Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Казанский государственный технологический университет»

Нижнекамский химико-технологический институт

Сабанаев И.А., Алмакаева Ф.М.

ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ БАЛКИ

Методические указания
для студентов заочной формы обучения

Казань
КГТУ
2008

УДК

Составители доц. И.А. Сабанаев, Ф.М. Алмакаева

Построение эпюр внутренних силовых факторов при плоском изгибе балки: Методические указания / И.А. Сабанаев, Ф.М. Алмакаева; - Казань: Изд-во Казан.гос.технол.ун-т. 2008.- 64с.

Составлены в соответствии с государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по специальности , учебным планам и рабочими программами по дисциплинам «Сопротивление материалов», «Прикладная механика», «Техническая механика».

Приведены теоретические аспекты решения задач и примеры расчетов для самостоятельной работы при изучении темы «Внутренние силовые факторы».

Предназначены для студентов заочной формы обучения механических и технологических специальностей, изучающих дисциплину «Сопротивление материалов».

Подготовлены на кафедре «Машины и аппараты химических производств и производства строительных материалов» НХТИ.

Печатаются по решению редакционно-издательского совета Казанского государственного технологического университета.

Рецензенты: доц. Д.Н. Латыпов
доц. В.В. Биктагиров

ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР
ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ (ВСФ)

Построение эпюр ВСФ решается в два этапа:

1. Построение расчетной схемы балки и определение приложенных к ней сил.
2. Определение внутренних силовых факторов и построение эпюр.

Рассмотрим их подробно.

1 ЭТАП.
ПОСТРОЕНИЕ РАСЧЁТНОЙ СХЕМЫ БАЛКИ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИЛОЖЕННЫХ К НЕЙ СИЛ

1. Внешние силы

По характеру приложения внешние силы делятся на сосредоточенные, т.е. приложенные в точку и распределенные. Сосредоточенные силы на схемах изображаются как обычные векторы, приложенные в заданную точку. Например, силы P_1 и P_2 (рис. 1).

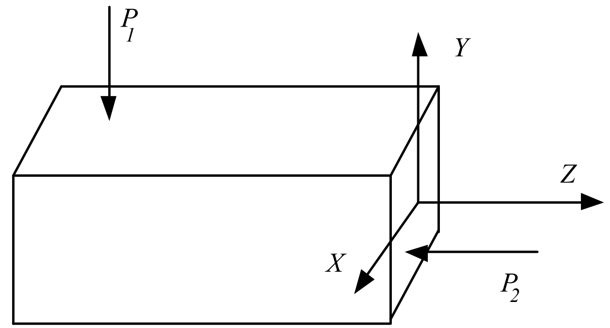


Рис.1. Изображение сосредоточенных сил

Осью абсцисс является ось Z. В сопромате координатную ось, направленную вдоль оси балки принято, обозначать через Z, а не X. Тогда поперечное сечение бруса оказывается в привычной для нас плоскости X – У.

На расчетных схемах нагрузка, распределенная по отрезку, изображается так, как это показано на рис. 2.

Распределенная нагрузка характеризуется величиной q и называется интенсивностью распределенной нагрузки.

Линия на схеме, от которой отходят стрелки к брусу показывает, как изменяется интенсивность нагрузки вдоль бруса. На рис.2а видно, что линия – постоянная, поэтому такую нагрузку называют равномерно распределенной.

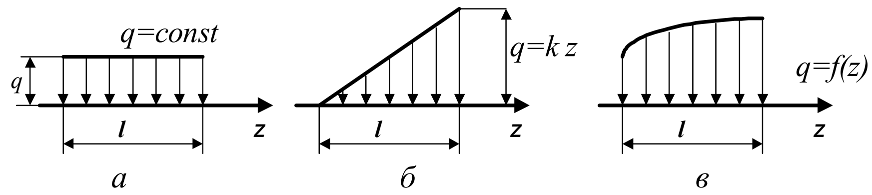


Рис. 2. Схематичное изображение распределенной нагрузки

Чтобы рассчитать полную силу Q от распределенной нагрузки, нужно вычислить площадь фигуры, заключенной между линией интенсивности нагрузки и линией, показывающей на схеме сам брус.

Например, на рис. 2а под линией интенсивности распределенной нагрузки мы видим прямоугольник. Тогда полная сила от нагрузки составит величину $Q = q{\cdot}l$.

На рис 2б показан прямоугольный треугольник. Тогда полная нагрузка равна его площади: $Q = 0{,}5q{\cdot}l$. В случае с криволинейной нагрузкой площадь рассчитывается как интеграл:

$$Q = \int\limits_{l} q(z)\, dz \,.$$

2. *Внешние моменты*

Внешние моменты, приложенные к брусу, имеют 3 различные формы:

- сосредоточенный момент;
- момент, создаваемый сосредоточенной силой;
- момент, создаваемый распределенной нагрузкой.

Сосредоточенный момент обычно изображают в виде пары сил так, как это показано на рис.3.

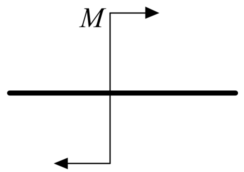


Рис.3. Изображение сосредоточенного момента на расчетных схемах

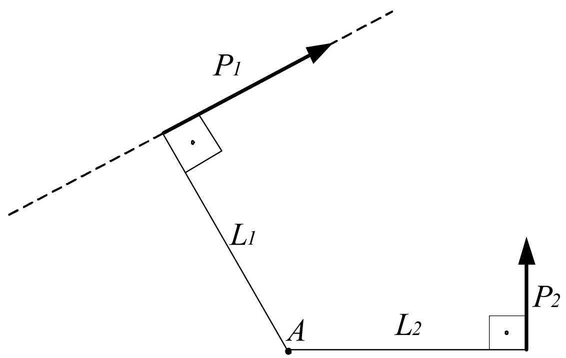


Рис.4. Моменты, создаваемые сосредоточенными силами

Момент, создаваемый сосредоточенной силой определяется как произведение самой силы на плечо. Плечом является кратчайшее расстояние (перпендикуляр) от точки, в которой рассчитывается момент до линии, вдоль которой действует сила. При этом нужно учитывать знак момента.

Момент считается положительным, если он вращается вокруг точки в направлении против часовой стрелки и отрицательным, если по часовой.

Моменты от сил P_1 и P_2 равны $M_A = P_1 \cdot L_1$ и $M_A = - P_2 \cdot L_2$ соответственно.

Чтобы вычислить момент, создаваемый распределенной нагрузкой, нужно выполнить два действия:

1) вычислить полную силу от нагрузки, как ее площадь (прямоугольника, треугольника), или по формуле на 4с.

2) полную силу умножить на плечо, где плечо рассчитывается как расстояние до центра тяжести площади под линией интенсивности. Например, для прямоугольника это будет середина отрезка, а для треугольника – расстояние 2/3 от начала нагрузки.

Примеры расчета момента для равномерно распределенной нагрузки и нагрузки, изменяющейся по линейному закону, показана на рис.5.

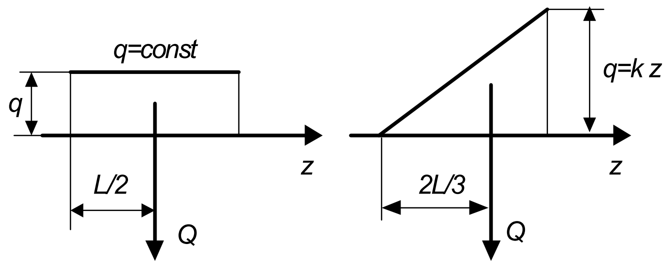


Рис.5. Расчет момента распределенной нагрузки

- для рис. 5а $M(q) = Q \cdot (1/2) \cdot L;$
- для рис. 5б $M(q) = Q \cdot (2/3) \cdot L.$

3. Опорные реакции

Внешние силы делятся по принципу: активные – реактивные. *Активные* – это заданные, известные силы.

Реактивные силы (реакции опор) возникают в местах закрепления бруса и заранее неизвестны. Опорные реакции являются связями, препятствующими перемещению в направлении, в котором они действуют.

В сопромате опорой называют вообще любой способ закрепления. Все способы закрепления можно подвести к одной из трёх расчетных схем. Они показаны на рис.6.

Шарнирно-подвижная опора. Накладывает на опорное сечение одну связь, препятствуя перемещению в направлении, перпендикулярном к опорной поверхности. Возникает одна реакция R_A.

Шарнирно-неподвижная опора. Накладывает на опорное сечение две связи, препятствуя перемещениям в горизонтальном и вертикальном направлениях. Возникают две реакции R_A и. H_A.

Жесткая заделка. Накладывает на опорное сечение три связи, препятствуя перемещениям в обоих направлениях и повороту сечения. Возникает три реакции: R_A, H_A, M_A. Момент, возникающий в заделке, препятствует повороту сечению. Значит, в жесткой заделке невозможны вообще никакие перемещения. Поэтому жесткая заделка – абсолютно жесткая форма закрепления.

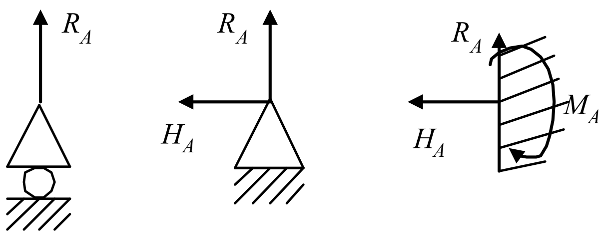


Рис.6. Геометрические схемы опор и возникающие на опорах связи

4. Уравнения равновесия

Из общей механики известно, что равновесие предполагает равенство нулю геометрической суммы всех сил и геометрической суммы всех моментов. Математически это формулируется в виде уравнений равновесия. Уравнения равновесия (или уравнения статики) – основные уравнения в сопротивлении материалов, позволяющие производить подавляющее большинство расчетов.

При записи уравнений равновесия удобно рассматривать не геометрическую сумму всех сил, а сумму проекций всех сил на координатные оси. В результате, вместо одного уравнения суммы сил для объемной задачи (в системе координат с тремя осями) можно записать три уравнения равновесия – проекций сил на соответствующие оси. Таким же образом, уравнение суммы моментов можно представить в виде трех уравнений моментов относительно соответствующих осей. И тогда всего можно составить 6 уравнений равновесия:

$$\begin{array}{ll} \sum Z = 0 & \sum M_z = 0 \\ \sum Y = 0 & \sum M_Y = 0 \\ \sum X = 0 & \sum M_x = 0 \end{array} \qquad (1).$$

Для плоской задачи (в системе координат с двумя осями Z и Y) можно составить только три уравнения равновесия:

$$\begin{array}{l} \sum Z = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum M_x = 0 \end{array} \qquad (2).$$

Уравнения равновесия используют для расчета связей, которые обеспечивают равновесие системы. В качестве связей, удерживающих в равновесии балку или раму, выступают опорные реакции. Первым этапом в любом расчете является вычисление реакций опор. Рассмотрим плоскую систему, когда все элементы конструкции, а также внешние силы находятся в одной плоскости Z – У. Из трёх уравнений равновесия можно найти, как известно, только три неизвестные опорные реакции. Например, задачу, показанную на рис. 7, можно решить, составив 3 уравнения равновесия по формулам 1.

Пример 1. Вычислить опорные реакции для балки, изображенной на рис.7.

Для решения используем уравнения формулы 2, с.8. Составим первое уравнение. На горизонтальную ось координат – ось Z проекцию дает только сила H_B. Остальные силы проецируются на эту ось в виде точки, т.е длина проекций этих сил равна 0. В результате в это уравнение входит только одна проекция H_B со знаком минус, поскольку направление проекции противоположно направлению оси. Из этого уравнения определяется реакция H_B.

$$\sum Z = - H_B ,\ H_B = 0.$$

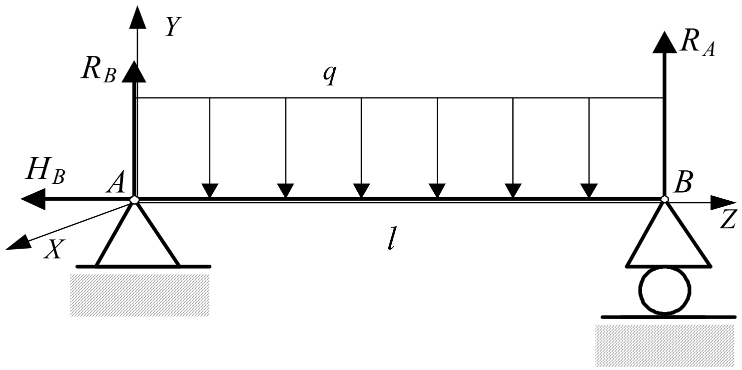


Рис.7. Схема плоской задачи с тремя связями

Второе уравнение равновесия включает проекции всех внешних сил на ось У.

$$\sum Y = R_A + R_B - ql.$$

Проекции сил R_A и R_B направлены вверх, т.е. совпадают с направлением оси У, поэтому записываются со знаком плюс. Кроме сосредоточенных сил – опорных реакций к балке приложена равномерно распределенная нагрузка, интенсивность которой равна q. Полную силу, создаваемую этой нагрузкой вычисляем как площадь прямоугольника $Q = q\,l$ (см. рис.2) .

В этом уравнении две неизвестные силы – R_A и R_B.

Из одного уравнения неизвестные вычислить нельзя, поэтому пока его оставим.

Третье уравнение системы рассматривает сумму моментов относительно оси X.

Эта ось перпендикулярна плоскости нашего рисунка (рис.7, с.9). Начало координат (точка, из которой исходит ось X) можно расположить в любом удобном месте. При расчете моментов эту точку располагают там, где проходит как можно больше сил (неизвестных сил). В нашем случае такой точкой является B. Тогда силы H_B и R_B в точке B создают нулевые моменты (плечо силы, проходящей через точку равно нулю). Это упрощает уравнение.

Момент от равномерно распределенной нагрузки вычисляется так, как это показано на рис.5а.

$$\sum M_B = R_A l - q\, l \frac{l}{2} = R_A l - ql^2 / 2 = 0;$$

Из этого уравнения можно определить реакцию R_A.

$$R_A = \frac{ql^2 \cdot 2}{2l} = \frac{ql}{2}.$$

Теперь в уравнении проекций на ось У осталась только одна неизвестная – реакция R_B.

В это уравнение подставляем уже известную силу R_A и вычисляем неизвестную R_B.

$$R_B = ql - R_A = ql - ql/2 = ql/2.$$

При заданных значениях q и l получаем значения в абсолютных единицах (в метрах и ньютонах).

Пример 2. Вычислить опорные реакции для балки, изображенной на рис.8.

Дано: $a = 1$ *м*, $b = 8$ *м*, $c = 1$ *м*. $L = a + b + c = 10$ *м*.

$P_1 = 1$ *кН*, $P_2 = 2$ *кН*.

Составим уравнения равновесия.

$\Sigma M_B = -R_A \cdot 10 + P_1 \cdot 9 + P_2 \cdot 1 = 0$ $\qquad R_A = 1{,}1$ *кН*

$\Sigma P_Y = R_A + R_B - P_1 - P_2 = 0$ $\qquad R_B = 1{,}9$ *кН*.

Связь H_A из уравнения проекций на горизонтальную ось Z равна нулю.

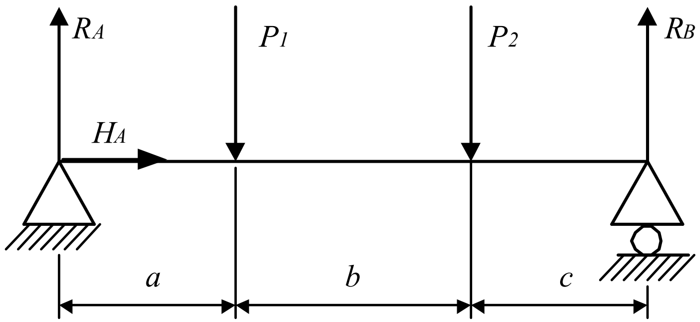


Рис.8. Расчетная схема балки к примеру 2

Пример 3. Вычислить опорные реакции, для балки, показанной на рис.9.

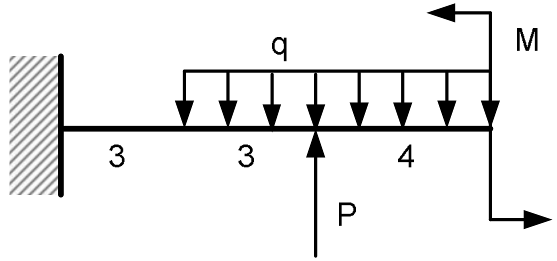
Задана консоль – балка с одним закрепленным концом. Единственная опора закрепляет балку в точке А.

Жесткая заделка предполагает наличие трёх связей – двух сил R_A и H_A, а также момента заделки M_A.

Тогда схема балки примет вид, показанный на рис.10.

Уравнения равновесия:

$$1)\ \ \Sigma Z = -H_A = 0,\ H_A = 0;$$
$$2)\ \Sigma Y = R_A + P - q \cdot 7 = 0;$$
$$R_A = q \cdot 7 - P = 10 \cdot 7 - 8 = 62\ (кН);$$
$$3)\ \sum M_A = M_A + P \cdot 6 + M - q \cdot 7 \cdot 6{,}5 = 0;$$
$$M_A = q \cdot 45{,}5 - M - 6 \cdot P = 455 - 4 - 6 \cdot 8 = 403\ (кН) \cdot м.$$



$q = 10$ *кН/м*
$P = 8$ *кН*
$M = 4$ *кНм*

Рис.9. Схема балки к примеру 3

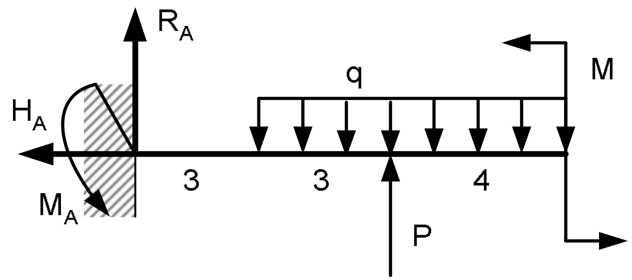


Рис.10. Схема балки к примеру 3
с опорными реакциями

5. Расчет опорных реакций для балки с шарниром

Пример 4. Рассмотрим схему балки на рис. 11. В задаче, имеется 4 неизвестные опорные реакции (R_A, R_B, R_C, H_A).

Если применять лишь уравнения равновесия, эту задачу решить невозможно: неизвестных связей – 4, тогда как уравнений равновесия только 3. Такие задачи называются статически неопределимыми (т.е. неразрешимыми из уравнений статики). Решение таких задач изучается во второй части сопротивления материалов.

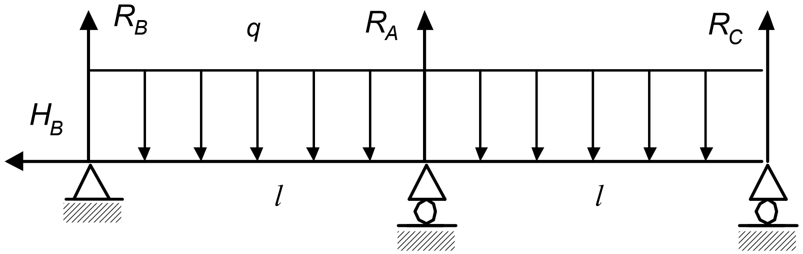


Рис.11. Схема плоской задачи с четырьмя связями

Теперь рассмотрим рис. 12.

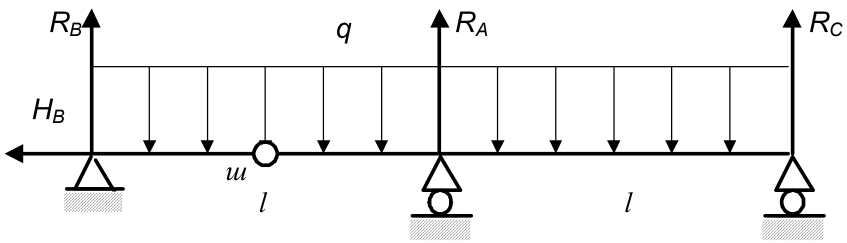


Рис.12. Схема статически определимой задачи с четырьмя связями

Сравнивая схемы на рис.11 и рис.12, можно заметить, что на рис.12 появилось изображение в виде кружочка - схематичное обозначение промежуточного шарнира. Шарнир – это устройство, позволяющее двум частям балки независимо

поворачиваться относительно друг друга (вспомним дверной или оконный шарниры).

Балка, показанная на рис.12, статически определима, т.е. мы может вычислить все опорные реакции из уравнений равновесия. Промежуточный шарнир, врезанный в участок балки, превращает ее в разрезную балку. В шарнире балку можно разрезать на 2 части. Каждую часть можно рассчитывать как отдельную балку. В результате, изображённую на рис. 12 балку, можно показать как две балки (рис. 13).

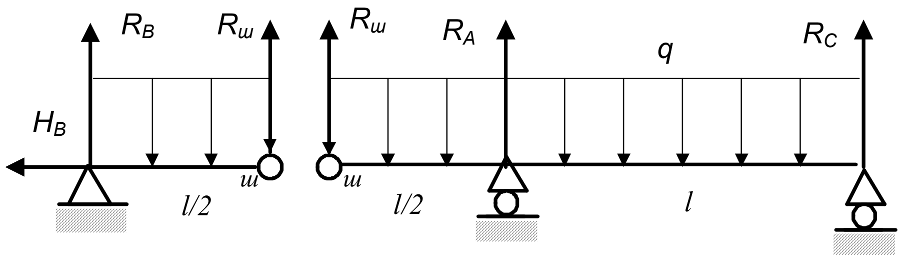


Рис.13. Разрезная балка с промежуточным шарниром

Для каждой части записывается 3 уравнения равновесия по формулам 2, итого для всей балки 6 уравнений.

Однако, общее число неизвестных теперь тоже равно 6: R_A, R_B, R_C, H_A, $R_ш^{лев}$, $R_ш^{прав}$. Добавились 2 реакции, возникающие в шарнире. Число уравнений равновесия равно числу неизвестных связей.

Имея 6 уравнений можно вычислить все 6 опорных реакций. Учитывая, что реакции, возникающие в шарнире (для левой и правой частей), равны по величине и противоположны по направлению, в дальнейших расчетах внутренних сил их можно не учитывать, так как они взаимно вычитаются.

Чтобы рассчитать только 4 связи – реакции на опорах R_A, R_B, R_C, H_A и исключить из уравнений реакции в шарнире $R_ш^{лев}$,

$R_ш^{прав}$, нужно уравнения суммы проекций сил записать для всей балки в целом, а вот уравнения суммы моментов составить для левой и правой частей отдельно. Чтобы шарнирные реакции не попали в уравнения суммы моментов, эти уравнения следует записывать относительно точки, в которой расположен шарнир, т.е. точки *ш*.

Тогда получается система 4 уравнений:

$$\begin{aligned} &\sum Z = 0; \\ &\sum M_ш^{лев} = 0; \\ &\sum У = 0; \\ &\sum M_ш^{прав} = 0. \end{aligned} \qquad (3)$$

Важно помнить, что уравнения моментов обязательно составляются относительно шарнира. Иначе в уравнения войдут ненужные нам реакции в шарнире. Составим для нашей задачи 4 уравнения с четырьмя неизвестными:

- первое уравнение

$$\sum Z = -H_B = 0; \quad H_B = 0.$$

- второе уравнение

$$\sum M_ш^{лев} = 0;$$

$$\sum M_ш^{лев} = -R_B \frac{l}{2} + q\frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} = 0;$$

$$R_B = \frac{ql^2}{l \cdot 4} = \frac{ql}{4}.$$

- третье уравнение

$$\sum Y = 0;$$

$$R_B + R_A + R_C - q\,2l = \frac{ql}{4} + R_A + R_C - q\,2l = 0;$$

$$R_A + R_C = \frac{7ql}{4};$$

$$R_A = \frac{7}{4}ql - R_C;$$

$$\frac{7}{4}ql - R_C + 3R_C = \frac{9}{4}ql;$$

$$2R_C = \frac{2}{4}ql;$$

$$R_C = \frac{1}{4}ql;$$

$$R_A = \frac{7}{4}ql - R_C = \frac{6}{4}ql.$$

- четвёртое уравнение

$$\Sigma M_ш^{прав} = 0;$$

$$R_A\frac{l}{2} + R_C(l + \frac{l}{2}) - q\,(l + \frac{l}{2})\frac{l + \frac{l}{2}}{2} = 0;$$

$$R_A + 3R_C = \frac{9}{4}ql.$$

Если значения q и l заданы, можно определить абсолютные значения опорных реакций.

Пример 5. Рассмотрим схему, показанную на рис.14.

Запишем уравнения равновесия по формулам 3, с.15.

Из первого уравнения определяем H_A. $H_A = 0$

Второе уравнение – сумма моментов относительно шарнира:

$$\Sigma M^{прав}{}_ш = 0;$$

$$R_B \cdot 6 + M - q \cdot 3 \cdot 4{,}5 = 0;$$

$$R_B = (q \cdot 13{,}5 - M) / 6 = (135 - 15) / 6 = 20 \text{ (кН)}.$$

Третье уравнение равновесия:

$$\Sigma Y = 0;$$

$$R_A + R_B + P - q \cdot 3 - q \cdot 3 = 0;$$
$$R_A = q \cdot 6 - P - R_B = 60 - 10 - 20 = 30\ (кН).$$

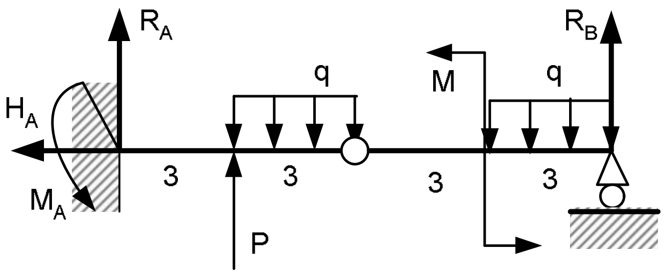


Рис.14. Схема балки к примеру 5

Четвертое уравнение позволяет определить последнее четвертое неизвестное момент заделки M_A.

$$\Sigma M^{лев}_{ш} = 0;$$
$$M_A + q \cdot 3 \cdot 1{,}5 - P \cdot 3 - R_A \cdot 6 = 0;$$
$$M_A = 3P + 6R_A - 4{,}5q = 3 \cdot 10 + 6 \cdot 30 - 4{,}5 \cdot 10 =$$
$$= 30 + 180 - 45 = 165\ (кН \cdot м).$$

Таким образом, все связи определены.

Пример 6. Рассмотрим пример решения трёхопорной балки (рис.15).

$q = 10$ *кН/м* ; $P = 10$ *кН*; $M = 15$ *кНм.*

Запишем четыре уравнения равновесия по формулам 3, с.15.

Из первого уравнения определяем H_A. $H_A = 0$

Второе уравнение – сумма моментов относительно шарнира:

$$\Sigma M^{пр}_{ш} = 0;$$
$$R_B \cdot 6 + M - q \cdot 3 \cdot 4{,}5 + Rc \cdot 11 = 0;$$
$$6R_B + 11R_C = q \cdot 13{,}5 - M = 135 - 15 = 120\ (кН).$$

В этом уравнении две неизвестные силы и его использовать ещё рано.

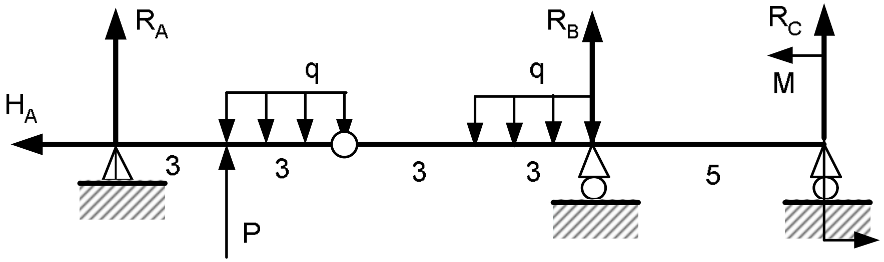


Рис.15. Схема балки к примеру 6

Третье уравнение равновесия:

$$\Sigma Y = 0;$$
$$R_A + R_B + P - q \cdot 3 - q \cdot 3 + Rc = 0;$$
$$R_A + R_B + Rc = q \cdot 6 - P = 60 - 10 = 50\ (Кн).$$

В этом уравнении имеется три неизвестные связи. Используем его позже.

Четвертое уравнение позволяет определить последнее четвертое неизвестное:

$$\Sigma M^{лев}_{ш} = 0;$$
$$q \cdot 3 \cdot 1{,}5 - P \cdot 3 - R_A \cdot 6 = 0;$$
$$-3P - 6R_A + 4{,}5q = 0;$$
$$-3 \cdot 10 - 6R_A + 4{,}5 \cdot 10 = 0;$$
$$-30 + 45 - 6R_A = 0;$$
$$R_A = 15/6 = 2{,}5\ (кНм).$$

Подставляем полученное значение в предыдущее уравнение.

$$2{,}5 + R_B + Rc = 50\ (кН);$$
$$R_B + Rc = 50 - 2{,}5 = 47{,}5\ (кН).$$

В этом уравнении осталось 2 неизвестные силы.

В результате получена система двух уравнений с двумя неизвестными.

$$6R_B + 11R_C = 120;$$
$$R_B + Rc = 47,5.$$

Выразим одну неизвестную силу из второго уравнения:

$$R_B = 47,5 – Rc.$$

Подставим это выражение в первое уравнение:

$$6 \cdot (47,5 – Rc) + 11R_C = 120;$$
$$285 – 6Rc + 11R_C = 120;$$
$$5R_C = - 165;$$
$$R_C = - 33\ (кН).$$

Полученное значение возвращаем в формулу:

$$R_B = 47,5 – Rc = 47,5 – (–33) = 80,5.$$

Таким образом, все опорные реакции определены.

Для самопроверки решите самостоятельно ряд задач. Схемы задач и ответы, которые вы должны получить приводятся на рис. 16, 17 и 18.

Задание 1.
$q = 10$ *кН/м;* $P = 10$ *кН;* $M = 15$ *кН*м;*
$R_A = 41,67$ *кН;* $R_B = 48,33$ *Кн.*

Задание 2.
$q = 10$ *кН/м;* $P = 10$ *кН;* $M = 15$ *кН*м;*
$R_A = 44,17$ *кН;* $R_B = 35,83$ *кН;* $M_A = 85,5$ *кН*м.*

Задание 3.
$q = 10$ *кН/м;* $P = 10$ *кН;* $M = 15$ *кН*м;*
$R_A = 22$ *кН;* $R_B = 38$ *кН;* $R_C = 20$ *кН.*

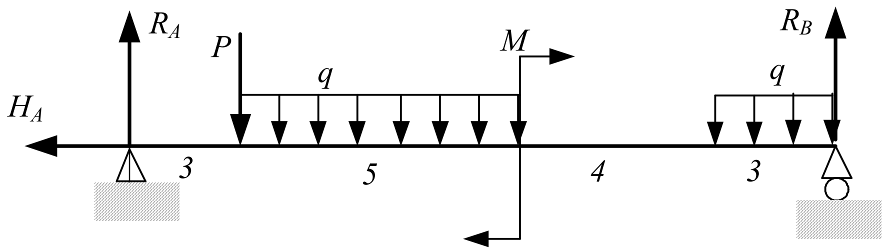


Рис.16. Схема балки к заданию 1

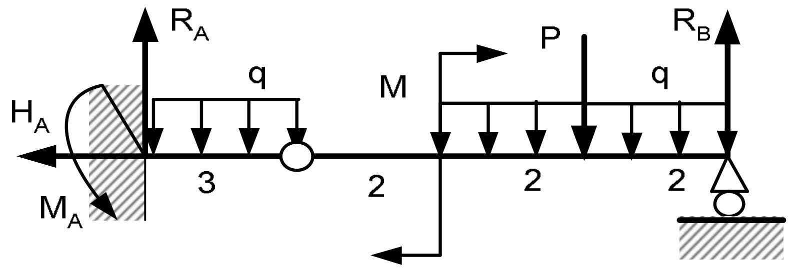


Рис.17. Схема балки к заданию 2

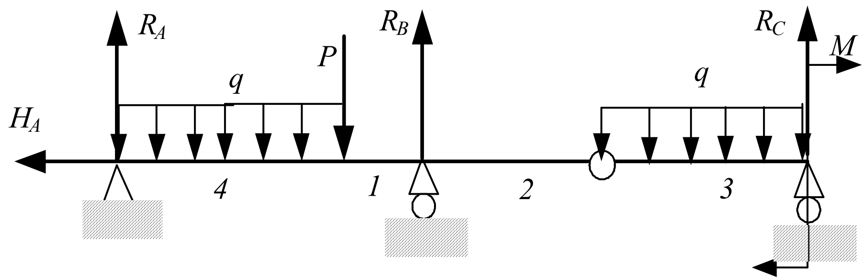


Рис.18. Схема балки к заданию 3

2 ЭТАП.
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ И ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР

2.1. Внутренние силовые факторы

Известно, что внешние силы, воздействуя на тело, приводят к его деформации.

Если деформация упругая, то после снятия внешних нагрузок тело возвращает свои прежние размеры и форму. В кристаллических телах атомы образуют кристаллическую решетку. При деформации тела, деформируется эта решетка, меняется взаимное положение атомов. Тогда возникают силы, стремящиеся вернуть все в исходное состояние. Эти силы называют внутренними силами. Пока деформация упругая они существуют. При пластической деформации связи рвутся и, понятно, возврат невозможен. Возвращение тела в начальное состояние происходит за счет внутренних сил. Наша задача – научиться рассчитывать эти силы.

В сопротивлении материалов вводится понятие внутренних силовых факторов (ВСФ), которых в природе не существует, но их применение не искажает правильность решения задачи. Внутренние силовые факторы действуют в поперечных сечениях бруса.

Их возникновение можно объяснить следующим образом. В каждом поперечном сечении все внутренние силы геометрически складываются. Применяя правила сложения векторов, мысленно к первой внутренней силе прибавим вторую, к их сумме – третью и т.д. В результате останется единственная суммарная сила, приложенная в центр тяжести сечения. Таким же образом, сложим все внутренние моменты и получим суммарный или главный момент. Далее вектор главной силы разложим на проекции по осям X, Y, Z, которые исходят из

центра тяжести сечения. Аналогично поступим с главным моментом. В результате получим 6 величин, которые и называются внутренними силовыми факторами. Схема разложения на проекции показана на рис. 19.

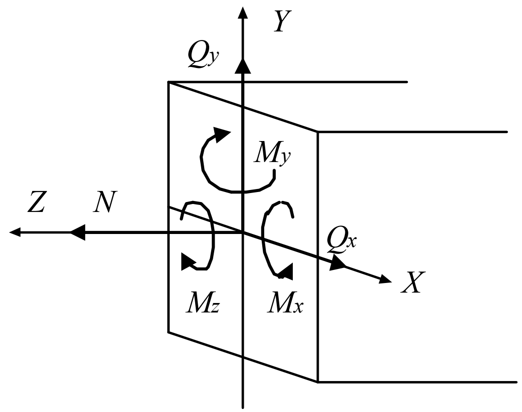


Рис.19. Внутренние силовые факторы

Проекция суммарной силы на продольную ось Z обозначается N и называется продольной силой. Проекции на поперечные оси X и У называются поперечными силами и обозначаются соответственно Q_y и Q_x. Составляющая M_z – крутящим моментом. Составляющие M_x и M_y – изгибающими моментами.

По наличию в сечении ВСФ определяют вид деформации. Обратите внимание, вид деформации определяют не по внешним силам, а по имеющимся в сечении ВСФ. Если в сечении возникает только один ВСФ, а остальные пять отсутствуют (равны нулю), то деформация называется *простой.*

Четыре наименования ВСФ предполагают четыре вида простых деформаций:

- присутствует только N – осевое растяжение или сжатие;
- только Q_y или Q_x – чистый сдвиг;
- присутствует только M_z – чистое кручение;
- имеется только M_x или M_y – чистый изгиб.

Если в сечении возникает больше одного ВСФ, то деформация называется *сложной*. Назвать все виды сложных деформаций невозможно, т.к. их количество огромно. Оно равно числу возможных комбинаций ВСФ выступающих попарно, по три, по четыре и по пять.

2.2. Метод сечений

Для расчета ВСФ в сопромате применяется простой, но эффективный способ, называемый *методом сечений*. На каждом участке бруса нужно провести одно поперечное сечение.

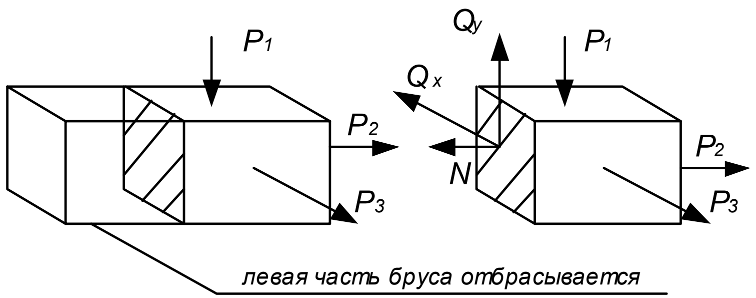


Рис.20. Иллюстрация метода сечений

Каждым сечением брус разрезается надвое (рис.20). Одну из частей отбрасывают. В открывшемся сечении становятся видны внутренние силы. До проведения сечения брус находился в равновесии. Равновесие обеспечивалось за счет внешних активных сил и реакций опор. После отбрасывания одной из

частей некоторые силы, включая опорные реакции, в обеспечении равновесия не участвуют. Но, несмотря на это, оставшаяся часть бруса все равно будет находиться в равновесии. Теперь равновесие соблюдается за счет оставшихся внешних сил и появившихся в раскрытом сечении внутренних сил. Таким образом, можно составить уравнение равновесия: внешние силы плюс внутренние равны нулю. Отсюда внутренние силы можно рассчитать как сумму сил внешних. Это и есть метод сечений. Чтобы вычислить некоторый ВСФ, нужно сложить соответствующие внешние силы, имеющиеся в оставшейся части бруса с учетом знака. Продольная сила равна сумме внешних сил, действующих вдоль оси бруса или сумме проекций этих сил на ось. Поперечная сила равна соответственно сумме поперечных сил, крутящий момент - сумме внешних крутящих моментов, изгибающий - сумме изгибающих.

2.3. Правила знаков

Для *продольной силы*. Если внешняя сила растягивает участок, то в уравнение внутренней продольной силы она подставляется со знаком плюс, если сжимает - то со знаком минус (рис.21). В данном случае $N = - P_1 + P_2$.

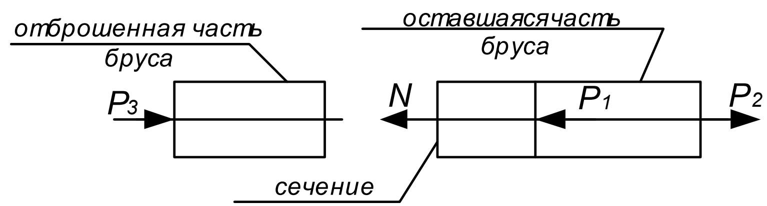


Рис.21. Правило знаков для продольной силы

Для *поперечной силы*. Если внешняя сила поворачивает участок по часовой стрелке, то в уравнение внутренней поперечной силы она подставляется со знаком плюс, если против часовой - то со знаком минус (рис.22).

В данном случае $Q_y = - P_1 + P_2$.

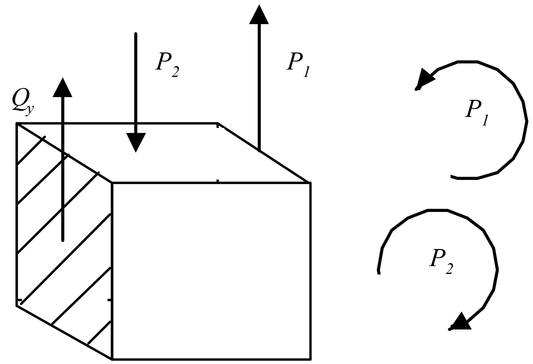


Рис.22. Правило знаков для поперечной силы

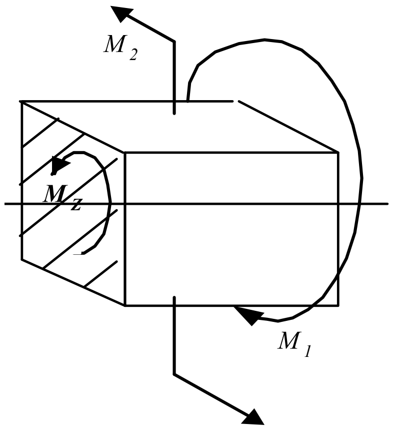


Рис.24. Правило знаков для крутящего момента

Для *крутящего момента*. Если внешний момент поворачивает участок вокруг оси бруса против часовой стрелки, то в уравнение внутреннего крутящего момента он

подставляется со знаком плюс, если по часовой - то со знаком минус. Важно! *На отсеченную часть нужно смотреть со стороны сечения!* В данном случае $M_z = - M_1 + M_2$ (рис.23).

Для *изгибающего момента*. При расчете балки на изгиб в сопромате применяется следующая модель: балка представляет собой набор продольных волокон (веник). При изгибе каждое волокно либо растягивается, либо сжимается независимо от соседних. Волокна не создают давление на соседние волокна.

Если внешний момент изгибает балку таким образом, что происходит сжатие ее верхних волокон (рис.24а), то в уравнение внутреннего изгибающего момента он подставляется со знаком плюс, если сжатие нижних волокон, как на рис.24 б - то со знаком минус.

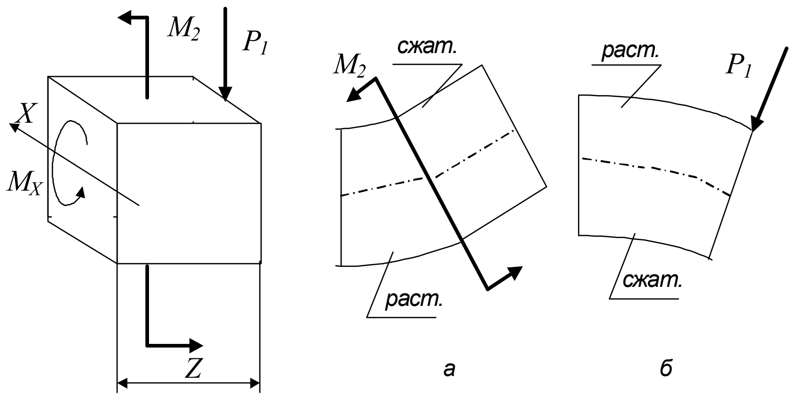


Рис.24. Правило знаков для изгибающего момента

В данном случае $M_x = - P_1 \cdot Z + M_2$.

На рис.25 представлена схема, изображающая правила знаков для ВСФ.

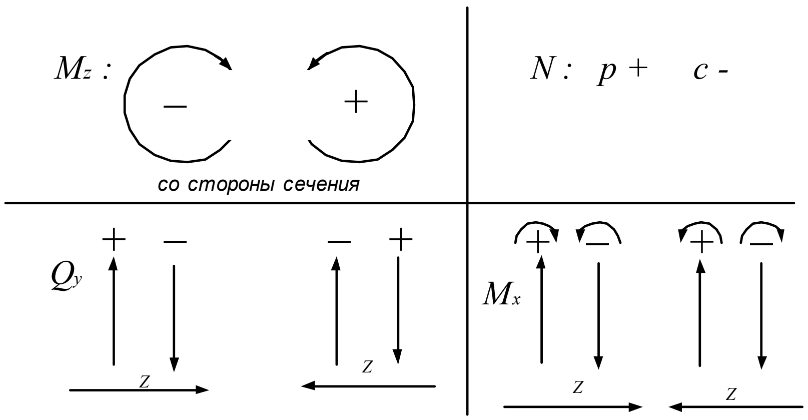


Рис.25. Схема, изображающая правило знаков ВСФ

2.4. Построение эпюр ВСФ

По составленным уравнениям далее нужно построить эпюры ВСФ. *Эпюра* - это график, показывающий изменение какой - либо величины (в нашем случае ВСФ) по координате, построенный только по характерным точкам, например на границах участков. Эпюру принято штриховать линиями, перпендикулярными оси бруса. Внутри эпюры указывают ее знак - плюс или минус (рис.26). Построив эпюры можно определить опасное сечение - это сечение, в котором, в первую очередь, возможно разрушение. Опасным является то сечение, в котором эпюра данного ВСФ максимальна. На рис.26 это сечение В.

Пример 7. Балка состоит из одного участка. Расположим начало координат в т.В. Проведем сечение на произвольном расстоянии Z. Это расстояние может быть любым в пределах от 0 до 2м. Отбросим левую часть балки. Запишем уравнения ВСФ

как сумму внешних сил. Из шести возможных ВСФ возникнет только два: поперечная сила Q_y и изгибающий момент M_x.

Схема расчета ВСФ показана на рис.27.

Граница участка:

$$0 \le Z \le 2м.$$

Уравнение поперечной силы:

$Q_y = -P = -2кН$ - это уравнение прямой постоянной линии.

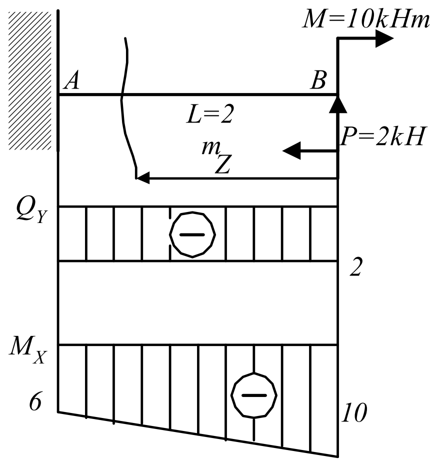
Уравнение изгибающего момента:

$M_x = -M + P \cdot Z = -10\,kH \cdot m + 2\,kH \cdot Z$ - это уравнение прямой наклонной линии.

Чтобы построить такую линию, нужно вычислить значение момента в двух точках: в начале и в конце участка.

$$M_x|_{Z=0м} = -M + P \cdot Z = -10kHm$$

$$M_x|_{Z=2м} = -M + P \cdot Z = -10kHm + 2kH \cdot 2м = -6kHm\ .$$



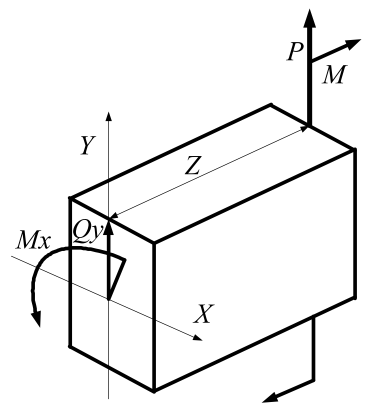


Рис.26. Эпюры ВСФ при плоском изгибе

Рис.27. ВСФ при изгибе балки к примеру 7

Далее строим эпюры. Эпюра поперечной силы является прямой, параллельной оси линией. Для ее построения в масштабе откладываем значение –2 кН в начале и в конце участка и соединяем прямой линией. Эпюра изгибающего момента представляет собой наклонную прямую линию. Для ее построения откладываем значения –10 кН·м в начале участка и –6 кН·м в конце участка. Полученные точки соединяем прямой линией. Далее обе эпюры штрихуем так, как это показано на рис.26.

2.5. Правила контроля эпюр при плоском изгибе

При плоском поперечном изгибе возникает два ВСФ - поперечная сила и изгибающий момент (если Q_y, то M_x, так как сила по Y сгибает плоскость X). Рассмотрим подробнее правило знаков для изгибающего момента. Если момент сжимает верхние волокна, то он считается положительным. Положительная эпюра откладывается сверху. Значит, если сжимаются верхние волокна, то эпюра сверху. Если момент сжимает нижние волокна, то он считается отрицательным. Отрицательная эпюра откладывается снизу. Значит, если сжимаются нижние волокна, то эпюра снизу. Отсюда следует, что эпюра момента всегда оказывается со стороны сжатых волокон. Поэтому говорят, что эпюра изгибающего момента строится на сжатом волокне. Это можно считать тоже правилом знаков для случая, когда определить, где нижние, а где верхние волокна невозможно.

Запишем 7 правил, применяя которые можно проконтролировать правильность построения эпюр.

1. В сечении, в котором приложена внешняя сосредоточенная сила, на эпюре внутренней силы Q_y должен быть скачок (ступенька) на величину и направление этой силы.
2. В сечении, в котором приложен внешний сосредоточенный момент, на эпюре внутреннего момента M_x должен быть скачок (ступенька) на величину и направление этого момента.
3. На концах балки внутренний момент должен быть равен нулю, если нет внешнего момента.
4. В промежуточном шарнире изгибающий момент равен нулю, поэтому эпюра M_x в шарнире должна пройти через ноль, т.е. пересечь ось.
5. На участке, на котором приложена равномерно распределенная нагрузка, эпюра Q_y – наклонная прямая линия, а эпюра M_x – парабола.
6. На участке, на котором эпюра Q_y – положительна, эпюра M_x возрастает, Q_y отрицательна – M_x убывает, Q_y равна нулю – M_x постоянная прямая.
7. В сечении, в котором эпюра Q_y пересекает ось, эпюра M_x обязательно имеет экстремум.

Шестое и седьмое правила являются следствием теоремы Журавского, согласно которой поперечная сила есть первая производная от изгибающего момента по координате:

$$\frac{dM_x}{dz} = (M_x)' = Q_y.$$

2.6. Примеры построения эпюр ВСФ при плоском изгибе

Пример 8. Построим эпюры ВСФ для балки, изображенной на рис.7, с.9. Опорные реакции для нее мы вычислили в примере 1.

l, q – заданы, $R_A = R_B = 0{,}5\ ql$

Для вычисления ВСФ применяем метод сечений. Балка содержит всего один участок. В произвольном месте на этом участке проведем сечение. Начало координат расположим, например, в точке А.

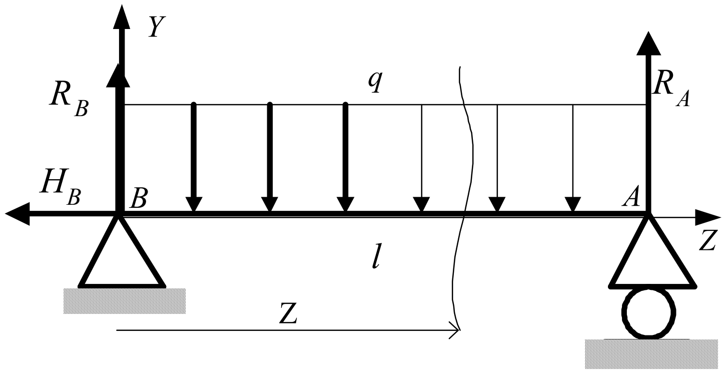


Рис.28. Схема для расчета ВСФ к примеру 8

Чтобы показать, что сечение проведено действительно в произвольном месте участка, покажем, что расстояние до сечения есть величина переменная «Z» (рис.28) , которая может принимать любое значение в диапазоне $0 \le Z \le l$.

Теперь отбросим правую часть балки и вычислим ВСФ в сечении, применяя метод сечений.

Поперечная сила в сечении равна сумме двух внешних сил, оставшихся в левой части бруса – это сосредоточенная сила R_A и сила, возникающая от действия распределенной нагрузки q.

Опорная реакция в уравнение будет подставлена со знаком «+» в соответствии с правилом знаком для Q_y (рис. 25), а распределенная нагрузка – со знаком минус.

Полная сила от действия нагрузки рассчитывается как площадь прямоугольника: высота фигуры q, а ширина – расстояние от т. В до сечения, т.е. Z (рис. 29).

Тогда $Q_y = R_B - q \cdot Z = 0{,}5\ q \cdot l - q \cdot Z$.

Записанное уравнение является уравнением прямой, так как переменная Z находится в степени 1.

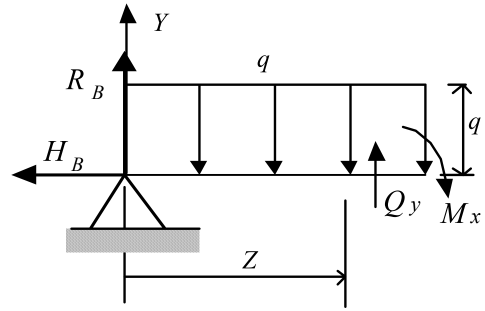


Рис.29. Схема для расчета ВСФ к примеру 8

Чтобы построить прямую, нужно вычислить значение функции в двух точках. За такие точки удобно принять начало и конец участка. Тогда

$$Q_y \big|_{Z=0} = 0{,}5\ ql$$

$$Q_y \big|_{Z=l} = -\ 0{,}5\ ql$$

Далее вычисляем внутренний момент.

В соответствии с методом сечений внутренний момент равен сумме всех внешних моментов. В нашем случае такими моментами являются два момента: момент, создаваемый опорной реакцией и момент, создаваемый распределенной нагрузкой.

Момент силы H_B равен 0, так как эта сила проходит через сечение и плечо ее равно нулю.

Момент от силы R_B равен произведению этой силы на плечо, т.е. на расстояние от т.В до сечения. В нашем случае это расстояние обозначено как Z (рис.29).

Запишем: $M(R_B) = R_B \cdot Z$

Знак этого момента будет положительным, так как момент этой силы изгибает балку так, что сжимаются верхние волокна балки (рис.30а).

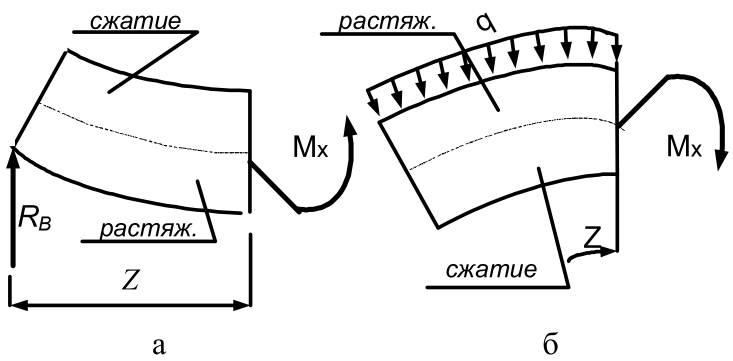


Рис. 30. Пояснения к выбору знака момента

Момент, создаваемый распределенной нагрузкой будет отрицательным, т.к. он изгибает балку так, что сжимаются нижние волокна балки (рис.30б).

Теперь посмотрим на рис.31. Этот рисунок показывает, что, кажется, от равномерно распределенной нагрузки балки изогнется так, что произойдет сжатие верхних волокон, а значит, знак его будет положительный. Это наиболее часто встречающаяся ошибка в работах студентов. Изгиб, показанный на рис. 31, возникает в том случае, если слева в т.В есть опора, или эквивалентная замена опоры – опорная реакция R_B.

Таким образом, изгиб, показанный на этом рисунке, возникает при совместном действии двух моментов – момента от опорной реакции и распределенной нагрузки. Применяя метод сечений, мы рассматриваем каждый момент в отдельности, а результат складываем. Поэтому при действии распределенной

нагрузки без учета опоры изгиб будет таким, как показано на рис.30 б.

Величина момента от распределенной нагрузки вычисляется как произведение полной силы на плечо.

Полная сила рассчитывается как площадь прямоугольника $Q = q \cdot Z$. Плечо этой силы отсчитывается как расстояние от сечения, в котором вычисляется внутренний момент до центра тяжести прямоугольника, т.е. половина расстояния Z. Тогда величина момента станет $- q \cdot Z \cdot Z/2$, *а* весь внутренний момент $M_x = R_B \cdot Z - q \cdot Z^2/2$.

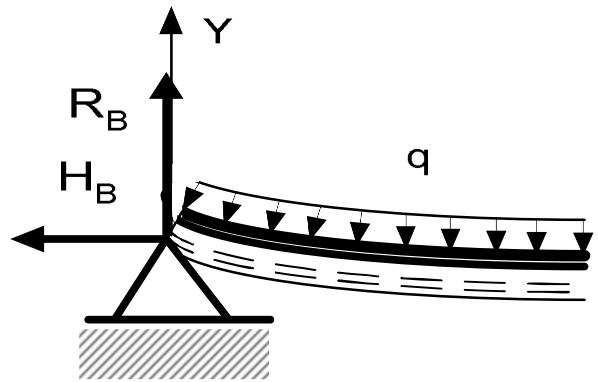


Рис. 31. Схема, показывающая сжатие волокон при совместном действии моментов.

Переменная (координата вдоль оси балки) находится в степени 2 (в квадрате), следовательно, записанное уравнение является уравнением параболы. Знак «–» перед Z/2 говорит о том, что ветви параболы направлены вниз (парабола выпуклостью вверх).

Для построения этой параболы необходимо вычислить значение момента на границах участка, т.е. в точках с координатами 0 м и *l* м.

$$M_x|_{Z=0} = R_B \cdot 0 - q \cdot \frac{0^2}{2} = 0;$$

$$M_x|_{Z=l} = q\frac{l}{2} \cdot l - q \cdot \frac{l^2}{2} = 0.$$

По значениям вычисленных величин на границах участков строим эпюры внутренней поперечной силы и изгибающего момента. Эпюры принято подписывать и указывать значения в характерных точках – на границах участков, точек экстремумов и т.д. В рассматриваемом примере эпюры будут выглядеть так, как показано на рис.32.

Для поперечной силы, отложенные две точки, соединяем прямой линией в соответствии с полученным уравнением. Значения изгибающего момента на концах балки оказались равны 0. Эти две точки с нулевыми значениями соединяем параболической линией в соответствии с полученным уравнением изгибающего момента. При этом нужно учитывать, что ветви параболы прогибаются вниз. Таким образом, линию можно провести только в том, случае, если у нее есть экстремум, в данном случае максимум. Максимум приходится на середину балки. Об этом говорит то, что эпюра поперечной силы в середине пересекает ось и в соответствии с правилом контроля эпюр № 7, эпюра момента действительно должна иметь экстремум.

Эпюра изгибающего момента в соответствии с правилом знаков должна располагаться со стороны сжатого волокна, т.е. сверху (рис.31).

Максимум на эпюре M_x вычисляется с помощью записанного ранее уравнения момента, подставляя вместо координаты Z координату середины балки, т.е. *l/2*.

$$M_x|_{Z=l/2} = \frac{0{,}5 \cdot ql \cdot l}{2} - \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{1}{8}ql^2 = 0{,}125ql^2 .$$

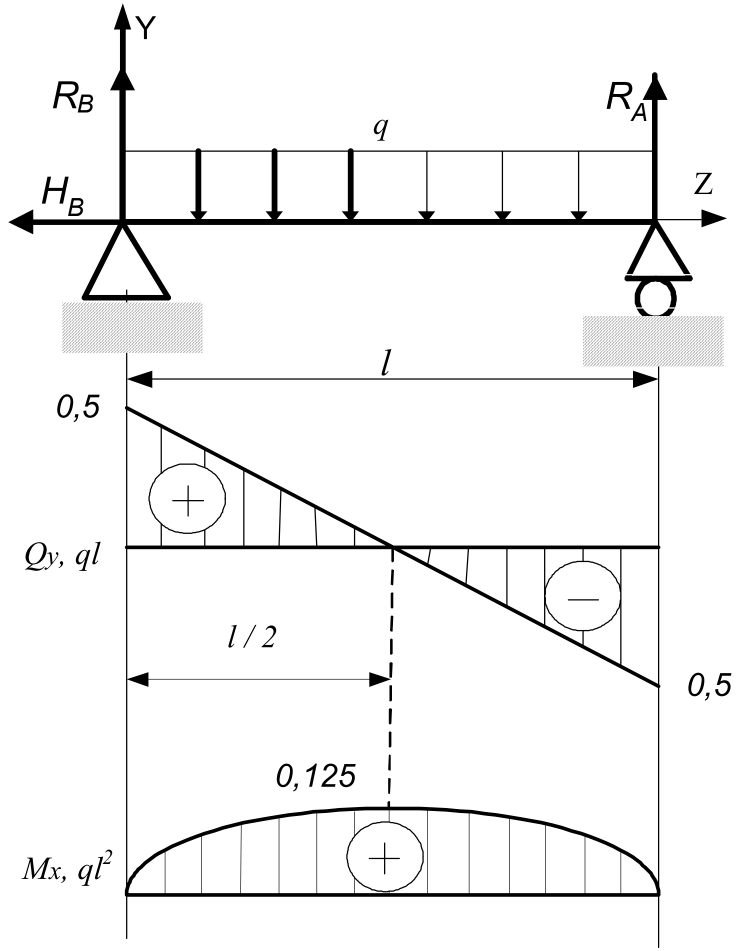


Рис.32. Эпюры поперечной силы и изгибающего момента к примеру 8

Построив эпюры, можно определить опасное сечение балки.

Таким сечением является сечение, в котором изгибающий момент наибольший по абсолютному значению.

В нашем случае опасным сечением является сечение, расположенное посередине балки, где изгибающий момент максимален.

Пример 9. Построим эпюры внутренних силовых факторов для балки, рассмотренной в примере 2. Опорные реакции к этому моменту уже известны.

Рассматриваемая балка имеет три участка длиной 1 м, 8 м и 1 м. На каждом участке проведем сечение в произвольном месте участка.

Первый участок $0 \le Z_1 \le 1$.

Уравнения поперечной силы приравнивает внутреннюю силу единственной внешней силе:

$Q_y = R_A = 1,1$ – уравнение прямой постоянной линии.

Для ее построения не нужно считать значения поперечной силы на концах участка.

$M_x = R_A \cdot Z_1 = 1,1 \cdot Z_1$ – уравнение прямой линии, наклонной по отношению к оси.

Для ее построения нужно вычислить значения на концах участка.

$M_x|_{Z=0} = 0 \qquad M_x|_{Z=1} = 1,1$

Второй участок $1 \le Z_2 \le 9$.

Уравнение внутренней поперечной силы составляется как сумма двух внешних поперечных сил:

$Q_y = R_A - P_1 = 1,1 - 1 = 0,1$ – уравнение прямой постоянной линии.

Уравнения моментов можно составить так:

$M_x = R_A \cdot Z_2 - P_1 \cdot (Z_2 - 1) = 1,1 \cdot Z + 1 - Z_2 = 0,1 \cdot Z_2 + 1$

Плечо силы P_1 можно вычислить как разность длин двух отрезков: отрезка длиной Z_2 и полной длины первого участка, т.е. 1 м. (рис.33).

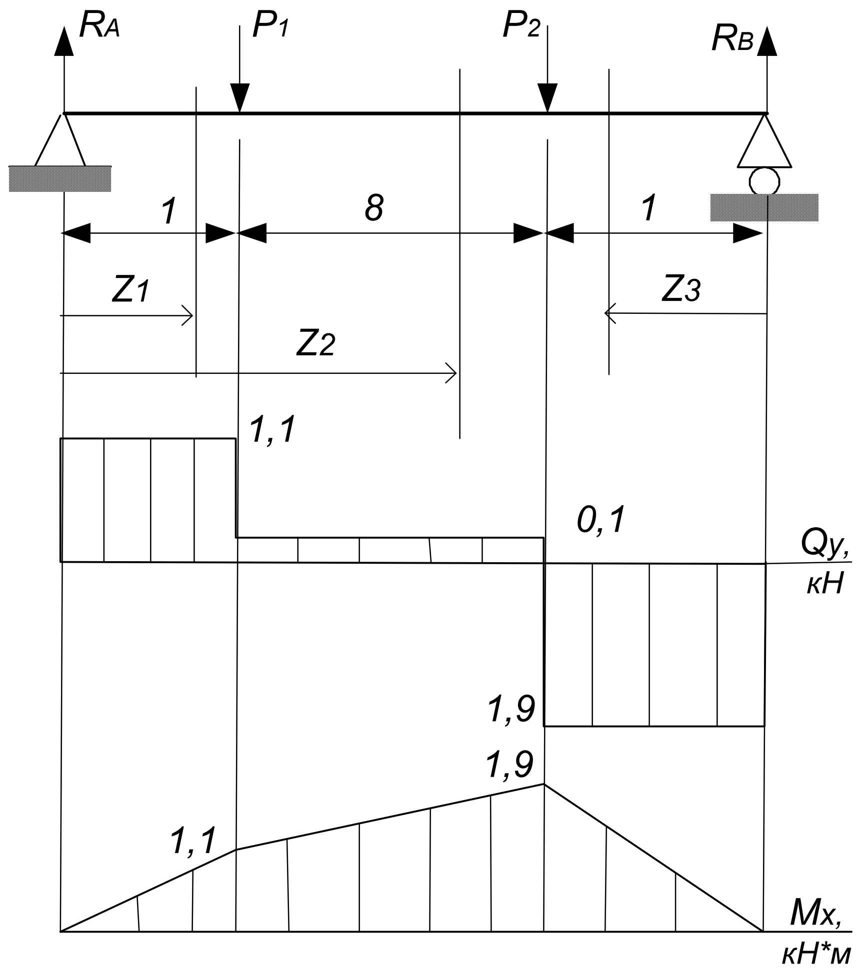


Рис.33. Эпюры поперечной силы и изгибающего момента к примеру 9

Полученное уравнение представляет собой уравнение наклонной прямой линии и для ее построения нужны две точки – начало и конец участка.

$M_x|_{Z=1} = 1{,}1 \qquad M_x|_{Z=9} = 0{,}1 \cdot 9 + 1 = 1{,}9\,.$

Третий участок рассмотрим с правой стороны. Начало координат расположим в точке В. Тогда $0 \le Z_3 \le 1$.

Запишем уравнения.

$Q_y = -R_B = -1{,}9$ - это уравнение прямой горизонтальной линии. Знак минус потому, что выбрана правая часть балки (см. правила знаков для Q_y).

$M_x = R_B \cdot Z_3 = 1{,}9 \cdot Z_3$ - это уравнение наклонной прямой линии.

$M_x|_{Z=0} = 0 \qquad M_x|_{Z=1} = 1{,}9\,.$

По данным этих расчетов строим эпюры. Результат построения эпюр показан на рис. 33. Из анализа эпюр следует, что опасным сечением является сечение, расположенное в точке приложения сосредоточенной силы P_2, там, где эпюра изгибающего момента максимальна.

Пример 10. Построим эпюры ВСФ для задачи, рассмотренной в примере 3. Опорные реакции на данный момент уже известны.

Решение задачи показано на рис. 34.

I участок $0 \le Z_1 \le 3$.

$Q_y = R_A = 62$ - уравнение горизонтальной прямой линии.

$M_x = R_A \cdot Z_1 - M_A = 62 \cdot Z_1 - 403$ - уравнение наклонной прямой линии.

Момент опорной реакции считается положительным, потому что от его действия сжимаются верхние волокна.

Сосредоточенный момент M_A изгибает балку так, что сжимаются нижние волокна и поэтому его знак отрицательный.

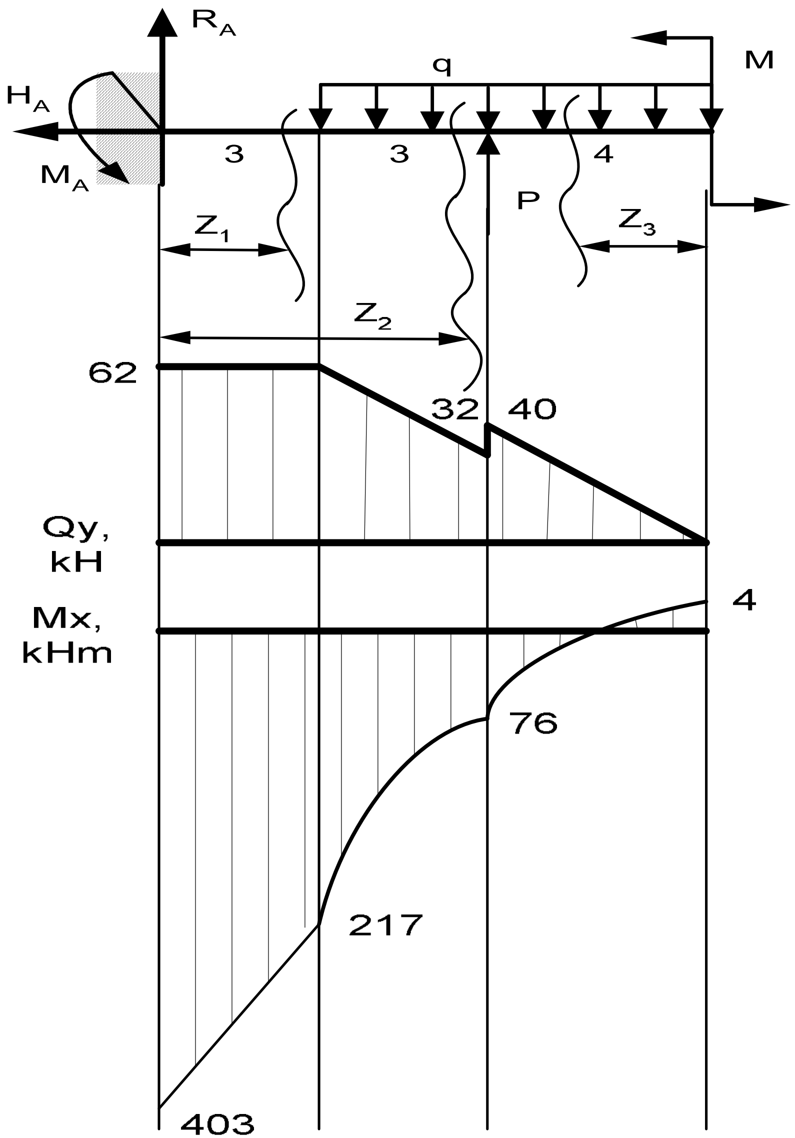


Рис.34. Эпюры ВСФ для примера 10

$M_x|_{Z=0} = -403 \qquad M_x|_{Z=3} = 217$.

II участок $3 \le Z_2 \le 6$.

$Q_y = R_A - q(Z_2 - 3) = 62 - 10(Z_2 - 3)$ - уравнение наклонной прямой линии.

$Q_y|_{Z=3} = 62 \qquad Q_y|_{Z=6} = 32$.

Обратите внимание, как вычисляется полная сила от распределенной нагрузки. Площадь прямоугольника есть произведение высоты q на ширину (Z – 3).

Уравнение внутреннего момента составляем путем сложения 3 внешних моментов:

$$M_x = R_A \cdot Z_2 - M_A - q(Z_2 - 3)\frac{Z_2 - 3}{2} =$$

$$= 62 \cdot Z_2 - 403 - 5(Z_2 - 3)^2.$$

Это уравнение отличается от уравнения изгибающего момента на первом участке тем, что добавляется еще один внешний момент – момент от распределенной нагрузки. Знак этого момента отрицательный, потому что от его действия сжимаются нижние волокна бруса.

Представленное уравнение есть уравнение прямой наклонной линии.

$M_x|_{Z=0} = -217 \qquad M_x|_{Z=3} = -76$.

Для вычисления момента от распределенной нагрузки сначала вычисляется полная сила как произведение высоты нагрузки Q на ширину (Z-3). Потом она умножается на плечо. Плечо отсчитывается как расстояние от сечения до середины приложения нагрузки, где расположен ее центр тяжести и равен половине ширины отрезка (Z – 3).

III участок балки $0 \le Z_3 \le 4$ *м.*

Третий участок рассмотрен с правой части балки. Начало координат при этом переносится в т.В. Следовательно,

расстояние до сечения есть величина переменная и лежащая в диапазоне от 0 до 4 м.

Поперечная сила рассчитывается как сумма всех внешних сил отсеченной левой части бруса. В качестве внешней силы здесь имеется только часть равномерной нагрузки.

Кроме того, обратите внимание на то, что правила знаков для поперечной силы выбирается наоборот.

$Q_y = +q \cdot Z_3$.

Это уравнение наклонной линии. Строим его по двум точкам:

$Q_y|_{Z=0} = 0 \qquad Q_y|_{Z=4} = 40$.

Внутренний момент равен сумме двух внешних моментов – сосредоточенного момента М и момента от распределенной нагрузки q. Чтобы определить знак момента М, представьте брус с отверстием, в которое вставлен стержень и концы стержня подвергаются воздействию пары сил. В результате возникает рычаг, который изогнет балку и можно будет легко увидеть сжатие волокон и знак этого момента (рис.35).

В нашем случае момент сжимает верхние волокна и, значит, подставляется в уравнение со знаком «+». А вот момент от распределенной нагрузки сжимает нижние волокна и, следовательно, будет отрицательным.

Тогда $M_x = -q\dfrac{Z_3^2}{2} + M = -5 \cdot Z_3^2 + 4$.

Момент от нагрузки считается в 2 этапа. Сначала определяется полная сила как произведение Q на ширину отрезка Z, потом результат умножается на расстояние до центра тяжести прямоугольника под линией нагрузки, т.е. на половину отрезка Z. В результате переменная оказывается в степени 2 и уравнение становится уравнением параболы, ветви которой направлены вниз (перед квадратом Z находится знак минус). Значения на границах участка:

$$M_x|_{Z=0} = 4 \qquad M_x|_{Z=4} = 4 - 5 \cdot 4^2 = 76 .$$

По вычисленным значениям строим эпюры сил и моментов (рис. 34).

Из эпюр следует, что опасным сечением является сечение на левом конце балки, закрепленное с помощью жесткой заделки, т.е. в т.А, где эпюра внутреннего изгибающего момента по абсолютному значению максимальна. Наибольшее значение изгибающего момента M_x = 403 кН*м. Наибольшее значение поперечной силы Q_y = 62 кН оказалось в том же сечении.

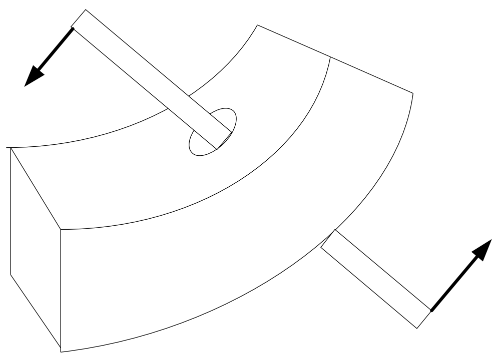


Рис. 35. Определение знака сосредоточенного момента.

Пример 11. Построим эпюры поперечной силы и изгибающего момента для балки, рассмотренной в примере 4. Опорные реакции определены.

Рассматриваемая балка состоит из двух участков. Промежуточный шарнир не дает границы участка, так как в этой точке не появляется новой силы или момента. Поэтому в нашей

задаче не 3, а только 2 участка – АВ и АС. На участке АВ сечение можно провести в любом месте до шарнира или после. Если на отрезке АВ выбрать 2 участка, т.е. до шарнира и после, то это не повлияет на правильность решения задачи. Добавление нового участка усложнит и увеличит время решения задачи.

Эпюры, получившиеся при решении этой задачи показаны на рис. 36.

I участок $0 \le Z_1 \le l$.

$Q_y = R_B - q{\cdot}Z_1 = 0{,}25\, q{\cdot}L - q \cdot Z_1$ – прямая наклонная линия.

$$Q_y|_{Z=0} = 0{,}25ql \qquad Q_y|_{Z=l} = 0{,}25ql - ql = -0{,}75ql .$$

$$M_x = R_B Z_1 - qZ_1^2 / 2 = 0{,}25ql\, Z_1 - qZ_1^2 / 2 .$$

Это уравнение параболы, ветви вниз. Строим по двум точкам на границах участка.

$$M_x|_{Z=0} = 0 \qquad M_x|_{Z=l} = 0{,}25ql^2 - q\frac{l^2}{2} = -0{,}25ql^2$$

II участок $0 \le Z_2 \le l$.

$Q_y = -Rc + q \cdot Z_2$ – это уравнение прямой наклонной линии.

$$Q_y|_{Z=0} = -0{,}25ql \qquad Q_y|_{Z=l} = -0{,}25ql + ql = 0{,}75ql .$$

Уравнение изгибающего момента:

$$Mx = R_C Z_2 - q\frac{Z_2^2}{2} = 0{,}25ql\, Z_2 - q\frac{Z_2^2}{2} .$$

Это уравнение параболы, ветви вниз. Строим по двум точкам на границах участка.

$$M_x|_{Z=0} = 0 \qquad M_x|_{Z=l} = 0{,}25ql^2 - q\frac{l^2}{2} = -0{,}25ql^2 .$$

Вычислим экстремумы эпюры моментов. Экстремумы определяются на основе правила контроля эпюр №7, в основе которого лежит теорема Журавского о дифференциальных зависимостях при плоском изгибе. Прочитайте еще раз это правило. Чтобы определить максимум, приравняем уравнение поперечной силы к нулю и, решив его, определим расстояние до пересечения этой линией оси.

Сначала для второго участка.

$Q_y = -Rc + q \cdot Z_2 = 0,\ Z_2 = Rc / q = 0{,}25\ ql / q = 0{,}25\ l.$

Таким образом, расстояние от правого конца балки до точки, в которой поперечная сила равна нулю и соответственно эпюра M_x имеет экстремум, равно *0,25 l.*

Далее эту координату подставляем в уравнение изгибающего момента, чтобы вычислить величину момента в этой точке.

$$M_x|_{Z=0{,}25l} = \frac{1}{4}ql \cdot \frac{1}{4}l - q\frac{(\frac{l}{4})^2}{2} = \frac{1}{32}ql^2 .$$

Таким же образом вычисляется экстремум на первом участке. Попробуйте вычислить его самостоятельно. Его величина окажется равной величине экстремального момента на втором участке.

В результате наибольший по абсолютной величине момент возникает в т.А – на средней опоре и его величина равна $0{,}25ql^2$. Таким образом, опасное сечение соответствует т.В для заданной балки.

Применяя 7 правил контроля эпюр при плоском изгибе, определим, насколько безошибочно мы решили задачу.

В сечении А на эпюре Q_y возникает скачок (ступенька). Ее величина должна равняться силе, приложенной в данной точке, т.е. $R_B = 6/4\ ql = (3/4 - (-3/4))\ ql = 6/4\ ql.$

На схеме заданной балки сосредоточенных моментов нет, поэтому эпюра M_x на границах участков во всех точках должна совпадать (ступеней быть не должно). Это правило выполняется.

На концах балки изгибающий момент должен быть равным 0, если здесь нет внешних сосредоточенных моментов. Это правило в нашем случае также выполняется.

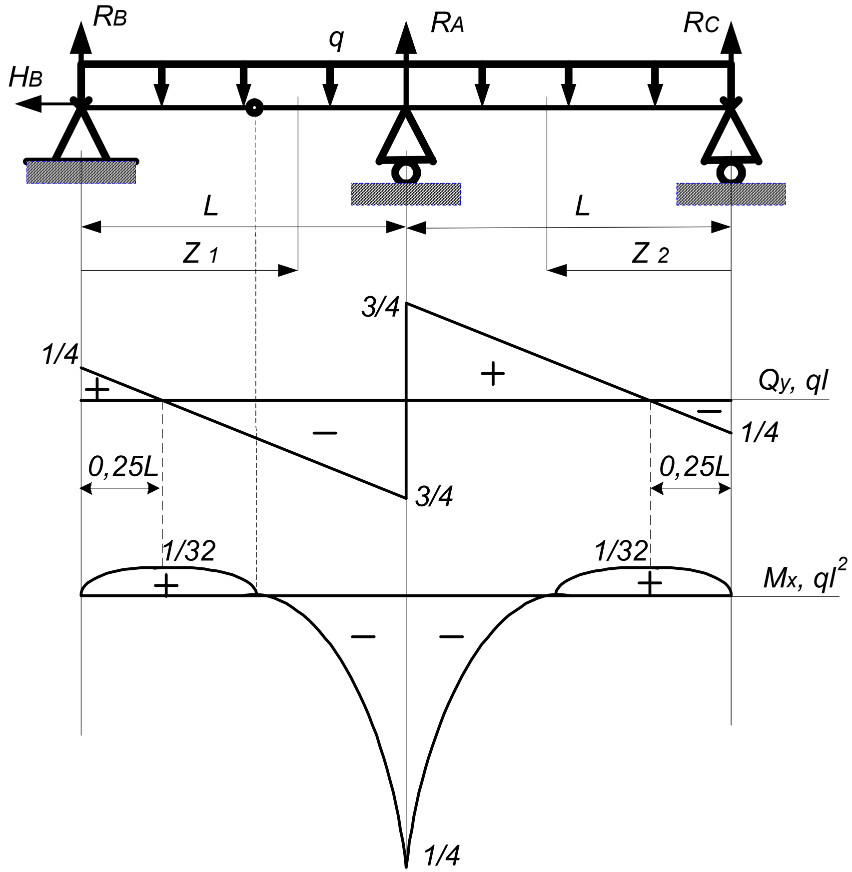


Рис.36. Эпюры ВСФ для примера 11

В промежуточном шарнире эпюра M_x должна пересекать ось, так как момент в шарнире равен 0. Правило выполняется.

На участках, где приложена равномерно распределенная нагрузка, эпюра Q_y должна быть прямой наклонной линией, а эпюра M_x – параболой. Это правило на обоих участках балки выполняется.

До координаты *0,25l* эпюра Q_y – положительна, значит, эпюра M_x должна возрастать. Далее до координаты опоры А эпюра сил отрицательна и эпюра момента убывает.

На втором участке по длине 0,*75l* эпюра поперечной силы положительна и эпюра внутреннего момента возрастает.

И на последнем отрезке $Q_y < 0$, поэтому M_x возрастает. Таким образом, контроль правильности на основе дифференциальных зависимостей между поперечной силой и изгибающим моментом также выполняется.

В сечениях с координатами *0,25l* и *1,75l* эпюра Q_y пересекает ось, поэтому эпюра M_x в этих точках имеет экстремум, в данном случае максимум.

Контроль правильности построения эпюр ВСФ по всем 7 пунктам выполняется. Ошибок в расчетах и построении нет.

Пример 12. Построим эпюры внутренних сил и моментов для балки, рассмотренной в примере 5. Опорные реакции на данный момент уже определены.

Рассматриваемая балка включает в себя 4 участка.

Границами участков являются точки приложения сосредоточенных и моментов. Кроме того, границей участка является точка начала распределенной нагрузки или точка завершения такой нагрузки. Вообще, правило выбора границы участка связано с уравнениями ВСФ. На разных участках уравнения ВСФ должны быть различны. Если сечение, проведенное рядом с предыдущим, дает абсолютно одинаковые уравнения всех ВСФ, то это означает, что сечение проведено на том же самом участке. Уравнения изменяются тогда, когда происходят изменения во внешних нагрузках. В данном примере граница второго и третьего участков случайно совпали с месторасположением шарнира.

На каждом из четырёх участков проведем одно сечение. Пронумеруем их в порядке следования слева направо. При

вычислении ВСФ в первом сечении удобнее отбросить правую часть бруса, так как она сложнее.

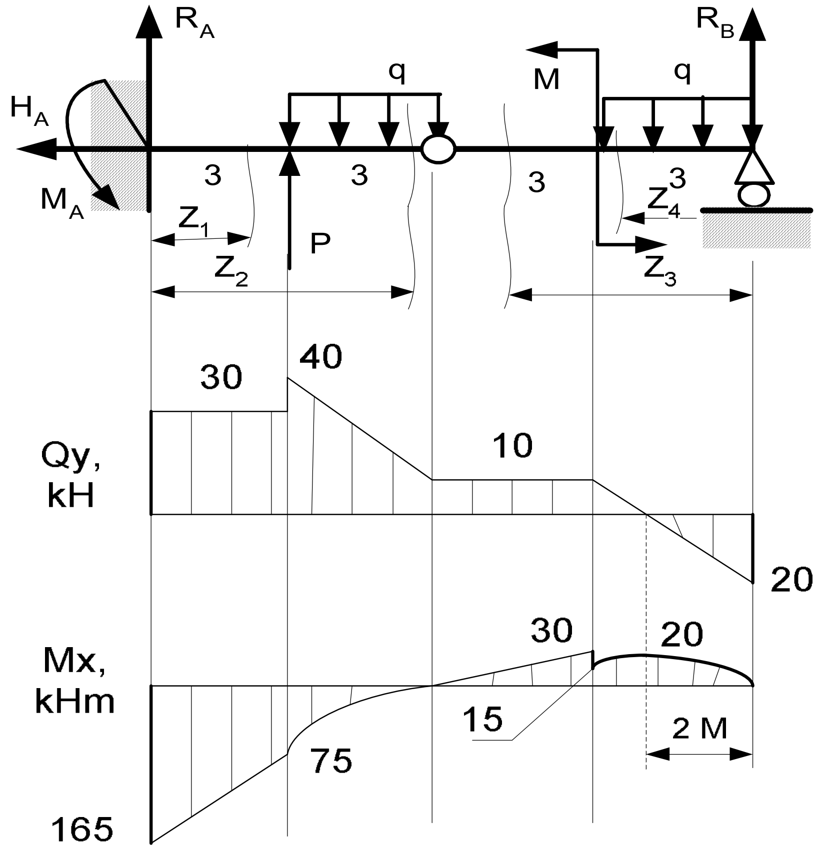


Рис.37. Эпюры ВСФ для примера 12

То же самое касается второго участка. А вот третий и четвертый участки лучше рассматривать справа.

Решение задачи показано на рис.37.

I участок $0 \le Z_1 \le 3$.

$Q_y = R_A = 30$ – уравнение горизонтальной прямой.

$M_x = R_A \cdot Z_1 - M_A = 30 \cdot Z_1 - 165$

Получено уравнение наклонной прямой. Вычисляем значения на границах.

$Mx|_{z=0} = -165 \qquad Mx|_{z=3} = -75$

II участок $3 \le Z_2 \le 6$.

$Q_y = R_A + P - q(Z_2 - 3) = 30 + 10 - 10\,(Z_2 - 3) =$

$=40 - 10\,(Z_2 - 3)$–это уравнение наклонной прямой.

$Q_y|_{Z=3} = 40 \qquad Q_y|_{Z=6} = 10$

$Mx = R_A \cdot Z_2 - M_A + P \cdot (Z_2 - 3) - q(Z_2 - 3)^2 / 2 = 30 \cdot Z_2 - 165 + 10\,(Z_2 - 3) - 5 \cdot (Z_2 - 3)^2$.

Получено уравнение параболы, ветви вниз. Вычисляем значения на границах.

$M_x|_{Z=3} = -75 \qquad M_x|_{Z=6} = 0$

Так как участки выбраны последовательно, а сечение IV участка мы рассматриваем с противоположного конца, то сначала запишем уравнения для IV участка.

IV участок $0 \le Z_4 \le 3$.

$Q_y = -R_B + q \cdot Z_4 = -20 + 10 \cdot Z_4$ – уравнение наклонной прямой.

$Q_y|_{Z=3} = -20 \qquad Q_y|_{Z=6} = 10$.

$M_x = R_B \cdot Z_4 - q \cdot Z_4^2 / 2 = 20 \cdot Z - 5 \cdot Z_4^2$.

Получено уравнение параболы, ветви вниз. Вычисляем значения на границах.

$M_x|_{Z=0} = 0 \qquad M_x|_{Z=3} = 15$.

III участок $3 \le Z_3 \le 6$.

$Q_y = -R_B + q \cdot 3 = -20 + 10 \cdot 3 = 10$ – уравнение горизонтальной прямой.

$M_x = R_B \cdot Z_3 + M - q \cdot 3 \cdot (Z_3 - 1{,}5) =$

$= 20 \cdot Z_3 + 15 + 10 \cdot 3 \cdot (Z_3 - 1{,}5)$.

Особо обратите внимание на то, как вычисляется момент от распределенной нагрузки.

Чтобы вычислить силу от q интенсивность нагрузки умножается на длину отрезка, по которому она приложена. В данном случае это будет 3 м. Далее эту силу умножают на плечо.

Плечом является расстояние от середины отрезка, по которому приложена нагрузка до сечения. Чтобы вычислить это расстояние нужно от всего расстояния от правого конца балки до сечения, т.е. Z, вычесть половину от отрезка длиной 3 м, т.е. 1,5 м.

В итоге получено уравнение наклонной прямой. Вычисляем значения на границах.

$M_x|_{Z=3} = 30 \qquad M_x|_{Z=6} = 0$.

На 4-ом участке эпюра сил пересекает ось. Значит, эпюра изгибающего момента здесь должна иметь экстремум. Чтобы вычислить его приравняем уравнение поперечной силы к нулю.

$Qy = -R_B + q \cdot Z_4 = -20 + 10 \cdot Z_4 = 0.$

Отсюда определим точку пересечения:

$Z_4 = 20 / 10 = 2$ *(м)*.

Подставим эту координату в уравнение изгибающего момента: $M_x|_{Z=2} = 20 \cdot 2 - 5 \cdot 2^2 = 20$.

Проанализировав эпюры, определяем наибольший изгибающий момент M_x = 165 кН*м и опасное сечение, которое находится на левой опоре (в жесткой заделке).

Применяя 7 правил контроля эпюр при плоском изгибе, определим, насколько безошибочно мы решили задачу. В сечении с координатой Z = 3м приложена сосредоточенная сила P, поэтому на эпюре сил возникает скачок на направление вверх на величину 10 кН. Эпюра поднимается с 30 кН до 40 кН.

В остальных точках на эпюре сил скачков не должно быть.

В сечении с продольной координатой Z = 9 м приложен сосредоточенный момент M = 15 кН*м. Поэтому в этой точке на эпюре моментов возникает скачок по направлению момента, т.е. вниз, на величину этого момента. В результате эпюра M_x падает с величины 30 кН*м до 15 кН*м, т.е. на 15 кН*м. В других точках эпюра M_x не должна иметь скачков.

На концах балки изгибающий момент равен 0. На левом конце у нас это условие не выполняется. Но здесь именно так и должно быть – в этом сечении приложен внешний сосредоточенный момент M_A. На правом же конце $M_x = 0$.

В промежуточном шарнире момент должен быть равным нулю, поэтому эпюра M_x в сечении с координатой Z = 6 м пересекает ось.

На 2 и 4 участках к брусу приложена равномерно распределенная нагрузка. Поэтому на этих участках эпюра сил – прямая наклонная линия, а эпюра моментов – парабола. На 1 и 3 участках тогда эпюра Q_y – постоянная прямая, а эпюра M_x – наклонная прямая.

Проверим участки возрастания-убывания эпюры моментов. На всех отрезках, где эпюра сил положительна, эпюра M_x возрастает, где эпюра сил отрицательна – эпюра M_x убывает.

Таким образом, правило контроля эпюр, основанное на применении теоремы Журавского $Q_y = (M_x)^{/}$, выполняется.

На эпюре M_x имеется единственный экстремум в точке с координатой Z = 10 м именно там, где эпюра поперечной силы пересекает ось.

В результате проверки можно сделать вывод о том, что эпюры внутренних силовых факторов для заданной балки построены правильно.

Пример 13. Построим эпюры внутренней силы и внутреннего момента для балки, рассмотренной в примере 6. Опорные реакции в том же примере уже определены.

Эпюры ВСФ для этой балки показаны на рис.38.

Рассматриваемая балка включает 5 участков. На каждом из 5 участков проводим по одному сечению. Каждое сечение разрезает балку на 2 части – левую и правую. При вычислении внутренних силовых факторов одна из частей отбрасывается.

При рассмотрении 1, 2, 3 сечений лучше отбрасывать правые части бруса.

При рассмотрении 4 и 5 сечений отбрасывать нужно левые части.

Рассмотрим 1 сечение. Это сечение проводится на произвольном расстоянии от начала координат, которое расположено в т.А. Чтобы показать, что сечение проводится на произвольном расстоянии, обозначим это расстояние переменной величиной Z. Оно может принимать любое значение в диапазоне от 0 до 3 м.

I участок $0 \le Z_1 \le 3$ *м.*

Внутренняя сила в сечении равна единственной внешней силе R_A с учетом знака.

$Q_y = R_A = 2{,}5$ *кН* – это уравнение прямой, которая параллельна оси. Для ее построения нет необходимости расчета силы на концах участка.

Внутренний момент в сечении равен единственному внешнему моменту, имеющемуся на участке. Таким моментом является момент, создаваемый сосредоточенной силой R_A. Эта сила приложена на расстоянии Z от сечения и поэтому создает момент равный произведению силы на плечо:

$M_x = R_A \cdot Z_1 = 2{,}5 \cdot Z_1.$

Момент этой опорной реакции считается положительным потому, что в результате изгиба, вызванного этим моментом, сжимаются верхние волокна балки (см. правило знаков для M_x).

Записанное уравнение является уравнением прямой наклонной по отношению к оси линией. Для ее построения необходимы 2 точки. Удобно использовать в качестве этих точек границы данного участка.

$$M_x|_{Z=0} = 0 \qquad M_x|_{Z=3} = 2{,}5 \cdot 3 = 7{,}5\,.$$

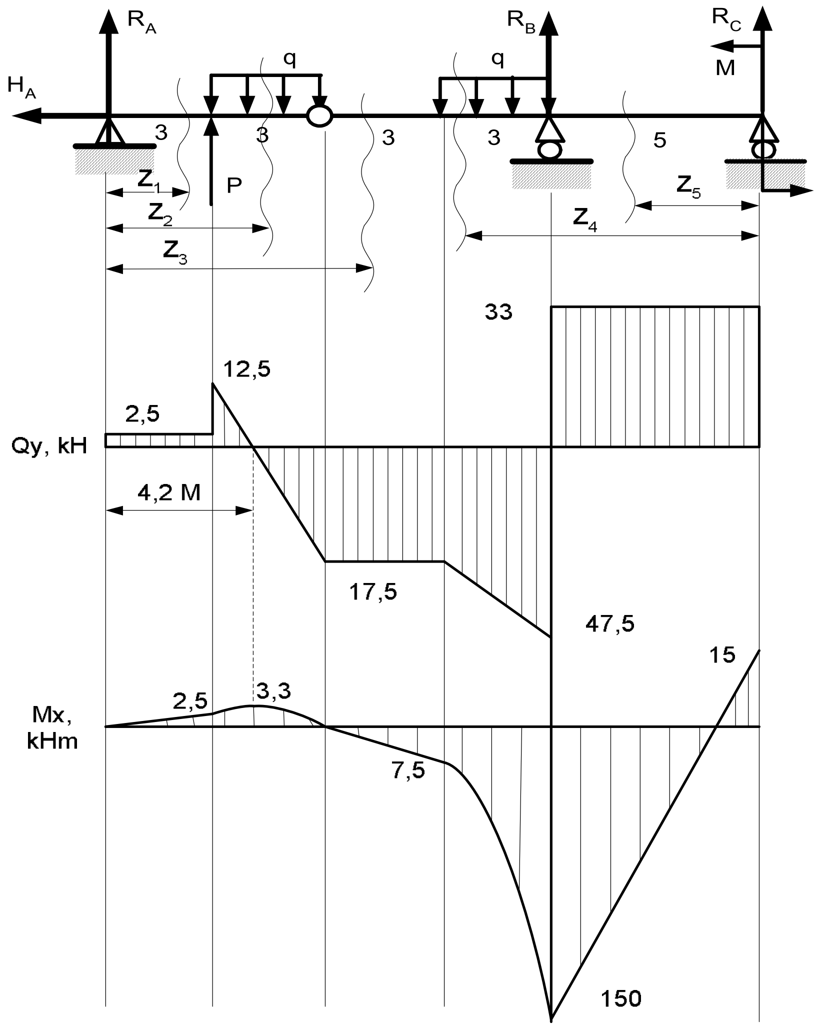


Рис.38. Эпюры ВСФ для примера 13

II участок $3 \le Z_2 \le 6$.

Начало координат (точку 0) оставили в т.А поэтому левой границей 2-го участка будет точка с координатой 3 м.

Внутренняя поперечная сила равна теперь уже сумме двух внешних поперечных сил – R_A и силе, создаваемой нагрузкой q. Опорная реакция в уравнение Q_y подставляется со знаком «+», а нагрузка q со знаком минус (см. правило знаков).

Чтобы вычислить полную силу, возникающую от действия нагрузки нужно вычислить площадь прямоугольной фигуры, возникающей под линией интенсивности q. Таким образом, высоту прямоугольника q нужно умножить на ширину, равную (Z – 3 м).

$Q_y = R_A + P - q(Z_2 - 3) = 2{,}5 - 10(Z_2 - 3\text{ м})$ – это уравнение прямой наклонной к оси линии и для ее построения требуются две точки:

$$Q_y|_{Z=3} = 2{,}5 + 10 = 12{,}5$$

$$Q_y|_{Z=6} = 2{,}5 + 10 - 10(6 - 3) = -17{,}5\,.$$

Эти 2 точки соединим прямой линией.

В сечении внутренний изгибающий момент равен сумме трех внешних моментов относительно точки, в которой провели сечение (рис. 39).

Момент R_A рассчитывается как произведение этой силы на плечо, т.е. на Z_2.

Плечо силы P можно вычислить как разность длины двух отрезков: *(Z_2 – 3 м)*.

Для расчета момента, создаваемого распределенной нагрузкой, следует выполнить уже два действия:

1) вычислить от нагрузки полную силу *Q = q (Z_2 – 3 м)*. Эта сила приложена в центр тяжести фигуры, образуемой линией интенсивности нагрузки, т.е. прямоугольника;

2) определить плечо. Плечо этой силы равно половине отрезка *(Z_2 – 3 м)*.

Момент от этой силы Q:

$$q\cdot(Z_2-3)\frac{(Z_2-3)}{2}.$$

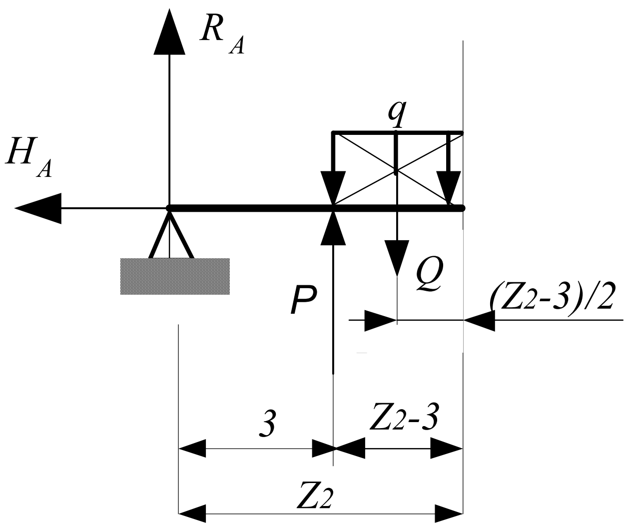


Рис.39. Расчет ВСФ на 2-ом участке бруса

Таким образом, уравнение внутреннего момента, составленное с учетом правила знаков для M_x будет выглядеть так:

$$M_x = R_A\cdot Z_2 + P\cdot(Z_2-3) - q\cdot\frac{(Z_2-3)^2}{2} =$$

$$= 2{,}5\cdot Z_2 + 10\cdot(Z_2-3) - 10\cdot\frac{(Z_2-3)^2}{2}.$$

Записанное уравнение является уравнением параболы, ветви вниз.

Вычислим значения момента на границах участка.

$$M_x\big|_{Z=3} = 2{,}5 \qquad M_x\big|_{Z=6} = 0.$$

Рассмотрим 3 участок (рис.40).

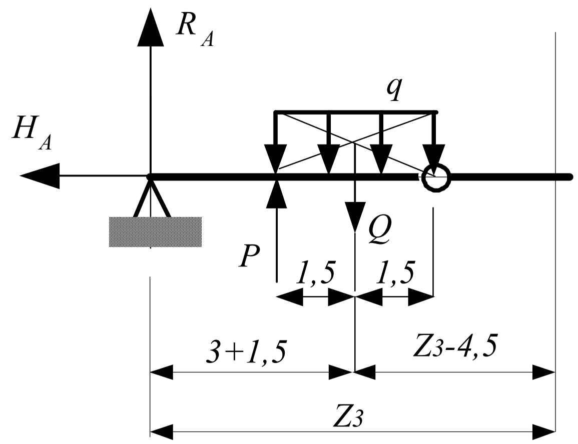


Рис.40. Расчет ВСФ на 3-м участке

III участок $6 \le Z_3 \le 9$.

Начало координат (точку 0) оставили в т.А, поэтому левой границей 3-го участка будет точка с координатой 6 м.

Вычисляем Q_y в проведенном сечении. В соответствии с методом сечений она равна сумме всех внешних сил, которые остались в левой части бруса. Таких сил здесь 3.

$$Q_y = R_A + P - q\cdot 3 = 17{,}5.$$

Особо обратите внимание на то, что распределенная нагрузка здесь приложена по длине 3 м – сечение проводится за точкой, в которой нагрузка завершается. Поэтому записанное уравнение является уравнением постоянной прямой.

Внутренний момент равен сумме трёх внешних моментов – от сосредоточенных сил R_A и P и, распределенной нагрузки q. Плечо опорной реакции равно длине всего отрезка Z_3. Плечо силы P вычисляется как разность *(Z_3 – 3 м)*.

Для расчета момента от распределенной нагрузки нужно сначала вычислить полную силу $Q = q \cdot 3\ м$. Эта сила приложена в центр тяжести прямоугольника и, плечо можно определить как расстояние от сечения до этой точки. По рис.40 вычисляем плечо как разность длин ($Z_3 - 4{,}5\ м$). Для определения знаков этих трёх моментов рассмотрим рис.41, на котором наглядно изображен изгиб балки от каждой нагрузки и растяжение-сжатие волокон.

Тогда уравнение внутреннего момента запишется так:

$$M_x = R_A \cdot Z_3 + P(Z_3 - 3) - q \cdot 3(Z_3 - 4{,}5) =$$
$$= 2{,}5Z_3 + 10(Z_3 - 3) - 10 \cdot 3(Z_3 - 4{,}5).$$

Далее это уравнение можно упростить или оставить таким же. Записанное уравнение является уравнением прямой наклонной линии. Обратите внимание, что степень, в которой находится переменная Z, является единицей.

Вычислим момент на границах участка:

$$M_x|_{Z=6} = 0 \qquad M_x|_{Z=9} = -7{,}5\ .$$

Рассмотрим 5 участок.

Перенесем начало координат в т.В и направим координатную ось справа налево. Тогда расстояние от начала координат до сечения есть величина переменная, которая может принимать любое значение из диапазона: V участок $0 \le Z_5 \le 5\ м$

Внутренняя сила рассчитывается как сумма всех внешних сил, оставшихся после отбрасывания левой части:

$Q_y = -\ Rc = -\ (-\ 33) = 33\ кН$ – прямая постоянная линия.

Знак силы отрицательный потому, что сила направлена вверх в соответствии с правилом знаков для Q_y при выборе правой части бруса.

Внутренний момент M_x равен единственному внешнему моменту:

$M_x = R_C \cdot Z_5 + M = -\ 33 \cdot Z_5 + 15$ – прямая наклонная линия.

Знак момента силы положительный, потому что при изгибе балки от него сжимаются верхние волокна. Однако величина самой силы R_C отрицательна, поэтому в итоге в уравнении все равно появляется минус перед моментом опорной реакции. Момент М считается положительным, потому что от его действия сжимаются верхние волокна балки.

$$M_x|_{Z=0} = M = 15 \qquad M_x|_{Z=5} = 15 - 33 \cdot 5 = -150$$

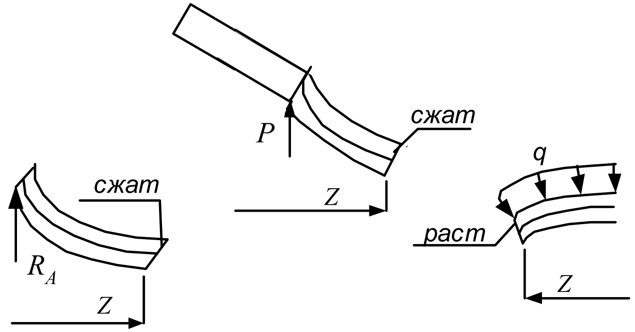


Рис. 41. Пояснения к расчету знаков внешних моментов

Рассмотрим последний 4 участок. Начало координат оставим в т.С. Тогда IV участок $5 \le Z_4 \le 8м.$

Этот участок очень похож на 2-ой участок. Поэтому отдельно зарисовывать не будем. Если что-то не вполне понятно, можно рассмотреть рис. 39.

$Q_y = -\ R_C - R_B + q \cdot (Z_4 - 5) = -\ (-\ 33)\ -80{,}5 + 10 \cdot (Z_4 - 5) =$
$= -\ 47{,}5 + 10 \cdot (Z_4 - 5)$

$$Q_y|_{Z=5} = -47{,}5 \qquad Q_y|_{Z=8} = -47{,}5 + 10 \cdot 3 = -17{,}5$$

$$M_x = R_C \cdot Z_4 + R_B(Z_4 - 5) - q \cdot \frac{(Z_4 - 5)^2}{2} =$$
$$= -33 \cdot Z_4 + 80{,}5(Z_4 - 5) - 5(Z_4 - 5)^2$$

$$M_x|_{Z=5} = -150 \qquad M_x|_{Z=8} = -7{,}5 .$$

Точки на эпюре сил соединяем по прямой, а на эпюре моментов – по параболе, ветви вниз.

Вычислим максимум на 2 участке.

Приравняем к нулю уравнение поперечной силы

$Q_y = R_A + P - q \cdot (Z_2 - 3) = 0$

Отсюда $Z^* = 3 + (R_A + P)/ q = 3 + (2{,}5 + 10) / 10 = 4{,}25$ *м*.

Подставляем это расстояние в уравнение изгибающего момента:

$$M_x = R_A \cdot Z_2 + P(Z_2 - 3) - q \cdot \frac{(Z_2 - 3)^2}{2} =$$
$$= 2{,}5 \cdot 4{,}25 + 10 \cdot (4{,}25 - 3) - 10 \cdot \frac{(4{,}25 - 3)^2}{2} = 3{,}3$$

Самостоятельно проверьте правильность построения эпюр с помощью 7 правил контроля (см. предыдущую задачу).

Для того чтобы закрепить методы построения эпюр ВСФ, решите самостоятельно 3 задания – 3, 4, 5 и сравните с правильным решением.

Задания 4, 5, 6

Постройте эпюры ВСФ для балок из задания 1, 2, 3. На рис. 42, 43, 44 приводятся результаты, которые вы должны получить. Закройте пособие и не открывайте эту страницу до тех пор, пока не получите решения. Сравните результат с ответом. Проанализируйте ошибки, если они есть.

Далее приводятся эпюры ВСФ заданий для самостоятельного решения. Если ваше решение совпадает с

правильным, значит методы построения эпюр ВСФ при плоском изгибе вы освоили. При построении эпюр внимательно проводите линии, соединяющие точки на границах участков.

При определении перемещения сечений балки с помощью энергетических методов, вам предстоит вычислять площади фигур под эпюрами изгибающего момента. Если линия проведена неправильно, будет вычисляться площадь совсем не той фигуры, которая должна быть. В результате, вся задача будет решена неправильно.

Правильное решение

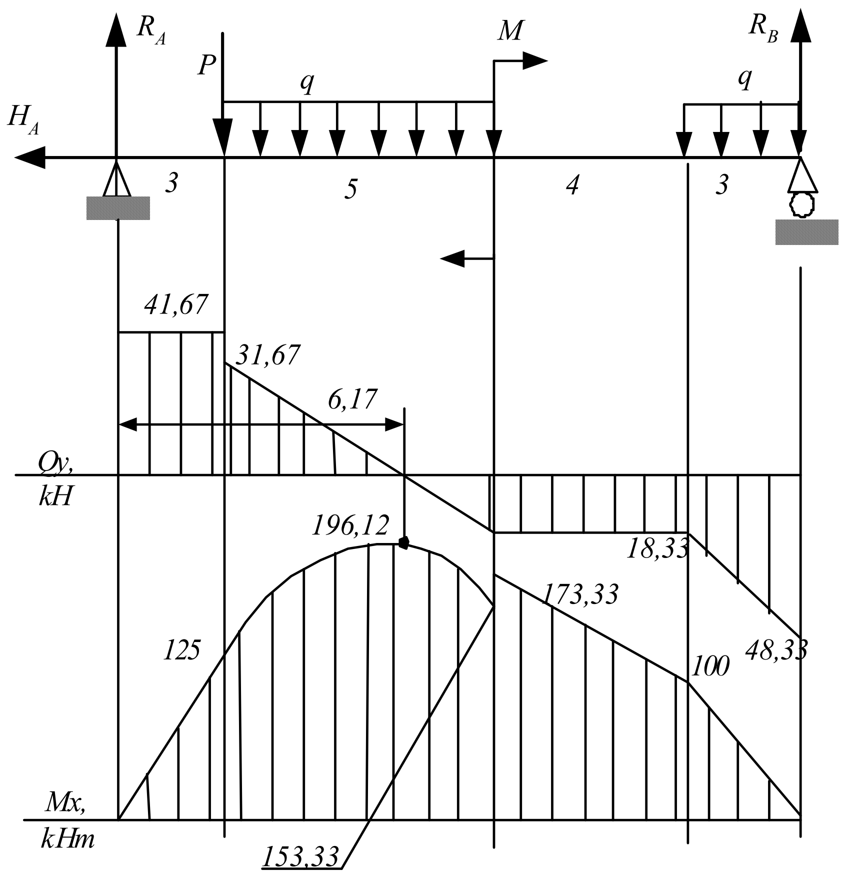


Рис. 42. Эпюры ВСФ для балки задания 1

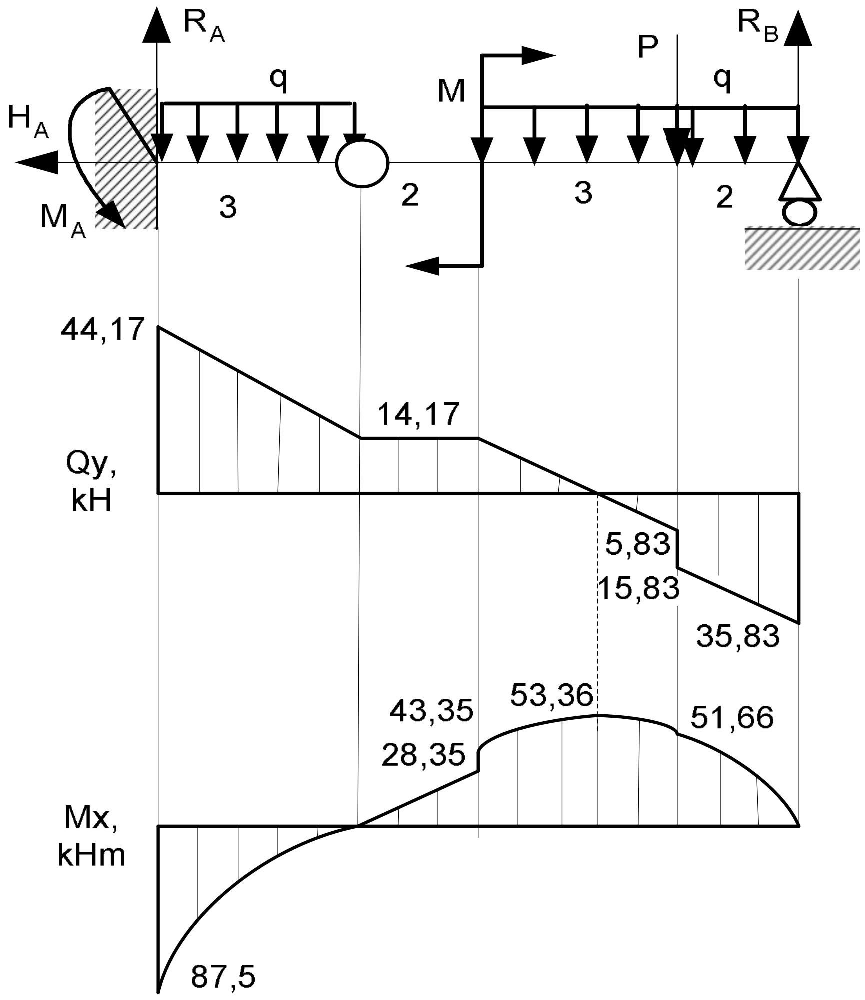


Рис.43. Эпюры ВСФ для балки задания 2

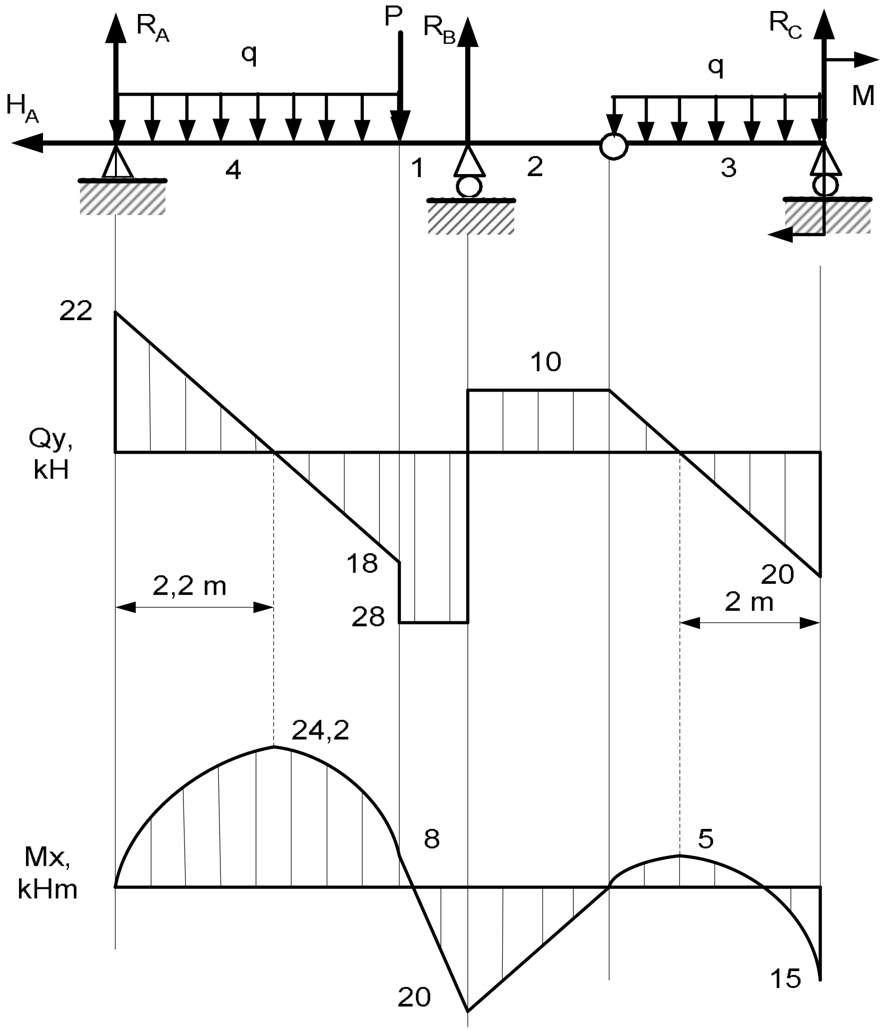


Рис.44. Эпюры ВСФ для балки задания 3

Контрольные вопросы

1. Какой объект принято называть брусом?
2. Какой объект принято называть оболочкой?
3. Какой брус принято называть стержнем?
4. Какой брус принято называть балкой?
5. Какой брус принято называть валом?
6. Какие силы называют активными?
7. Какие силы считают сосредоточенными?
8. Как вычислить полную силу от равномерно распределенной по отрезку нагрузки?
9. Как можно вычислить момент, создаваемый распределенной нагрузкой?
10. Как можно вычислить опорные реакции?
11. Как вычислить опорные реакции для балки, имеющей промежуточный шарнир?
12. Сколько уравнений равновесия можно составить для плоской системы?
13. Сколько уравнений равновесия можно составить для пространственной системы?
14. В чем заключается смысл уравнений равновесия?
15. Какие силы называются внутренними?
16. Что представляют собой внутренние силовые факторы?
17. Сколько внутренних силовых факторов может возникнуть при самой сложной деформации?
18. Какая деформация считается простой?
19. Какая деформация считается сложной?
20. Как можно определить вид деформации?
21. Какая деформация называется осевым растяжением-сжатием?
22. Какая деформация называется чистым сдвигом?
23. Какая деформация называется чистым кручением?

24. Какая деформация называется чистым изгибом?

25. В чем состоит суть метода сечений?

26. Сформулируйте правило знаков для внутренней продольной силы.

27. Сформулируйте правило знаков для внутреннего изгибающего момента.

28. Сформулируйте правило знаков для крутящего момента.

29. Сформулируйте правило знаков для поперечной силы.

30. Что представляет собой шарнирно-подвижная опора?

31. Что представляет собой шарнирно неподвижная опора?

32. Что представляет собой жесткая заделка?

Список дополнительной литературы

1. *Степин, П.А. Сопротивление материалов: учебник / П.А. Степин . - М.: Высш. школа, 1988. –367 с.*
2. *Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов: учебник./ В.И. Феодосьев - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 592с.*

Содержание