

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Казанский государственный технологический университет»
Нижекамский химико-технологический институт

И.А. Сабанаев, Ф.М. Алмакаева

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Энергетические методы определения перемещений
и решение статически неопределимых балок методом сил

Учебное пособие

Казань
КГТУ
2008

УДК 539.384.2+531.224.2

С 12

Сабанаев, И.А.

Алмакаева, Ф.М.

Соппротивление материалов. Энергетические методы определения перемещений и решение статически неопределимых балок методом сил: учебное пособие / И.А. Сабанаев, Ф.М. Алмакаева. – Казань: Изд-во Казан. гос. технол. ун-та, 2008. - 86 с.

Пособие соответствует государственному образовательному стандарту дисциплины «Соппротивление материалов» направления бакалаврской подготовки 551800 «Технологические машины и оборудование».

Рассмотрена технология определения перемещений при плоском изгибе с помощью энергетических методов, а также решение статически неопределимых систем, в частности плоских балок, методом сил. Главное внимание уделено развитию навыков самостоятельного решения типовых задач.

Предназначено для студентов второго и третьего курсов всех форм обучения механического факультета.

Подготовлено на кафедре «Машины и аппараты химических производств и производства строительных материалов» Нижнекамского химико-технологического института КГТУ.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Казанского государственного технологического университета.

Рецензенты: доц. В.В. Биктагиров

доц. А.М. Абдуллин

© Сабанаев И.А., Алмакаева Ф.М., 2008

© Казанский государственный
технологический университет, 2008 г.

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа представляет собой учебное пособие, дополняющее лекционный курс сопротивления материалов. Пособие содержит теоретический материал, поясняющий основные энергетические методы определения перемещений поперечных сечений бруса, а также принципы решения статически неопределимых задач на основе энергетических методов. В работе подробно и последовательно разъясняется технология применения указанных методов к решению практических задач. Во второй главе пособия рассматривается технология решения статически неопределимых систем, в частности плоских балок, методом сил, а также способ деформационной проверки правильности раскрытия статической неопределимости.

Учебное пособие преследует в качестве основной цели развитие у студентов навыков практического решения задач на основе глубокого понимания теоретических аспектов.

Основными задачами пособия являются:

- систематизация знаний студентов в области теории и практики энергетических методов и метода сил;
- обобщение теоретического материала, рассматриваемого в рамках СРС, для более эффективного его усвоения;
- оказание практической помощи при решении типовых задач сопротивления материалов в рамках расчетно-графических работ у студентов очной и контрольных работ у студентов заочной форм обучения.

При изучении материала пособия важна строгая последовательность, так как его изложение выполнено с соблюдением информационных связей между разделами.

1. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ СЕЧЕНИЯ БРУСА

Энергетические методы определения перемещений играют важную роль при решении задач расчета деталей машин и элементов конструкций на жесткость, а также при решении статически неопределимых систем методом сил.

1.1. Перемещения поперечных сечений бруса

Основными задачами курса сопротивления материалов являются задачи расчета на прочность и жесткость. Вторая задача требует расчета перемещений поперечных сечений бруса, и определения максимальных значений перемещений. Каждая из четырёх простых видов деформаций приводит к возникновению своих характерных перемещений.

При растяжении или сжатии бруса его сечения перемещаются вдоль оси. Перемещение крайних сечений задает удлинение или укорочение всего стержня (рис.1).

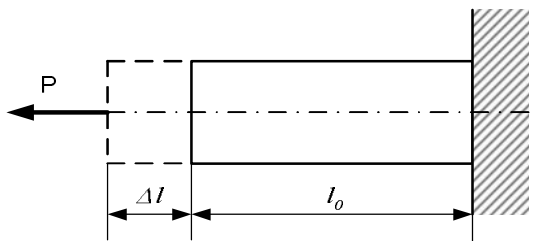


Рис.1. Перемещения сечений при растяжении и удлинении стержня

При сдвиге поперечные сечения перемещаются в направлении, перпендикулярном оси бруса. В результате между первоначальным положением оси и положением оси в момент

деформации образуется угол, называемый углом сдвига.

Пояснения к определению угла сдвига показаны на рис.2.

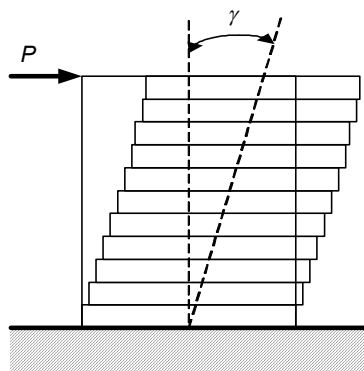


Рис.2. Перемещения сечений при чистом сдвиге

При кручении вала круглой формы сечения его представляют как набор абсолютно жестких дисков. Каждый диск поворачивается вокруг оси вала. В результате между начальным положением любого радиуса, проведенного в сечении до деформации и его положением в момент деформации, образуется угол, называемый углом закручивания вала (рис.3).

При плоском изгибе поперечные сечения балки испытывают 2 вида перемещений: линейное и угловое (рис.4). Перемещение центра тяжести сечения по направлению, перпендикулярному оси балки называется прогибом балки в данной точке и обозначается буквой “У”. Угол, на который поворачивается сечение по отношению к своему первоначальному положению, называется углом поворота сечения и обозначается θ .

Для определения перемещений поперечных сечений бруса, которые показаны на рис.1 – 4, используются различные

теоретические и экспериментальные методы. В основе них, как правило, лежат дифференциальные уравнения первого и второго порядков. Решения этих уравнений подробно рассматриваются в первой части сопротивления материалов. В итоге такого решения строятся эпюры перемещений и, по ним уже определяется наибольшее значение. Максимальное перемещение необходимо для проведения в последующем расчета на жесткость. Оно подставляется в неравенство, называемое условием жесткости. Например, при кручении вала условие жесткости записывается по относительному углу закручивания:

$$\varphi_{\max}^{\text{отн}} = [\varphi^{\text{отн}}].$$

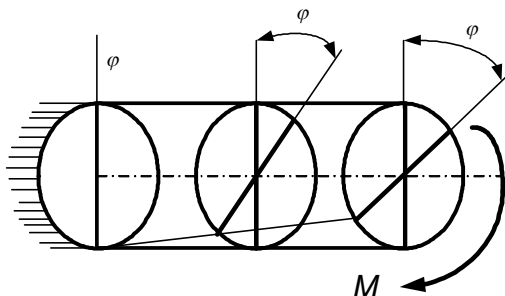


Рис.3. Перемещения сечений вала при кручении

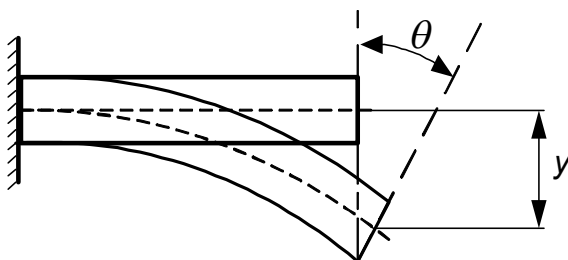


Рис.4. Перемещения сечений при плоском изгибе

1.2 Обобщенное перемещение

Во второй части сопротивления материалов рассматриваются энергетические методы определения перемещений поперечных сечений бруса. Энергетическими их называют потому, что в их основе лежит необходимость вычисления потенциальной энергии деформации. К группе энергетических обычно относят метод Кастильяно, метод Мора и способ Верещагина. Теоретические основы энергетических методов, в частности, формулировки теорем, на которых они основаны, доказательства теорем рассматриваются в курсе лекций.

Особенностью энергетических методов является то, что один расчёт, произведенный для бруса, позволяет определить лишь одно перемещение. Поэтому, чтобы построить эпюры перемещений придется решить ряд задач для нескольких характерных точек бруса. Энергетические методы применяют обычно тогда, когда необходимо найти перемещение только в одной - двух точках, например в центре бруса или на его концах. Эти методы особенно удобны при решении статически неопределимых задач. В таких задачах возникает необходимость расчета перемещений для ограниченного числа точек бруса.

Данное учебное пособие содержит минимальные теоретические сведения по энергетическим методам. Оно предназначено для формирования навыков решения практических задач. Рассмотрим некоторые наиболее важные понятия энергетических методов.

При применении энергетических методов силу P_1 будем трактовать как обобщенную силу, понимая под обобщенной силой любую силу, группу сил или момент, которые удобно выделить для определения совершаемой ею работы. Обобщенной силе соответствует обобщенное перемещение Δ_1 . Обобщенное перемещение - это величина, на которую нужно

умножить обобщенную силу, чтобы определить совершаемую ей работу:

$$A = P_1 \Delta_1.$$

Индекс «1» означает, что обобщенная сила приложена в некоторую точку, которой вместо имени А, В или С присвоили номер 1.

Если обобщенная сила - это сосредоточенная сила, то ей соответствует линейное перемещение (например, прогиб, удлинение). Если обобщенная сила - сосредоточенный момент, то ей соответствует угловое перемещение (например, угол поворота сечения, угол закручивания).

1.3 Энергетический метод Мора

Метод Мора является универсальным методом определения любых перемещений сечений бруса при любой нагрузке. Для каждого из внутренних силовых факторов (ВСФ) Q_y , M_x , M_z , N , M_y , Q_x составляют свой интеграл Мора. Запись интегралов для любого из ВСФ на основе теоремы Мора рассматривается в курсе лекций. Общее перемещение рассчитывается как сумма интегралов Мора для каждого внутреннего силового фактора.

В данном пособии рассматривается решение задач определения перемещений только от внутреннего изгибающего момента M_x . Перемещение от момента рассчитывается как интеграл Мора:

$$\Delta = \int_{\ell} \frac{M_x(z) \cdot M'_x(z)}{EI_x} dz.$$

где EI_x - жесткость сечения; $M_x(z)$ - уравнение изгибающего момента основной схемы на данном участке; $M'_x(z)$ - уравнение изгибающего момента вспомогательной схемы.

Вспомогательная схема составляется с учётом основной, но без заданных внешних нагрузок. В качестве нагрузки здесь служат либо единичная сила ($P = 1$) при вычислении прогиба, либо единичный момент ($M = 1$) при вычислении угла поворота сечения. Их прикладывают в то сечение, перемещение которого определяется.

Общее число интегралов Мора должно быть равно числу участков, т.е. для каждого участка записывается свой интеграл с соответствующими границами. При этом границы участков для основной и вспомогательной балок должны совпадать. Сумма всех интегралов есть искомое перемещение.

Метод Мора можно применять при расчете стержней, вала, балки, рамы, шарнирно-стержневой системы и др. В тексте пособия используется термин система. Под системой здесь подразумевается один из перечисленных объектов.

Для формирования навыков решения задач нужно следовать особому шаблону решения. Он задает алгоритм, т.е. последовательность шагов, которые приведут к правильному решению.

Порядок применения метода Мора для расчета перемещений

1. Вычерчивается вспомогательная система, которая геометрически совпадает с основной (заданной), но без внешних нагрузок. На этом этапе нужно рядом с заданной балкой (рамой, валом и т.п.) начертить ее точную копию, но убрать с нее все внешние нагрузки, т.е. силы P , моменты M , распределенные нагрузки q . Таким образом, вторая система пока не нагружена.

2. На вспомогательной системе в той точке, где нужно определить перемещение, необходимо приложить:

- либо единичную силу $P = 1$, если рассчитывается прогиб U ;

- либо единичный момент $M = 1$, если определяется угол поворота сечения θ .

3. Допустим, требуется определить перемещение сечения, которое на схеме обозначена как т.А или номер 1. Тогда на вспомогательной системе именно в эту точку следует приложить силу или момент, равные единице. Это не 1 Н, не 1 кг, а просто 1 без единиц измерения. Причем силу прикладывают тогда, когда определяют линейное перемещение, т.е. перемещение, измеряемое в единицах длины. К таким перемещениям относят прогиб балки и удлинение стержня. Момент прикладывают тогда, когда нужно определить угловое перемещение, т.е. перемещение, измеряемое в радианах или градусах. К таким перемещениям относятся угол поворота сечения при изгибе и угол закручивания при кручении (см. рис.1 – 4).

4. Определяют количество участков и для каждого участка при расчете изгиба записываются уравнения моментов $M_X(z)$ для основной и $M'_X(z)$ для вспомогательной системы. Причем, границы участков для обеих систем должны совпадать. Таким образом, если например, основная система состоит из четырёх участков, а вспомогательная состоит только из двух, то вспомогательную придется разделить на такие же четыре участка.

5. Для каждого участка составляется свой интеграл Мора. Если участки имеют разные размеры сечений, то момент инерции вычисляется для каждого сечения. Если жесткость сечения по всей балке постоянна, то вычисление момента инерции можно оставить напоследок. При решении интегралов в этом случае, жесткость балки (EI_X - произведение модуля

упругости на момент инерции) можно вынести за знак интеграла.

Результаты интегрирования на всех участках суммируются и таким образом рассчитывают требуемое перемещение. *Перемещение в заданной точке есть сумма всех интегралов Мора.*

Примечание. Если вычисленное перемещение, оказалось, по величине отрицательным значит направление перемещения сечения противоположно выбранному направлению единичной силы или момента.

Например, для определения прогиба была приложена единичная сила $P = 1$ по направлению вниз. Расчетный прогиб $U = 2,5$ мм. Значит, данное сечение балки перемещается по направлению вверх.

Примеры расчета перемещения сечения методом Мора

Пример №1. На рис. 5 показана расчетная схема балки.

Требуется вычислить угол поворота сечения, соответствующего т.А.

Дано: $a = 1$ м, $b = 8$ м, $c = 1$ м. $P_1 = 1$ кН, $P_2 = 2$ кН.
Сечение балки – прямоугольник со сторонами $h \times b$.

Пусть $h = 6,7$ см, $b = 39,6$ см.

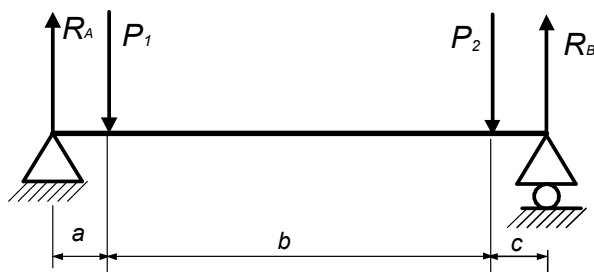


Рис.5. Схема балки к примеру 1

Вычисляем угол поворота сечения на левой опоре.

Для решения задачи воспользуемся шаблоном решения.

1. Вычерчиваем основную и вспомогательную балки. Заданная балка – балка, которая была задана на рис. 5. Она же является основной. Вспомогательная балка во всем повторяет основную: такие же опоры, такая же длина, но на ней нет внешних нагрузок. Поэтому при ее вычерчивании мы отбрасываем силы P_1 и P_2 . На этом этапе вспомогательная балка вообще не содержит внешних сил.

2. В т. А, т.е. там, где нужно определить перемещение, прикладываем момент, равный единице $M = 1$. В этой задаче прикладываем именно момент, потому что требуется определить угловое перемещение. Его направление выбираем произвольно, пусть например, по часовой стрелке. Тогда схему вспомогательной балки с выбором участков при записи уравнений внутреннего момента можно изобразить так, как это показано на рис.6.

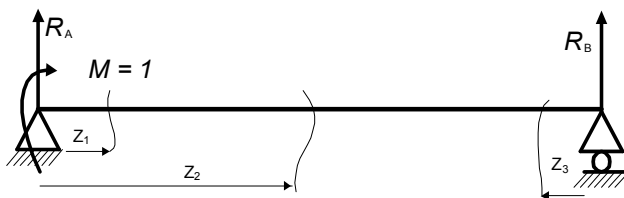


Рис.6. Схема вспомогательной балки для вычисления угла поворота

3. Основная балка включает три участка. Вспомогательная балка состоит только из одного участка. В соответствии с требованием о необходимости совпадения границ участков, вспомогательную балку тоже разделяем на три участка

так, как это показано на рис.6. На каждом участке проводим одно сечение.

Для вычисления перемещения нужно составить три интеграла Мора по изгибающему моменту для каждого участка балки. Записываем уравнения изгибающего момента для основной и вспомогательной систем. В уравнения внутреннего момента в нашем случае входят опорные реакции. Поэтому их необходимо предварительно вычислить.

Сначала определим опорные реакции для основной системы. Для этого составим уравнения равновесия.

$$\begin{aligned} \Sigma M_B = R_A \cdot 10 - P_1 \cdot 9 - P_2 \cdot 1 = 0 & \quad R_A = 1,1 \text{ кН}; \\ \Sigma Y = R_A + R_B - P_1 - P_2 = 0 & \quad R_B = 1,9 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Опорные реакции для вспомогательной системы:

$$\begin{aligned} \Sigma M_B = R'_A \cdot 10 + 1 = 0 & \quad R'_A = -0,1 \text{ м}^{-1}; \\ \Sigma Y = R'_A + R_B = 0 & \quad R'_B = 0,1 \text{ м}^{-1}. \end{aligned}$$

Модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2 = 2,1 \cdot 10^8 \text{ кН/м}^2$.

Размеры и форма сечения по длине балки не изменяются. Значит, жесткость балки постоянна. Ее можно предварительно вычислить.

Момент инерции прямоугольного сечения:

$$I_x = 39,6 \cdot 6,7^3 / 12 = 1037,6256 \text{ см}^4 \approx 10,376 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

Вычислим жесткость балки:

$$EI_x = 2,1 \cdot 10^8 \text{ кН/м}^2 \cdot 10,376 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4 = 2179,01 \text{ кН м}^2.$$

Запишем уравнения изгибающих моментов.

I участок. $0 \leq Z \leq 1$.

Для основной системы: $M_x(Z) = R_A \cdot Z = 1,1 \cdot Z$; для вспомогательной системы: $M'_x(Z) = R'_A \cdot Z + 1 = -0,1 \cdot Z + 1$.

II участок. Для удобства вычисления интеграла перенесем начало координат из точки А в точку приложения силы P_1 . Тогда, $0 \leq Z \leq 8$.

Уравнения моментов для основной и вспомогательной систем соответственно можно составить :

$$M_x(Z) = R_A \cdot (Z + 1) - P_1 \cdot Z = 1,1 \cdot Z + 1,1 - Z = 0,1 \cdot Z + 1,1;$$

$$M_x(Z) = R'_A \cdot (Z + 1) + 1 = -0,1 \cdot Z - 0,1 + 1 = -0,1 \cdot Z + 0,9.$$

III участок рассмотрим с правой стороны. Начало координат расположим в точке В. Тогда $0 \leq Z \leq 1$.

Запишем уравнения:

$$M_x(Z) = R_B \cdot Z = 1,9 \cdot Z;$$

$$M'_x(Z) = R'_B \cdot Z = 0,1 \cdot Z.$$

4. Для каждого участка составляем свой *интеграл Мора*.

Жесткость по длине балки не меняется, поэтому ее можно вынести за знак интеграла. Для удобства расчетов деление на жесткость произведем только на последнем этапе, после определения суммы всех трех интегралов.

I участок. Нижний предел интегрирования равен 0, верхний 1 м.

$$\int 1,1Z \cdot (-0,1Z + 1) dZ = \int (-0,11Z^2 + 1,1Z) dZ =$$

$$= -0,11 \cdot \frac{1^3}{3} + 1,1 \cdot \frac{1^2}{2} = -0,0367 + 0,55 = 0,5133$$

II участок. Нижний предел интегрирования равен 0, верхний 8 м.

$$\int (0,1Z + 1,1) (-0,1Z + 0,9) dZ = \int (-0,01Z^2 - 0,02Z +$$

$$0,99) dZ = -0,01 \cdot \frac{8^3}{3} - 0,02 \cdot \frac{64}{2} + 0,99 \cdot 8 = 5,5733$$

III участок. Нижний предел интегрирования равен 0, верхний 1 м.

$$\int 1,9Z \cdot 0,1Z dZ = 0,19 \cdot \frac{1^3}{3} = 0,0633.$$

5. Вычислим искомое перемещение. Сложив все три интеграла, и разделив их сумму на жесткость, получим угол поворота в точке А.

$$\theta_A = \frac{(0,5133 + 5,5733 + 0,06330) \text{ кН} \cdot \text{м}^2}{2,82 \cdot 10^{-3} \text{ кН} \cdot \text{м}^2}.$$

Положительное значение угла говорит о том, что направление поворота совпадает с направлением единичного момента, т.е. по часовой стрелке.

Пример №2. Для балки, изображенной на рис. 5 требуется вычислить прогиб сечения в точке С.

Вычислим прогиб в т. С, если задано $AC = 4$ м. $CB = 6$ м. $a = 1$ м, $b = 8$ м, $c = 1$ м. $P_1 = 1$ кН, $P_2 = 2$ кН.

Составляем основную систему.

Схема основной системы с необходимыми сечениями показана на рис.7.

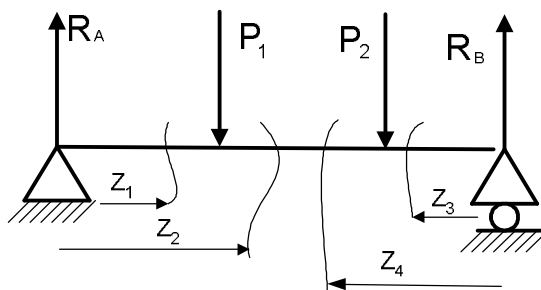


Рис.7. Схема основной системы для вычисления прогиба

1. Вычертим вспомогательную балку. Для этого перечертим основную балку, но отбросим внешние нагрузки P_1 и P_2 .

2. Требуется определить прогиб, поэтому на вспомогательной балке в т. С приложим силу, равную единице. Направление силы выберем вниз. Тогда схема вспомогательной балки будет такой, как она изображена на рис.8.

3. На каждом участке обеих балок проводим сечения для вычисления внутренних моментов. Основная балка имеет 3 участка, вспомогательная только 2. Чтобы соблюдалось требование о совпадении границ участков, основную и вспомогательную балку разделим на 4 участка.

Составляем уравнения внутреннего момента на каждом участке. Во все уравнения войдут опорные реакции, поэтому их нужно предварительно определить.

Опорные реакции для основной системы уже известны из предыдущей задачи. Реакции для вспомогательной системы вычислим из уравнений равновесия:

$$\sum Y = R'_A + R'_B - 1 = 0; \quad \sum M_A = -1 \cdot 4 \text{ м} + R'_B \cdot 10 \text{ м} = 0.$$

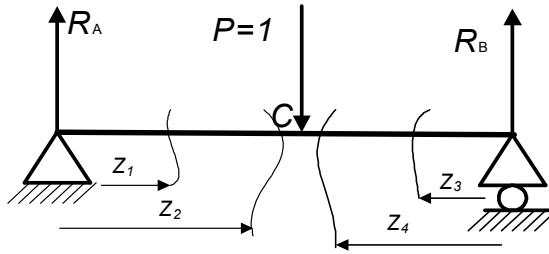


Рис.8. Схема вспомогательной системы для вычисления прогиба

Из уравнений опорные реакции $R'_A = 0,6$; $R'_B = 0,4$.

Проведем четыре сечения на обеих балках. Запишем уравнения внутреннего изгибающего момента для основной и вспомогательной систем для каждого из четырех участков.

I участок $0 < Z < 0,4 \text{ м}$.

Основная: $M_x = R_A \cdot Z = 1,1 \cdot Z$;

вспомогательная: $M'_x = R'_A \cdot Z = 0,6 \cdot Z$.

II участок $1 < Z < 4 \text{ м}$.

В примере 1 для того, чтобы упростить вычисление интегралов, мы переносили начало координат в точку, где завершался предыдущий участок. В результате второй участок начинался опять с 0 и нижний предел интеграла на втором участке был равен 0. Во втором примере переносить начало координат не будем. Теперь нижние границы второго и четвертого участков не будут равны 0. Это нужно учитывать при расчете интеграла.

Основная: $M_x = R_A \cdot Z - P_1 \cdot (Z - 1) = 1,1 \cdot Z - 1 \cdot (Z - 1)$;

вспомогательная: $M'_x = R'_A \cdot Z = 0,6 \cdot Z$.

III участок $0 < Z < 1$ м.

Основная: $M_x = R_B \cdot Z = 1,9 \cdot Z$;

вспомогательная: $M'_x = R'_B \cdot Z = 0,4 \cdot Z$.

IV участок $1 < Z < 6$ м.

Основная: $M_x = R_B \cdot Z - P_2 \cdot (Z - 1) = 1,9 \cdot Z - 2 \cdot (Z - 1)$;

вспомогательная: $M'_x = R'_B \cdot Z = 0,4 \cdot Z$.

4. На каждом участке составляем интеграл Мора.

I участок $0 < Z < 1$ м.

$$\int 1,1 Z \cdot 0,6 Z dZ = 0,66 \cdot I^3 / 3 = 0,22.$$

II участок $1 < Z < 4$ м.

$$\begin{aligned} & \int [1,1Z - 1 \cdot (Z - 1)] \cdot 0,6 Z dZ = \\ & = 0,06 \cdot (4^3 - 1^3) / 3 + 0,6 \cdot (4^2 - 1^2) / 2 = 5,76. \end{aligned}$$

III участок $0 < Z < 1$ м.

$$\int 1,9 Z \cdot 0,4 Z dZ = 0,76 \cdot I^3 / 3 = 0,2533.$$

IV участок $1 < Z < 6$ м.

$$\begin{aligned} & \int [1,9 Z - 2 \cdot (Z - 1)] \cdot 0,4 Z dZ = \\ & = -0,04 \cdot (6^3 - 1^3) / 3 + 0,8 (6^2 - 1^2) / 2 = 11,133. \end{aligned}$$

5. Прогиб в т. С, который мы вычисляем равен сумме всех четырёх интегралов Мора:

$$Y = \frac{0,22 + 5,76 + 0,2533 + 11,133}{2179,01} = 7,97 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

Прогиб составил величину $Y = 7,97 \approx 8,0$ мм.

Пример 3. Для балки, схема которой показана на рис.9, определить прогиб на свободном конце.

Исходные данные: $q = 10$ кН/м; $P = 8$ кН; $M = 4$ кН · м.

Решение.

Уравнения статики:

$$1) \Sigma Z = -H_A = 0 \quad H_A = 0;$$

$$2) \Sigma Y = R_A + P - q \cdot 7 = 0;$$

$$R_A = q \cdot 7 - P = 10 \cdot 7 - 8 = 62 \text{ (кН)};$$

$$3) \Sigma M_A = M_A + P \cdot 6 + M - q \cdot 7 \cdot 6,5 = 0;$$

$$M_A = q \cdot 45,5 - M_A - 6 \cdot P = 455 - 4 - 6 \cdot 8 = 403 \text{ (кН*м)}.$$

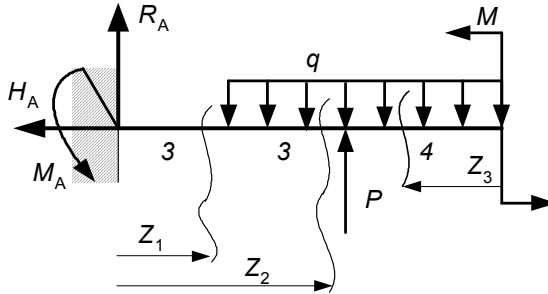


Рис.9. Схема заданной балки

1. Вычерчиваем вспомогательную систему.
2. На вспомогательной балке прикладываем силу, равную 1. Направление выбираем произвольно, допустим, вверх. Схема вспомогательной балки показана на рис.10.

Вычислим опорные реакции для вспомогательной балки.

$$1) \Sigma Z = -H_A = 0, \quad H_A = 0;$$

$$2) \Sigma Y = R_A + 1 = 0, \text{ тогда } R_A = -1;$$

$$3) \Sigma M_A = M_A + 1 \cdot 10 \text{ м} = 0, \quad M_A = -10 \text{ м}^{-1}.$$

3. Составляем уравнения внутренних моментов для обеих балок на каждом из трёх ее участков.

I участок $0 < Z_1 < 3$.

Основная балка $M_x = R_A \cdot Z_1 - M_A = 62 \cdot Z_1 - 403$.

Вспомогательная балка $M_x = R'_A \cdot Z_1 - M'_A = -1 \cdot Z_1 + 10$.

II участок $3 < Z_2 < 6$.

Основная балка

$$M_x = R_A \cdot Z - M_A - q(Z-3) \frac{Z-3}{2} = 62 \cdot Z - 403 - 5 \cdot (Z-3)^2.$$

Вспомогательная балка $M_x = R'_A \cdot Z - M_A = -1 \cdot Z + 10$.

III участок $0 < Z_3 < 4$.

Основная балка $M_x = -q \frac{Z^2}{2} + M = -5 \cdot Z^2 + 4$.

Вспомогательная балка $M'_x = 1 \cdot Z$.

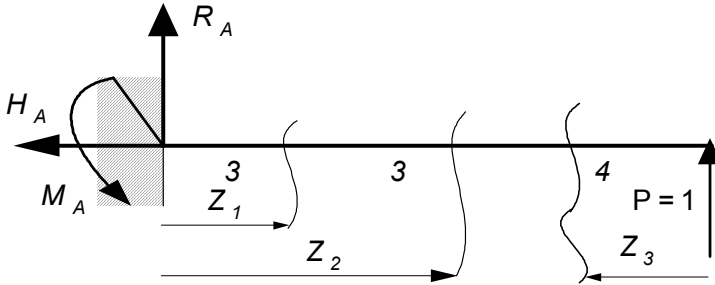


Рис.10. Схема вспомогательной балки

4. Составляем 3 интеграла для трёх участков балки. Жесткость, входящая в формулу всех трёх интегралов одинакова по условиям задачи. Ее можно вынести за знак интеграла. Поэтому в расчете участков мы ее учитывать не будем. Разделим на жесткость после сложения результатов интегрирования.

I участок $0 < Z_1 < 3$.

$$\int_0^3 M_x \bar{M}_x dz = \int_0^3 (62Z - 403)(-1Z + 10) dz =$$

$$\int_0^3 (-62Z^2 + 1023Z - 4030) dz = \left(-62 \frac{Z^3}{3} + 1023 \frac{Z^2}{2} - 4030 Z \right) \Big|_0^3 =$$

$$= -558 + 4603,5 - 12090 = -8044,5.$$

II участок $3 < Z_2 < 6$.

Чтобы было проще интегрировать, перемножим сначала моменты под знаком интеграла.

$$M_x \cdot M'_x = (62Z - 403 - 5(Z - 3)^2)(-Z + 10) = \\ = 5Z^3 - 142Z^2 + 1368Z - 4480.$$

Теперь интегрируем:

$$\int_3^6 (5Z^3 - 142Z^2 + 1368Z - 4480) dZ = 5 \frac{Z^4}{4} - 142 \frac{Z^3}{3} + 1368 \frac{Z^2}{2} - \\ - 4480Z = 5 \frac{6^4 - 3^4}{4} - 142 \frac{6^3 - 3^3}{3} + 1368 \frac{6^2 - 3^2}{2} - 4480(6 - 3) = \\ = -2399,25.$$

III участок $0 < Z_3 < 4$.

$$\int_0^4 (-5Z^2 + 4)Z dZ = -5Z^3 + 4Z = -5 \frac{4^4}{4} + 4 \frac{4^2}{2} = -288.$$

5. Результаты интегрирования на всех трёх участках складываем и делим на жесткость, которую ранее вынесли за знак интеграла:

$$Y_B = \frac{-8044,5 - 2399,25 - 288}{EI_x} = -\frac{10731,75}{EI_x}.$$

Если размеры сечения и материал известны, можно вычислить жесткость балки и подставив ее в полученный результат, определить прогиб (мм) в абсолютном значении. Величина прогиба оказалась с отрицательным знаком. Значит его направление противоположно выбранному направлению единичной силы. Прогиб сечения в т. В направлен не вверх, а вниз.

Пример 4. Для балки, изображенной на рис.11 определить величину прогиба сечения в т. С.

Исходные данные: $q = 2$ кН/м, $P = 9,5$ кН, $M = 4$ кН * м.

Выполним пункты 1 и 2. Для решения задачи строим вспомогательную балку, на которой в т. С прикладываем силу, равную 1. Схема вспомогательной балки показана на рис.12.

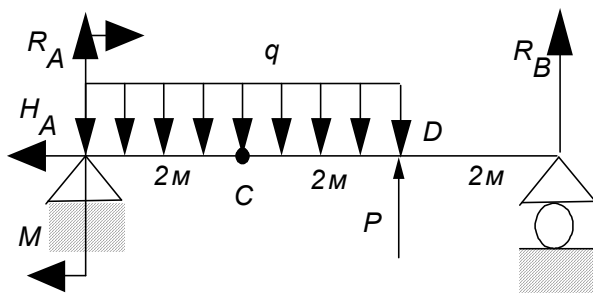


Рис.11. Схема балки к примеру 4

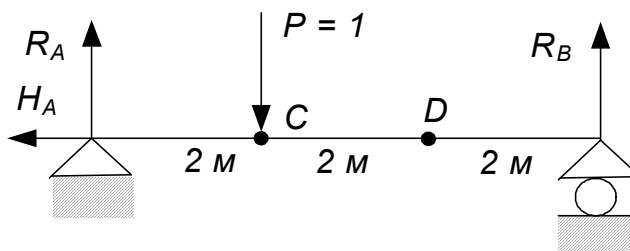


Рис.12. Схема вспомогательной балки

Рассчитываем опорные реакции для основной (ОБ) и вспомогательной (ВБ) балок. Для этого составляем уравнения равновесия.

ОБ:

$$\sum M_A = -M - q \cdot 4 \cdot 2 + P \cdot 4 - R_B \cdot 6 = 0;$$

$$R_B = (4 + 2 \cdot 4 \cdot 2 - 9,4 \cdot 4) / 6 = -3 \text{ (кН)};$$

$$\sum Y = R_A + R_B + P - q \cdot 4 = 0;$$

$$R_A = 2 \cdot 4 + 3 - 9,5 = 1,5 \text{ (кН)}.$$

ВБ:

$$\sum M_A = -1 \cdot 2 + R'_B \cdot 6 = 0; \quad R'_B = 2 / 6 = 0,333.$$

$$\sum Y = R'_A + R'_B - 1 = 0; \quad R'_A = 1 - 0,333 = 0,667.$$

3. Составляем уравнения внутренних моментов.

I участок $0 < Z < 2\text{м.}$

$$\text{ОБ: } M_x = -q \frac{Z^2}{2} + R_A Z + M = -2 \frac{Z^2}{2} + 1,5 Z + 4 = -Z^2 + 1,5 Z + 4.$$

$$\text{ВБ: } M'_x = R'_A Z = 0,667 Z.$$

Перемножим моменты:

$$M_x \cdot M'_x = (-Z^2 + 1,5 Z + 4)(0,667 Z) = -0,667 Z^3 + Z^2 + 2,667 Z.$$

I участок $2 < Z < 4\text{м.}$

$$\text{ОБ: } M_x = -q \frac{Z^2}{2} + R_A Z + M = -2 \frac{Z^2}{2} + 1,5 Z + 4 = -Z^2 + 1,5 Z + 4.$$

$$\text{ВБ: } M'_x = R'_A Z - I \cdot (Z - 2) = 0,667 Z - Z + 2 = -0,333 Z + 2.$$

Перемножим моменты:

$$\begin{aligned} M_x \cdot M'_x &= (-Z^2 + 1,5 Z + 4)(-0,333 Z + 2) = \\ &= 0,333 Z^3 - 2,5 Z^2 + 1,667 Z + 8. \end{aligned}$$

III участок $0 < Z < 2\text{м.}$

$$\text{ОБ: } M_x = R_B \cdot Z = -3 \cdot Z.$$

$$\text{ВБ: } M'_x = R'_B \cdot Z = 0,333 \cdot Z.$$

$$\text{Тогда: } M_x \cdot M'_x = (-3 \cdot Z) \cdot (0,333 \cdot Z) = -Z^2.$$

4. Вычислим интегралы.

I участок $0 < Z < 2\text{м.}$

$$\begin{aligned} \int_0^2 M_x \cdot M'_x dX &= \int_0^2 (-0,667 Z^3 + Z^2 + 2,667 Z) dZ = \\ &= -0,667 \frac{Z^4}{4} + \frac{Z^3}{3} + 2,667 \frac{Z^2}{2} = -2,667 + 2,667 + 5,333 = 5,333. \end{aligned}$$

II участок $2 < Z < 4\text{м.}$

$$\int_2^4 M_x \cdot M'_x = \int_2^4 (0,333 Z^3 - 2,5 Z^2 + 1,667 Z + 8) dZ =$$

$$0,333 \frac{Z^4}{4} - 2,5 \frac{Z^3}{3} + 1,667 \frac{Z^2}{2} + 8 Z = 0,333 \frac{4^4 - 2^4}{4} - 2,5 \frac{4^3 - 2^3}{3} +$$

$$+ 1,667 \frac{4^2 - 2^2}{2} + 8 \cdot (4 - 2) = -0,667.$$

III участок $0 < Z < 2\text{м.}$

$$\int_0^2 M_x \cdot M'_x dZ = -\frac{Z^3}{3} = -\frac{2^3}{3} = -\frac{8}{3} = -2,667.$$

5. Вычислим прогиб в т.С сложением результатов интегрирования на всех трёх участках:

$$Y_C = \frac{5,333 - 0,667 - 2,667}{E I_x} = \frac{2,0}{E I_x}.$$

После подстановки значения жесткости определяем прогиб в абсолютных значениях (в мм). Положительное значение прогиба означает, что его направление совпадает с направлением единичной силы на вспомогательной балке, т.е. вниз.

Самостоятельно выполните задания, приведенные ниже.

Задание 1. Определить прогиб сечения балки в т.С для балки, показанной на рис.13. Исходные данные: $q = 2 \text{ кН / м}$, $P = 3 \text{ кН}$, $M = 4 \text{ кН* м}$.

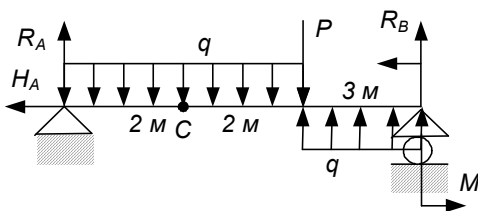


Рис.13. Схема балки задания 1

Для контроля приводим результаты решения.

Результаты решения.

1. Опорные реакции.

ОБ: $R_A = 6,286$ кН; $R_B = -1,286$ кН.

ВБ: $R'_A = 0,714$; $R'_B = 0,286$.

2. Результаты интегрирования на 1-м участке: 9,112

Результаты интегрирования на 2-м участке: 21,696

Результаты интегрирования на 3-м участке: 7,627

3. Прогиб сечения в т.С равен сумме трёх интегралов:

$$Y_C = \frac{9,112 + 21,696 + 7,627}{E I_x} = \frac{38,435}{E I_x}.$$

Задание 2. Вычислить угол поворота сечения в т. А для балки, изображенной на рис.14.

Исходные данные: $q = 4$ кН / м, $P_1 = 3$ кН, $P_2 = 2$ кН, $M = 2$ кН*м.

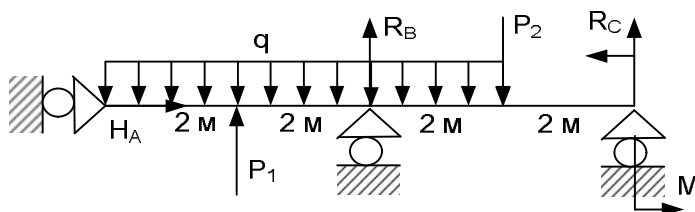


Рис.14. Схема балки задания 2

Приводим результаты решения.

Опорные реакции.

ОБ: $R_B = 27$ кН, $R_C = -4$ кН.

ВБ: $R'_B = 0,25$, $R'_C = -0,25$.

Результаты интегрирования на 1-м участке: 5,333.

Результаты интегрирования на 2-м участке: 31,333.

Результаты интегрирования на 3-м участке: 1,667.
Результаты интегрирования на 4-м участке: 23,667.

Угол поворота сечения в т.А равен сумме четырёх интегралов:

$$\theta_A = \frac{5,333 + 31,333 + 1,667 + 23,667}{E I_x} = \frac{62,0}{E I_x}.$$

Задание 3. Для балки, показанной на рис.14, определите прогиб сечения в т. А. Задачу решить методом Мора.

Исходные данные принять такими же, что и в задании 2.

Результаты решения.

Опорные реакции.

ОБ: $R_B = 27 \text{ кН}$, $R_C = -4 \text{ кН}$.

ВБ: $R'_B = -2$, $R'_C = 1$.

Результаты интегрирования на 1-м участке: - 8

Результаты интегрирования на 2-м участке: - 100

Результаты интегрирования на 3-м участке: - 6,667

Результаты интегрирования на 4-м участке: -94,667

Прогиб сечения в т.А равен сумме четырёх интегралов:

$$Y_A = \frac{-8 - 100 - 6,667 - 94,667}{E I_x} = -\frac{209,333}{E I_x}.$$

1.4 Способ Верещагина

А. Н. Верещагин в 1925 году, будучи студентом, предложил очень удобный способ вычисления интегралов Мора применительно к задачам изгиба балок и рам с прямолинейными участками, имеющими постоянную жесткость. При вычислении перемещений при изгибе он предложил заменить интеграл Мора на формулу:

$$\delta = \frac{\omega \cdot M_c}{EI_x}$$

где ω – площадь грузовой эпюры, т.е. эпюры изгибающего момента на основной балке; M_c - ордината (высота) единичной эпюры, которая определяется под центром тяжести грузовой эпюры.

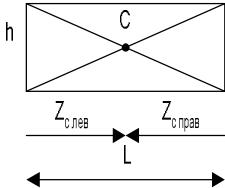
Порядок применения способа практически совпадает с порядком применения метода Мора, за исключением п. 3 и 4.

Вместо записи уравнений внутренних моментов следует строить их эпюры, а вместо записи интегралов Мора, нужно «перемножать эпюры внутренних моментов» по формуле Верещагина, т.е. умножать площадь грузовой эпюры на момент, выбранный на единичной эпюре под центром тяжести грузовой эпюры.

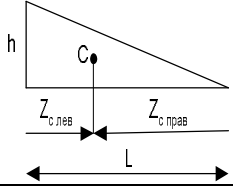
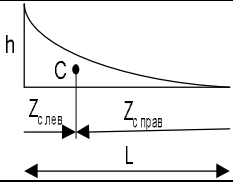
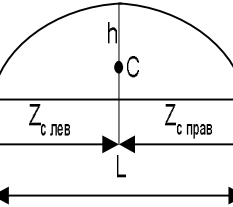
Для расчета площадей эпюр и координат центра тяжести используют стандартные формулы, приведенные в таблице 1. В том случае, когда эпюра образована несколькими фигурами, ее разбивают на простые табличные фигуры.

Справочные данные по расчету площадей эпюр и координат центра тяжести

Таблица 1

фигура	Формула площади	Координат центра тяжести с левой стороны	Координата центра тяжести с правой стороны
	$\omega = h * L$	$Z_{c\text{ лев}} = \frac{1}{2}L$	$Z_{c\text{ прав}} = \frac{1}{2}L$

Окончание табл. 1.

	$\omega = \frac{1}{2} h * L$	$Z_{с.лев} = \frac{1}{3} L$	$Z_{с.прав} = \frac{2}{3} L$
	$\omega = \frac{1}{3} h * L$	$Z_{с.лев} = \frac{1}{4} L$	$Z_{с.прав} = \frac{3}{4} L$
	$\omega = \frac{2}{3} h * L$	$Z_{с.лев} = \frac{1}{2} L$	$Z_{с.прав} = \frac{1}{2} L$

Порядок применения способа Верещагина для определения перемещений при изгибе

1. Вычерчивается вспомогательная система, которая геометрически совпадает с основной (заданной), но без внешних нагрузок, т.е. отбрасываются все приложенные силы, моменты и нагрузки.

2. На вспомогательной системе в той точке, где нужно определить перемещение необходимо приложить либо единичную силу $P = 1$, если рассчитывается прогиб U ; либо единичный момент $M = 1$, если определяется угол поворота сечения.

3. Строятся эпюры изгибающих моментов для основной системы, на каждый участок отдельно (грузовая эпюра).

Строятся эпюры изгибающего момента для вспомогательной системы (единичная).

4. Определяются площади грузовых эпюр ω и единичные моменты M_c под центрами тяжести грузовых. Для каждого участка записывается формула Верещагина, по которой «перемножаются» эпюры.

5. Сложив результаты перемножения по всем участкам, разделив на жесткость сечения, получаем перемещение в данной точке.

Для удобства вычисления площадей и координат центров тяжести эпюр, их разбивают на простейшие элементы: прямоугольник, треугольник, параболический треугольник и выполняют перемножение по отдельным элементам. Минимальное количество участков, на которое разбивается грузовая эпюра для вычисления площадей, равно числу участков на единичной эпюре, причем границы участков *должны совпадать* с границами их на единичной эпюре.

Например, трапецию можно разбить на две фигуры: прямоугольник и треугольник. В любом случае, для перемножения эпюр по способу Верещагина требуется, чтобы перемножаемые эпюры имели одинаковую длину по оси бруса.

В тех случаях, когда грузовая и единичная эпюры обе прямолинейны, можно умножать площадь единичной эпюры на соответствующую ординату грузовой эпюры, взятую под центром тяжести единичной, т.е. делать наоборот.

Необходимо запомнить, что ордината M_c всегда берется только на *линейной* эпюре.

Правило знаков при перемножении: если грузовая и единичная эпюры имеют разные знаки, то их произведение берется со знаком минус.

Рассмотрим примеры решения задач способом Верещагина. Чтобы сравнивать результаты решения с

решениями, получаемыми при использовании метода Мора, решим те же задачи, что мы решали методом Мора, т.е. примеры 1, 2, 3, 4, а также задания 1, 2, 3.

Пример 5. Решим задачу способом Верещагина, рассмотренную в примере 1. Схема задачи представлена на рис.5.

Схема основной и вспомогательной систем изображена на рис.6. Пункты 1 и 2 выполнены.

Пункт 3. Строим эпюры изгибающих моментов для основной системы (грузовая эпюра) и вспомогательной системы (единичная эпюра).

Для построения эпюр уравнения изгибающих моментов уже составлены в примере 1. Получившиеся в результате расчетов эпюры показаны на рис.15.

Единичную эпюру разделим так, чтобы каждому участку на грузовой эпюре соответствовал участок на единичной той же длины.

Вычислим площади грузовых эпюр, используя данные таблицы. В таблице нет данных о трапеции, поэтому разделим трапецию на грузовой эпюре на прямоугольник и треугольник.

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{1}{2} \cdot 1,1 \cdot 1 = 0,55 \text{ кН} \cdot \text{м}^2; & \omega_2 &= \frac{1}{2} \cdot 0,8 \cdot 8 = 3,2 \text{ кН} \cdot \text{м}^2; \\ \omega_3 &= 1,1 \cdot 8 = 8,8 \text{ кН} \cdot \text{м}^2; & \omega_4 &= \frac{1}{2} \cdot 1,9 \cdot 1 = 0,95 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.\end{aligned}$$

Вычисляем моменты на единичной эпюре.

Пояснения к расчету момента показаны на рис.16. По таблице определяем формулу координаты центра тяжести.

Начнем с M_{C4} . По таблице определяем формулу координаты центра тяжести. Определяем положения центра тяжести на грузовой эпюре. Проецируем точку центра тяжести с грузовой эпюры на единичную эпюру. На единичной эпюре появляется второй треугольник – его катетом является M_{C4} . Эти треугольники подобны, т.к. соответствующие им углы одинаковы. Длины нижних горизонтальных катетов этих

треугольников соотносятся друг к другу как $2/3$. Тогда длины их левых вертикальных катетов тоже соотносятся как $2/3$. Поэтому M_{C4} можно вычислить как $2/3$ части от катета большого треугольника, т.е. $M_{C4} = 2/3 \cdot 0,1 = 2/30$.

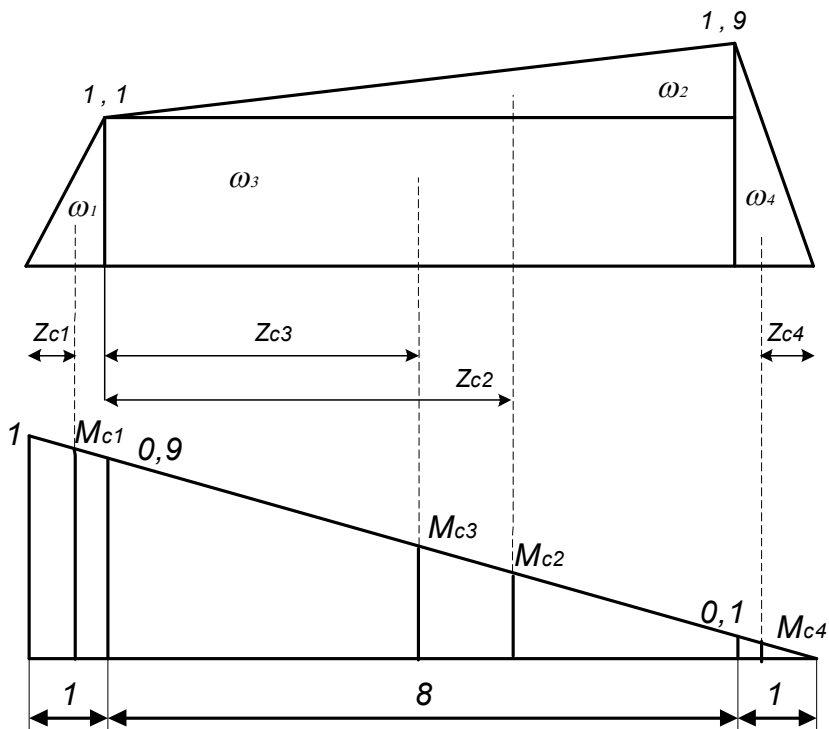


Рис.15. Эпюры для вычисления угла поворота

Далее вычисляем момент M_{C3} .

Пояснения к его расчету показаны на рис.17.

По таблице определяем, что положение центра тяжести у прямоугольника находится посередине. Проецируем точку центра тяжести с грузовой эпюры на единичную. Момент M_c на

трапеции является средним между моментом 0,9 и моментом 0,1. Тогда его можно вычислить как среднее:

$$M_c = 0,5 (0,9 + 0,1) = 0,5.$$

Этот момент можно вычислить по-другому. M_c состоит из двух частей. Поэтому его можно рассчитать как сумму:

$$M_c = 0,1 + \frac{1}{2} (0,9 - 0,1) = 0,5.$$

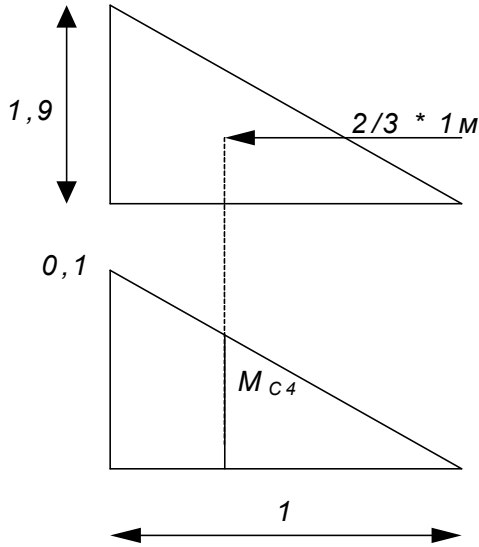


Рис.16. Пояснения к расчету момента M_{C4}

Далее вычислим M_{C2} . Пояснения к расчету момента показаны на рис.18.

Определяем положение центра тяжести грузовой эпюры – треугольника. Для этого используем данные таблицы. Расстояние от левого конца треугольника составляет $\frac{2}{3}$ от всей его ширины. Проецируем эту точку на нижнюю эпюру.

Высоту эпюры M_c можно представить как сумму

$$M'_c + M''_c.$$

$$M'_c = 0,1.$$

M''_c можно определить из треугольника, который является частью трапеции. На нижней эпюре образуется 2 подобных треугольника. Высота M_c'' расположена на расстоянии $1/3$ от ширины эпюры при отсчете с правого ее конца. Поэтому соотношение нижних катетов малого и большого треугольников равно $1/3$.

Из подобия треугольников соотношение левых катетов этих треугольников тоже равно $1/3$. Отсюда $M''_c = 1/3 (0,9 - 0,1) = 8/30$. Тогда $M_{C2} = 0,1 + 8/30 = 3/30 + 8/30 = 11/30$.

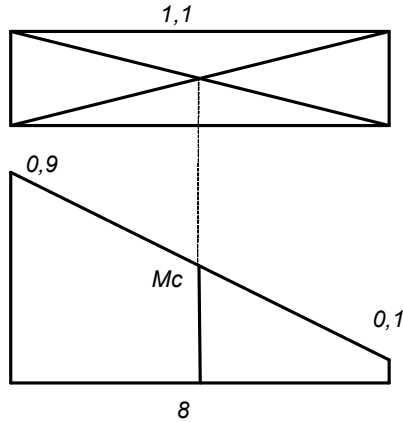


Рис.17. Пояснения к расчету момента M_{C3}

Таким же образом вычисляем M_{C1} .

Тогда $M_{C1} = 28/30$, $M_{C2} = 11/30$, $M_{C3} = 15/30$, $M_{C4} = 2/30$.

Вычислим угол поворота, сложив произведения площадей эпюр грузовых моментов на единичные моменты под центром тяжести грузовых, и разделив на жесткость балки.

$$\theta_A = \frac{0,55 \frac{14}{15} + 3,2 \frac{11}{30} + 8,8 \cdot \frac{1}{2} + 0,95 \cdot \frac{1}{15}}{2179,01} = 10^{-3} \cdot 2,82.$$

Сравним результаты, полученные методом Мора в примере 1 и способом Верещагина в примере 5. Углы поворота сечения, рассчитанные двумя разными способами совпадают.

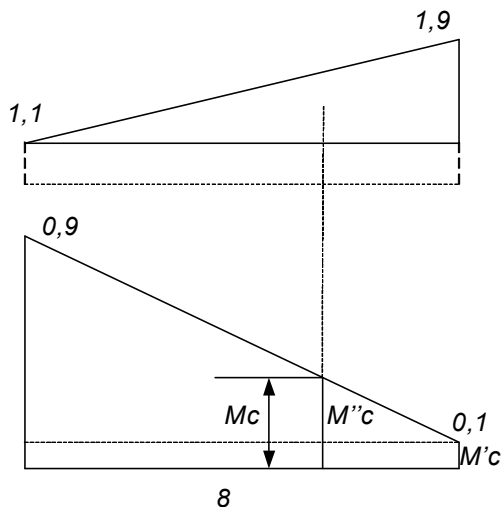


Рис.18. Пояснения к расчету момента M_{C2}

Пример 6. Решим задачу, рассмотренную в примере 2. Сравним результаты, полученные методами Мора и Верещагина. Схема задачи показана на рис.7. Схема вспомогательной системы показана на рис.8.

Пункты 1 и 2 в примере 2 уже выполнены. Переходим к третьему пункту. Строим грузовую и единичную эпюры. Построенные эпюры показаны на рис.19.

Далее эпюры “перемножаются”, т.е. площади грузовых эпюр на каждом участке умножаются на соответствующие единичные моменты, взятые под центрами тяжести грузовых.

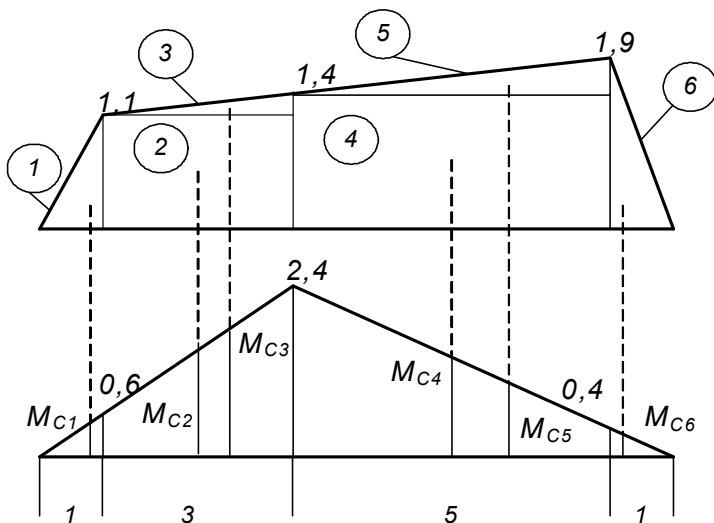


Рис.19. Эпюры моментов для вычисления прогиба

1. Площадь треугольника $1/2 \cdot 1,11 = 0,55$. Момент на единичной эпюре рассчитывается на расстоянии $2/3$ от левого конца и поэтому равен $2/3$ от правого вертикального катета.

$$M_c = 2/3 \cdot 0,6 = 0,4.$$

2. Площадь прямоугольника $1,1 \cdot 3 = 3,3$. Момент на единичной эпюре находится на середине трапеции $0,6 - 2,4$. Тогда $M_c = 0,5 \cdot (0,6 + 2,4) = 1,5$.

3. Площадь треугольника $1/2 \cdot (1,4 - 1,1) \cdot 3 = 0,45$. Момент на единичной эпюре под этим треугольником определяется на трапеции в том месте, где у грузовой находится центр тяжести. M_{C3} можно вычислить тремя способами.

1 способ. Момент M_c рассчитываем как сумму двух отрезков: $0,6 + 2/3 \cdot (2,4 - 0,6) = 1,8$.

II способ. Трапеция по ширине разделилась на 3 части. Высота левой грани трапеции равна 0,6.

Высота правой грани равна 2,4. Высота увеличивается линейно с 0,6 до 2,4 в 3 этапа:

$$0,6-1,2; 1,2-1,8; 1,8-2,4.$$

Так как центр тяжести грузового треугольника расположен ближе к правой грани, то момент $M_c = 1,8$.

III способ. Момент M_c можно вычислить как вычисляется обычный внутренний момент с помощью уравнения.

$$M_c = M_x = R_A \cdot Z_c.$$

Расстояние Z_c рассчитывается как сумма длин 1-го участка и расстояния до центра тяжести грузовой эпюры на 2 участке.

$$Z_c = 1 + 2/3 \cdot 3 = 3 \text{ (м)}.$$

$$M_c = 0,6 \cdot 3 = 1,8.$$

4. Площадь грузовой эпюры $1,4 \cdot 5 = 7$. Момент на единичной эпюре под центром тяжести грузовой определяется делением трапеции на 2 равные части: $2,4-1,4-0,4$.

Тогда $M_c = 1,4$.

5. Площадь грузовой эпюры $1/2 \cdot (1,9 - 1,4) \cdot 5 = 1,25$. Момент на единичной эпюре для предыдущей трапеции мы рассчитывали тремя способами. Рассмотрим еще раз все три способа.

I способ. Момент M_c рассчитываем как сумму двух отрезков: $0,4 + 1/3 \cdot (2,4 - 0,4) = 1,067$.

II способ. Трапеция по ширине разделилась на 3 части. Высота левой грани трапеции равна 2,4. Высота правой грани равна 0,4. Высота увеличивается линейно с 0,4 до 2,4 в 3 этапа. Разница $2,4-0,4 = 2$ на 3 части делится по 0,667. Тогда получаем 3 части трапеции: $0,4-1,067; 1,067-1,733; 1,733-2,4$. Так как центр

тяжести грузового треугольника расположен ближе к правой грани, то момент $M_c = 1,067$.

Расчет можно выполнить точно, если перейти к дробям.

$$2,4 = 24/10 = 12/5; 0,4 = 4/10 = 2/5.$$

Разница $12/5 - 2/5 = 10/5$ на 3 не делится. Тогда умножим обе дроби на 3/3, т.е. на 1. Теперь разница $36/15 - 6/15 = 30/15$ делится на 3 части ($10/15$). Тогда получаем слева $2,4 = 36/15$. Далее $26/15$, $16/15$ и на правом конце трапеции $6/15 = 0,4$. Центр тяжести верхнего (грузового) треугольника расположен ближе к правому его катету, поэтому из приведенного ряда выбираем $16/15 = 1,067$.

III способ. Момент M_c можно вычислить как вычисляется обычный внутренний момент с помощью уравнения.

$$M_c = M_x = R_B \cdot Z_c.$$

Расстояние Z_c рассчитывается как сумма длин 6-го участка и расстояния до центра тяжести грузовой эпюры на 5 участке.

$$Z_c = 1 + 1/3 \cdot 5 = 2,667 \text{ (м)}.$$

$$M_c = 0,4 \cdot 2,667 = 1,067.$$

6. Площадь грузовой эпюры $1/2 \cdot 1,9 \cdot 1 = 0,95$.

Момент на единичной эпюре под центром тяжести грузовой эпюры, т.е. верхнего треугольника рассчитывается как $2/3 \cdot 0,4 = 0,267$.

Перемножаем площади грузовых эпюр на единичные моменты и после сложения и деления на жесткость получаем значение прогиба в заданной точке.

$$Y = (0,55 \cdot 0,4 + 3,3 \cdot 1,5 + 0,45 \cdot 1,8 + 7 \cdot 1,4 + 1,25 \cdot 1,067 + 0,95 \cdot 0,267) / 2179,01 = 0,007967 \text{ м} \approx 8,0 \text{ мм}$$

Сравните с результатом решения по методу Мора в примере 2.

Пример 7. Решим задачу, рассмотренную в примере 3. Сравним результаты, полученные методами Мора и Верещагина. Схема задачи показана на рис.9. Схема вспомогательной системы показана на рис.10. Пункты 1 и 2 в примере 2 уже выполнены. Переходим к третьему пункту.

Строим грузовую и единичную эпюры. Построенные эпюры показаны на рис.20. Построение грузовой эпюры для этой задачи вы можете подробно посмотреть в методическом пособии к выполнению контрольной работы за первый семестр – пример 10, рис.34.

На этих эпюрах построим 2 вспомогательные линии, которые показаны пунктиром. Для вспомогательной балки, изображенной на рис.10, построим эпюры изгибающего момента, используя уже известные уравнения из примера 3.

Грузовая эпюра на правом участке образована двумя моментами: за счет внешнего сосредоточенного момента M и момента от равномерно-распределенной нагрузки.

Вспомогательная пунктирная линия позволяет разделить суммарную эпюру на 2 составляющие: 6 – от сосредоточенного момента, 7 – за счет распределенной нагрузки. Такое разложение позволит проще перемножить эпюры. Важно помнить, что такой способ разложения допустим только тогда, когда в общую эпюру момента не добавляется эпюра момента от сосредоточенной силы (например P или R_A).

Если же момент от сосредоточенной силы появляется, как например, на среднем участке нашей балки, придется использовать прием, показанный на рис.20.

Чтобы отделить треугольную эпюру, возникающую от сосредоточенной силы P на среднем участке от эпюры распределенной нагрузки, суммарную эпюру дополняем до полной трапеции так, как это показано на рис.20. В результате ее можно разложить на 3 отдельные площади. Пятая эпюра – парабола, ограниченная пунктирной линией, является

добавочной и поэтому при перемножении эпюр ее нужно вычитать (отнимать) от суммарной эпюры.

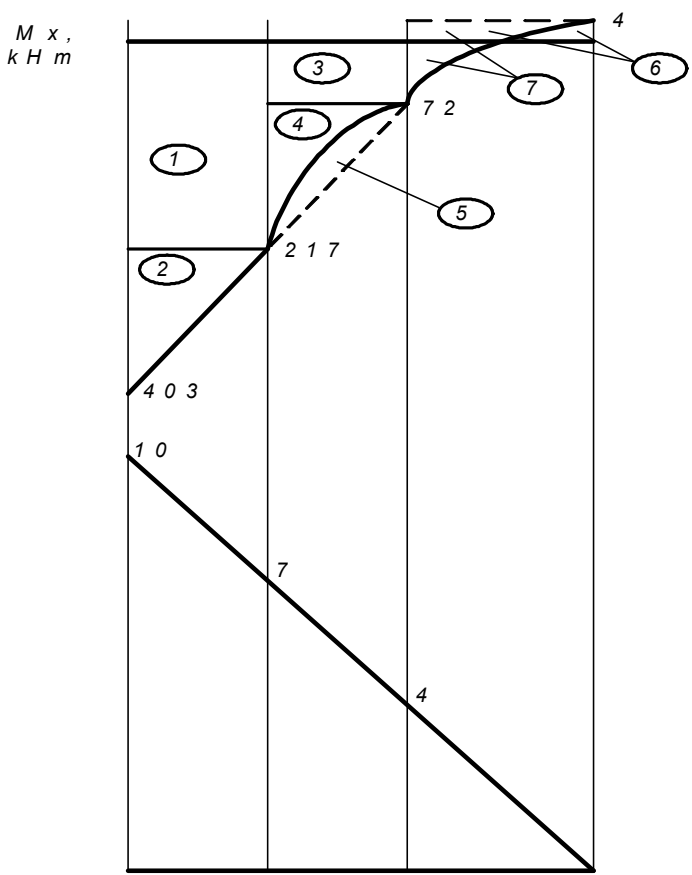


Рис.20. Пояснения к перемножению эпюр при вычислении прогиба в т.В

1. Площадь грузовой эпюры равна $217 \cdot 3 = 651$.
 Момент на единичной выбирается по середине трапеции между 10 и 7, т.е. 8,5. Тогда все произведение равно

$$\omega \cdot M_c = 651 \cdot 8,5 = 5533,5.$$

2. Площадь грузовой эпюры $\frac{1}{2} \cdot (403 - 217) \cdot 3 = 279$.

Момент на единичной эпюре определяется как высота трапеции на расстоянии $\frac{1}{3}$ ее ширины с правой части любым из трёх приведенных в примере 6 способов. Проще всего трапецию разделить на 3 равные части с высотами 10 – 9 – 8 – 7. Выбираем под центром тяжести грузовой эпюры, т.е. 9.

$$\omega \cdot M_c = 279 \cdot 9 = 2511.$$

3. Площадь грузовой эпюры $76 \cdot 3 = 228$. Момент на единичной эпюре выбирается посередине единичной трапеции. На краях моменты равны 7 и 4. Значит, посередине будет 5,5. Тогда по формуле Верещагина:

$$\omega \cdot M_c = 228 \cdot 5,5 = 1254.$$

6. Площадь грузовой эпюры вычисляется как площадь треугольника $\frac{1}{2} \cdot (217 - 76) \cdot 3 = 211,5$. Момент на единичной эпюре определяется как высота трапеции со сторонами 7 и 4, взятая после ее деления на 3 части 7 – 6 – 5 – 4 ближе к левой стороне, т.е. там, где центр тяжести грузового треугольника. Тогда момент будет равен 6.

Перемножаем эпюры по правилу Верещагина:

$$\omega \cdot M_c = 211,5 \cdot 6 = 1269.$$

7. Пятая площадь представляет собой параболу, которая наклонена по отношению к оси. Площадь и координату центра тяжести параболы определяем по таблице. В эти формулы входят высота параболы по середине h и ее длина L .

Чтобы их определить следует, очевидно, использовать тригонометрические функции синуса или косинуса и вычислить через ширину участка и ординату эпюры. Но таких наклонных парабол обычно поступают проще. Наклонную параболу заменяют горизонтальной параболой, длина которой равна длине отрезка, а центр тяжести расположен на середине участка так, как это показано на рис.21.

Эпюры в таком случае перемножают по формуле

$$\omega \cdot M_c = \frac{2}{3} h \cdot L \cdot M_c.$$

Рис.21. Пояснения к определению площади параболы

Момент на единичной эпюре выбирают посередине участка. Высоту параболы h вычисляют по формуле:

$$h = 1/8 \cdot q \cdot L^2$$

Тогда площадь эпюры можно вычислять по формуле

$$\omega = \frac{2}{3} h L = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{8} q L^2 \right) L = \frac{1}{12} q L^3 .$$

Рассмотрим теоретическое обоснование такой замены.

Пусть на участке длиной L уравнение момента записывается по общей формуле:

$$M_x = q \cdot Z^2 / 2 + P \cdot Z.$$

Получающаяся при этом эпюра показана на рис.22. Пунктирная линия, дополняет параболу до треугольника (рис.22а).

Уравнение пунктирной линии – это уравнение прямой, которое можно получить от некоторой фиктивной силы P' как уравнение внутреннего момента $P' \cdot Z$.

Момент на правой границе участка для нашего уравнения рассчитывается как сумма $q \cdot L^2 / 2 + P \cdot L$ путем замены Z на L . Эту же высоту можно определить как момент от фиктивной силы P' , подставляя координату L вместо Z в уравнение $P' \cdot L$.

$$\text{Тогда } q \cdot L^2 / 2 + P \cdot L = P' \cdot L.$$

$$\text{Отсюда } P' = q \cdot L / 2 + P.$$

Высота наклонной параболы в любой точке участка может быть рассчитана как разность двух моментов:

$$\begin{aligned} P' \cdot Z - \left(q \frac{Z^2}{2} + P Z \right) &= \left(\frac{q L}{2} + P \right) Z - \left(q \frac{Z^2}{2} + P Z \right) = \\ &= \frac{q L}{2} Z + P \cdot Z - \frac{q Z^2}{2} - P \cdot Z = \frac{1}{2} q L Z - q \frac{Z^2}{2}. \end{aligned}$$

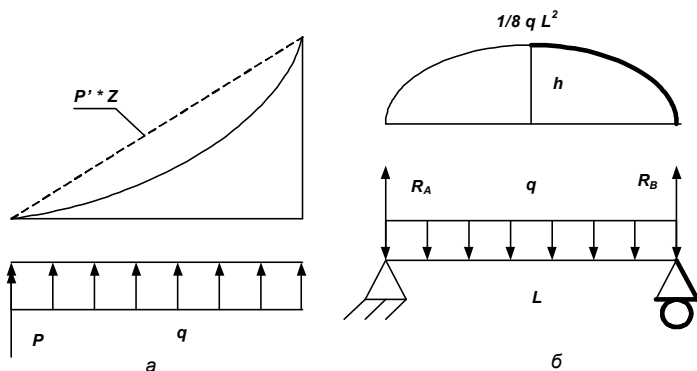


Рис.22. Пояснения замены наклонной параболы горизонтальной параболой

На рис.22б приводится схема двухопорной балки и эпюра момента. Опорные реакции для обеих опор в силу симметрии внешней нагрузки равны.

$$R_A = R_B = \frac{1}{2} q \cdot L.$$

Уравнение внутреннего момента для любого сечения записывается как сумма 2-х моментов:

$$M_x = \frac{1}{2}q L Z - q \frac{Z^2}{2}.$$

Сравните это уравнение с уравнением, которое мы получили для левой балки – они полностью совпадают. Именно поэтому при расчете площади наклонной параболы возможна замена на площадь горизонтальной параболы.

Высота параболы посередине определяется подстановкой ее координаты в уравнение:

$$h = M_{x(z=\frac{L}{2})} = \frac{1}{2}q L \frac{L}{2} - q \frac{(\frac{L}{2})^2}{2} = \frac{1}{8}q L^2.$$

Тогда площадь грузовой эпюры

$$\omega = \frac{1}{12}q L^3 = \frac{1}{12}10 \cdot 3^3 = 22,5.$$

Момент на единичной эпюре берется посередине участка. Там грузовая эпюра имеет центр тяжести и момент равен 5,5. Тогда произведение площади на момент равно:

$$\omega \cdot M_c = 22,5 \cdot 5,5 = 123,75.$$

5. Шестая площадь является прямоугольником и рассчитывается как произведение $4 \cdot 4 = 16$. Момент на единичной эпюре определяется посередине, т.е. под центром тяжести прямоугольника: $M_c = 2$. Тогда по формуле Верещагина

$$\omega \cdot M_c = 16 \cdot 2 = 32.$$

8. Седьмая эпюра представляет собой параболический треугольник, площадь которого определяем из табл. 1.

$$1/3 \cdot (76 + 4) \cdot 4 = 320 / 3.$$

Центр тяжести параболического треугольника в соответствии с формулой табл. 1 расположен на расстоянии $\frac{3}{4}$ его ширины от правого конца. Поэтому момент на единичной эпюре рассчитывается как $\frac{3}{4} \cdot 4 = 3$. Тогда по правилу Верещагина получаем результат перемножения

$$\omega \cdot M_c = \frac{320}{3} \cdot 3 = 320.$$

Чтобы получить итоговый результат, сложим результаты перемножения всех 7 эпюр. При сложении результатов важно помнить правило знаков.

Если перемножаемые составляющие располагаются по одну сторону от оси, т.е. обе положительны или обе отрицательны, то результат перемножения будет положительным; если эпюры расположены по разные стороны от оси, т.е. грузовая положительна, а единичная отрицательна, или наоборот, то результат перемножения должен быть отрицательным.

С учетом этого правила вычисляем результат.

$$Y_c = \frac{-5533,5 - 2511 - 1254 - 1269 + 123,75 + 32 - 320}{EI_x} = -\frac{10731,75}{EI_x}.$$

Сравним этот результат с результатом, полученный при решении задачи методом Мора.

Пример 8. Решим задачу, рассмотренную в примере 4. Сравним результаты, полученные методами Мора и Верещагина. Схема задачи показана на рис.11. Схема вспомогательной системы показана на рис.12.

Пункты 1 и 2 в примере 2 уже выполнены. Переходим к третьему пункту. Строим грузовую и единичную эпюры. Построенные эпюры показаны на рис.23.

Вычисляем площади грузовых эпюр и единичные моменты под центрами тяжести грузовых эпюр. Разбиваем грузовую эпюру так, как показано на рис.23. Второй участок можно разбить двумя способами. Первый способ деления эпюр на втором участке показан на рис.24а, второй способ показан на рис.24б.

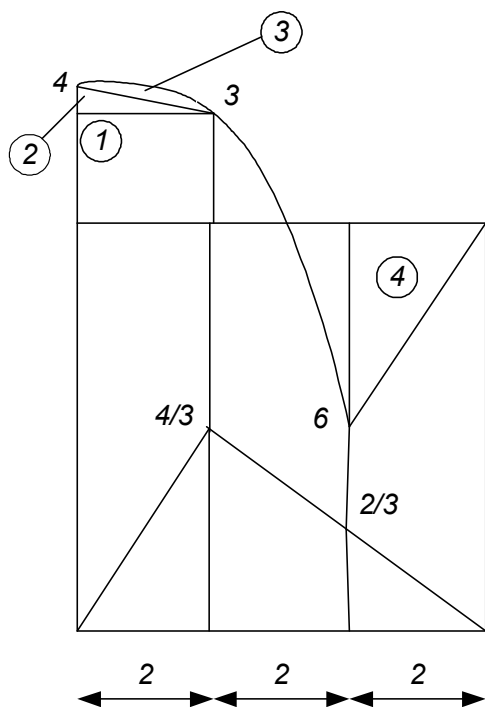


Рис.23. Грузовая и единичная эпюры внутренних моментов

1. Площадь грузовой эпюры (площадь прямоугольника) равна $3 \cdot 2 = 6$. Момент под центром тяжести прямоугольника, определяемый на единичной эпюре, выбирается посередине.

$$M_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3} = 0,67.$$

По формуле Верещагина перемножаем эпюры

$$\omega \cdot M_c = 6 \cdot 0,67 = 4.$$

2. Площадь второй грузовой эпюры (треугольника) определяем по формуле $\frac{1}{2} \cdot (4 - 3) \cdot 2 = 1$.

Момент на единичной эпюре выбирается на расстоянии $1/3$ ширины от левой границы участка, т.е. там, где расположен центр тяжести верхнего треугольника: $1/3 \cdot 4/3 = 4/9$.

По формуле Верещагина

$$\omega \cdot M_c = 1 \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{9}.$$

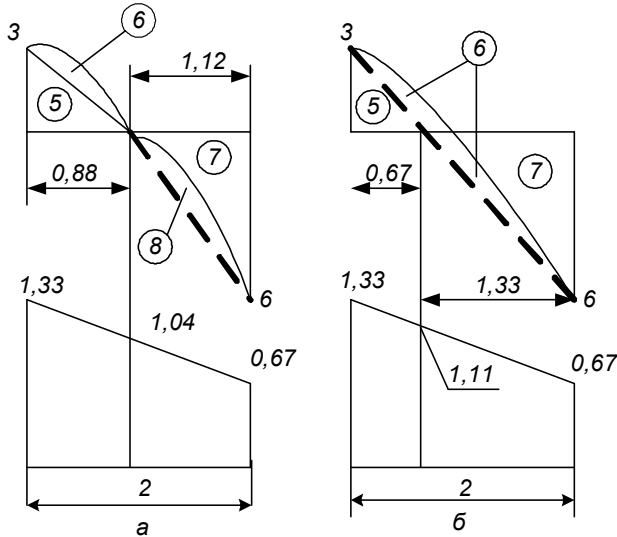


Рис.24. Пояснения к перемножению эпюр

3. Третьей грузовой эпюрой является парабола. Методика расчета площади подробно рассмотрена в примере 7. Площадь параболы вычислим по стандартной формуле:

$$\omega = \frac{1}{12} q L^3 = \frac{1}{12} 2 \cdot 2^3 = \frac{4}{3} = 1,33.$$

Момент на единичной эпюре выбирается по середине нижнего треугольника, т.е. там, где у верхней параболы расположен центр тяжести.

$$M_c = 1/2 \cdot 4/3 = 2/3 = 0,67.$$

Перемножаем площадь грузовой эпюры на единичный момент:

$$\omega \cdot M_c = \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{9}.$$

4. Четвёртая грузовая эпюра является треугольником. Его площадь равна $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 = 6$.

Единичный момент под центром тяжести этого треугольника выбирается на расстоянии $\frac{2}{3}$ ширины участка, отсчитывая расстояние от правого края.

$$M_c = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

Перемножаем площадь грузовой эпюры на единичный момент по правилу Верещагина:

$$\omega \cdot M_c = 6 \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{3}.$$

На втором участке можно использовать один из двух способов разделения грузовой эпюры. Первый способ показан на рис.24 а.

I способ. Сначала определяем точку пересечения параболы с осью Z . В этом месте значение внутреннего момента равно 0. Чтобы определить эту точку, приравняем уравнение внутреннего момента к нулю.

$$-q \frac{Z^2}{2} + R_A Z + M = -Z^2 + 1,5 Z + 4 = 0;$$

$$Z^2 - 1,5 Z - 4 = 0;$$

$$Z_{1,2} = \frac{1,5 \pm \sqrt{1,5^2 + 4 \cdot 4}}{2} = \frac{1,5 \pm 4,27}{2};$$

$$Z = 2,886 \text{ м.}$$

Решив квадратное уравнение, определяем координату точки пересечения параболы с осью Z . Она расположена на расстоянии 0,886 м от начала второго участка. Тогда правая

часть второго участка имеет длину $2 - 0,886 = 1,114 = 1,12$ м (см. рис.24 а).

5. Пятой грузовой эпюрой является треугольник. Вычисляем его площадь: $\frac{1}{2} \cdot 0,886 \cdot 3 = 1,329$.

Единичный момент определяем под центром тяжести этого треугольника на трапеции со сторонами $1,33 - 1,04$.

Высоту $1,04$ вычисляем как сумму двух отрезков $0,67$ и $1,12/2 \cdot (1,33 - 0,67)$, где второе слагаемое определяется из подобия треугольников, располагающихся на единичной эпюре над прямоугольником, высота которого равна $0,67$.

$$0,67 + 1,12/2 \cdot (1,33 - 0,67) = 1,04.$$

Таким же способом определяем момент

$$M_c = 1,04 + 2/3 \cdot (1,33 - 1,04) = 1,236.$$

Перемножаем площадь на момент

$$\omega \cdot M_c = 1,329 \cdot 1,236 = 1,642.$$

6. Шестой грузовой эпюрой является парабола. Ее площадь вычисляется по стандартной формуле. Методика расчета подробно рассматривается в примере 7.

$$\omega = \frac{1}{12} q \cdot L^3 = \frac{1}{12} 2 \cdot 0,886^3 = 0,116 .$$

Момент на единичной эпюре определяем по середине трапеции $1,33 - 1,04$.

$$M_c = 1,185.$$

Перемножаем эпюры по формуле Верещагина

$$\omega \cdot M_c = 0,116 \cdot 1,185 = 0,137.$$

7. Седьмая площадь является треугольником. Его площадь равна $\frac{1}{2} \cdot 1,114 \cdot 6 = 3,342$.

Момент на единичной эпюре под центром тяжести этого треугольника выбирается на расстоянии $1/3$ ширины от правой границы участка.

$$M_c = 0,67 + 1/3 (1,04 - 0,67) = 0,791.$$

Перемножаем эпюры по способу Верещагина

$$\omega \cdot M_c = 3,342 \cdot 0,791 = 2,644.$$

8. Восьмая эпюра – парабола с основанием 1,114 м. Ее площадь определяем по методике, изложенной в примере 7.

$$\omega = \frac{1}{12} q L^3 = \frac{1}{12} 2 \cdot 1,114^3 = 0,230 .$$

Момент M_c определяем по середине трапеции 1,04 – 0,67, т.е. там, где парабола имеет центр тяжести.

$$M_c = 0,67 + \frac{1}{2} \cdot (1,04 - 0,67) = 0,855.$$

Перемножаем эпюры:

$$\omega \cdot M_c = 0,230 \cdot 0,855 = 0,197.$$

Сложим результаты перемножения 5, 6, 7 и 8 эпюр. При сложении учитываем знак произведения. *При умножении эпюр произведение станет положительным, если эпюры расположены по одну сторону оси (обе со знаком минус или обе со знаком плюс) и отрицательным, если эпюры расположены по разные стороны от оси (одна с плюсом, вторая с минусом).*

$$1,642 + 0,137 - 2,644 - (-0,197) = -0,668 = -0,67.$$

Восьмое произведение должно быть отрицательным, но восьмая площадь была добавлена и ее нужно вычесть. Поэтому в формуле стоит дважды знак минуса.

II способ. Разделение грузовой эпюры по этому способу показано на рис.24 б.

Сначала определяем точку пересечения прямой линии от 3 до (– 6) с осью Z. Левый положительный треугольник 5 и нижний отрицательный 7 подобны. Поэтому отношение катетов, лежащих на оси равно отношению катетов 3 и 6, т.е. 1 к 2. Тогда ширина этого участка может быть разделена на 3 части. Ширина треугольника 5 определяется из соотношения подобия и равна $2\text{ м} / 3 = 0,667\text{ м}$, а ширина треугольника 7 равна $2 \cdot 2\text{ м} / 3 = 1,333$.

Пятой площадью является треугольник. Его площадь равна $\frac{1}{2} \cdot 0,667 \cdot 3 = 1,000$.

Момент M_c на единичной эпюре – на трапеции определяется в том месте, где расположен центр тяжести треугольника 5.

$$M_c = 1,111 + 2/3 \cdot (1,333 - 1,111) = 1,259.$$

Перемножаем эпюры по способу Верещагина

$$\omega \cdot M_c = 1,0 \cdot 1,259 = 1,259.$$

Шестой эпюрой является парабола.

Ее площадь рассчитывается по стандартной формуле, изложенной в примере 7.

$$\omega = \frac{1}{12} q \cdot L^3 = \frac{1}{12} 2 \cdot 2^3 = 1,333 .$$

Центр тяжести параболы находится по середине, поэтому момент на единичной эпюре равен 1,0.

$$M_c = 0,67 + 1/2 \cdot 91,33 - 0,67 = 1,0.$$

Перемножаем эпюры

$$\omega \cdot M_c = 1,333 \cdot 1,0 = 1,333.$$

Седьмой площадью является треугольник 7. Его площадь равна $1/2 \cdot 1,333 \cdot 6 = 4$.

Момент M_c на единичной эпюре определяем под центром тяжести этого треугольника:

$$M_c = 0,667 + 1/3 \cdot (1,111 - 0,667) = 0,815.$$

Перемножаем эпюры по формуле Верещагина

$$\omega \cdot M_c = 4,0 \cdot 0,815 = 3,259.$$

Сложим результаты перемножения 5, 6 и 7 эпюры с учетом знака.

$$1,259 + 1,333 - 3,259 = -0,667 = -0,67.$$

Результат получился таким же, как и при применении способа I, но II способ, наверное, проще.

Чтобы определить прогиб в т.С, нужно сложить все произведения, рассчитанные по формуле Верещагина и разделить на жесткость балки:

$$Y_c = \frac{4 + \frac{4}{9} + \frac{8}{9} - \frac{8}{3} - \frac{2}{3}}{E I_x} = \frac{2,0}{E I_x}.$$

При сложении 1, 2, 3 произведения берем со знаком плюс в соответствии с правилом знаков, а 4 принимаем со знаком минус.

Сравним результат с результатом, полученным методом Мора в примере 4.

Задания для самостоятельного решения

Задание 4. Решить задачу, схема которой показана на рис.13 в задании 1.

Вы должны получить результат:

$$Y = 1,333 \cdot 0,714 + 8,572 \cdot 0,953 + 1,333 \cdot 1,143 + 0,577 \cdot 1,048 + 17,144 \cdot 1,143 - 4,5 \cdot 0,429 + 7,723 \cdot 0,572 + 12 \cdot 0,429 = 38,481.$$

Все произведения положительны кроме шестого. Это произведение для добавленной параболы, поэтому из общего результата ее нужно вычесть.

Задание 5. Решить задачу, схема которой показана на рис.14 в задании 2.

Вы должны получить результат:

$$\theta = 5,333 \cdot 1 + 16 \cdot 1 + 18 \cdot 1 - 2,667 \cdot 1 + 12 \cdot 0,75 + 20 \cdot 0,833 - 2,667 \cdot 0,75 + 4,5 \cdot 0,375 - 0,5 \cdot 0,042 = 62,0.$$

Все произведения положительны за исключением 4, 7 и 9-го. Четвертая и седьмая площади являются добавочными параболами, и их следует из результата вычесть. Девятая площадь отрицательна в соответствии с правилом знаков: грузовая эпюра (положительный треугольник), а единичная эпюра (отрицательный треугольник), произведение отрицательно.

Сравните результат решения с решением по методу Мора в задании 2.

Задание 6. Решить задачу, схема которой показана на рис.14 в задании 3.

Вы должны получить результат:

$$U = - 5,333 \cdot 1,5 - 16 \cdot 3 - 18 \cdot 3,333 - (- 2,667 \cdot 3) - 12 \cdot 3 - 20 \cdot 3,333 - (- 2,667 \cdot 3) - 4,5 \cdot 1,5 + 0,5 \cdot 0,1667 = - 209,33.$$

Все произведения отрицательны, кроме последнего 9-го. Четвертая и седьмая площади являются добавочными параболлами, поэтому их следует вычесть из результата, но сами они отрицательны и в итоге они все - таки становятся положительны – дважды минус.

2. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛКИ

2.1. Понятие о статически неопределимых системах

В практических расчетах нередко приходится встречаться с такими системами, в которых определить все усилия из одних лишь уравнений статики не представляется возможным, так как число неизвестных превышает число уравнений. Например, в задаче, показанной на рис.25 имеется 4 неизвестные опорные реакции (R_A, R_B, R_C, H_B).

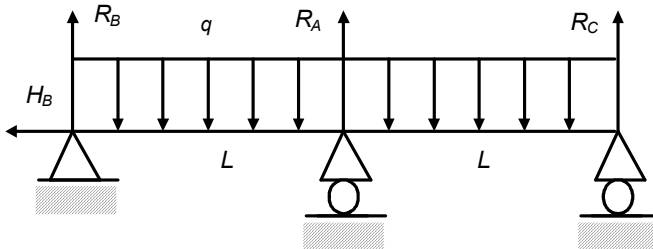


Рис.25. Схема плоской задачи с четырьмя связями

Очевидно, что применяя лишь уравнения равновесия, эту задачу решить невозможно: неизвестных связей – 4, тогда как

уравнений равновесия только 3. Такие задачи называются *статически неопределимыми* (т.е. нерешаемыми из уравнений статики).

Большинство статически неопределимых задач связано с необходимостью вычислять неизвестные связи системы. Связи прикладываются к ней намеренно, чтобы обеспечить условие равновесия. Без связей или если их недостаточно, система превращается в кинематически изменяемую, т.е. в механизм.

Чтобы обеспечить соблюдение принципа кинематической неизменяемости к системе нужно приложить столько связей, сколько степеней свободы она имеет. Такие связи называются *необходимыми*. Их число всегда равно числу уравнений равновесия. Поэтому необходимые связи легко вычислить из этих уравнений.

В статически неопределимых системах связей больше, чем нужно для обеспечения равновесия. Эти дополнительные связи, приложенные сверх необходимых, называют *лишними*, хотя, лишними их можно назвать только с точки зрения равновесия системы. С практической же точки зрения они далеко не лишние, так как повышают жесткость и прочность системы до нужного уровня без увеличения размеров сечения. Например, балка, показанная на рис.25, получит значительно больший прогиб, если станет статически определимой путем удаления средней опоры. Поэтому статически неопределимые системы нашли широкое применение на практике.

Основной характеристикой таких систем является *степень статической неопределимости S*. Эта величина показывает степень сложности системы. Она рассчитывается по формуле:

$$s = m - n,$$

где m – число связей, приложенных к системе, а n – число уравнений равновесия.

Как известно для плоской системы можно составить три уравнения равновесия, т.е. $n = 3$. Значит если связей только 3, то система является статически определимой, и при этом степень статической неопределимости равна $3 - 3 = 0$. Простейшие статически неопределимые задачи – это задачи, в которых $s = 1$. Они называются одиножды неопределимыми. В них одна связь лишняя.

Таким образом, *степень статической неопределимости показывает число лишних связей.*

Чтобы решить статически неопределимую задачу нужно к уравнениям равновесия добавить какие-то другие уравнения, причем столько, сколько их не хватает для решения системы. В качестве добавочных уравнений всегда используются уравнения совместности деформаций или уравнения перемещений. Поскольку не хватает уравнений ровно столько, сколько лишних связей, то это означает, что степень статической неопределимости показывает, сколько уравнений нужно добавить для решения задачи.

Тогда, *принцип решения статически неопределимых задач заключается в следующем: записываются все возможные уравнения равновесия и к ним добавляется столько уравнений совместности деформаций или уравнений перемещений, сколько составляет величина степени статической неопределимости S .*

2.2. Метод сил

Для решения сложных задач применение общего принципа решения не целесообразно, так как становится громоздким и трудоемким. Для решения сложных задач применяют стандартизованные методы, позволяющие облегчить решение путем использования приемов формализации решения. Формализация позволяет решать задачи по некоторому шаблону,

исключив сложный анализ для каждой конкретной задачи. К числу формализованных методов относятся:

- метод сил;
- метод перемещений;
- метод с использованием уравнения трёх моментов.

Метод сил является универсальным методом, т.е. он применим практически к любым статически неопределимым системам.

Метод основывается на том условии, что перемещения по направлению лишних связей должны быть равны нулю. Тогда, если на заданной системе определить перемещения от всех внешних сил, в том числе и от лишних связей, и затем полученное уравнение приравнять к нулю, то легко рассчитать эти лишние реакции опор, входящие в уравнение в качестве неизвестных параметров.

Уравнения перемещения представляются в виде системы канонических уравнений, где каждое уравнение имеет смысл перемещения в направлении одной лишней связи.

$$\begin{aligned}\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \dots + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \dots + \Delta_{2P} &= 0 \\ \delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \dots + \Delta_{3P} &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ \delta_{s1} X_1 + \delta_{s2} X_2 + \dots + \Delta_{sP} &= 0\end{aligned}$$

Первое уравнение определяет перемещение точки приложения (условно назовем ее первой лишней связью) в направлении первой лишней связи. Оно, как известно должно быть равно нулю: связь не допускает перемещения в своем направлении. Это перемещение складывается из нескольких составляющих:

- $\delta_{11} X_1$ – перемещение за счет первой лишней связи X_1 ;
- $\delta_{12} X_2$ – перемещение за счет первой лишней связи X_2 ;
- $\delta_{13} X_3$ – перемещение за счет первой лишней связи X_3 и т.д.;
- Δ_{1P} – перемещение от всех оставшихся внешних сил, включая

необходимые связи.

Перемещения от лишних связей рассчитываются по такому принципу: если перемещение от силы $1Н$ составит величину $\delta_{1Н}$, то перемещение от силы $5Н$ составит величину $5\delta_{1Н}$, от силы X_1 – перемещение $X_1\delta_{1Н}$. Поэтому эти перемещения представляют собой произведения. Правда, удобнее прикладывать не силу $1Н$, а силу, просто равную единице. Перемещение от такой силы равно δ_{11} .

Перемещения, входящие в канонические уравнения, удобно определять с помощью энергетических методов. Их определяют либо методом Мора, либо по способу Верещагина.

2.3 Порядок применения метода сил

Задана статически неопределимая система (балка, рама и т.п.). Требуется определить все связи (опорные реакции), удерживающие ее в равновесии. Назовем эту систему заданной (заданная балка).

1. На основе заданной балки (ЗБ) строим основную балку (ОБ). Для этого геометрически повторяем заданную балку, но отбрасываем все лишние связи. Таким образом, основная балка является статически определимой. При построении ОБ следует соблюдать осторожность – нельзя отбрасывать связи, которые являются необходимыми.

2. На основе основной системы разрабатываем с вспомогательных систем (ВБ). Для этого геометрически повторяем ОБ, но отбрасываем все внешние нагрузки, т.е. сосредоточенные моменты M , сосредоточенные силы P и распределенные нагрузки. Для одиножды неопределимой балки строится 1 ВБ, для дважды неопределимой – 2 ВБ и т.д.

3. На каждой вспомогательной балке прикладывается своя единичная нагрузка. В точку, где на основной балке была

отброшена лишняя связь, на вспомогательной балке прикладывается сила или момент, равный единице.

4. Записываем s канонических уравнений метода сил: для одиножды неопределимой – 1 уравнение, для дважды неопределимой – 2 уравнения и т.д.

5. Способом Верещагина вычисляем коэффициенты канонических уравнений.

6. Подставив перемещения, которые определили способом Верещагина, в канонические уравнения метода сил, и решая эту систему, относительно неизвестных X_1 , X_2 и т.д., определяем лишние связи.

7. Составляем уравнения равновесия для ЗБ, в которые подставляем уже известные лишние связи и определяем оставшиеся связи.

При необходимости выполняется проверка правильности решения задачи, которая приводится ниже в разделе 2.6.

2.4. Примеры решения задач методом сил

Пример 9. Определить опорные реакции для балки, показанной на рис.26.

Исходные данные: $a = 1$ м, $b = 8$ м, $c = 1$ м, $P_1 = 1$ кН, $P_2 = 2$ кН.

Решим задачу методом сил, выполняя все пункты, изложенные в разделе 2.3.

1. Вычислим степень статической неопределимости. Число связей, удерживающих балку в равновесии, равно 4 (R_A , R_B , M_A , N_A). Число уравнений равновесия равно 3.

$$\begin{aligned}\Sigma Z &= 0; \\ \Sigma Y &= 0; \\ \Sigma M_x &= 0.\end{aligned}$$

Тогда $S = 4 - 3 = 1$.

Приведенная на рис.26 балка является одиножды неопределимой. Балка содержит одну лишнюю связь. В качестве этой связи возьмем момент в заделке M_A .

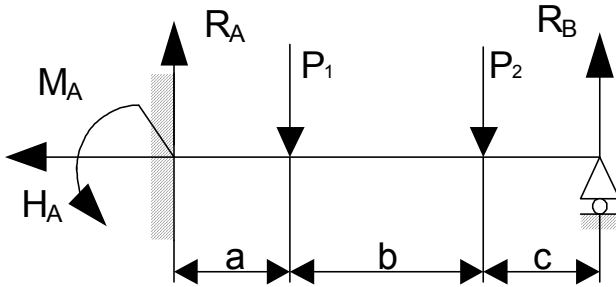


Рис.26 Схема задачи 9

2. Составляем ОБ. Для этого перечертим ЗБ, которая показана на рис.26, но отбросим лишнюю связь M_A . Жесткая заделка, лишившись момента, становится шарнирно-подвижной опорой. Схема ОБ показана на рис.27 а.

3. Составляем 1 ВБ. Для этого перечертим ОБ, но уберем все внешние нагрузки. Здесь внешними нагрузками являются две сосредоточенные силы. Схема ВБ показана на рис. 27 б.

4. Составляем одно каноническое уравнение метода сил.

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

6. Вычислим коэффициенты δ_{11} и Δ_{1P} , входящие в это уравнение и являющиеся перемещением сечения в т.А, а именно углом поворота. Воспользуемся способом Верещагина. Чтобы определить угол поворота сечения в т.А для ОБ Δ_{1P} и ВБ δ_{11} прикладываем в эту точку моменты, равные единице. Схемы вспомогательных балок для определения перемещений показаны на рис.27 в, г.

Далее строим эпюры внутренних моментов для всех четырёх схем.

Перемножая эпюры для балок на схемах рис.27 а, в по формуле Верещагина, получаем перемещение

$$\Delta_{IP} = \theta_A = \frac{\omega M_c}{E I_x}$$

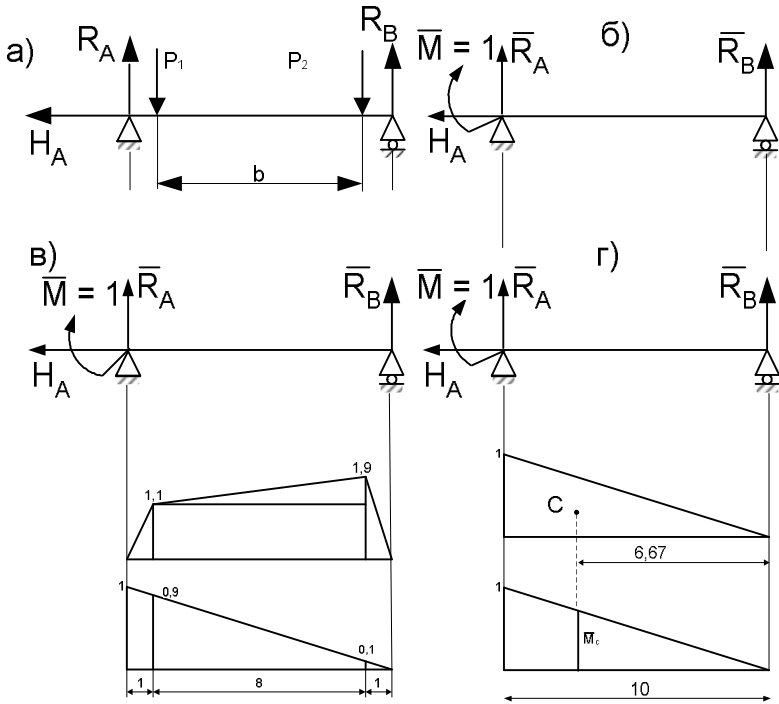


Рис.27. Графические построения к решению примера 9

Решение этой задачи нами было подробно рассмотрено в примере 1 по методу Мора и в примере 5 способом Верещагина. Мы получили результат

$$\theta_A = 6,145 / 2179,01 = 2,82 \cdot 10^{-3}$$

При подстановке перемещения в каноническое уравнение жесткость, входящая в него должна сократиться с жесткостью,

входящей в перемещение δ_{11} , поэтому нет смысла числитель делить на жесткость. Тогда $\Delta_{1P} = 6,145$.

Теперь вычислим коэффициент уравнения δ_{11} . Используем формулу Верещагина:

$$\delta_{11} = \theta'_A = \frac{\omega M_c}{E I_x}$$

Площадь треугольника для схемы, изображенной на рис.27б равна $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 10 = 5$.

Момент M_c определяем на нижней эпюре, построенной для балки, схема которой показана на рис.27 г. Момент M_c выбираем в том месте, где верхняя эпюра имеет центр тяжести $M_c = 2/3 \cdot 1 = 0,667$. Умножим площадь на момент:

$$\delta_{11} = 5 \cdot 0,667 = 3,333$$

Из канонического уравнения вычисляем X_1 :

$$X_1 = - \Delta_{1P} / \delta_{11} = - 6,145 / 3,333 = - 20,483 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Лишняя связь X_1 – это момент в заделке M_A . Знак минус говорит о том, что направление этого момента противоположно направлению единичного момента, который мы приложили на вспомогательной системе.

Определив $M_A = - 20,483 \text{ кН}\cdot\text{м}$, можно вычислить оставшиеся связи R_A , R_B , H_A . Для этого можно использовать обычные уравнения равновесия.

Обратите внимание, что схемы балок на рис.27 б,в,г абсолютно одинаковы. Поэтому в других задачах мы не будем строим схемы балок типа рис.27в,г, используя вместо них балку на рис.27 б.

Пример 10. Определите опорные реакции для балки, показанной на рис.28.

Исходные данные: $P_1 = 1 \text{ кН}$, $P_2 = 2 \text{ кН}$.

В этой задаче так же, как и в предыдущей задаче примера 9 всего 4 связи, 1 связь лишняя. Пусть лишней связью будет R_C .

Тогда при построении ОБ отбросим эту реакцию. Схемы ОБ и ВБ показаны на рис.29 а, б.

Рис.28. Схема статически неопределимой балки

При построении ВБ повторяем схему ОБ, но отбрасываем внешние нагрузки. Вместо отброшенной на ОБ опорной реакции R_C на ВБ прикладываем силу, равную единице ($P = 1$).

Составляем одно каноническое уравнение. В это уравнение входит одна неизвестная X_1 – лишняя связь R_C и два коэффициента – перемещения Δ_{1P} и δ_{11} , которые можно вычислить с помощью формулы Верещагина.

Рис.29. Схема основной и вспомогательной балок

Чтобы воспользоваться способом Верещагина, нужно для ВБ и ОБ построить дополнительно ВБ и приложить силы,

равные единице. Однако в примере 9 мы видели, что эти балки и эпюры для них совпадают со схемой ВБ и соответственно с эпюрой для ВБ. Таким образом, при расчете Δ_{IP} можно перемножить эпюру для ОБ, считая ее грузовой на момент ВБ, считая ее единичной. При расчете δ_{11} площадь эпюры для ВБ, считая ее грузовой, можно умножить на момент, взятый на той же эпюре ВБ, считая ее теперь единичной эпюрой. Поэтому говорят, что эпюра ВБ умножается сама на себя.

$$\Delta_{IP} = Y_c = \frac{\omega M_c}{E I_x} \qquad \delta_{11} = Y'_A = \frac{\omega' M'_c}{E I_x}$$

Сначала нужно построить эпюры внутренних изгибающих моментов для ОБ и ВБ. Эпюры показаны на рис.30.

Задачу расчета Δ_{IP} мы подробно рассматривали в примере 2, решая ее методом Мора, и в примере 6, решая ее способом Верещагина.

Тогда в том примере было получено решение:

$$\Delta_{IP} = Y_c = 17,360 / 2179,01 = 0,007967 \text{ м} \approx 8,0 \text{ мм.}$$

Жесткость балки $E I_x = 2179,01$ далее в каноническом уравнении сократится, поэтому оставим $\Delta_{IP} = 17,360$.

Для расчета δ_{11} умножаем эпюру для ВБ на точно такую же, т.е. саму на себя. Для этого площадь эпюры умножаем на момент, взятый под центром тяжести той же эпюры.

Пояснения к перемножению эпюры ВБ показаны на рис.31.

На единичной эпюре два треугольника.

Площадь левого треугольника: $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2,4 = 4,8$.

Момент M_c выбираем на расстоянии $2/3$ ширины от левого конца, т.е там, где находится его же центр тяжести. Тогда из подобия треугольников $M_c = 2/3 \cdot 2,4 = 1,6$.

Площадь правого треугольника: $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2,4 = 7,2$.

Момент M_c выбираем на расстоянии $2/3$ ширины от правого конца, т.е там, где находится центр тяжести. Из подобия треугольников $M_c = 2/3 \cdot 2,4 = 1,6$.

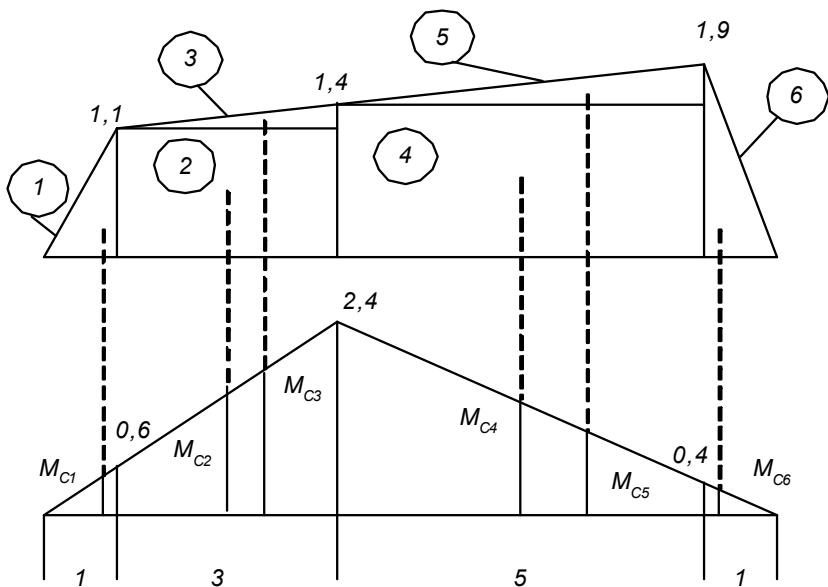


Рис.30. Эпюры внутренних моментов для ОБ и ВБ

Рис.31. Пояснения к расчету δ_{11}

По правилу Верещагина перемножаем площади на моменты и складываем результаты перемножения:

$$\delta_{11} = Y'_{A'} = \frac{\omega' M'_{c}}{E I_x} = \frac{4,8 \cdot 1,6 + 7,2 \cdot 1,6}{E I_x} = \frac{19,2}{E I_x}.$$

Без учета жесткости, которая в уравнении метода сил сократится $\delta_{11} = 19,2$.

Записываем каноническое уравнение

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Определяем лишнюю связь X_1 :

$$X_1 = R_C = -\Delta_{1P} / \delta_{11} = -17,360 / 19,2 = -0,904 \text{ кН}.$$

Значение связи оказалось отрицательным, значит ее направление противоположно выбранному направлению единичной силы, т.е. на самом деле реакция R_C направлена вверх – так как это показано на рис.28.

Пример 11. Решить методом сил статически неопределимую балку, изображенную на рис.32.

Рис.32. Схема задачи

Исходные данные: $q = 10 \text{ кН/м}$; $P = 8 \text{ кН}$; $M = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Балка, изображенная на рис.32, является одиножды статически неопределимой. Число связей – 4 (R_A , M_A , H_A , R_B), а уравнений равновесия только 3 ($\Sigma Y = 0$, $\Sigma Z = 0$, $\Sigma M_x = 0$).

$$s = 4 - 3 = 1.$$

Балка содержит 1 лишнюю связь. Примем за лишнюю связь реакцию R_B . Тогда при построении ОБ ее отбрасываем и схема ОБ станет такой, как показана на рис.33 а.

ВБ строим на основе ОБ путем отбрасывания внешних 3-х нагрузок. Схема ВБ показана на рис.33 б.

Составляем одно каноническое уравнение метода сил

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

В него входят два коэффициента.

Чтобы их определить применяем способ Верещагина. Для каждой из двух балок, показанных на рис.33 а и рис.33 б, нужно построить вспомогательные балки, в которых в т.В прикладываем силу, равную единице. Далее для всех четырёх балок следует построить эпюры внутренних сил. Однако, как мы могли убедиться при решении примера 9, последние три балки имеют одинаковые схемы и одинаковые эпюры, поэтому можно использовать для расчета перемещений только ВБ, показанную на рис.33 б.

Эпюры внутренних моментов для ОБ и ВБ показаны на рис.33 в, г. Коэффициент Δ_{1P} вычисляем перемножением левой эпюры на правую. Здесь левая эпюра – эпюра от заданной нагрузки (грузовая), а правая – от единичной нагрузки (единичная).

Эта задача нами была решена в примере 3 и примере 7. В примере 7 прогиб в т.В вычислялся способом Верещагина:

$$Y_B = \Delta_{1P} = -\frac{10731,75}{E I_X}.$$

Коэффициент δ_{11} вычисляем, умножая правую эпюру саму на себя. Правая эпюра выступает в качестве грузовой и она же выступает в качестве единичной.

Площадь треугольника $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 = 50$.

Центр тяжести этого треугольника расположен на расстоянии $\frac{2}{3}$ его ширины. В этом месте ордината эпюры составляет $\frac{2}{3}$ высоты, равной 10, т.е. $M_c = \frac{2}{3} \cdot 10 = 6,667$.

Перемножаем площадь на момент M_c

$$\delta_{11} = Y'_B = \frac{\omega' M'_c}{E I_x} = \frac{50 \cdot 6,667}{E I_x} = \frac{333,333}{E I_x}.$$

Записываем одно каноническое уравнение

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Решая его, определяем лишнюю связь X_1 .

$$X_1 = R_B = - \Delta_{1P} / \delta_{11} = - (- 10731,750) / 333,333 = 32,195 \text{ кН}.$$

Рис.33. Схема ОБ и ВБ и эпюры внутренних моментов

Значение связи оказалось положительным, значит ее направление совпадает с выбранным направлением единичной

силы, т.е. на самом деле реакция R_B направлена вверх, так как это показано на рис.32.

Пример 12. Решить статически неопределимую балку, изображенную на рис.34 методом сил.

Исходные данные: $q = 2$ кН/м; $P = 9,5$ кН; $M = 4$ кН · м.

Балка, изображенная на рис.34 одиножды статически не определима.

Рис.34. Схема заданной балки

Число связей – 4 (R_A, H_A, R_B, R_C), а уравнений равновесия только 3 ($\Sigma Y = 0, \Sigma Z = 0, \Sigma M_x = 0$).

$$s = 4 - 3 = 1.$$

Балка содержит 1 лишнюю связь. Примем за лишнюю связь реакцию R_C . Тогда при построении ОБ ее отбрасываем и схема ОБ будет такой, как показана на рис.35 а.

ВБ строим на основе ОБ путем отбрасывания всех внешних нагрузок. Схема ВБ показана на рис.35 б.

Составляем 1 каноническое уравнение метода сил.

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

В него входят два коэффициента.

Чтобы их определить применяем способ Верещагина. Для каждой из двух балок, показанных на рис.35 а, б, нужно

построить вспомогательные балки, в которых в т.С прикладываем силу, равную единице. Далее для всех четырёх балок следует построить эпюры внутренних сил. Однако, как мы могли убедиться при решении примера 9, последние три балки имеют одинаковые схемы и одинаковые эпюры, поэтому можно использовать для расчета перемещений только ВБ, показанную на рис.35 б.

Эпюры внутренних моментов для ОБ и ВБ показаны на рис.35 в, г.

Коэффициент Δ_{1P} вычисляем перемножением левой эпюры на правую. Здесь левая эпюра выступает в качестве грузовой, а правая – в качестве единичной. Эта задача нами была решена в примере 4 и примере 8.

В примере 8 прогиб в т. С вычислялся способом Верещагина:

$$Y_C = \Delta_{1P} = -\frac{2,0}{E I_x}$$

Коэффициент δ_{11} вычисляем, умножая правую эпюру саму на себя. Правая эпюра выступает в качестве грузовой и она же выступает в качестве единичной.

Площадь левого треугольника $\frac{1}{2} \cdot 4/3 \cdot 2 = 4/3$.

Центр тяжести этого треугольника расположен на расстоянии $2/3$ его ширины. В этом месте ордината эпюры составляет $2/3$ высоты, равной $4/3$, т.е. $M_c = 2/3 \cdot 4/3 = 8/9$.

Площадь правого треугольника $\frac{1}{2} \cdot 4/3 \cdot 4 = 8/3$. Центр тяжести этого треугольника расположен на расстоянии $2/3$ его ширины. В этом месте ордината эпюры составляет $2/3$ высоты, равной $4/3$, т.е. $M_c = 2/3 \cdot 4/3 = 8/9$.

Перемножаем площадь на момент M_c

$$\delta_{11} = Y'_c = \frac{\omega' M'_c}{E I_x} = \frac{4/3 \cdot 8/9 + 8/3 \cdot 8/9}{E I_x} = \frac{96/27}{E I_x} = \frac{3,555}{E I_x}$$

Записываем каноническое уравнение $\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0$, из которого определяем лишнюю связь X_1 .

$$X_1 = R_B = -\Delta_{1P} / \delta_{11} = -2,0 / 3,555 = -0,562 \text{ кН.}$$

Значение связи оказалось отрицательным, значит ее направление противоположно выбранному направлению единичной силы, т.е. на самом деле реакция R_C направлена вверх – так как это показано на рис.34.

Рис.35. Схемы ОБ и ВБ и эпюры внутренних моментов

Задание для самостоятельного решения методом сил

Решите самостоятельно задачу и сравните результат решения с ответом.

Задание. Решить статически неопределимую балку, изображенную на рис.36 методом сил.

Исходные данные: $q = 2 \text{ кН/м}$; $P = 3 \text{ кН}$; $M = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Рис.36. Схема задачи к заданию 7

Если выбрать в качестве лишней связи опорную реакцию в т.С, то значения коэффициентов должны получиться равными:

$$\Delta_{1P} = -38,481; \delta_{11} = 3,555.$$

Сама лишняя связь X_1 должна получиться равной:

$$X_1 = R_C = -\Delta_{1P} / \delta_{11} = 38,481 / 3,555 = 10,824 \text{ кН}.$$

2.5 Дважды статически неопределимые балки

На рис.37 показана балка, которая удерживается в равновесии за счет 5 связей. Исходные данные: $q = 4 \text{ кН / м}$; $P_1 = 3 \text{ кН}$; $P_2 = 2 \text{ кН}$; $M = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Степень статической неопределимости

$$s = 5 - 3 = 2.$$

Таким образом, здесь уже две лишние связи.

Рис.37. Схема балки с двумя лишними связями

Рис.38. Схема ОБ и грузовая эпюра

Решение этой задачи от предыдущих отличается тем, что здесь нужно составить два канонических уравнения, в которые входят две неизвестные лишние связи и шесть коэффициентов.

Тогда нужно составить уже две ВС. В результате вычисляем 6 перемещений путем перемножения грузовой эпюры на эпюру ВС1, эпюру ВС2, ВС1 саму на себя, ВС2 саму на себя, ВС1 на ВС2, ВС2 на ВС1.

Составляем ОБ путем отбрасывания двух лишних связей.

Пусть лишними связями станут опорные реакции R_A , M_A . Тогда схему основной балки и эпюры для нее можно изобразить так, как это показано на рис.38.

Далее строим две вспомогательные балки ВС1 и ВС2. Для этого перечерчиваем ОБ дважды, на одной из них прикладываем момент, равный единице, вместо отброшенного на ОБ момента заделки, а на другой прикладываем силу, равную единице, вместо отброшенного на ОБ опорной реакции в т.А. Тогда схемы ВС1 и ВС2 можно представить так, как это показано на рис.39.

Рис.39. Схемы ВС1 и ВС2 и единичные эпюры

Составляем два канонических уравнения метода сил.

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2P} = 0.$$

Чтобы решить эту систему уравнений, нужно вычислить 6 коэффициентов, входящих в эту систему уравнений. Коэффициентами этих уравнений являются перемещения поперечных сечений в точках 1 и 2, поэтому вычисляются способом Верещагина.

Эпюра ВС1 состоит из двух частей: прямоугольника и треугольника. Поэтому, перемножая прямоугольник сам на себя и треугольник на себя и далее, результаты складывая друг с другом получаем коэффициент δ_{11} .

$$\delta_{11} = 1 \cdot 4 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = 16/3 = 5,333.$$

Эпюра ВС2 состоит из 2-х частей: 2 одинаковых треугольника. Поэтому, перемножая треугольник на себя и далее результат умножая на 2, получаем коэффициент δ_{22} .

$$\delta_{22} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = 128/3 = 42,667.$$

Вычисляем δ_{12} и δ_{21} .

$$\delta_{12} = \frac{\omega'_{12} M'_{c2}}{E I_x};$$

$$\delta_{21} = \frac{\omega'_{21} M'_{c1}}{E I_x};$$

Очевидно, что эти коэффициенты должны совпадать: нет разницы, умножать первую единичную эпюру на вторую единичную или наоборот. Поэтому вычислим только один из коэффициентов.

$$\delta_{12} = -1 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = -40/3.$$

Коэффициенты Δ_{1P} и Δ_{2P} , которые представляют собой угол поворота сечения в т.А и прогиб в т.А, были вычислены ранее в заданиях 2,3 методом Мора и в заданиях 5,6 способом Верещагина: $\Delta_{1P} = 62$; $\Delta_{1P} = -209,333$.

Подставляем вычисленные коэффициенты в канонические уравнения метода сил.

$$\begin{aligned} 16/3 X_1 - 40/3 X_2 + 62 &= 0; \\ -40/3 X_1 + 128/3 X_2 - 209,333 &= 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений относительно неизвестных любым подходящим способом, находим лишние связи:

$$\begin{aligned} X_1 = M_A &= 2,92 \text{ кН*м}; \\ X_2 = R_A &= 5,82 \text{ кН}. \end{aligned}$$

2.6 Проверка правильности раскрытия статической неопределимости

Правильность решения статически неопределимой задачи можно проверить. Существует два способа проверки:

1. выбор новой основной системы;
2. деформационная проверка.

Выполняя проверку по первому способу, приходится решать ту же самую задачу во второй раз. При втором решении в качестве основной системы выбирается другая схема. Например, в предыдущем примере можно отбросить не момент заделки, а опорную реакцию на опоре В. Если результаты обоих решений совпадают, значит, в обоих случаях задача решена верно. Иначе нужно искать ошибку.

При проверке по второму способу определяют перемещения в тех точках, где они заранее известны. Обычно заранее известны только перемещения на опорах. Как известно, они равны нулю. Если в результате решения вышла ожидаемая величина, т.е. ноль, значит решение верно. Например, в предыдущей задаче можно было бы определить угол поворота в

заделке или прогиб на опоре В. Если они равны нулю, то значит связи найдены верно.

Выполним проверку правильности решения предыдущей задачи, схема которой показана на рис.37. Вычислим прогиб в т.А. Эта точка закреплена и значит прогиб здесь невозможен. Поэтому, если в результате расчета мы получим, что прогиб равен нулю, то опорные реакции методом сил определены верно. Решим эту задачу методом Мора.

Основная балка показана на рис.37. Вспомогательная балка показана на рис.39 б, которую мы обозначили как ВС2.

Сначала вычислим опорные реакции.

ОБ:

$$\Sigma Z = H_A = 0;$$

$$\Sigma M_B = 0;$$

$$M_A - R_A \cdot 4 - P_1 \cdot 2 + q \cdot 4 \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 - P_2 \cdot 2 + M + R_C \cdot 4 = 0;$$

$$2,92 - 5,82 \cdot 4 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \cdot 2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 2 + R_C \cdot 4 = 0;$$

$$R_C = 1,09 \text{ кН};$$

$$\Sigma Y = R_A + R_B + R_C + P_1 - P_2 - q \cdot 6 = 0;$$

$$5,82 + R_B + 1,09 + 3 - 2 - 24 = 0;$$

$$R_B = 16,09 \text{ кН}.$$

ВБ:

$$\Sigma M_B = -1 \cdot 4 + R_C \cdot 4 = 0;$$

$$R_C = 1.$$

ОБ состоит из четырёх участков. ВС состоит из двух участков. Чтобы границы участков для ОБ и ВБ совпадали, ВБ тоже разделим на 4 участка. Записываем уравнения внутренних моментов, применяя для этого метод сечений. 2 участка выбираем слева, а 2 участка выбираем справа.

1 участок $0 < Z < 2 \text{ м}$.

ОБ:

$$M_X = -q \frac{Z^2}{2} + R_A \cdot Z - M_A = -2 \cdot Z^2 + 5,82 \cdot Z - 2,92.$$

ВБ:

$$M'_x = 1 \cdot Z = Z.$$

Произведение моментов:

$$M_x M'_x = -2 \cdot Z^3 + 5,82 \cdot Z^2 - 2,92 \cdot Z.$$

Вычисляем интеграл:

$$\int_0^2 M_x M'_x = -2 \frac{Z^4}{4} + 5,82 \frac{Z^3}{3} - 2,92 \frac{Z^2}{2} = -8 + 15,52 - 5,84 = 1,68.$$

II участок $2 \text{ м} < Z < 4 \text{ м}$.

ОБ:

$$M_x = -q \frac{Z^2}{2} + R_A \cdot Z - M_A + P_1 \cdot (Z - 2) =$$

$$= -2 \cdot Z^2 + 5,82 \cdot Z - 2,92 + 3 \cdot Z - 6 = -2 \cdot Z^2 + 8,82 \cdot Z - 8,92.$$

ВБ:

$$M'_x = 1 \cdot Z = Z.$$

Произведение моментов:

$$M_x M'_x = -2 \cdot Z^3 + 8,82 \cdot Z^2 - 8,92 \cdot Z.$$

Вычисляем интеграл:

$$\int_2^4 M_x M'_x = 120 + 164,64 - 53,52 = -8,88.$$

III участок $0 < Z < 2 \text{ м}$.

ОБ:

$$M_x = R_C \cdot Z + M = 1,09 \cdot Z + 2.$$

ВБ:

$$M'_x = R_c \cdot Z = 1 \cdot Z = Z.$$

Произведение моментов:

$$M_x M'_x = 1,09 \cdot Z^2 + 2 \cdot Z.$$

Вычисляем интеграл:

$$\int_0^2 M_x M'_x = 1,09 \frac{Z^3}{3} + 2 \frac{Z^2}{2} = 2,91 + 4 = 6,91.$$

IV участок $2 \text{ м} < Z < 4 \text{ м}$.

ОБ:

$$\begin{aligned}M_x &= -q \frac{(Z-2)^2}{2} + R_c \cdot Z + M - P_2 \cdot (Z-2) = \\&= -2 \cdot (Z^2 - 4 \cdot Z + 4) - 2 \cdot Z + 4 + 1,09 \cdot Z + 2 = \\&= -2 \cdot Z^2 + 7,09 \cdot Z - 2.\end{aligned}$$

ВБ:

$$M'_x = R_c \cdot Z = 1 \cdot Z = Z.$$

Произведение моментов:

$$M_x M'_x = -2 \cdot Z^3 + 7,09 \cdot Z^2 - 2 \cdot Z.$$

Вычисляем интеграл:

$$\int_2^4 M_x M'_x = -2 \frac{Z^4}{4} + 7,09 \frac{Z^3}{3} - 2 \frac{Z^2}{2} = -120 + 132,35 - 12 = 0,35.$$

Несмотря на то, что ноль при проверке не получили, скорее всего, задачу все же мы решили верно. Значение 0,35 получилось в результате вычитания из числа 132,35 числа 132,0. В сравнении с этими числами значение 0,35 можно практически считать равным нулю. При этом относительная ошибка $0,35/132,35 \cdot 100\%$ не превышает даже 0,3%. Небольшие погрешности возникают в результате округления промежуточных результатов до двух знаков после запятой. Если число знаков, оставляемых после запятой при проведении промежуточных расчетов увеличить, ошибка должна обязательно уменьшиться. В данной задаче этого делать не обязательно, так как ошибка в 0,3% не существенна.

Задание для самостоятельной работы

Проведите деформационную проверку правильности решения статически неопределимых балок в примерах 9, 10, 11, 12 и задании на с.73.

Контрольные вопросы

1. Какие перемещения поперечных сечений возникают при плоском изгибе?
2. Что представляет собой угол поворота поперечного сечения при плоском изгибе?
3. Какую величину называют прогибом сечения при плоском изгибе?
4. Как на рисунке можно изобразить перемещения сечений, возникающие при плоском изгибе?
5. Какую величину называют жесткостью балки при плоском изгибе?
6. Как записывается формула для расчета жесткости балки при плоском изгибе?
7. Как формулируется теорема Мора?
8. Как записывается формула интеграла Мора?
9. В какую точку вспомогательной балки прикладывается единичная сила или единичный момент при вычислении перемещений методом Мора?
10. В каком случае при вычислении перемещений по методу Мора на вспомогательной балке прикладывается единичная сила, а в каком случае единичный момент?
11. Как записывается формула Верещагина для определения перемещений при изгибе?
12. Какие ограничения на применение имеет способ Верещагина?
13. Какие связи называются лишними?
14. Какие связи называются необходимыми?
15. Как формулируется принцип кинематической неизменяемости системы?
16. Для каких систем принцип кинематической неизменяемости не выполняется?
17. Какие системы называются статически неопределимыми?

18. Как вычисляется степень статической неопределимости?
19. В чем заключается основной принцип решения статически неопределимых задач?
20. Какие формализованные методы существуют для решения статически неопределимых задач?
21. Что лежит в основе метода сил?
22. Что представляет собой система канонических уравнений метода сил?
23. Как записывается система канонических уравнений метода сил?
24. Что представляют собой коэффициенты канонических уравнений метода сил?

Список литературы

1. *Ицкович, Г.М. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов/ Г.М. Ицкович. - М.: Высш. школа, 1999. –585 с.*
2. *Степин, П.А. Сопротивление материалов: учебник / П.А. Степин . - М.: Высш. школа, 1988. –367 с.*
3. *Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов: учебник./ В.И. Феодосьев - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 592с.*

Содержание

Введение	3
1. Энергетические методы определения перемещений сечения бруса	4
1.1 Перемещения поперечных сечений бруса.	4
1.2 Обобщенное перемещение	7
1.3 Энергетический метод Мора	8
1.4 Способ Верещагина	28
2. Статически неопределимые балки	56
2.1 Понятие о статически неопределимых системах.	56
2.2 Метод сил	58
2.3 Порядок применения метода сил	60
2.4 Примеры решения задач методом сил.	61
2.5 Дважды статически неопределимые балки	75
2.6 Проверка правильности раскрытия статической неопределимости.	79
Контрольные вопросы	83

Сабанаев Илдар Арифович,
Алмакаева Флорида Минулловна

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ
Энергетические методы определения перемещений и решение
статически неопределимых балок методом сил

Учебное пособие

Редактор
Корректор

Директор издательства

Свод.темплан 2008 г.

Лицензия № 020404 от 6.03.97 г.

Подписано в печать Формат 84x108 1/32
Бумага писчая. Печать RISO. Заказ «С»

Издательство Казанского государственного технологического
университета

Офсетная лаборатория Казанского государственного
технологического университета

420015, Казань, К.Маркса, 68