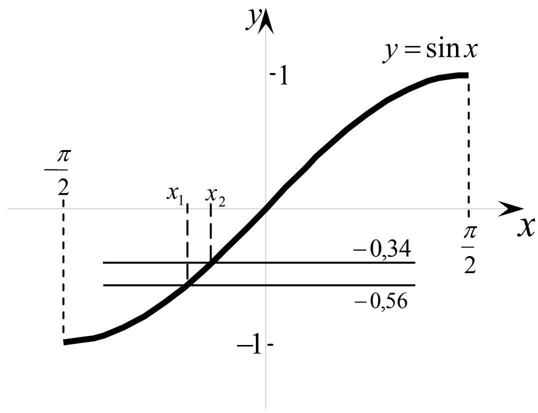
г) $\arccos 0{,}8$ или $\arccos 0{,}6$;

д) $\arccos(-0{,}34)$ или $\arccos(-0{,}77)$.

Решение.

а) $\arcsin(-0{,}56)$ или $\arcsin(-0{,}34)$.

Пусть $\arcsin(-0{,}56) = x_1$, тогда $\sin x_1 = -0{,}56$.



Построим прямую $y = -0{,}56$. Найдем точку пересечения этой прямой с графиком функции y=sin x, затем – проекцию точки пересечения на ось OX - x_1.

Аналогично для $\arcsin(-0{,}34)$ найдем x_2.

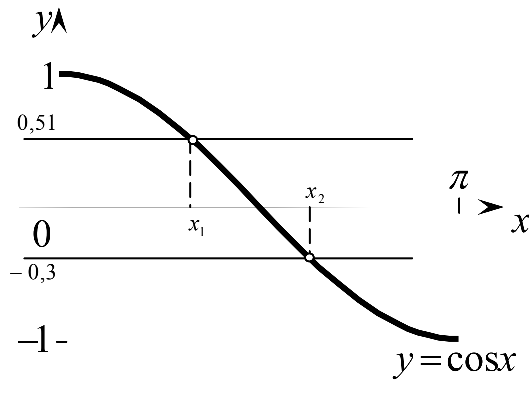
Очевидно, что $x_1 < x_2$, следовательно, $\arcsin(-0{,}56) < \arcsin(-0{,}34)$.

в) $\arccos 0{,}51$ или $\arccos(-0{,}3)$.

Пусть $\arccos 0{,}51 = x_1$, тогда $\cos x_1 = 0{,}51$. Построим прямую $y = 0{,}51$. Найдем точку пересечения этой прямой с графиком функции y=cos x, затем – проекцию точки пересечения на ось OX - x_1.

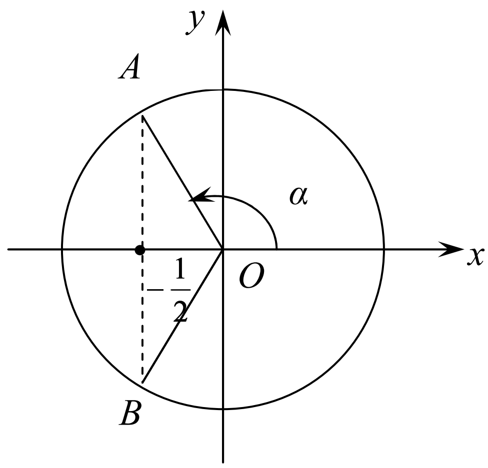
Аналогично для $\arccos(-0{,}3)$ найдем x_2.

Очевидно, что $x_1 < x_2$, следовательно, $\arccos\ 0{,}51 < \arccos(\ -0{,}3)$.



Пример 5. Найти угол $\arccos(-\dfrac{1}{2})$.

Решение. Обозначим $\arccos(-\dfrac{1}{2}) = \alpha$, тогда $\cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$. Решим задачу на тригонометрической окружности. Отметим на оси



OX величину $-\dfrac{1}{2}$ и построим токи А и В. Положения ОА и ОВ подвижного радиуса соответствуют углам, косинус которых равен $-\frac{1}{2}$ (т.е. углам, входящим в множество решений уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$).

Стрелкой изобразим угол α, лежащий между 0 и π; очевидно, что $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, т.е. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

Ответ. $\frac{2\pi}{3}$.

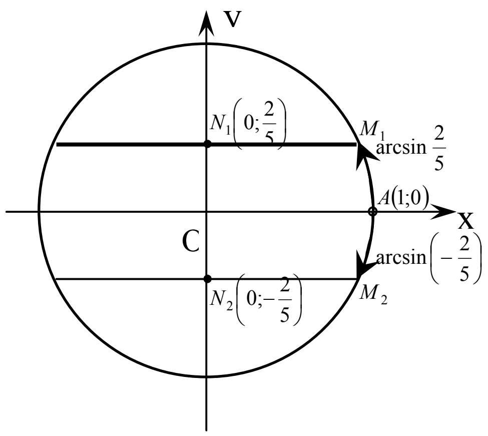
Пример 6. Построить главные дуги

а) $\arcsin\frac{2}{5}$ и $\arcsin\left(-\frac{2}{5}\right)$;

б) $\arccos\frac{2}{3}$ и $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$.

Решение.

а) Пусть $\arcsin\frac{2}{5} = \alpha$, $\arcsin\left(-\frac{2}{5}\right) = \beta$, тогда $\sin\alpha = \frac{2}{5}$ и



$\sin\beta = -\frac{2}{5}$. Отметим точки $\frac{2}{5}$ и $-\frac{2}{5}$ на оси *OУ*. Проведем прямые, проходящие через т очки N_1 и N_2, параллельно оси OX до пересечения с окружностью (точки M_1 и M_2). Дуги AM_1 и AM_2 соответственно равны значениям $\arcsin\frac{2}{5}$ и $\arcsin\left(-\frac{2}{5}\right)$, т.е.

$AM_1 = \arcsin\frac{2}{5}$, $AM_2 = \arcsin\left(-\frac{2}{5}\right) = -\arcsin\frac{2}{5}$.

Тригонометрические функции обратных тригонометрических функций

Тригонометрические функции от одного и того же аргумента выражаются алгебраически одна через другую, поэтому в результате выполнения какой-либо тригонометрической операции над любой из аркфункций получается алгебраическое выражение.

В силу определения аркфункций:

sin(arcsin(x)) = x, cos(arccos(x)) = x	справедливо только для x ∈ [-1;1]
tg(arctg(x)) = x , ctg(arcctg(x)) = x	справедливо при x ∈ R

Сводка формул, получающихся в результате выполнения простейших тригонометрических операций над аркфункциями.

Таблица 2

Аргумент / Функция	arcsin(x)	arccos(x)	arctg(x)	arcctg(x)
sin	x	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
cos	$\sqrt{1-x^2}$	x	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
tg	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	x	$\frac{1}{x}$
ctg	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	x

Разберите доказательство, приведенное ниже, для вывода формулы $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.

Доказательство.

Т.к. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ и $\varphi = \arcsin(x)$, то

$\cos\varphi = \pm\sqrt{1-\sin^2\varphi}$, тогда

$\cos(\arcsin x) = \pm\sqrt{1-[\sin(\arcsin x)]^2} = \pm\sqrt{1-x^2}$.

Перед радикалом ($\sqrt{1-x^2}$) следует взять знак “+”, т.к. дуга $\varphi = \arcsin x$ принадлежит правой полуокружности (замкнутой) $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, на которой косинус неотрицательный.

Значит, имеем $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$. **Что и требовалось доказать.**

Выведите формулу $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}$, используя тождество $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\operatorname{ctg}\varphi}$.

Выведите формулу $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, используя тождество $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$.

Выведите формулу $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$, используя тождество $\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi}$.

Пример 7. Преобразовать выражения

а) $\sin(2\arcsin x)$; б) $\cos(2\arccos x)$; в) $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} x)$.

Решение.

а) Пусть $\arcsin x = \varphi$, тогда $\sin(2\arcsin x) = \sin 2\varphi$.

Применяем формулу $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$, имеем:

$\sin(2\arcsin x) = 2\sin(\arcsin x)\cos(\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

Ответ. $2x\sqrt{1-x^2}$.

Пример 8. Преобразовать выражения

а) $\sin(\arcsin x + \arcsin y)$; б) $\cos(\arccos x + \arccos y)$;

в) $\sin(\arccos x + \arcsin y)$; г) $\sin(\arcsin x - \arcsin y)$;

д) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y)$; е) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y)$;

ж) $\operatorname{tg}(\arcsin x + \arcsin y)$.

Решение.

а) Пусть $\arcsin x = \alpha$, $\arcsin y = \beta$.

По формуле $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$, тогда

$\sin(\arcsin x + \arcsin y) =$

$= \sin(\arcsin x)\cos(\arcsin y) + \cos(\arcsin x)\sin(\arcsin y) =$

$= x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$

Ответ. $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$.

Пример 9. Преобразовать выражения

а) $\sin(2\operatorname{arctg} x)$; б) $\cos(2\operatorname{arctg} x)$; в) $\cos(\frac{1}{2}\arccos x)$.

Решение.

а) Пусть $\operatorname{arctg} x = \varphi$, тогда $\sin(2\operatorname{arctg} x) = \sin 2\varphi$.

По формуле $\sin 2\varphi = \dfrac{2\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}$ получим $\sin(2\operatorname{arctg} x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

Ответ. $\dfrac{2x}{1+x^2}$.

Пример 10. Вычислить:

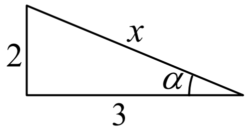
а) $2\sqrt{13}\cos(\operatorname{arctg}\frac{2}{3})$; б) $\operatorname{tg}(\arcsin\ \frac{1}{7})$;

в) $tg(2\arcsin\ \frac{2}{3})$; г) $\operatorname{tg}(\arcsin(-\frac{1}{3}))$.

Решение.

а) *Первый способ (алгебраический)*. Значение выражения $2\sqrt{13}\cos(\operatorname{arctg}\frac{2}{3})$ можно найти по формулам таблицы 2.

Второй способ (геометрический). Значение выражения $2\sqrt{13}\cos(\operatorname{arctg}\frac{2}{3})$ можно найти, используя теорему Пифагора. Напомним, что значения обратных тригонометрических функций от положительных чисел – это углы, лежащие в I четверти, т.е. острые углы. А их можно найти в прямоугольном треугольнике.



Пусть $\operatorname{arctg}\frac{2}{3} = \alpha$ - это угол в треугольнике, тангенс которого равен $\frac{2}{3}$, т.е противолежащий катет относится к прилежащему как $2:3$. Найдем гипотенузу

В прямоугольном треугольнике:
1) косинус острого угла равен отношению прилежащего катета к гипотенузе;
2) синус острого угла равен отношению противолежащего катета к гипотенузе.

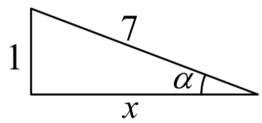
$x = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$. $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$; т.к. $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{2}{3}$, то $\cos\operatorname{arctg}\frac{2}{3} = \frac{3}{\sqrt{13}}$, умножим обе части на $2\sqrt{13}$, получим

$$2\sqrt{13}\cos\operatorname{arctg}\frac{2}{3} = 2\sqrt{13}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}} = 6.$$

Таким образом,

$$2\sqrt{13}\cos\operatorname{arctg}\frac{2}{3} = 6.$$

б) Пусть $\arcsin\frac{1}{7} = \alpha$, т.е противолежащий катет равен 1, а гипотенуза равна 7. найдем по теореме Пифагора неизвестный ка-



тет $x = \sqrt{7^2-1^2} = \sqrt{48}$. Так как *в прямоугольном треугольнике тангенс острого угла равен отношению противолежащего катета к прилежащему*, то $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{x}$ или $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{48}}$, т.к.

$\alpha = \arcsin\frac{1}{7}$. Таким образом, $\operatorname{tg}(\arcsin\ \frac{1}{7}) = \frac{1}{\sqrt{48}}$.

Ответ. а) 6; б) $\frac{1}{\sqrt{48}}$.

Пример 11. Вычислить

а) $\sin(\arcsin\frac{3}{4} + \operatorname{arctg}\frac{3}{4})$; б) $\sin(\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{4}{5})$.

Решение.

а) Пусть $\arcsin\frac{3}{4} = \alpha$, $\operatorname{arctg}\frac{3}{4} = \beta$. Воспользуемся формулой $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$. Тогда

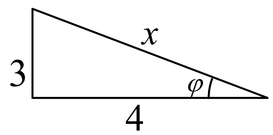
$$\sin(\arcsin\frac{3}{4} + \operatorname{arctg}\frac{3}{4}) =$$

$$= \sin\arcsin\frac{3}{4} \cdot \cos\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \cos\arcsin\frac{3}{4} \cdot \sin\operatorname{arctg}\frac{3}{4}.$$

Вычислим отдельно каждую величину в выражении.

1) $\sin\arcsin\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ по формулам (1).

2) Значение выражения $\cos\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$ найдем геометрическим способом. Пусть $\operatorname{arctg}\frac{3}{4} = \varphi$, тогда $\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{4}$. Так как *в прямоугольном треугольнике тангенс острого угла равен отношению противолежащего катета к прилежащему*, то имеем прямоугольный



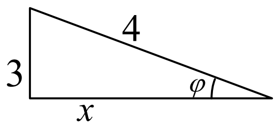
треугольник с катетами 3 и 4, в котором гипотенуза, по теореме Пифагора, равна 5: $x = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Тогда, $\cos\varphi = \frac{4}{x}$, $\cos\varphi = \frac{4}{5}$, следовательно $\cos\operatorname{arctg}\frac{3}{4} = \frac{4}{5}$.

Проверим алгебраическим способом (формулы таблицы 2).

$$\cos \operatorname{arctg}\frac{3}{4} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4^2+3^2}{4^2}}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

3) Найдем значение выражения $\cos \arcsin\frac{3}{4}$.

Геометрически. Пусть $\arcsin\frac{3}{4} = \varphi$, тогда $\sin\varphi = \frac{3}{4}$. Из прямоугольного треугольника неизвестный катет, по теореме Пифагора, равен $x = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$. Тогда



$\cos\varphi = \frac{x}{4}$, $\cos\varphi = \frac{\sqrt{7}}{4}$, следовательно

$\cos \arcsin\frac{3}{4} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Алгебраически. $\cos \arcsin\frac{3}{4} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{4^2-3^2}{4^2}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

4) Найдем значение выражения $\sin \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$.

Геометрически. Пусть $\operatorname{arctg}\frac{3}{4} = \varphi$, тогда $\operatorname{tg}\varphi = \frac{3}{4}$. Воспользуемся результатами пункта 2). Тогда, $\sin\varphi = \frac{3}{x}$, $\sin\varphi = \frac{3}{5}$, следовательно $\sin \operatorname{arctg}\frac{3}{4} = \frac{3}{5}$.

Алгебраически. $\sin \operatorname{arctg}\frac{3}{4} = \dfrac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5} = \frac{3}{5}$.

Подставим найденные значения в исходное выражение.

$$\sin(\arcsin\frac{3}{4} + \operatorname{arctg}\frac{3}{4}) =$$

$$= \sin\arcsin\frac{3}{4}\cdot\cos\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \cos\arcsin\frac{3}{4}\cdot\sin\operatorname{arctg}\frac{3}{4} =$$

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5} + \frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{3}{5} = \frac{3}{5}\cdot\left(1 + \frac{\sqrt{7}}{4}\right).$$

Ответ. $\frac{3}{5}\cdot\left(1 + \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$.

Решение уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции

При решении уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции, часто пользуются приемом вычисления значений тригонометрических функций обеих частей уравнения, который позволяет освободиться от знаков обратных тригонометрических функций и свести выражение к решению алгебраических выражений.

Но такой поход не является равносильным. Следовательно, нужна проверка полученных корней уравнений путем подстановки их в исходное уравнение.

Однако, если можно установить принадлежность обеих частей уравнения одному и тому же промежутку, в котором берущаяся от обеих частей функция монотонна, то в области допустимого значения можно выделить область значений для x, такую что переход окажется эквивалентным.

Пример 12. Решить уравнения:

а) $\mathrm{arctg}\dfrac{x}{2}+\mathrm{arctg}\dfrac{x}{3}=\mathrm{arctg}x$;

б) $\mathrm{arctg}(x+2)-\mathrm{arctg}(x+1)=\dfrac{5\pi}{4}$;

в) $\dfrac{\pi}{2}+\mathrm{arctg}(x^2+1)=\mathrm{arcctg}(x-3)$;

г) $\arcsin(1-x)-2\arcsin x=\dfrac{\pi}{2}$;

д) $\arccos 4x=\arcsin 3x$;

е) $4\mathrm{arctg}(x^2-3x-3)-\pi=0$;

ж) $6\arcsin(x^2-6x+8.5)=\pi$;

Решение.

а) Область допустимых значений: $x\in R$.

$\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\frac{x}{2}+\mathrm{arctg}\frac{x}{3})=\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}x),$ т.к. $\mathrm{tgarctg}\alpha=\alpha$, при $\alpha\in R$, то

$$\frac{\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\frac{x}{2})+\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\frac{x}{3})}{1-\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\frac{x}{2})\cdot\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\frac{x}{3})}=x,$$

$$\frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{3}}{1-\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}}=x,\ \frac{5x}{6-x^2}=x,\ x\neq\pm\sqrt{6},$$

$5x=6x-x^3,$

$x^3-x=0,\ x(x^2-1)=0,$

$x_1=-1, x_2=0, \mathrm{x}_3=1.$

Выполним проверку.

1) $x=-1.$

$$\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)+\mathrm{arctg}(-\frac{1}{3})=-(\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\mathrm{arctg}\frac{1}{3})=-\frac{\pi}{4},$$

$$\mathrm{arctg}(-1)=-\mathrm{arctg}1=-\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4},$$

$x=-1$ - корень уравнения.

2) $x=0.$

$\mathrm{arctg}0+\mathrm{arctg}0=\mathrm{arctg}0,$

$0=0,$

$x=0$ - корень уравнения.

3) $x=1$.

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3})=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\frac{1}{2})+\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\frac{1}{3})}{1-\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\frac{1}{2})\cdot\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\frac{1}{3})}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1,$$

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}1)=1,\ 1=1,$

$x=1$ - корень уравнения.

При этом $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\in(0;\frac{\pi}{2})$ и $\frac{\pi}{4}\in(0;\frac{\pi}{2})$, где $y=\operatorname{tg}x$ - монотонная функция.

Ответ. $x_1=-1, x_2=0, x_3=1$.

Решение неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции

Рассмотрим примеры решения неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции.

Пример 13. Решить неравенства

а) $\arccos x > \operatorname{arctg} x$;

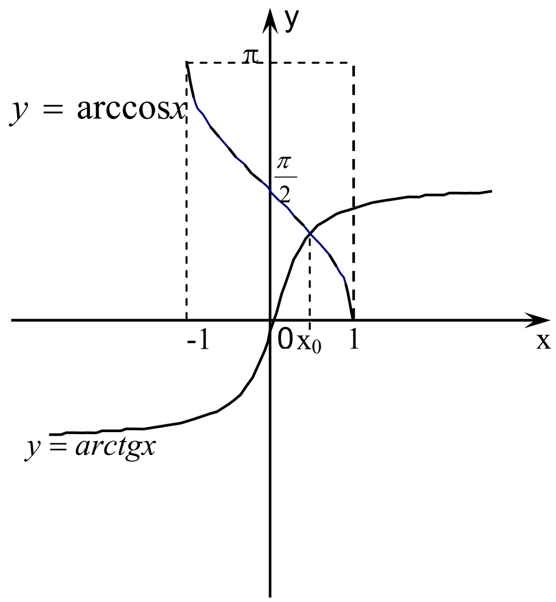
б) $\arcsin x > \arccos x$;

в) $\operatorname{arcctg}\left(8x^2 - 6x - 1\right) \leq \operatorname{arcctg}\left(4x^2 - x + 8\right)$;

г) $\arccos\left(x^2 - 3\right) \leq \arccos(x + 3)$.

Решение.

а) Из рисунка видно, что $\arccos x > \operatorname{arctg} x$ при $x \in \left[-1; x_0\right)$, x_0 - решение уравнения $\arccos x = \operatorname{arctg} x$.



Найдем точку пересечения графиков функций. Для этого решим уравнение $\arccos x = \operatorname{arctg} x$. Вычисляя косинусы обеих частей, получим $\cos(\arccos x) = \cos(\operatorname{arctg} x)$,

$$x=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$x^2=\frac{1}{1+x^2},$$

$$x^4+x^2-1=0.$$

Пусть $x^2=t,\ t\geq 0$.

$t^2+t-1=0,$

$D=5,\ t_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\ t_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},$

$t_2<0,\ t_2$ - посторонний корень.

$x^2=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},\ x_1=\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}},\ x_2=-\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}},$

$x_2<0,\ x_2$ - посторонний корень.

Таким образом,

$$x_0=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

в) Так как для функции $y=\mathrm{arcctg}x\ \ x\in R$, исходное неравенство равносильно следующему

$8x^2-6x-1\leq 4x^2-x+8,$

$4x^2-5x-9\geq 0,$

$$\left[\begin{aligned}&x\leq -1,\\&x\leq\frac{9}{4};\end{aligned}\right.$$

$$x\in(-\infty;-1]\cup\left[\frac{9}{4};+\infty\right).$$

Ответ. а) $\left[-1;\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)$ в) $(-\infty;-1]\cup\left[\dfrac{9}{4};+\infty\right)$.

Заключение

Обучение математике происходит в процессе решения задач, где особую роль играют задачи исследовательского характера. Справочное пособие посвящено решению задач с обратными тригонометрическими функциями – одному из наиболее сложных разделов школьной математики.

Авторы надеются, что решение подобного рода задач позволит учащимся заглянуть «за страницы» учебника, попробовать начать творческую исследовательскую работу, расширить свой кругозор.

Ответы, указания и решения

Пример 1. б) -1; в) 1; д) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; ж) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; з) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Пример 2. б) $-\arcsin\frac{2}{3}$; в) $\arccos(0{,}3)$; д) $\mathrm{arctg}2$; е) $-\mathrm{arctg}(1{,}7)$; ж) $\mathrm{arcctg}\ 1$; з) $\pi-\mathrm{arcctg}\,4$.

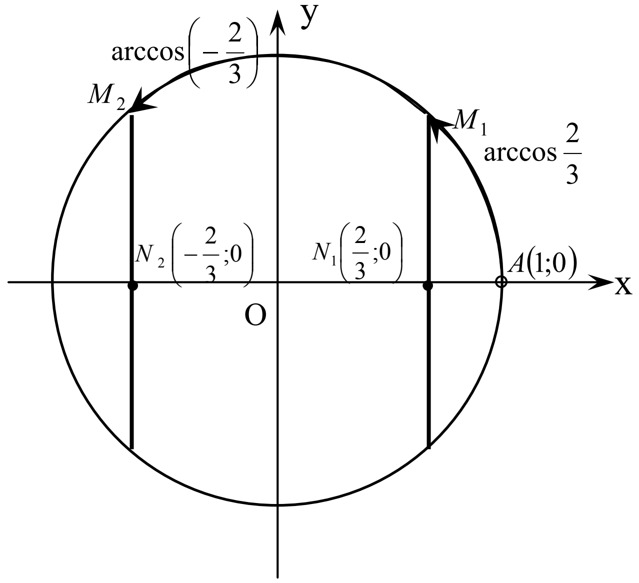
Пример 3. а) имеет смысл; в) имеет смысл; г) не имеет смысла; д) не имеет смысла; е) имеет смысл.

Пример 4. б) $\arcsin\ 0{,}47 > \arcsin\ 0{,}29$;

г) $\arccos\ 0{,}8 < \arccos\ 0{,}6$;

д) $\arccos(\ -0{,}34) < \arccos(\ -0{,}77)$.

Пример 6. *Решение*. б) Пусть $\arccos\frac{2}{3}=\alpha$,



$\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)=\beta$, тогда $\cos\alpha=\frac{2}{3}$ и $\cos\beta=-\frac{2}{3}$. Отметим точки

$\frac{2}{3}$ и $-\frac{2}{3}$ на оси *OX*. Проводим прямые, проходящие через точки N_1 и N_2, параллельно оси OY до пресечения с окружностью (точки M_1 и M_2). Дуги AM_1 и AM_2 соответственно равны значениям $\arccos\frac{2}{3}$ и $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$, т.е. $AM_1 = \arccos\frac{2}{3}$,
$AM_2 = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) = \pi - \arccos\frac{2}{3}\cdot$

Пример 7. б) $2x^2 - 1$; в) $\frac{2x}{1-x^2}$

Указания: б) преобразуйте выражение $\cos(2\arccos x)$, положив $\arccos x = \varphi$ и воспользовавшись формулой
$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$; в) для преобразования выражения воспользуйтесь формулой $\mathrm{tg}2\varphi = \frac{2\mathrm{tg}\varphi}{1-\mathrm{tg}^2\varphi}$.

Пример 8. б) $xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$; в) $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} + xy$; г) $x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}$; д) $\frac{x+y}{1+xy}$; е) $\frac{x+y}{1-xy}$; ж) $\frac{x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy}$.

Указания: для преобразования выражений примера воспользуйтесь формулами

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta;$$
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta;$$
$$\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta}.$$

Пример 9. б) $\frac{1-x^2}{1+x^2}$; в) $\sqrt{\frac{1+x}{2}}$.

Указания: б) $\cos 2\varphi = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2\varphi}{1+\mathrm{tg}^2\varphi}$; в) $\cos\dfrac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\varphi}{2}}$; перед радикалами взять знак “+”, т.к. дуга $\dfrac{1}{2}\arccos x$ принадлежит I четверти, а потому левая часть неотрицательная.

Пример 10. в) $4\sqrt{5}$; г) $-2\sqrt{2}$. *Указания:* в) воспользуйтесь формулой $\mathrm{tg}2\varphi = \dfrac{2\mathrm{tg}\varphi}{1-tg^2\varphi}$ и заменой $\arcsin\dfrac{2}{3} = \varphi$;

г) $\arccos(-\alpha) = \pi - \arccos\alpha$; $\mathrm{tg}(\pi-\alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$.

Пример 11. б) 1.

Пример 12. б) x∈∅; в) -2;1; г) 0; д) $\dfrac{1}{5}$; е) -1;4; ж) 2;4.

б) *Решение.* Область допустимых значений: x∈R.

$$\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}(x+2) - \mathrm{arctg}(x+1)) = \mathrm{tg}\frac{5\pi}{4},$$

$$\frac{\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}(x+2)) - \mathrm{tg}(\mathrm{arctg}(x+1))}{1+\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}(x+2))\cdot\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}(x+1))} = \mathrm{tg}(\pi+\frac{\pi}{4}),$$

$$\frac{(x+2)-(x+1)}{1+(x+2)\cdot(x+1)} = 1,$$

$$\frac{1}{1+(x+2)\cdot(x+1)} = 1,$$

$$1+(x+2)\cdot(x+1) = 1,$$

$$x^2+3x+3 = 1, x^2+3x+2 = 0,$$

$$x_1 = -2, x_2 = -1.$$

Выполним проверку.

1) $x=-2$.

$\operatorname{arctg}(-2+2)-\operatorname{arctg}(-2+1)=$

$=\operatorname{arctg}0-\operatorname{arctg}(-1)=$

$=0+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\neq\frac{5\pi}{4},$

x=-2 – не является корнем уравнения.

2) $x=-1$.

$\operatorname{arctg}(-1+2)-\operatorname{arctg}(-1+1)=$

$=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0=\frac{\pi}{4}-0=$

$=\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\neq\frac{5\pi}{4},$

x=-1 – не является корнем уравнения.

в) *Решение.* Область допустимых значений $x\in R$.

По определению $0<\operatorname{arcctg}(x-3)<\pi$. Так как $x^2+1>0$, то

$0<\operatorname{arctg}(x^2+1)<\frac{\pi}{2},$

$\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}(x^2+1)<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2},$

$\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}(x^2+1)<\pi$, а $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)\subset(0;\pi)$.

Вычисляя, котангенс обеих частей получим эквивалентное уравнение, так как эта функция на $(0;\pi)$ монотонная функция.

$\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}(x^2+1))=\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}(x-3)),$

$-\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x^2+1))=\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}(x-3)),$

$-(x^2+1)=x-3,\ -x^2-x+2=0,$

$x_1=-2, x_2=1.$

Проверка не обязательна.

г) *Решение.* Область допустимых значений:

$$\begin{cases} |1-x| \le 1, \\ |x| \le 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le 1-x \le 1, \\ -1 \le x \le 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -2 \le x \le 0, \\ -1 \le x \le 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ -1 \le x \le 1; \end{cases} \Rightarrow x \in [0;1].$$

Запишем уравнение в виде $\arcsin(1-x) = \frac{\pi}{2} + 2\arcsin x$.

Установим принадлежность обеих частей одному и тому же промежутку.

$\arcsin(1-x) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, но $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$,

$-\pi \le 2\arcsin x \le \pi$,

$-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} + 2\arcsin x \le \frac{3\pi}{2}$, т.е. $\frac{\pi}{2} + 2\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Таким образом, левая и правая части этого уравнения принадлежат разным промежуткам, значит необходима проверка корней.

Получим эквивалентное уравнение

$\sin(\arcsin(1-x)) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2\arcsin x)$,

$\sin(\arcsin(1-x)) = \cos(2\arcsin x)$,

$\sin(\arcsin(1-x)) = 1 - 2\sin^2(\arcsin x)$,

$1 - x = 1 - 2x^2$,

$2x^2 - x = 0$.

$x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}$.

Выполним проверку.

1) $x = 0$.

$\arcsin 1 - 2\arcsin 0 = \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} - 2 \cdot 0 = \frac{\pi}{2}$,

$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$ - корень уравнения.

2) $x = \frac{1}{2}$.

$\arcsin\frac{1}{2} - 2\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$,

$\frac{\pi}{6} - 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2}$,

$x = \frac{1}{2}$ - не является корнем уравнения.

д) *Решение.* Область допустимых значений:

$$\begin{cases} |4x| \le 1, \\ |3x| \le 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le 4x \le 1, \\ -1 \le 3x \le 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{4}, \\ -\frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{3}; \end{cases} \Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right].$$

Заметим, что при $x \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$, $\arccos 4x > 0$, $\arcsin 3x > 0$ и монотонны на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Поэтому получим эквивалентное уравнение на этом интервале, взяв синус обеих частей уравнения для $x \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$

$\sin(\arccos 4x) = \sin(\arcsin 3x)$,

$\sqrt{1-16x^2} = 3x$, $25x^2 = 1$, $x = \frac{1}{5}$ - корень уравнения.

Если $x \in \left[-\frac{1}{4}; 0\right]$, то $\arccos 4x \in \left[\pi; \frac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin 3x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

Следовательно, на рассматриваемом интервале уравнение не имеет корней.

е) *Решение.* Запишем уравнение в виде

$\operatorname{arctg}(x^2 - 3x - 3) = \dfrac{\pi}{4}$.

Так как $\operatorname{arctg}(x^2 - 3x - 3) \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ и $\dfrac{\pi}{4} \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, то

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x^2 - 3x - 3)) = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}$,

$x^2 - 3x - 3 = 1$,

$x^2 - 3x - 4 = 0$,

$x_1 = -1,\ x_2 = 4$.

ж) *Решение.* Запишем уравнение в виде

$\arcsin(x^2 - 6x + 8{,}5) = \dfrac{\pi}{6}$.

Так как $\arcsin(x^2 - 6x + 8{,}5) \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ и $\dfrac{\pi}{6} \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, то

$\sin(\arcsin(x^2 - 6x + 8{,}5)) = \sin\dfrac{\pi}{6}$,

$x^2 - 6x + 8{,}5 = 0{,}5$,

$x^2 - 6x + 8 = 0$,

$x_1 = 2,\ x_2 = 4$.

Пример 13. б) $x \in \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$; г) -2.

б) *Решение. Первый способ решения.* Если $-1 \le x < 0$, то $\arcsin x < 0,\ \arccos x > 0$, неравенство не имеет решения.

Если $0 \le x \le 1$, то $0 \le \arcsin x \le \dfrac{\pi}{2},\ 0 \le \arccos x \le \dfrac{\pi}{2}$.

Так как функция $y = \sin x$ на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ монотонно возрастает, то

$$\sin(\arcsin x) > \sin(\arccos x),$$

$$x > \sqrt{1 - x^2},$$

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ x > \sqrt{1-x^2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ x^2 > 1 - x^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ x^2 - \frac{1}{2} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ x \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right); \end{cases}$$

$$x \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right].$$

Второй способ решения. Функции $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$ связаны между собой тождественным соотношением $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ при $|x| \le 1$. Используя это равенство, выразим одну функцию через другую $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ и подставим полученное выражение в данное неравенство:

$$\arcsin x > \frac{\pi}{2} - \arcsin x,$$

$$2\arcsin x > \frac{\pi}{2},$$

$$\arcsin x > \frac{\pi}{4}.$$

Так как $\arcsin x \le \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{4} < \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$. Взяв от каждой части неравенства синус, получим $\sin\frac{\pi}{4} < \sin(\arcsin x) \le \sin\frac{\pi}{2}$,

$\frac{\sqrt{2}}{2} < x \le 1$.

г) *Решение.* $\arccos(x^2 - 3) \le \arccos(x + 3)$,

$$\begin{cases} x^2 - 3 \ge x + 3, \\ x + 3 \ge -1, \\ x^2 - 3 \le 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - x - 6 \ge 0, \\ x \ge -4, \\ x^2 - 4 \le 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-3)(x+2) \ge 0, \\ (x-2)(x+2) \le 0, \\ x \ge -4; \end{cases}$$

$x = -2$.

Литература

1. Андронов И.К., Окунев А.К. Основной курс тригонометрии. – М.: 1960.
2. Новоселов С.И. Обратные тригонометрические функции. – М.: Учпедиз, 1956.
3. Новоселов С.И. Специальный курс тригонометрии. – 1967.
4. Андронов И.К., Окунев А.К. Курс тригонометрии, развиваемой на основе реальных задач. – М., 1967.
5. Васильевский А.Б. Обучение решению задач. – Минск: Высшая школа, 1979.
6. Зайцев В.В., Рыжов В.В., Сканави М.И. Элементарная математика. – М., 1974.
7. Мерлин А., Мерлина Н. Нестандартные задачи по математике в школьном курсе. – Математика, № 37, 2000.
8. Дорофеев Г.В., Потапов М.К., Розов Н.Х. Математика. Пособие для поступающих в вузы. – М.: «Экзамен», 1999.
9. Виленкин Н.Я. Алгебра и математический анализ. 10 кл. – М.: Просвещение, 1999.
10. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: Учеб. пособие для средних спец. учеб. Заведений/ Н.В. Богомолов.-5-е изд., стер.- М.: Высш. шк., 2002.-495 с.
11. Потапов М.К. Алгебра, тригонометрия и элементарные функции. – М., 2001.
12. Тесты. Математика. Варианты и ответы централизованного (абитуриентского) тестирования – М.: центр тестирования МО РФ, 2004.
13. Письменный Д.Т. Готовимся к экзамену по математике. – 5-е изд., испр. и доп. – М.: Рольф, 2000. – 288 с.
14. Дорофеев Г.В., Потапов М.К., Розов Н.Х. Математика. Пособие для поступающих в ВУЗы – М.: «Экзамен», 1999. – 256 с.
15. Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы. Под ред. М.И. Сканави. Учеб. пособие , 1994.

16. Математика. Задачи М.И. Сканави с решениями. Сост. С.М. Марач, П.В. Полуносик. – Мн.: изд. В.М. Скакун, 1998. – 444 с.

17. Королева Т.М., Маркарян Е.Г., Нейман Ю.М. Пособие по математике в помощь участникам централизованного тестирования. - М.: центр тестирования МО РФ, 2004. – изд. 5, испр. и доп., 192 с.

18. Горштейн П.И., Полонский В.Б., Якмр М.С. Задачи с параметрами. 3-е издание, дополненное и переработанное. – М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 2002. – 336 с.

19. Сборник задач по математике для поступающих в вузы: Учеб. пособие/ В.К. Егерев, В.В. Зайцев, Б.А. Кордемский и др.; Под ред. М.И. Сканави. – М.: Издательский дом «ОНИКС 21 век»: Мир и Образование, 2002. – 608 с.

20. Крамор В.С., Лунгу К.Н., Лунгу А.К. Математика: Типовые примеры на вступительных экзаменах. Пособие для старшеклассников и абитуриентов. – М.: АРКТИ, 2001. – 208 с.

21. Богатырев Г.И., Агафонов Б.Г., Шувалава Э.З. Повторяем математику.- 464 с.

22. Математика для техникумов. Алгебра и начала анализа: Учебник. Ч.1/ Качисовский М.И., Колягин Ю.М., Кутасов А.Д., Луканкин Г.Л., и др.; Под ред. Г.Н. Яковлева. – 3-е изд., перераб. – М.: Наука.Гл. ред. Физ.-мат. Лит., 1987. – 464 с.

23. Готовимся к единому государственному экзамену. Математика/ Л.О. Денищева, Е.М. Бойченко, Ю.А. Гладков и др. – 3-е изд. стереотип. –М.: Дрофа, 2005. – 117, [3] с.

24. Единый государственный экзамен 2002: Конторол. измерит. материалы: Математика/ Л.О. Денищева, Е.М. Бойченко, Ю.А. Гладков и др. – 2-е изд. –М.: Просвещение, 2003. – 127 с.