Министерство образования и науки Российской Федерации
Нижнекамский химико-технологический институт (филиал)
Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Казанский национальный исследовательский технологический университет»

А.Н. Гайфутдинов, Р.А. Гайфутдинов

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Нижнекамск
2013

УДК 531.1
Г 17

Печатается по решению редакционно-издательского совета Нижнекамского химико-технологического института (филиала) ФГБОУ ВПО «КНИТУ».

Рецензенты:
Теляков Э.Ш., доктор технических наук, профессор;
Абдуллин А.М., кандидат технических наук, доцент.

Гайфутдинов, А.Н.
Г 17 Теоретическая механика : учебное пособие / А.Н. Гайфутдинов, Р.А. Гайфутдинов. – Нижнекамск : Нижнекамский химико-технологический институт (филиал) ФГБОУ ВПО «КНИТУ», 2013. - 84 с.

Пособие соответствует государственному образовательному стандарту дисциплины «Теоретическая механика» подготовки бакалавров по направлению 140400 «Электроэнергетика и электротехника».

В пособии кратко изложены сведения из теории, необходимые для решения задач контрольных работ по разделам «Статика», «Кинематика», «Динамика». По каждому контрольному заданию приводятся рекомендации и последовательности решения с подробным разбором типичных задач.

Предназначено для студентов заочного отделения, обучающихся по профилям подготовки бакалавров "Электропривод и автоматика" и "Электроснабжение".

Подготовлено на кафедре «Машины и аппараты химических производств» НХТИ (филиала) ФГБОУ ВПО «КНИТУ».

УДК 531.1

ВВЕДЕНИЕ

Работа является продолжением [**1**], где изложены программа дисциплины «Теоретическая механика», общие рекомендации по работе над курсом, методические указания и контрольные задания, правила выполнения и оформления контрольных заданий.

Прежде чем приступить к решению задач, необходимо изучить теоретический курс раздела, следуя общим рекомендациям, изложенным в [**1**]. Рекомендуемая учебная литература приведена и в конце настоящего пособия. В тексте ссылки на нее даются в квадратных скобках, далее следуют номера глав, параграфов и страниц. Студент обязан в указанный учебным планом срок сдать выполненные контрольные задачи согласно своему шифру.

Курс теоретической механики включает в себя как неразрывные части три раздела: статику, кинематику и динамику.

Статика – это область механики, занимающаяся изучением поведения тел в состоянии покоя и действия сил в состоянии равновесия. Под равновесием тела нужно понимать, вообще, его движение по инерции, а не только состояние покоя. Таким образом, в статике решаются задачи, относящиеся не только к телам, находящимся в покое, но и к телам, движущимся прямолинейно с постоянной скоростью. Контрольные задания по статике включают две задачи: **С1** и **С2**.

Кинематика как раздел теоретической механики является введением в динамику, изучающим перемещения тел с течением времени без учета причин, которые их вызывают. В то же время кинематика имеет и самостоятельное значение при изучении передачи движения в машинах и механизмах. Контрольные задания по кинематике включают три задачи: задачи на движение точки **К1**, **К3** и задачу на кинематику твердого тела **К2**.

Динамика является основным и вместе с тем наиболее трудным для усвоения разделом курса «Теоретическая механика». Контрольные задания по динамике (задачи **Д1**–**Д4**) должны способствовать лучшему усвоению теории и выработать у студентов навыки самостоятельного решения задач.

Часть I. С Т А Т И К А

Рекомендуемая учебная литература: [**2**], **часть 1:** гл. I, §1–3, с.7–14; гл. III, § 14-17, с. 36–43; гл. IV, § 19-25, с.46-54; гл.V , § 28-32, 43,52, с.57-63, 93-95, 115-122.

Основные определения и аксиомы

В основании статики, помимо первого и третьего законов классической механики, лежат еще несколько достаточно очевидных положений, называемых аксиомами статики. Опираясь на указанные законы и аксиомы, а также на ряд определений, можно логическим путем построить все изложение статики.

Совокупность сил, действующих на данное тело, называется ***системой сил***.

Если под действием данной системы сил тело не изменяет своего движения или, в частности, продолжает оставаться в покое, то такая система сил называется ***уравновешенной системой,*** или системой, ***эквивалентной нулю***.

Сила, которая, будучи присоединена к некоторой системе сил, действующих на тело, приводит систему к равновесию, называется ***уравновешивающей*** данной системы сил.

Две системы сил, приложенных к одному и тому же твердому телу, называются ***эквивалентными***, если каждая из них в отдельности может быть уравновешена одной и той же третьей системой сил, приложенной к тому же твердому телу.

Сила, эквивалентная данной системе сил, называется ***равнодействующей*** этой системы сил. Силы, входящие в состав системы, называются ***составляющими***; нахождение равнодействующей называют ***сложением сил***.

Обратная задача – замена одной силы системой сил, производящей на тело то же действие, что и данная сила, называется ***разложением силы***.

В статике рассматриваются две основные задачи:

1) преобразование данной системы сил, приложенной к твердому телу, в другую систему, ей эквивалентную;

2) вывод условия равновесия систем сил, приложенных к твер-

дому телу.

П е р в а я   а к с и о м а . Две силы, приложенные к абсолютно твердому телу, взаимно уравновешиваются тогда и только тогда, когда они равны по величине и направлены по одной прямой в противоположные стороны (рис. 1).

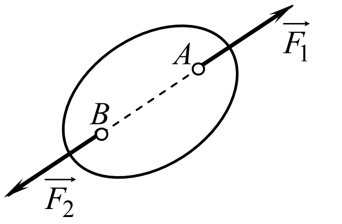


Рис. 1

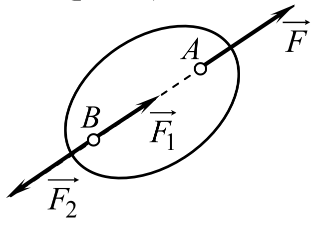


Рис. 2

В т о р а я   а к с и о м а . Не нарушая равновесия абсолютно твердого тела, можно добавить к системе сил, действующей на тело, или отнять от нее любую уравновешенную систему сил.

С л е д с т в и е   1 . Всякую силу, приложенную в какой-либо точке абсолютно твердого тела, можно, не изменяя се действия, переносить в любую другую точку, лежащую на линии действия этой силы (рис. 2). Для абсолютно твердого тела точка приложения перестает быть существенным элементом силы, ее заменяет линия действия силы. На рис. 2 модули всех трех сил равны.

Таким образом, действие силы на абсолютно твердое тело определяется тремя элементами: ее модулем, линией действия и направлением силы по ее линии действия.

С л е д с т в и е   2 . Равнодействующая и уравновешивающая силы равны по величине и направлены по одной прямой в противоположные стороны (рис. 3). $\vec{R}$ – равнодействующая системы сил $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, ..., \overrightarrow{F_n}$; $\vec{R}\,'$ – уравновешивающая сила для равнодействующей $\vec{R}$ и, следовательно, для системы сил $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, ..., \overrightarrow{F_n}$.

Из данного следствия вытекает, что нахождение силы, уравновешивающей данную систему сил, можно свести к определению равнодействующей этой системы.

Т р е т ь я   а к с и о м а . Равнодействующая двух сил, приложенных к одной точке, приложена в той же точке и изображается диагональю параллелограмма, построенного на данных силах как на сторонах (рис. 4).

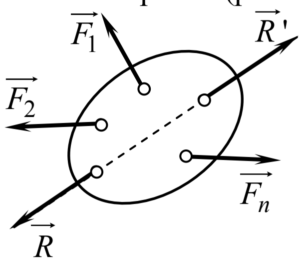


Рис. 3

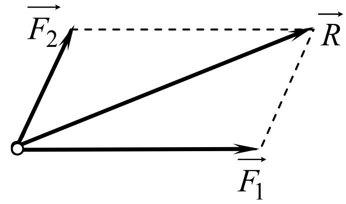


Рис. 4

Эта аксиома говорит о равнодействующей двух сил, приложенных и одной точке. Если две силы приложены в различных точках тела, но линии их действия пересекаются, то, пользуясь следствием 1, мы можем перенести обе силы в точку пересечения их линий действия и затем сложить по правилу параллелограмма.

Ч е т в е р т а я   а к с и о м а (принцип отвердевания). Если деформируемое тело находится в равновесии, то это равновесие не нарушится и в том случае, если тело станет абсолютно твердым.

Данная аксиома обратного смысла не имеет, то есть обращение абсолютно твердого тела в деформируемое, вообще говоря, нарушает равновесие.

Связи и их реакции

Всякое тело, которое может беспрепятственно получать любые перемещения в пространстве, называется ***свободным***. Если же движение тела ограничено некоторыми условиями и оно не может беспрепятственно перемещаться любым образом, то тело называется ***несвободным***.

Условие, которое ограничивает свободу движения тела, называется ***связью***.

Связи обычно осуществляются различными твердыми или гибкими телами, которые, будучи так или иначе связаны с данным телом, ограничивают свободу его перемещения. Сила, с которой тело, осуществляющее данную связь, действует на рассматриваемое тело, препятствуя его движению в том или ином направлении, называется ***реакцией*** (***противодействием***) этой связи.

Реакция связи направлена противоположно тому движению данного тела, которому препятствует эта связь.

Не нарушая состояния тела, можно отбрасывать отдельные наложенные на него связи, сохраняя реакции этих связей приложенными к телу.

Простейшая связь осуществляется поверхностью другого тела, препятствующей движению данного тела в определенном направлении. Гладкая поверхность всегда дает одну нормальную реакцию, то есть реакцию, направленную по общей нормали к поверхности данного тела и к поверхности тела, осуществляющего связь, в их точке касания (рис. 5).

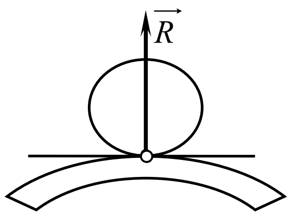


Рис. 5

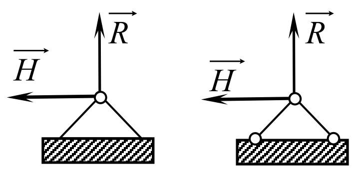


Рис. 6

Негладкие опорные поверхности отличаются тем, что для них приходится дополнительно учитывать силу трения.

Реакция неподвижного цилиндрического шарнира всегда направлена по нормали к его поверхности, то есть реакция лежит в плоскости, перпендикулярной к оси шарнира и имеет радиальное направление. Шарнирно-неподвижная опора (рис. 6) допускает свободный поворот сечения над опорой в одной плоскости относительно оси цилиндрического шарнира, но не дает возможности смещаться ни по вертикали, ни по горизонтали. Подразумевается, что шарнир не оказывает сопротивления вращению примыкающего к нему сечения. В такой опоре направление действия опорной реакции неизвестно, поэтому для ее определения ее представляют разложением на две составляющие, действующие в направлении осей принятой общей системы координат.

Шарнирно-подвижная опора или опора на катках (рис. 7) допускает перемещение в одном направлении, например, по горизонтали, и поворот сечения над опорой вокруг цилиндрического шарнира. В такой опоре возникает одна реакция, которая направлена перпендикулярно плоскости опоры катков (вдоль опорной связи).

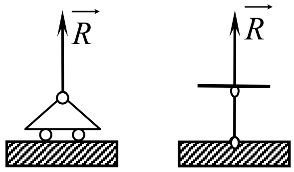


Рис. 7

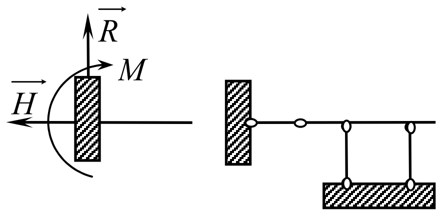


Рис. 8

Опора в виде заделки (рис. 8) не допускает поворота и перемещения по двум направлениям сечения, примыкающего к ней. Реакции в заделке состоят из вертикальной силы, горизонтальной силы и момента.

Если тело опирается на неподвижную точку A, например, на острый конец неподвижного стержня (рис. 9, а), реакция $\overrightarrow{N_A}$ стержня приложена к телу в точке A и направлена по нормали к поверхности тела, если трения между телом и опорой нет.

Если тело опирается на неподвижную линию, например, на ребро двугранного угла (рис. 9, б), реакция опоры при отсутствии трения направлена по нормали к поверхности данного тела (сила $\overrightarrow{N_A}$). Реакции $\overrightarrow{N_B}$, $\overrightarrow{N_C}$ направлены по нормалям к соответствующим опорным плоскостям.

В случае, когда связь осуществляется при помощи гибкого тела (нити, каната) (рис. 9, в), реакции таких связей $\vec{T_1}$, $\vec{T_2}$ приложены к телу в точке прикрепления к нему нитей и направлены вдоль этих нитей.

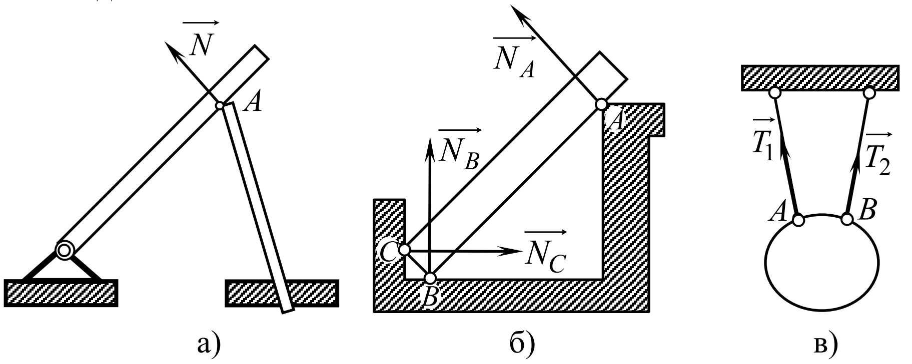


Рис. 9

Пара сил. Момент силы относительно точки и оси

Система двух равных по величине и противоположных по направлению параллельных сил называется ***парой сил***. Пара сил не имеет равнодействующей и не может быть уравновешена одной силой. Пара, действуя на твердое тело, стремится сообщить ему вращательное движение.

Численное значение момента пары сил равно произведению модуля одной из сил пары на ее плечо, то есть на кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары.

В случаях, когда мы имеем дело с системой сил, лежащих в одной плоскости, момент пары можно рассматривать как скалярную алгебраическую величину.

Теорема 1. Момент пары равен сумме моментов сил, составляющих пару, относительно любого центра, лежащего в плоскости действия данной пары.

Теорема 2. Не изменяя действия пары на тело, ее можно переносить в любое положение в плоскости действия данной пары.

Т е о р е м а 3 . Не изменяя действия данной пары на тело, можно как угодно изменять модуль сил пары, изменяя при этом ее плечо так, чтобы момент пары оставался неизменным.

Т е о р е м а 4 . Несколько пар, лежащих в одной плоскости, можно заменить одной равнодействующей парой, момент которой равен алгебраической сумме моментов составляющих пар.

С л е д с т в и е . Для равновесия системы пар, расположенных в одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма моментов всех данных пар равнялась нулю.

Численное значение ***момента силы относительно данной*** точки равно произведению модуля силы на ее плечо, то есть на длину перпендикуляра, опущенного из данной точки на линию действия силы. При изучении системы сил, линии действия которых расположены произвольным образом в пространстве, не менее важную роль играет понятие момента силы относительно оси.

Моментом силы относительно оси называется момент проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную к данной оси, относительно точки пересечения этой оси с этой плоскостью, или, что то же, взятое со знаком плюс или минус произведение модуля проекции силы на плоскость, перпендикулярную к данной оси на ее плечо относительно точки пересечения оси с плоскостью.

Данное определение момента силы относительно оси позволяет сформулировать следующие два следствия.

С л е д с т в и е 1 . Момент силы относительно оси равен нулю в том случае, когда линия действия силы пересекает ось или когда сила параллельна этой оси. Объединяя эти два случая, можно сказать, что момент силы относительно оси равен нулю, если линия действия силы и ось лежат в одной плоскости.

С л е д с т в и е 2 . Момент силы относительно данной оси не изменяется при переносе точки приложения силы в другую точку по линии ее действия.

Приведение системы сил к одному центру. Главный вектор и главный момент

Т е о р е м а . Систему сил, линии действия которых как угодно расположены в пространстве (рис. 10), можно привести в общем случае к одной силе, приложенной в произвольно выбранной точке тела и к одной паре.

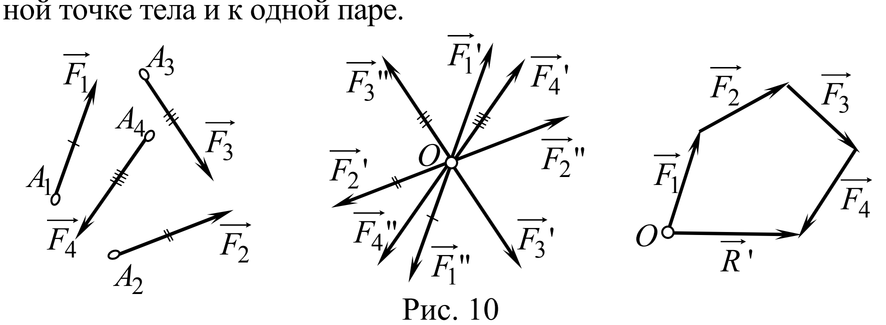


Рис. 10

Вектор, равный геометрической сумме всех сил данной системы, называется главным вектором этой системы:

$$\vec{R}' = \vec{F}_1' + \vec{F}_2' + \vec{F}_3' + \vec{F}_4' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k .$$

Модуль и направление главного вектора определяются по формуле

$$R' = \sqrt{R_x'^2 + R_y'^2 + R_z'^2} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{ky}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{kz}\right)^2} ,$$

$$\cos\left(\vec{R}' \overset{\wedge}{,} x\right) = \frac{R_x'}{R'}, \quad \cos\left(\vec{R}' \overset{\wedge}{,} y\right) = \frac{R_y'}{R'}, \quad \cos\left(\vec{R}' \overset{\wedge}{,} z\right) = \frac{R_z'}{R'} .$$

Все присоединенные пары: $\left(\vec{F}_1, \vec{F}_1"\right)$, $\left(\vec{F}_2, \vec{F}_2"\right)$, $\left(\vec{F}_3, \vec{F}_3"\right)$, $\left(\vec{F}_4, \vec{F}_4"\right)$ – мы можем сложить по правилу сложения пар и, следовательно, заменить их одной, результирующей парой.

Сумма моментов всех данных сил, расположенных произвольно в пространстве, относительно какой-либо точки *O,* называется ***главным моментом*** данной плоской системы сил относительно этой точки:

$$\overrightarrow{M_0} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{m_0}\left(\overrightarrow{F_k}\right).$$

Результат, полученный от приведения к одной точке системы сил, произвольно расположенных в плоскости, можно сформулировать следующим образом.

Всякую плоскую систему сил всегда можно заменить одной силой, равной главному вектору системы и приложенной в произвольной точке *O,* и парой, момент которой равен главному моменту данной системы сил относительно этой точки *O.*

Величина и направление главного вектора не зависят от выбора центра *O* приведения.

Величина и знак главного момента зависят, вообще говоря, от выбора центра приведения.

Случаи, когда плоская система сил приводится к равнодействующей

При произвольном выборе центра *O* приведения всякая плоская система сил приводится к одной силе, приложенной в центре приведения и равной главному вектору $\overrightarrow{R}'$, и к одной паре, момент которой равен главному моменту $\overrightarrow{M_0}$ данной системы сил относительно выбранного центра приведения. Однако силу и пару всегда можно заменить одной только данной силой, соответствующим образом перенесенной параллельно самой себе в некоторую другую точку. Если главный вектор данной плоской системы сил не равен нулю, то эта система приводится к равнодействующей, равной по модулю и направлению главному вектору $\overrightarrow{R}'$: линия действия равнодействующей отстоит от центра приведения на расстоянии $d = \dfrac{|M_0|}{R'}$, отложенном в такую сторону, чтобы знак момента равнодействующей относительно центра O приведения совпадал со знаком главного момента $\overrightarrow{M_0}$.

Очевидно, что в случае, если при приведении к какому-либо центру главный момент $\overrightarrow{M_0}$ данной системы сил относительно этого центра будет равен нулю, но главный вектор $\overrightarrow{R}'$ не равен нулю, то линия действия равнодействующей этой системы будет проходить через центр приведения.

Условия равновесия системы сил в общем случае

Если главный вектор $\overrightarrow{R}'$ данной системы сил и главный момент $\overrightarrow{M_0}$ относительно какого-нибудь центра приведения O не равны нулю, то эта система приводится к силе и паре и, следовательно, твердое тело при действии на него такой системы сил не может находиться в состоянии равновесия, так как пара не может быть уравновешена одной силой.

Для равновесия системы сил, приложенных к твердому телу, в общем случае необходимо и достаточно, чтобы главный вектор этой системы и ее главный момент относительно произвольно выбранного центра равнялись нулю.

Эти условия равновесия можно выразить в аналитической форме:

$$\overrightarrow{R}' = 0 \quad \text{и} \quad \overrightarrow{M_0} = 0,$$

что равносильно следующим шести алгебраическим равенствам:

$$\overrightarrow{R_x}' = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad \overrightarrow{R_y}' = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad \overrightarrow{R_z}' = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0$$

и

$$M_{Ox} = \sum_{k=1}^{n} m_x\left(\overrightarrow{F_k}\right) = 0, \quad M_{Oy} = \sum_{k=1}^{n} m_y\left(\overrightarrow{F_k}\right) = 0, \quad M_{Oz} = \sum_{k=1}^{n} m_z\left(\overrightarrow{F_k}\right) = 0,$$

то есть для равновесия системы сил, приложенных к твердому телу, в общем случае необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех этих сил на каждую из трех произвольно выбранных координатных осей равнялась нулю и чтобы сумма их моментов относительно каждой из этих осей также равнялась нулю.

Частные случаи

1) Система сходящихся сил. Условия равновесия сводятся к следующим трем:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0.$$

2) Плоская система сил. Условия равновесия сводятся к следующим трем:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_z\left(\overrightarrow{F_k}\right) = 0.$$

3) Система параллельных сил. Условия равновесия сводятся к следующим трем:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_x\left(\overrightarrow{F_k}\right) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_y\left(\overrightarrow{F_k}\right) = 0,$$

то есть для равновесия системы параллельных сил, не лежащих в одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы сумма их проекций на ось, параллельную этим силам, равнялась нулю и чтобы сумма их моментов относительно каждой из двух координатных осей, перпендикулярных к этим силам, также равнялись нулю.

Центр тяжести тел

Центром тяжести тел называется такая, занимающая относительно данного тела вполне определенное положение, точка, через которую всегда проходит линия действия силы тяжести данного тела.

Координаты центра тяжести могут быть определены по формулам:

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} G_k x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} G_k} = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} G_k x_k}{G}; \\ y_C = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} G_k y_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} G_k} = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} G_k y_k}{G}; \\ z_C = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} G_k z_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} G_k} = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} G_k z_k}{G}, \end{cases}$$

где x_C, y_C, z_C – координаты центра тяжести тела; G_k – вес одной из частиц тела, x_k, y_k, z_k – координаты центра тяжести этой частицы; $\sum\limits_{k=1}^{n} G_k x_k$, $\sum\limits_{k=1}^{n} G_k y_k$, $\sum\limits_{k=1}^{n} G_k z_k$ – алгебраические суммы, составленные из произведений веса каждой частицы тела на соответствующую координату центра тяжести этой частицы; G – вес всего тела.

Частые случаи

1) Однородное тело

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} v_k x_k}{v}; \\ y_C = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} v_k y_k}{v}; \\ z_C = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} v_k z_k}{v}, \end{cases}$$

где v_k – объем какой-нибудь частицы тела, v – объем всего тела.

2) П л о с к а я ф и г у р а

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} F_k x_k}{F}; \\ y_C = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} F_k y_k}{F}, \end{cases}$$

где F_k – площадь произвольного элемента фигуры, F – площадь всей фигуры.

Статическим моментом элементарной площади относительно какой-либо оси называется произведение ее величины на кратчайшее расстояние ее центра тяжести до этой оси.

Сумма статических моментов всех отдельных площадок, на которые разбита данная площадь, взятых относительно какой-нибудь оси (например x или y), называется ***статическим моментом площади данной фигуры относительно этой оси***.

$$\begin{cases} S_x = \sum\limits_{k=1}^{n} F_k x_k; \\ S_y = \sum\limits_{k=1}^{n} F_k y_k. \end{cases}$$

Если известны статические моменты относительно координатных осей, легко определяются координаты центра тяжести плоской фигуры:

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{S_y}{F}; \\ y_C = \dfrac{S_x}{F}. \end{cases}$$

Т е о р е м а . Если однородное тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то центр тяжести его лежит соответственно в плоскости, на оси или в центре симметрии.

С л е д с т в и е 1 . Центр тяжести отрезка материальной прямой лежит в его середине.

С л е д с т в и е 2 . Центр тяжести площади параллелограмма лежит в точке пересечения его диагоналей, являющейся центром симметрии параллелограмма.

С л е д с т в и е 3 . Центры тяжести площадей правильного многоугольника, круга и эллипса и объема шара лежат в их геометрических центрах.

Для определения положения центра тяжести фигур и тел сложной геометрической формы их разбивают на такие части простейшей формы (если, конечно, это возможно), для которых положение центров тяжести известно, а затем определяют положение центра тяжести всей фигуры или тела по ранее приведенным формулам.

Указания к выполнению контрольного задания
Задача С1

Задача С1 – на равновесие тела под действием плоский системы сил. Составляя уравнения равновесия, следует учесть, что уравнение моментов будет более простым (содержащим меньше неизвестных), если брать моменты относительно точки, где пересекаются линии действия двух реакций связей (в данном случае относительно точки *A*). При вычислении момента силы $\vec{F}$ часто удобно разложить ее на составляющие $\vec{F}'$ и $\vec{F}''$, для которых плечи легко вычисляются, в частности, на составляющие, параллельные координатным осям, и воспользоваться теоремой Вариньона; тогда $m_0(\vec{F}) = m_0(\vec{F}') + m_0(\vec{F}'')$.

Пример С1. Жесткая пластина *ABCD* (рис. С1) имеет и точке *A* неподвижную шарнирную опору, а в точке *B* – подвижную шарнирную опору на катках. Вес действующие нагрузки и размеры показаны на рис. 11.

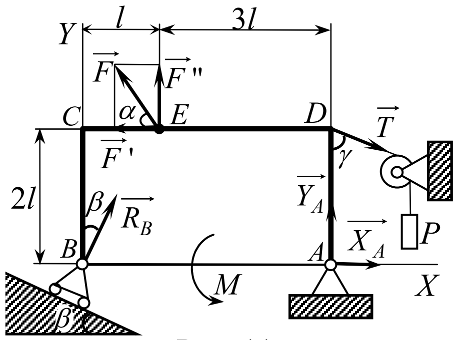


Рис. 11

Дано: F=25 кН, P=18 кН, $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$, $\gamma = 75°$, M=50 кН·м, $l = 0{,}5$ м.

Определить: реакции в точках A и B, вызываемые действующими нагрузками.

Решение

1. Рассмотрим равновесие пластины. Проведем координатные оси xy, изобразим действующие на пластину силы: силу $\vec{F}$, пару сил с моментом M, натяжение троса $\vec{T}$ (по модулю $T = P$) и реакции связей $\overrightarrow{X_A}, \overrightarrow{Y_A}, \overrightarrow{R_B}$ (реакция неподвижной шарнирной опоры на катках направлена перпендикулярно опорной плоскости).

2. Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия. При вычислении момента силы $\vec{F}$ относительно точки A воспользуемся теоремой Вариньона, то есть разложим силу $\vec{F}$ на составляющие $\vec{F}'$, $\vec{F}''$ $(F' = F\cos\alpha$, $F'' = F\sin\alpha)$ и учтем, что $m_A(\vec{F}) = m_A(\vec{F}') + m_A(\vec{F}'')$. Получим

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad X_A + R_B \sin\beta - F\cos\alpha + T\sin\gamma = 0, \tag{1.1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad Y_A + R_B \cos\beta + F\sin\alpha - T\cos\gamma = 0, \tag{1.2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_A(\vec{F_k}) = 0,$$

$$M - R_B\cos\beta \cdot 4l + F\cos\alpha \cdot 2l - F\sin\alpha \cdot 3l - T\sin\gamma \cdot 2l = 0. \tag{1.3}$$

Поставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и решив эти уравнения, определим искомые реакции.

Ответ: $X_A = -8{,}5$ кН, $Y_A = -23{,}3$ кН, $R_B = 7{,}3$ кН. Знаки указывают, что силы X_A и Y_A направлены противоположно показанным на рис. 11.

Задача С2

Задача С2 – на равновесие тела под действием пространственной системы сил. При ее решении следует учесть, что реакция сферического шарнира имеет три составляющие, а реакция цилиндрического шарнира (подшипника) – две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. При вычислении моментов силы $\overrightarrow{F_i}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ тоже часто удобно разложить ее на составляющие $\overrightarrow{F_i}'$ и $\overrightarrow{F_i}''$, параллельные координатным осям. Тогда по теореме Вариньона будет $m_x\left(\overrightarrow{F_i}\right) = m_x\left(\overrightarrow{F_i}'\right) + m_x\left(\overrightarrow{F_i}''\right)$ и так далее.

Пример С2. Вертикальная прямоугольная плита весом *P* (рис. 12) закреплена сферическим шарниром и точке *A*, цилиндрическим (подшипником) в точке *B* и невесомым стержнем *DD'*, лежащим и плоскости, параллельной плоскости *yz*. На плиту действуют сила $\overrightarrow{F_1}$ (в плоскости *yz)*, сила $\overrightarrow{F_2}$ (параллельна оси *y*) и пара сил с моментом *M* (в плоскости плиты).

Дано: P=5 кН, M=3 кН, α=30°, F_1=6 кН, F_2=7,5 кН, AB=1 м, BC=2 м, CE = 0,5 AB, BK = 0,5 BC.

Определить: реакции опор *A, B* и стержня *DD'*.

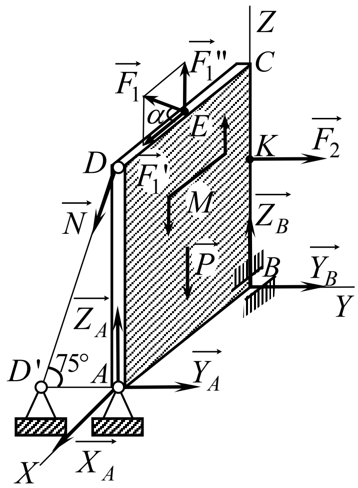


Рис. 12

Решение

1. Рассмотрим равновесие плиты. На нее действуют заданные силы $\overrightarrow{P}, \overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}$ и пара сил с моментом *M*, а также реакции связей. Реакцию сферического шарнира разложим на три составляющие $\overrightarrow{X_A}, \overrightarrow{Y_A}, \overrightarrow{Z_A}$, цилиндрического (подшипника) – на две составляющие

$\overrightarrow{Y_B}, \overrightarrow{Z_B}$ (в плоскости, перпендикулярной оси подшипника), реакцию $\overrightarrow{N}$ стержня направим вдоль стержня, предполагая, что он растянут.

2. Для определения шести неизвестных реакций составляем шесть уравнений равновесия действующей на плиту пространственной системы сил:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad X_A + F_1 \cos\alpha = 0, \tag{1.4}$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad Y_A + Y_B + F_2 - N\cos 75° = 0, \tag{1.5}$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0, \quad Z_A + Z_B - P - N\sin 75° + F_1 \sin\alpha = 0, \tag{1.6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_x\left(\overrightarrow{F_k}\right) = 0, \quad N\cos 75° \cdot AD - F_2 \cdot BK = 0, \tag{1.7}$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_y\left(\overrightarrow{F_k}\right) = 0, \quad M + P \cdot AB/2 - Z_A \cdot AB + N\sin 75° \cdot AB + $$

$$+ F_1 \cos\alpha \cdot BC - F_1 \sin\alpha \cdot AB/2 = 0, \tag{1.8}$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_z\left(\overrightarrow{F_k}\right) = 0, \quad Y_A \cdot AB - N\cos 75° \cdot CD = 0. \tag{1.9}$$

Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и решив эти уравнения, определим искомые реакции.

Ответ: X_A = –5,2 кН; Y_A = 3,75 кН; Z_A = 28,37 кН; Y_B = –7,5 кН; Z_B = –12,39 кН; N = 14,48 кН. Знаки указывают, что силы X_A, Y_B, Z_B направлены противоположно показанным на рис. 12 направлениям.

Часть II. К И Н Е М А Т И К А

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

Указания к выполнению контрольной задачи К1

Рекомендуемая учебная литература: [**2**], **часть 1:** гл. .VII-IX, § 63-76, с.143–176; [**3**]: гл. IX, § 36–46, с.95–116.

Задача К1 – на определение скорости и ускорения точки no заданным в координатной форме уравнениям ее движения.

По определению ***скорость точки*** $\vec{V}$ в данный момент времени – это вектор, равный производной от радиуса-вектора движущейся точки по времени и направленный по касательной к траектории точки в сторону движения

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (2.1)$$

В декартовой системе координат *Oxyz,* принимаемой за неподвижную, радиус-вектор движущейся точки (рис. 13) определяется равенством:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – орты координатных осей;

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \qquad (2.2)$$

Уравнения (2.2) являются уравнениями движения точки, заданные ***координатным способом***. Эти же уравнения являются уравнениями траектории точки (рис. 13) в параметрическом виде, где параметром является время t. Для определения траектории точки в случае задания ее движения координатным способом необходимо из уравнения (2.2) исключить время t. Для определения скорости точки, заданной координатным способом, по формуле (2.1) имеем

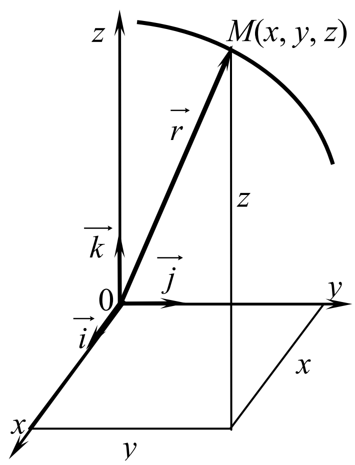


Рис. 13

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}\ , \tag{2.3}$$

где $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = V_x$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt} = V_y$, $\dot{z} = \frac{dz}{dt} = V_z$ – проекции вектора скорости точки на неподвижные декартовы координаты.

Модуль скорости определяется формулой

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}\ . \tag{2.4}$$

Направление вектора скорости определяется направляющими косинусами:

$$\cos\left(\vec{V}\,\hat{;}\,\vec{i}\right) = \frac{V_x}{V},\quad \cos\left(\vec{V}\,\hat{;}\,\vec{j}\right) = \frac{V_y}{V},\quad \cos\left(\vec{V}\,\hat{;}\,\vec{k}\right) = \frac{V_z}{V}.$$

Ускорение точки определяется как первая производная от вектора скорости по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}\ , \tag{2.5}$$

где $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = a_x$, $\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} = a_y$, $\ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2} = a_z$ – проекции вектора ускорения точки на неподвижные декартовы координаты.

Модуль вектора ускорения вычисляется аналогично модулю вектора скорости:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ , \tag{2.6}$$

а направление вектора ускорения – направляющими косинусами:

$$\cos\left(\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{i}\right) = \frac{a_x}{a},\quad \cos\left(\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{j}\right) = \frac{a_y}{a},\quad \cos\left(\vec{a}\,\hat{;}\,\vec{k}\right) = \frac{a_z}{a}.$$

Движение точки может быть задано также ***естественным способом***. При этом способе должна быть известна траектория точки и задан закон движения точки M по этой траектории:

$s = s(t)$, где $s = \overset{\smile}{M_0 M}$ – дуга, отсчитываемая на траектории от начального положения точки M_0.

Для определения положения точки на траектории задается также направление положительного отсчета дуги (рис. 14).

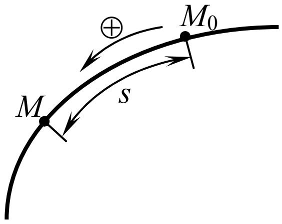


Рис. 14

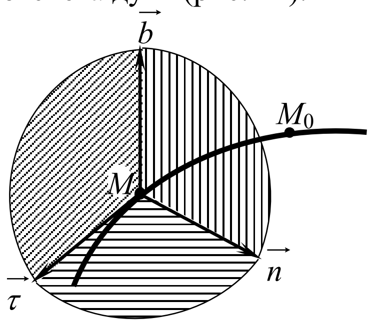


Рис. 15

При этом способе используются естественные оси с началом в текущем положении точки M на траектории (рис. 15) и единичными векторами $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$. Единичный вектор $\vec{\tau}$ направлен по касательной к траектории в сторону положительного отсчета дуги, единичный вектор $\vec{n}$ направлен по главной нормали траектории в сторону се вогнутости, единичный вектор $\vec{b}$ направлен по бинормали траектории в точке M.

Орты $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$ лежат в соприкасающейся плоскости, орты $\vec{n}$ и $\vec{b}$ в нормальной плоскости, орты $\vec{\tau}$ и $\vec{b}$ – в спрямляющей плоскости.

Скорость точки при естественном способе задания движения точки определяется формулой

$$\vec{V} = V_\tau \cdot \vec{\tau} \ ,$$

где проекция вектора скорости на касательную V_τ определяется по формуле:

$$V_\tau = \dot{s} = \frac{ds}{dt} . \tag{2.7}$$

Модуль вектора скорости $V = |V_\tau|$.

Вектор ускорения точки лежит в соприкасающейся плоскости и раскладывается на касательную и нормальную составляющие:

$$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n} ,$$

где проекция вектора ускорения на касательную

$$a_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} = \dot{V}_\tau \qquad (2.8)$$

называется ***касательным*** (***тангенциальным***) ***ускорением.***

Касательное ускорение характеризует «быстроту» изменения величины скорости. При $a_\tau \cdot V_\tau > 0$ (векторы касательного ускорения и скорости направлены в одну сторону) точка в данный момент времени движется ускоренно, при $a_\tau \cdot V_\tau < 0$ (векторы касательного ускорения и скорости направлены в разные стороны) – замедленно.

Проекция ускорения на главную нормаль

$$a_n = \frac{V^2}{\rho}, \qquad (2.9)$$

где ρ – радиус кривизны траектории в точке M, называется ***нормальным ускорением***.

Модуль вектора ускорения определяется по формуле

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} . \qquad (2.10)$$

Направление вектора ускорения определяется направляющими косинусами

$$\cos\left(\vec{a} \,\hat{;}\, \vec{\tau}\right) = \frac{a_\tau}{a}, \quad \cos\left(\vec{a} \,\hat{;}\, \vec{n}\right) = \frac{a_n}{a} .$$

В соответствии с вышеизложенным задачу **К1** необходимо решать в следующей последовательности:

1) выбрать систему координат;

2) исключив время из уравнений движения точки, определить уравнение траектории точки и изобразить ее график;

3) определить на графике положение точки в заданный момент времени;

4) по заданным уравнениям движения точки определить проекции скорости точки и модуль скорости по формулам (2.3) и (2.4) соответственно;

5) построить на рисунке вектор скорости точки в заданный момент времени;

6) по формулам (2.5) и (2.6) определить ускорение точки;

7) построить на рисунке вектор ускорения точки в заданный момент времени;

8) взять производную по времени от модуля скорости и составить выражение для квадрата касательного ускорения;

9) используя формулу (2.10), вычислить нормальное ускорение;

10) используя формулу нормального ускорения (2.9), вычислить радиус кривизны траектории в заданный момент времени;

11) разложить ускорение точки на касательную и нормальную составляющие на рисунке;

12) определить по касательному ускорению характер движения точки в заданный момент времени.

Пример выполнения задания

Движение точки *M* в плоскости *x,y* задано уравнениями

$$x = 5\cos^2\frac{\pi t}{2} - 2; \quad y = 4\sin^2\frac{\pi t}{4} \qquad (x,\ y - \text{в см},\quad t - \text{в с}) \qquad (2.11)$$

Определить траекторию точки и для момента времени $t_1 = 1/2$ с найти положение точки *M* на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения. Определить также радиус кривизны траектории в точке *M*.

Решение. Определим траекторию точки *M,* исключив из уравнений движения (2.11) время *t*. С этой целью преобразуем уравнения (2.11), приведя тригонометрические функции к одному аргументу:

$$y = 4\sin^2\frac{\pi t}{4} = 2\left(1-\cos\frac{\pi t}{2}\right) \quad \text{или} \quad \cos\frac{\pi t}{2} = 1-\frac{y}{2}. \qquad (2.12)$$

Подставляя (2.12) и первое уравнение (2.11), получим $x = 5\left(1-\dfrac{y}{2}\right)^2 - 2$ или $x = \dfrac{5}{4}(2-y)^2 - 2$.

Траекторией точки является парабола (рис. 16).

Определим начальное положение точки M_0: при $t = 0$ $x_0 = 5\cos^2 0 - 2 = 3$, $y_0 = 4\sin^2 0 = 0$.

В момент времени $t_1 = 1/2$ с точка *M* имеет координаты:

$$x_1 = 5\cos^2\frac{\pi}{4} - 2 = 0{,}5; \quad y_1 = 4\sin^2\frac{\pi}{8} = 0{,}59.$$

Определим проекции скорости точки по формулам (2.3):

$$V_x = \dot{x} = -10\cos\frac{\pi t}{2}\sin\frac{\pi t}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = -5\cos\frac{\pi t}{2}\sin\frac{\pi t}{2} = -\frac{5\pi}{2}\sin\pi t,$$

$$V_y = \dot{y} = 8\sin\frac{\pi t}{4}\cos\frac{\pi t}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = 2\pi\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi t}{4} = \pi\sin\frac{\pi t}{2}. \qquad (2.13)$$

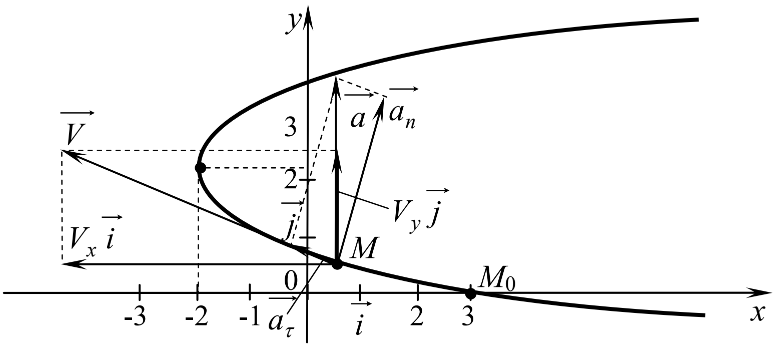


Рис. 16

По формуле (2.4) определим модуль скорости:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{\frac{25\pi^2}{4}\sin^2 \pi t + \pi^2 \sin^2 \frac{\pi t}{2}} =$$

$$= \pi\sqrt{\frac{25}{4}\sin^2 \pi t + \sin^2 \frac{\pi t}{2}}\,. \qquad (2.14)$$

Определим проекции и модуль скорости в момент времени $t_1 = 1/2$ с:

$$V_{1x} = -\frac{5\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} = -7{,}85 \text{ см/с};$$

$$V_{1y} = \pi\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} = 2{,}22 \text{ см/с};$$

$$V_1 = \sqrt{V_{1x}^2 + V_{1y}^2} = \sqrt{7{,}85^2 + 2{,}22^2} = 8{,}15 \text{ см/с}.$$

Вектор скорости строим (рис. 16) по составляющим:

$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j}\,.$$

Определим проекции ускорения точки *M,* вычисляя производные по времени от проекций се скорости (2.13):

$$a_x = \dot{V}_x = -\frac{5\pi^2}{2}\cos\pi t,$$

$$a_y = \dot{V}_y = \frac{\pi^2}{2}\cos\frac{\pi t}{2}.$$

По формуле (2.6) определим модуль ускорения:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{\pi^2}{2}\sqrt{25\cos^2 \pi t + \cos^2 \frac{\pi t}{2}}\,.$$

При $t_1 = 1/2$ с $a_{1x} = -\dfrac{5\pi^2}{2}\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$, $a_{1y} = \dfrac{\pi^2}{2}\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi^2\sqrt{2}}{4} = 3{,}48\,\text{см/с}^2$, следовательно, $a_1 = 3{,}48$ см/с^2, и вектор ускорения $\vec{a_1} = a_{1y}\vec{j}$ направлен вертикально вверх.

Найдем производную от функции скорости (2.14) по времени:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi\left(\dfrac{\pi \cdot 25}{2}\sin\pi t\cos\pi t + 2\sin\dfrac{\pi t}{2}\cos\dfrac{\pi t}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)}{2\sqrt{\dfrac{25}{4}\sin^2\pi t + \sin^2\dfrac{\pi t}{2}}} =$$

$$= \frac{\pi^2\left(25\sin^2\pi t + \sin\pi t\right)}{4\sqrt{25\sin^2\pi t + 4\sin^2\dfrac{\pi t}{2}}}.$$

При $t_1 = 1/2$ с $\quad a_{1\tau} = \pm\dfrac{\pi^2\left(25\sin\pi + \sin\dfrac{\pi}{2}\right)}{4\sqrt{25\sin^2\dfrac{\pi}{2} + 4\sin^2\dfrac{\pi}{4}}} = \pm 0{,}47.$

Учитывая, что $a_{1\tau}^2 = \left.\left(\dfrac{dV_\tau}{dt}\right)^2\right|_{t_1} = \left.\left(\dfrac{dV}{dt}\right)^2\right|_{t_1} = 0{,}23$, вычислим нормальное ускорение по формуле (2.10):

$$a_{1n} = \sqrt{a_1^2 - a_{1\tau}^2} = \sqrt{3{,}48^2 - 0{,}23^2} = 1{,}8\ \text{см/с}^2.$$

Радиус кривизны вычислим по формуле (2.9)

$$\rho_1 = \frac{V_1^2}{a_{1n}} = \frac{8{,}15^2}{1{,}8} = 36{,}9\ \text{см}.$$

Поскольку векторы скорости и касательного ускорения направлены в одну сторону, точка в данный момент времени движется ускоренно.

КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Кинематический анализ плоского механизма

Указания к выполнению контрольной задачи К2

Рекомендуемая учебная литература: [**2**], **часть 1:** гл.X, §78-84, с.184–203; гл.XI, § 85-87, 90-91, с.204-209, 215-224; [**3**]: гл.X, §48–51, с.117–126; гл.XI, §127–140.

Задача К2 – на определение угловых скоростей звеньев и скоростей отдельных точек плоского многозвенного механизма, состоящего из 4-х стержней и ползуна *B,* соединенных друг с другом и неподвижными опорами с помощью шарниров. Стержни 1 и 4 совершают *вращательное движение,* ползун *B – поступательное,* стержни 3 и 4 – *плоское движение* в своей плоскости.

Поступательным движением плоской фигуры является движение, при котором любая прямая, проведенная в плоскости движущейся фигуры, остается параллельной самой себе. В случае поступательного движения все точки фигуры движутся одинаково, а скорости и ускорения всех точек в каждый момент времени равны между собой. Поступательное движение тела можно рассматривать как движение одной точки.

Вращательным движением плоской фигуры в своей плоскости является такое се движение, при котором одна точка фигуры (*центр вращения*) остается все время неподвижной. Траекториями точек фигуры при этом будут дуги окружностей с центром в центре вращения, а их векторы скоростей $\overrightarrow{V}$ по модулю пропорциональны расстояниям R до центра вращения (*радиусу вращения*):

$$V = \omega \cdot R, \qquad (2.15)$$

где ω – угловая скорость вращения плоской фигуры. Направлен вектор скорости по касательной к дуге окружности, по которой движется, и, следовательно, перпендикулярно радиусу вращения в сторону движения.

Непоступательное движение плоской фигуры в своей плоскости, если у нее нет закрепленных точек, является ***плоским движением***.

При определении скоростей точек плоской фигуры целесообразно использовать теорему о проекциях скоростей двух точек твердого тела: *проекции скоростей двух точек тела на прямую, соединяющую их, равны* (рис. 17):

$$V_A \cos\alpha = V_B \cos\beta\,. \tag{2.16}$$

При ***плоском движении*** в каждый данный момент времени существует единственная точка P плоской фигуры, скорость которой равна нулю (*мгновенный центр скоростей*), а распределение скоростей таково, как если бы плоская фигура совершала вращательное движение вокруг мгновенного центра скоростей (*теорема о мгновенном центре скоростей*):

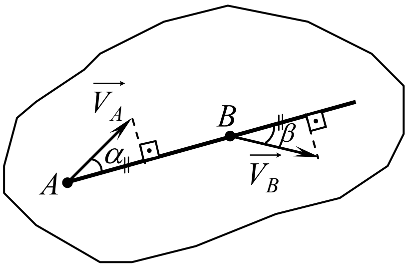


Рис. 17

$$V = \omega \cdot h\,, \tag{2.17}$$

где h – расстояние от точки до мгновенного центра скоростей, ω – угловая скорость плоской фигуры.

На рис. 18 показаны способы нахождения мгновенного центра скоростей по скоростям двух точек плоской фигуры. На рис. 18 а показан случай, когда известен вектор скорости $\overrightarrow{V_A}$ точки A и прямая, по которой направлен вектор скорости точки B. Мгновенный центр скоростей находится на пересечении перпендикуляров к скоростям, восстановленным в этих точках. Угловая скорость ω в этом случае находится по известной величине скорости V_A точки A:

$$\omega = \frac{V_A}{AP}\,. \tag{2.18}$$

В случае, показанном на рис. 18 б, угловую скорость плоской фигуры можно найти, пользуясь свойством пропорции, по одной из формул:

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_A - V_B}{AB}.$$

Аналогично, в случае, показанном на рис. 18 в, угловую скорость можно определить по формулам:

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_A + V_B}{AB}.$$

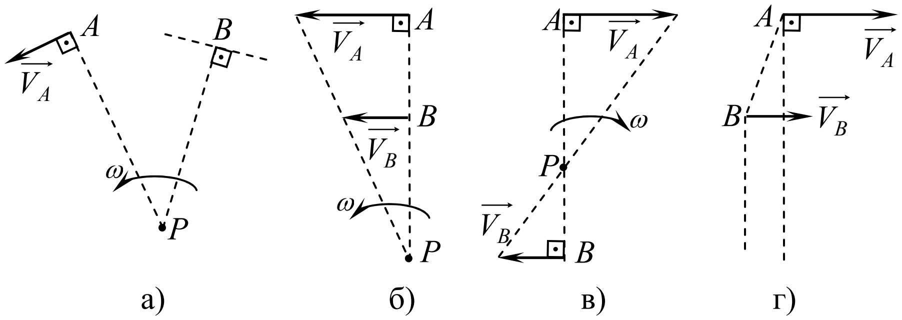


Рис. 18

В случае, когда скорости двух точек A и B плоской фигуры параллельны, но не перпендикулярны к AB (рис. 18 г), мгновенный центр скоростей находится в бесконечности и, следовательно, угловая скорость равна нулю. Векторы скоростей всех точек плоской фигуры в данный момент времени будут равны. Движение плоской фигуры в этом случае называют ***мгновенно поступательным***.

При определении скоростей точек и угловых скоростей звеньев механизма, совершающих плоское движение, необходимо выполнить следующие действия:

1) если для стержня, совершающего плоское движение, по условиям задачи необходимо определить его угловую скорость, то следует найти положение мгновенного центра скоростей одним из вышеизложенных способов, предварительно определив направления векторов скоростей его двух точек;

2) определить расстояние от точки стержня, скорость которой известна или ее можно предварительно определить, до мгновенного центра скоростей;

3) определить угловую скорость стержня в данный момент по формуле (2.18);

4) зная угловую скорость стержня, определить по формуле (2.17) искомые скорости его точек;

5) если угловую скорость стержня определять по условиям задачи не нужно, и известна скорость какой-либо точки стержня или ее можно предварительно определить, то для определения скорости точки, у которой известно направление вектора скорости, целесообразно воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек тела (2.16).

Примеры выполнения задания

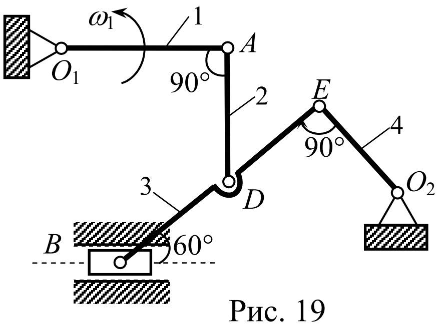


Рис. 19

Пример 1. Плоский многозвенный механизм образован стержнями $O_1A = l_1 = 0{,}4$ м, $AD = l_2 = 1{,}2$ м, $EB = l_3 = 1{,}4$ м, $O_2E = l_4 = 0{,}8$ м и ползуном B, соединенными друг с другом и неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами (рис. 19).

Кривошип O_1A вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_1 = 1{,}5$ рад/с. Точка D находится посередине стержня BE.

Определить для заданного положения механизма скорости V_B, V_E, V_D точек B, E, D и угловые скорости ω_3 и ω_4 стержней BE и O_2E.

Решение. Кривошипы O_1A и O_2E совершают вращательное движение вокруг неподвижных точек O_1 и O_2 соответственно, стержни AD и EB – плоскопараллельное движение, ползун B – поступательное движение по горизонтальной направляющей.

Вычислим модуль скорости точки A кривошипа O_1A по формуле (2.15):

$$V_A = \omega_1 \cdot l_1 = 1{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}6 \text{ м/с} .$$

Вектор $\overrightarrow{V_A}$ скорости точки A перпендикулярен O_1A и направлен в сторону вращения кривошипа (кривошип вращается против хода часовой стрелки).

Определим направление вектора скорости точки D стержня AD. С этой целью построим мгновенный центр скоростей для стержня BE, которому также принадлежит точка B (рис. 20). Мгновенный центр скоростей (точка P) лежит на пересечении перпендикуляров направлениям скоростей точек B и E, восстановленных в этих точках. Векторы скоростей $\overrightarrow{V_B}$ и $\overrightarrow{V_E}$ точек B и E направлены вдоль горизонтальной направляющей и вдоль стержня BE соответственно. Соединим точки D и P. Вектор скорости точки D составляет прямой угол с прямой DP. Направим его так, чтобы его проекция и проекция вектора $\overrightarrow{V_A}$ на прямую AD были одного знака.

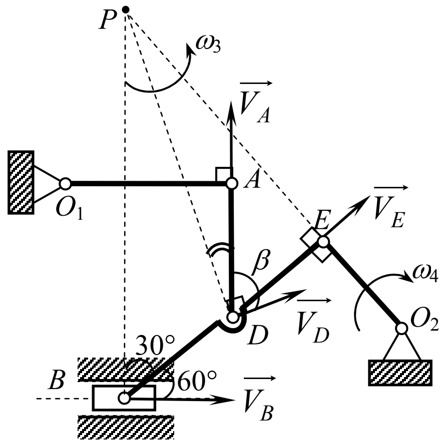


Рис. 20

Определим косинус угла β, который составляет вектор скорости $\overrightarrow{V_D}$ точки D с прямой AD. С этой целью определим сторону BP прямоугольного треугольника BPE:

$$BP = \frac{BE}{\cos 30°} = \frac{l_3}{\cos 30°} = \frac{1{,}4 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 1{,}62 \text{ м}.$$

Рассмотрим далее треугольник BPD. По теореме косинусов определим PD:

$$PD = \sqrt{BD^2 + BP^2 - 2BD \cdot BP \cos 30°} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{l_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{2l_3}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2 \cdot \frac{l_3}{2} \cdot \frac{2l_3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = l_3\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{3} - 1} = l_3\sqrt{\frac{7}{12}}.$$

По теореме синусов:

$$\frac{\sin(90° - \beta)}{BD} = \frac{\sin 30°}{PD}, \qquad \text{или}$$

$$\cos\beta = \sin(90° - \beta) = \frac{BD \cdot \sin 30°}{PD} =$$

$$= \frac{l_3 \cdot \sqrt{12}}{2 \cdot l_3 \cdot \sqrt{7} \cdot 2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Применив к стержню AD теорему о проекциях скоростей двух его точек, определим скорость точки D:

$$V_A = V_D \cos\beta = V_D \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Откуда

$$V_D = \frac{2 \cdot V_A \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 0{,}6 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{3}} = 1{,}83 \text{ м/с}.$$

Зная положение мгновенного центра скоростей для стержня EB, определим его угловую скорость по формуле (2.18):

$$\omega_3 = \frac{V_D}{PD} = \frac{1{,}2 \cdot \sqrt{7} \cdot 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot l_3 \sqrt{7}} = \frac{2{,}4}{1{,}4} = 1{,}71 \text{ рад/с}.$$

По формуле (2.17) определим модули скоростей точек B и E:

$$V_B = \omega_3 \cdot BP = 1{,}71 \cdot \frac{2{,}8}{\sqrt{3}} = 2{,}76 \text{ м/с};$$

$$V_E = \omega_3 \cdot EP, \text{ где } EP = \frac{BP}{2} = 0{,}81 \text{ м}.$$

Следовательно, $V_E = 1{,}71 \cdot 0{,}81 = 1{,}39$ м/с.

Зная скорость $\overrightarrow{V_E}$ точки E, определим угловую скорость кривошипа O_2E по формуле (2.15):

$$\omega_4 = \frac{V_E}{EO_2} = \frac{V_E}{l_4} = \frac{1{,}39}{0{,}8} = 1{,}74 \text{ м/с}.$$

Пример 2. Пусть теперь при тех же условиях вместо угловой скорости ω_1 кривошипа O_1A задан модуль вектора скорости ползуна $V_B = 5$ м/с, направленного от точки B к b (рис. 21).

Определить для заданного положения механизма скорости V_E, V_D, V_A точек E, D, A и угловые скорости ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 стержней O_1A, AD, BE и O_2E.

Решение. Определим направление вектора $\overrightarrow{V_E}$ точки E. Он составляет прямой угол с прямой O_2E и направлен так, чтобы его проекция и проекция вектора скорости ползуна $\overrightarrow{V_B}$ на прямую BE были одного знака.

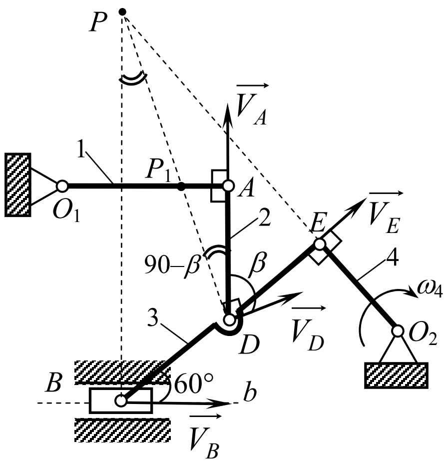


Рис. 21

По теореме о проекциях скоростей двух точек тела (2.16):

$$V_E = V_B \cos 60° = 5/2 = 2{,}5 \text{ м/с}.$$

Вычислим угловую скорость ω_4 кривошипа O_2E по формуле (2.15):

$$\omega_4 = \frac{V_E}{EO_2} = \frac{2{,}5}{0{,}8} = 3{,}125 \text{ рад/с}.$$

Угловую скорость ω_3 стержня BE определим по формуле (2.17), построив мгновенный центр скоростей для стержня BE (см. пример 1):

$$\omega_3 = \frac{V_B}{PB}, \qquad \text{где} \quad BP = 1{,}62 \text{ м}.$$

Следовательно, $\omega_3 = \dfrac{5}{1{,}62} = 3{,}09$ рад/с.

Зная угловую скорость стержня BE, определим скорость V_D точки D по формуле (2.17):

$$V_D = \omega_3 \cdot PD = 3{,}09 \cdot l_3 \sqrt{\frac{7}{9}} = 3{,}09 \cdot 1{,}4 \sqrt{\frac{7}{12}} = 3{,}3 \text{ м/с.}$$

Применив к стержню AD теорему о проекциях скоростей двух его точек, определим скорость точки A:

$V_A = V_D \cos\beta$, где $\cos\beta = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{7}}$ (см. пример 1).

Следовательно, $V_A = 3{,}3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{7}} = 1{,}08$ м/с.

Вычислим угловую скорость из кривошипа O_1A по формуле (2.15):

$$\omega_1 = \frac{V_A}{l_1} = \frac{1{,}08}{0{,}4} = 2{,}7 \text{ рад/с.}$$

Для определения угловой скорости ω_2 построим мгновенный центр скоростей стержня AD, который лежит на пересечении перпендикуляров направлениям скоростей $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_D$, восстановленных в этих точках (точка P_1, рис. 21).

В прямоугольном треугольнике P_1AD определим косинус острого угла $(90°–\beta)$ при катете AD: $\cos(90°–\beta)=$ $=\sqrt{1-\sin^2(90°-\beta)}$, где $\sin(90°–\beta)=\sin 30° \sqrt{\frac{3}{7}}$ (см. пример 1).

Следовательно, $\cos(90°–\beta)=\sqrt{1-\sin^2 30° \cdot \frac{3}{7}} = \sqrt{1-\frac{3}{28}} = 0{,}94$.

Определим угловую скорость ω_2 стержня AD но формуле (2.18):

$$\omega_2 = \frac{V_D}{DP_1},$$

где из прямоугольного треугольника $DP_1 = \frac{l_2}{\cos(90° - \beta)} = \frac{1{,}2}{2{,}94} = 1{,}28$ м

и, следовательно, $\omega_2 = \frac{3{,}3}{1{,}27} = 2{,}6$ рад/с.

Сложное движение точки

Указания к выполнению контрольной задачи К3

Рекомендуемая учебная литература: [**2**], **часть 1:** гл. XIV, §111–116, с.275–302; [**3**]: гл. XIII, § 64–67, с.155–169.

Задача К3 – на определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки, совершающей сложное движение.

Рассмотрим движение точки M относительно двух систем координат $Oxyz$ и $O_1x_1y_1z_1$, движущихся друг относительно друга (рис. 22). В механике системы координат предполагаются жестко скрепленными с телами, по отношению к которым рассматривается движение точки. Тела на рисунках не показываются.

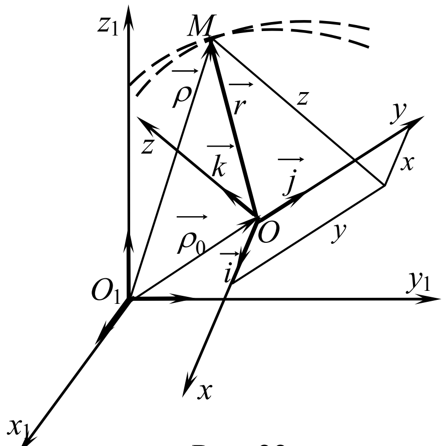


Рис. 22

Пусть задано движение системы координат $Oxyz$ относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$. Движение точки M относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$ называют сложным, если задано ее движение относительно системы координат $Oxyz$. Систему координат $O_1x_1y_1z_1$ принимают при этом за неподвижную или основную, а систему координат $Oxyz$ – за подвижную. Движение точки M относительно подвижной системы координат называют ***относительным***. Соответственно траектория (рис. 22), скорость $\vec{V_r}$ и ускорение $\vec{a_r}$ точки в ее движении относительно подвижной системы координат называются относительными. Положение точки M по отношению к системе координат $Oxyz$ определяет радиус-вектор $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Для определения относительной скорости и относительного ускорения точки следует мысленно остановить движение подвижной системы координат и вычислить их по правилам кинематики точки.

Движение подвижной системы координат относительно неподвижной называют ***переносным движением***.

Переносной скоростью $\overrightarrow{V_e}$ ***(ускорением*** $\overrightarrow{a_e}$***)*** точки M в данный момент времени называют вектор, равный скорости $\overrightarrow{V_m}$ (ускорению $\overrightarrow{a_m}$) той точки m подвижной системы координат, с которой совпадает в данный момент движущаяся точка M. Для определения переносной скорости $\overrightarrow{V_c}$ и переносного ускорения $\overrightarrow{a_c}$ в данный момент времени необходимо мысленно остановить в этот момент времени относительное движение точки, определить точку m тела, неизменно связанного с подвижной системой координат, где находится в остановленный момент точка M, и вычислить скорость и ускорение точки m тела, совершающего переносное движение относительно неподвижной системы координат.

Движение точки M относительно неподвижной системы координат называют ***абсолютным***. Соответственно, траекторию (рис. 22), скорость $\overrightarrow{V_a}$ и ускорение $\overrightarrow{a_a}$ относительно неподвижной системы координат называют ***абсолютными***.

Абсолютная скорость точки $\overrightarrow{V_a}$ определяется по **т е о р е м е о с л о ж е н и и с к о р о с т е й**, согласно которой абсолютная скорость точки, совершающей сложное движение, равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей:

$$\overrightarrow{V_a} = \overrightarrow{V_e} + \overrightarrow{V_r}\,. \qquad (2.19)$$

Абсолютное ускорение точки $\overrightarrow{a_a}$ определяется по **т е о р е м е К о р и о л и с а**, согласно которой абсолютное ускорение точки, совершающей сложное движение, равно геометрической сумме переносного, относительного и кориолисова ускорений:

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_k}\,. \qquad (2.20)$$

Кориолисово ускорение вычисляется по формуле:

$$\overrightarrow{a_k} = 2\overrightarrow{\omega_e} \times \overrightarrow{V_r}\ , \tag{2.21}$$

где $\overrightarrow{\omega_e}$ – вектор угловой скорости переносного движения, $\overrightarrow{V_r}$ – вектор относительной скорости точки. Направление вектора кориолисова ускорения определяется по правилу векторного произведения: кориолисово ускорение будет направлено перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы $\overrightarrow{\omega_e}$ и $\overrightarrow{V_r}$ (рис. 23), в ту сторону, откуда кратчайший поворот от вектора $\overrightarrow{\omega_e}$ к вектору $\overrightarrow{V_r}$ видится происходящим против хода часовой стрелки.

Модуль кориолисова ускорения равен $\omega_k = 2\omega_e V_r \sin\left(\widehat{\overrightarrow{\omega_e}, \overrightarrow{V_r}}\right)$.

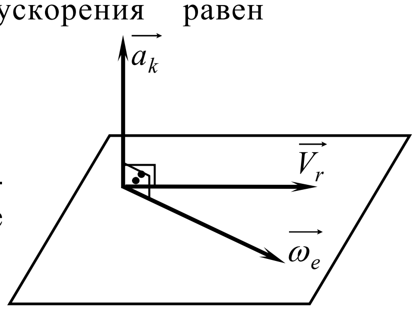


Рис. 23

При переносном поступательном движении кориолисово ускорение в формуле (2.20) обращается в нуль:

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_r}\ .$$

Согласно вышеизложенному, задачу **КЗ** рекомендуется решать в следующей последовательности:

1) рассмотреть движение точки как сложное, разложив его на переносное и относительное движения;

2) выбрать подвижную и неподвижную системы координат;

3) определить угловую скорость и угловое ускорение переносного движения подвижной системы координат;

4) мысленно остановив движение точки M в ее относительном движении в заданный момент времени, определить точку m подвижной системы координат, где окажется остановленная точка;

5) определить переносные скорость $\overrightarrow{V_e}$ и ускорение $\overrightarrow{a_e}$, вычислив скорость и ускорение точки m подвижной системы координат относительно неподвижной системы координат;

6) мысленно остановив переносное движение подвижной

системы координат, определить относительные скорость $\vec{V_r}$ и ускорение $\vec{a_r}$, точки в заданный момент времени;

7) определить кориолисово ускорение $\vec{a_k}$ точки в заданный момент времени;

8) по теореме сложения скоростей определить абсолютную скорость точки;

9) методом проекций по теореме сложения ускорений определить абсолютное ускорение точки.

Пример выполнения задания

По ободу диска радиуса R (рис. 24), вращающегося вокруг своего диаметра по закону $\varphi = \varphi(t)$, движется точка M по закону $s = s(t)$. Положительное направление отсчета угла φ показано на рис. 24 дуговой стрелкой. За положительное направление отсчета дуги принять направление отсчета от точки O к точке M. Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение a_a точки M в момент времени t_1.

Дано: $R = 30$ см; $\varphi = -\dfrac{1}{4}t^2$ рад; $s = \dfrac{\pi R}{3}\left(4t^2 - 2t\right)$ см; $t_1 = 1$ с.

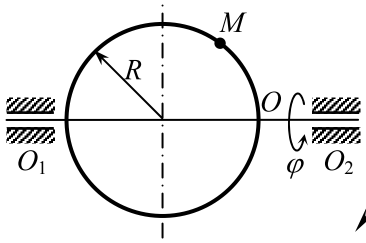


Рис. 24

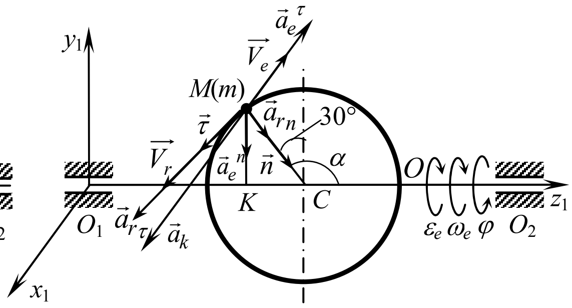


Рис. 25

Решение. Абсолютное движение точки M складывается из относительного движения точки по ободу диска (заданного естественным способом по закону $s=\frac{\pi R}{3}\left(4t^2-2t\right)$ и переносного вращательного движения самого диска (заданного законом вращательного движения $\varphi=-\frac{1}{4}t^2$).

Неподвижную систему координат $O_1x_1y_1z_1$ свяжем с опорой O_1 (рис. 25), направив ось z_1 по диаметру, вокруг которого вращается диск, а подвижную систему координат – с диском (на рисунке не показана). Считаем, что плоскость диска в данный момент времени совпадает с плоскостью $O_1x_1y_1z_1$.

Вычислим угловую скорость и угловое ускорение диска:

$$\omega_{e_z}=\dot{\varphi}=-\frac{1}{2}t,\quad \varepsilon_{e_z}=\ddot{\varphi}=-\frac{1}{2}.$$

В заданный момент времени $t_1 = 1$ с $\omega_{e_z}=-\frac{1}{2}$ и, следовательно, диск вращается равноускоренно с угловой скоростью $\omega_e=\frac{1}{2}$ рад/с и угловым ускорением $\varepsilon_e=\frac{1}{2}$ рад/с^2 в сторону, противоположную положительному направлению отсчета угла поворота (рис. 25).

Определим положение точки M в момент времени $t_1 = 1$ с:

$$s_1=\frac{\pi R}{3}\left(4t_1^2-2t_1\right)=\frac{2\pi R}{3}.$$

Центральный угол, включающий дугу s_1, вычислим по формуле

$$\alpha=\frac{s_1}{R}=\frac{2\pi R}{3\cdot R}=\frac{2\pi}{3}=120^\circ.$$

Для определения переносной скорости $\overrightarrow{V_e}$ и переносного ускорения $\overrightarrow{a_e}$ мысленно остановим относительное движение точки в момент времени $t_1 = 1$ с и определим скорость и ускорение той точки m диска (рис. 25), где в данный момент находится движущаяся точка M.

$$V_e = V_m = \omega_e h\,, \tag{2.22}$$

где $h = MK$ – расстояние от точки M до оси вращения. Из прямоугольного треугольника CMK $MK = R \sin 60° = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ и, следовательно, по (2.22)

$$V_e = \frac{1}{2}\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2} = 12{,}99 \text{ см/с}.$$

Вектор $\overrightarrow{V_e}$ направлен параллельно оси O_1x_1 в сторону вращения диска, то есть в сторону отрицательного направления оси.

Переносное ускорение раскладываем на касательную и нормальную составляющие

$$\overrightarrow{a_e} = \overrightarrow{a_e}^{\tau} + \overrightarrow{a_e}^{n},$$

где $a_e^n = \omega_e^2 \cdot h = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{R\sqrt{3}}{2} = 6{,}5$ см/с^2,

$$a_e^{\tau} = \varepsilon_e \cdot h = \frac{1}{4}\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2} = 12{,}99 \text{ см/с}^2.$$

Вектор нормального переносного ускорения $\overrightarrow{a_e}^{n}$ направим по прямой MK к оси вращении. Направим вектор касательного ускорения $\overrightarrow{a_e}^{\tau}$ в сторону дуговой стрелки углового ускорения. Его направление совпадает с направлением переносной скорости $\overrightarrow{V_e}$.

Перейдем к вычислению относительной скорости и относительного ускорения точки M. Мысленно остановим вращательное движение диска. Относительное движение точки M задано естественным способом. Выберем естественные оси ее траектории. Направим единичный вектор касательной $\overrightarrow{\tau}$ в сторону положительного отсчета дуги, а единичный вектор нормали $\overrightarrow{n}$ – к центру окружности (рис. 25).

Определим проекцию относительно скорости на касательную V_{r_τ} :

$$V_{r_\tau} = \frac{ds}{dt} = \frac{\pi R}{3}(8t - 2).$$

Для момента времени $t_1 = 1$ с

$$V_{r_\tau} = \frac{\pi R}{3}(8t_1 - 2) = 2\pi R = 188{,}5 > 0\,.$$

Так как проекция относительной скорости на касательную положительна, следовательно, направление вектора $\vec{V_r}$, модуль которого $V_r = 188{,}5$ см/с, совпадает с направлением единичного вектора $\vec{\tau}$.

Относительное ускорение $\vec{a_r}$ при криволинейном движении точки раскладывается на касательную и нормальную составляющие:

$$\vec{a_r} = \vec{a_{r\,\tau}} + \vec{a_{r\,n}}\,,$$

где

$$a_{r_n} = \frac{V_r^2}{R} = \frac{4\pi^2 R^2}{R} = 120\pi^2 = 1184{,}35 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{r_\tau} = \frac{dV_{r_\tau}}{dt} = \frac{8\pi R}{3} = 80\pi = 251{,}33 \text{ см/с}^2.$$

Поскольку $a_{r_\tau} > 0$, направление вектора $\vec{a_{r\,\tau}}$ совпадает с направлением единичного вектора $\vec{\tau}$.

Кориолисово ускорение $\vec{a_k}$ определим по формуле (2.21):

$$\vec{a_k} = 2\vec{\omega_e} \times \vec{V_r}\,.$$

Модуль кориолисова ускорения в момент времени $t_1 = 1$ с равен:

$$a_k = 2\omega_e \cdot V_r \cdot \sin 30° = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 60\pi \cdot \frac{1}{2} = 30\pi = 94{,}25 \text{ см/с}^2\,.$$

Вектор кориолисова ускорения направлен параллельно оси

O_1x_1 в сторону положительного направления.

Абсолютную скорость точки M вычислим по теореме сложения скоростей (2.19):

$$\overrightarrow{V_a} = \overrightarrow{V_e} + \overrightarrow{V_r}\,.$$

Так как векторы $\overrightarrow{V_r}$ и $\overrightarrow{V_a} = \overrightarrow{V_e} + \overrightarrow{V_r}$ взаимно перпендикулярны, то модуль абсолютной скорости точки M

$$V_a = \sqrt{{V_e}^2 + {V_r}^2} = \sqrt{12{,}99^2 + 188{,}5^2} = 188{,}95 \text{ см/с} = 1{,}89 \text{ м/с}\,.$$

Абсолютное ускорение точки M вычислим по теореме Кориолиса (2.20):

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_{r\,n}} + \overrightarrow{a_{r\,\tau}} + \overrightarrow{a_e}^{\,n} + \overrightarrow{a_e}^{\,\tau} + \overrightarrow{a_k}\,. \tag{2.23}$$

Проектируя (2.23) на оси координат $O_1x_1y_1z_1$, находим

$$a_{a_{x_1}} = a_{r_n} \cdot \cos 60° - a_{r_\tau} \cdot \cos 30° = 1184{,}35 \cdot \frac{1}{2} - 251{,}33 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 374{,}52 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{a_{y_1}} = -{a_e}^n - a_{r_n} \cdot \cos 30° - a_{r_\tau} \cdot \cos 60° =$$

$$= -6{,}5 - 1184{,}35 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 251{,}33 \cdot \frac{1}{2} = 1157{,}84 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{a_{z_1}} = -{a_e}^\tau + a_k = -12{,}99 + 94{,}25 = 81{,}26 \text{ м/с}^2.$$

Модуль абсолютного ускорения точки M

$$a_a = \sqrt{a_{a_{x_1}}^2 + a_{a_{y_1}}^2 + a_{a_{z_1}}^2} = \sqrt{374{,}52^2 + 1157{,}84^2 + 81{,}26^2} =$$

$$= 1219{,}62 \text{ см/с}^2 = 12{,}2 \text{ м/с}^2.$$

Часть III. Д И Н А М И К А

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Указания к выполнению контрольной задачи Д1

Рекомендуемая учебная литература: [**2**], **часть 2:** гл. II, § 3–10, с.343-355; [**3**]: гл. XV, § 73–76, с.180–186; гл. XVI, § 77–82, с.186–201.

Задача Д1 относится ко второй основной задаче динамики точки, которая состоит в определении закона движения точки по заданным силам. Для се решения необходимо воспользоваться ***основным законом динамики***:

$$m\vec{a} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F_k}\,, \tag{3.1}$$

где $\vec{a}$ – ускорение материальной точки массы m, движущейся под действием сил $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, ..., $\vec{F_n}$.

Материальной точкой в механике называют простейшую модель физического тела любой формы, размерами которого и вращением можно пренебречь в рассматриваемой задаче и которое можно принять за геометрическую точку, наделенную массой.

На основании основного закона динамики точки (3.1) составляются и интегрируются дифференциальные уравнения движения точки.

В проекциях на оси неподвижных декартовых координат, в общем случае криволинейного движения точки в пространстве, дифференциальные уравнения имеют вид:

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}, \quad m\ddot{y} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}, \quad m\ddot{z} = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}\,, \tag{3.2}$$

где $\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$, $\ddot{y} = \dfrac{d^2y}{dt^2}$, $\ddot{z} = \dfrac{d^2z}{dt^2}$ – проекции ускорения точки $\vec{a}$;

$m\ddot{x} = \sum\limits_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_{kx}}$, $m\ddot{y} = \sum\limits_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_{ky}}$, $m\ddot{z} = \sum\limits_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_{kz}}$ – проекции силы $\vec{F_k}$ на соответствующие оси координат, которые могут быть функциями времени, положения точки x, y, z и проекций $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ скорости $\vec{V}$.

При заданной траектории точки ее дифференциальные уравнения движения в проекциях на естественные оси криволинейной траектории записываются в виде:

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=\sum_{k=1}^{n}F_{k\tau},\quad \frac{m}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\sum_{k=1}^{n}F_{kn},\quad 0=\sum_{k=1}^{n}F_{kb},$$

где s – дуговая координата, определяющая положение точки на траектории; ρ – радиус кривизны траектории в данной точке; $F_{k\tau}$, F_{kn}, F_{kb} – проекции силы $\vec{F_k}$ на естественные оси траектории: касательную $\vec{\tau}$, главную нормаль $\vec{n}$, бинормаль $\vec{b}$.

Если систему уравнений (3.2) удастся один раз проинтегрировать, то полученные новые зависимости будут включать время, координаты, их первые производные и три константы интегрирования C_1, C_2, C_3:

$$\begin{cases}\Phi_1(t;\ x,y,z;\ \dot{x},\dot{y},\dot{z};\ C_1,C_2,C_3)=0;\\ \Phi_2(t;\ x,y,z;\ \dot{x},\dot{y},\dot{z};\ C_1,C_2,C_3)=0;\\ \Phi_3(t;\ x,y,z;\ \dot{x},\dot{y},\dot{z};\ C_1,C_2,C_3)=0.\end{cases} \tag{3.3}$$

Систему (3.3) называют ***системой первых интегралов уравнений динамики точки***.

Если систему (3.3) удастся проинтегрировать еще раз, то полученное решение будет зависеть еще от трех констант интегрирования C4, C5, C6:

$$\begin{cases}\Psi_1(t;\ x,y,z;\ \dot{x},\dot{y},\dot{z};\ C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6)=0;\\ \Psi_2(t;\ x,y,z;\ \dot{x},\dot{y},\dot{z};\ C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6)=0;\\ \Psi_3(t;\ x,y,z;\ \dot{x},\dot{y},\dot{z};\ C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6)=0.\end{cases} \tag{3.4}$$

Для определения констант интегрирования используют начальные условия, которые задают начальное положение точки M_0 (x_0, y_0, z_0) и ее начальную скорость $\vec{V_0}(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ в момент времени $t=t_0$:

$$\begin{cases}x=x_0;\quad y=y_0;\quad z=z_0;\\ \dot{x}=\dot{x}_0;\quad \dot{y}=\dot{y}_0;\quad \dot{z}=\dot{z}_0.\end{cases} \tag{3.5}$$

Подставляя начальные условия (3.5) в выражения (3.3) и (3.4), составляют шесть уравнений для определения констант интегрирования:

$$\begin{cases} \Phi_1(t_0;\ x_0, y_0, z_0;\ \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0;\ C_1, C_2, C_3) = 0; \\ \Phi_2(t_0;\ x_0, y_0, z_0;\ \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0;\ C_1, C_2, C_3) = 0; \\ \Phi_3(t_0;\ x_0, y_0, z_0;\ \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0;\ C_1, C_2, C_3) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Psi_1(t_0;\ x_0, y_0, z_0;\ \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0;\ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) = 0; \\ \Psi_2(t_0;\ x_0, y_0, z_0;\ \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0;\ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) = 0; \\ \Psi_3(t_0;\ x_0, y_0, z_0;\ \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0;\ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) = 0. \end{cases}$$

После определения констант интегрирования решение задачи, соответствующее заданным начальным условиям (3.5), записывается и виде:

$$\begin{cases} x = (t;\ x_0, y_0, z_0;\ \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\ y = (t;\ x_0, y_0, z_0;\ \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0); \\ z = (t;\ x_0, y_0, z_0;\ \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0). \end{cases}$$

Таким образом, задачу **Д1** следует решать в следующей последовательности:

1) принять реальное тело, движение которого рассматривается в задаче, за материальную точку, наделенную массой m;

2) выбрать систему координат;

3) изобразить материальную точку в этой системе координат, определяя ее положение текущими координатами;

4) приложить к точке активные силы (то есть силы, не зависящие от связей); если рассматривается движение несвободного тела, то в соответствии с принципом освобождаемости от связей статики приложить к материальной точке также реакции связей;

5) записать основной закон динамики точки для данной задачи;

6) проектируя векторное выражение основного закона динамики точки на выбранные оси координат, составить дифференциальные уравнения движения точки;

7) задать начальные условия движения точки;

8) проинтегрировать полученную в п.6 систему дифференциальных уравнений;

9) используя начальные условия п.7, определить константы

интегрирования;

10) используя полученные в п.8 уравнения движения точки, определить искомые величины.

Пример выполнения задания

В изогнутой трубе, расположенной в вертикальной плоскости (рис. 26), получив в точке A начальную скорость V_0, движется груз D массой m. На участке трубы AB на груз действуют постоянная сила $\overrightarrow{Q}$, направление которой указано на рис. 26, и сила сопротивления среды $\overrightarrow{R}$, зависящая от скорости груза и направленная против движения. Расстояние AD равно l. В точке B груз, не изменяя своей скорости, переходит на участок BC трубы, где на него действуют сила тяжести и переменная сила $\overrightarrow{F}$, проекция которой F_x на ось x задана.

Дано: m = 1,5 кг, Q = 7 Н, l = 2 м, V_0 = 17 м/с, $R = 0{,}3\ V^2$, $F_x = -10 \sin 3t$.

Найти закон движения груза $x = x(t)$ на участке BC.

Решение. Разделим задачу на две части. Сначала определим скорость груза в точке B, рассмотрев движение груза на участке AB. Затем, приняв скорость груза в точке B за начальную, определим уравнение движения груза на участке BC.

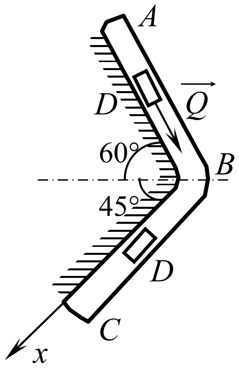


Рис. 26

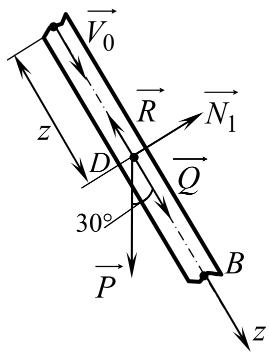


Рис. 27

1) Определим скорость груза в точке *B,* рассмотрев движение груза на участке *AB*. Задачу будем решать в последовательности, указанной выше. Примем груз *D* за материальную точку, совершающую прямолинейное движение внутри участка трубы *AB* (рис. 27).

Направим ось z вдоль этого участка трубы, совместив начало оси *O* с начальным положением груза в точке *A*. Положение материальной точки *D* будет определяться при прямолинейном движении координатой *z*.

На точку *D* будут действовать следующие силы: сила тяжести $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$, постоянная сила $\overrightarrow{Q}$, сила сопротивления движению точки $\overrightarrow{R}$, направленная в сторону, противоположную движению, и зависящая от скорости точки *V,* нормальная реакция стенки трубы $\overrightarrow{N_1}$.

Составим основное уравнение динамики точки *D:*

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{Q} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{N_1}. \qquad (3.6)$$

Проецируя (3.6) на ось *z* и учитывая, что $a_z = \dot{V}_z = \dot{V}$, получим дифференциальное уравнение движения точки *D:*

$$m\frac{dV}{dt} = mg\sin 60° + Q - 0{,}3V^2. \qquad (3.7)$$

Запишем начальные условия:

$$\text{при} \quad t = 0 \quad z = 0, \quad \dot{z} = V_0. \qquad (3.8)$$

Принимая во внимание, что по условиям задачи для определения скорости груза в точке *B* дано не время движения груза на участке *AB,* а длина этого участка *l*, перейдем от независимой переменной *t* к переменной *z*:

$$\frac{dV_z}{dt} = \frac{dV_z}{dz}\cdot\frac{dz}{dt} = V_z\frac{dV_z}{dz} = \frac{1}{2}\frac{dV^2}{dz}. \qquad (3.9)$$

Подставляя (3.9) в уравнение (3.7), получим линейное уравнение первого порядка относительно квадрата скорости точки *D*:

$$\frac{dV^2}{dz} = 2g\sin 60° + \frac{2\cdot Q}{m} - \frac{0{,}6}{m}V^2. \qquad (3.10)$$

Обозначим

$$a = \frac{g \cdot \sin 60° \cdot m + Q}{0,3} = 65,77, \qquad b = \frac{0,6}{m} = 0,4. \qquad (3.11)$$

и разделим в уравнении (3.10) переменные:

$$\frac{dV^2}{V^2 - a} = -bz. \qquad (3.12)$$

Взяв в (3.12) от обеих частей интегралы, имеем:

$$\ln\left(V^2 - a\right) = -bz + C. \qquad (3.13)$$

Определим константу интегрирования *C*, учитывая начальные условия (3.8):

$$\ln\left(V_0^2 - a\right) = C.$$

Следовательно, $\ln\left(V^2 - a\right) = -bz + \ln\left(V_0{}^2 - a\right)$ или

$$\ln\frac{V^2 - a}{V_0{}^2 - a} = -bz. \qquad (3.14)$$

Из уравнения (3.14) находим

$$V^2 = a + \left(V_0^2 - a\right)e^{-bz}. \qquad (3.15)$$

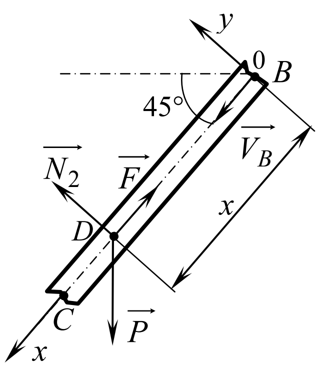


Рис. 28

Подставляя в (3.15) длину участка $z = 2$ м и значения *a* и *b* из (3.11), получим скорость груза в точке *B:* $V_B^2 = 65,77 + (17^2 - 65,77)\,e^{-0,8} = 166,074$ и, следовательно, $V_B = 12,88$ м/с.

2) Рассмотрим движение груза на участке *BC*. Начало оси *x* совместим с точкой *B* (рис. 28). Скорость точки $\overrightarrow{V_B}$ будет начальной для этого участка трубы. Положение точки *D* будет определяться координатой *x*. На точку *D* действуют силы: сила тяжести $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$, переменная сила $\overrightarrow{F}$, проекция которой на ось x равна: $F_x = -10 \sin 3t$. Следовательно, при положительном значении функции синуса сила $\overrightarrow{F}$ направлена в сторону, противоположную положительному направлению оси x. На точку D действует также нормальная реакция связи $\overrightarrow{N_2}$.

Основное уравнение динамики точки D на этом участке будет иметь вид

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F} + \overrightarrow{N_2}. \qquad (3.16)$$

Проектируя (3.16) на ось x и учитывая, что $a_x = \ddot{x}$, получим дифференциальное уравнение движения точки

$$m\ddot{x} = mg\cos 45° - 10\sin 3t,$$

или, разделив обе части уравнения на $m = 1{,}5$ кг, при $g = 9{,}8$ м/с^2 получим

$$\ddot{x} = 6{,}92 - 6{,}67 \sin 3t. \qquad (3.17)$$

Зададим начальные условия:

$$\text{при} \quad t = 0 \quad x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = V_B. \qquad (3.18)$$

Учитывая, что $\ddot{x} = \dfrac{d\dot{x}}{dt}$, и разделяя переменные в уравнении (3.17), имеем $d\dot{x} = (6{,}92 - 6{,}67 \sin 3t)dt$.

После интегрирования находим

$$\dot{x} = 6{,}92\, t + 2{,}22 \cos 3t + C_1. \qquad (3.19)$$

Разделяя еще раз переменные и интегрируя уравнение (3.19), получим

$$x = 3{,}46\, t^2 + 0{,}74 \sin 3t + C_1 t + C_2. \qquad (3.20)$$

Для определения констант интегрирования C_1 и C_2, подставим начальные условия (3.18) в уравнения (3.19) и (3.20): $V_B = 2{,}22 + C_1$, $0 = C_2$, откуда $C_1 = V_B - 2{,}22 = 12{,}88 - 2{,}22 = 10{,}66$.

Следовательно, искомый закон движения груза D имеет вид:

$$x = 3{,}46\, t^2 + 0{,}74 \sin 3t + 10{,}66\, t.$$

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

1. Указания к выполнению контрольной задачи Д2

Рекомендуемая учебная литература: [**2**], **часть 2:** гл.VI, § 31-36, с.416-427**;** гл. VII, § 42-45, с.445-453 ; гл.IX, § 53-56, с.473–482; [**3**]: гл. XXI, § 100–105, с.263–273; гл.XXII, § 106–109, с.273–280; гл. XXIII, § 110–112, с.280–284; гл.XXIV, § 115–118, с.290-298.

Задача Д2 – на применение общих теорем динамики механической системы: теорем о движении центра масс и об изменении кинетического момента.

Под ***механической системой*** в курсе теоретической механики понимается совокупность взаимодействующих между собой материальных точек, движения которых взаимосвязаны. Для изучения движения механической системы вводятся некоторые ее характеристики.

Центром масс механической системы называется геометрическая точка, радиус-вектор которой в выбранной системе координат определяется формулой

$$\vec{r_c} = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r_k} \qquad (3.21)$$

где n – число материальных точек системы, m_k – масса k-й точки, $\vec{r_k}$ – ее радиус-вектор, $M = \sum_{k=1}^{n} m_k$ – масса всей системы.

Декартовы координаты центра масс определяются соответственно формулами:

$$x_c = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k x_k, \quad y_c = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k y_k, \quad z_c = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{n} m_k z_k, \qquad (3.22)$$

где x_k, y_k, z_k – координаты k-й точки.

Частным случаем механической системы, состоящей из отдельных материальных точек, является ***абсолютно твердое тело***, которое называют также ***неизменяемой механической системой***, то есть системой, расстояния между точками которой не изменяются при любых взаимодействиях. В случае абсолютно твердого тела точек будет не конечное число *n,* а бесчисленное множество, массы которых распределены в теле непрерывно.

Следовательно, для абсолютно твердого тела суммы, стоящие справа в формулах (3.21) и (3.22), перейдут в интегралы:

$$\vec{r_c} = \frac{1}{M} \int\limits_{(M)} \vec{r}\, dm$$

$$x_c = \frac{1}{M} \int\limits_{(M)} x\, dm, \quad y_c = \frac{1}{M} \int\limits_{(M)} y\, dm, \quad z_c = \frac{1}{M} \int\limits_{(M)} z\, dm.$$

В этих формулах интеграл, записанный условно, распространен по массе тела. Для твердых тел, находящихся вблизи поверхности Земли, центр масс и центр тяжести совпадают.

Инерционные свойства механической системы определяются шестью ***моментами инерции***:

$$I_x = \sum_{k=1}^{n} m_k \left(y_k^2 + z_k^2\right), \; I_y = \sum_{k=1}^{n} m_k \left(x_k^2 + z_k^2\right), \; I_z = \sum_{k=1}^{n} m_k \left(x_k^2 + y_k^2\right), \quad (3.23)$$

$$I_{xy} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k y_k\,, \; I_{yz} = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k z_k\,, \; I_{xz} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k z_k\;. \quad (3.24)$$

Соответственно для абсолютно твердого тела:

$$I_x = \int\limits_{(M)} \left(y^2 + z^2\right) dm, \; I_y = \int\limits_{(M)} \left(x^2 + z^2\right) dm, \; I_z = \int\limits_{(M)} \left(x^2 + y^2\right) dm, \quad (3.25)$$

$$I_{xy} = \int\limits_{(M)} xy\, dm, \quad I_{yz} = \int\limits_{(M)} yz\, dm, \quad I_{xz} = \int\limits_{(M)} xz\, dm\,. \quad (3.26)$$

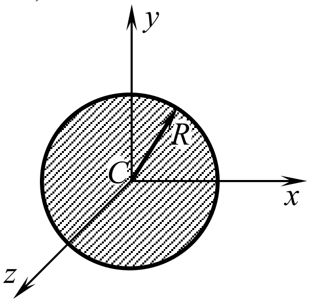
Моменты инерции (3.23) и (3.25) называют *осевыми*, а

(3.24) и (3.26) – *центробежными*.

Осевые моменты инерции характеризуют меру инерции тел при вращательном движении. ***Центробежные моменты инерции*** характеризуют несимметричность распределения масс относительно координатных плоскостей.

Моменты инерции некоторых однородных тел будут следующими:

1) *Круглая однородная пластина радиуса R и массой M* (рис. 29):

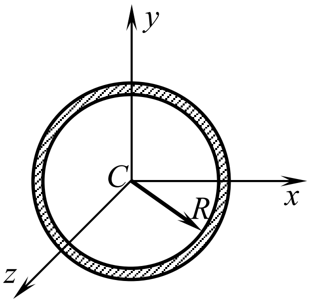


$$I_x = I_y = \frac{MR^2}{4},$$

$$I_z = \frac{MR^2}{2}.$$

Рис. 29

2) *Тонкое однородное кольцо радиуса R и массой M* (рис.30):



$$I_x = I_y = \frac{MR^2}{2},$$

$$I_z = MR^2.$$

Рис. 30

3) *Однородная прямоугольная пластина массой M со сто-*

ронами 2a и 2b (рис.6):

$$I_x = \frac{Mb^2}{3}, \quad I_y = \frac{Ma^2}{3},$$

$$I_z = \frac{M\left(a^2 + b^2\right)}{3}.$$

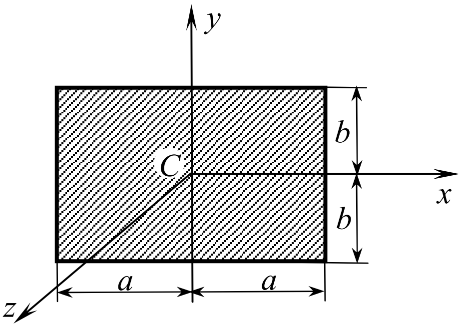


Рис. 31

4) *Тонкий однородный стержень длиной 2a и массой M* (рис. 32):

$$I_x = 0,$$

$$I_y = I_z = \frac{Ma^2}{3}.$$

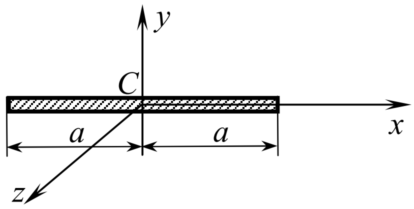


Рис. 32

5) *Круглый однородный цилиндр радиуса R и массой M* (рис. 33):

$$I_z = I_y = \frac{M}{4}\left(\frac{1}{3}H^2 + R^2\right),$$

$$I_x = \frac{MR^2}{2}.$$

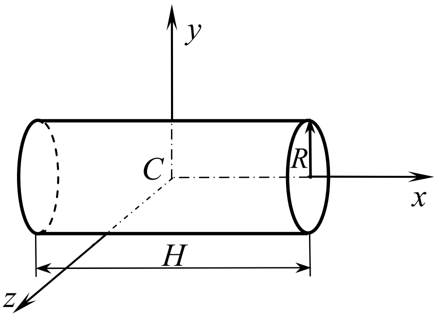


Рис. 33

В случае, когда необходимо определить момент инерции относительно оси, например z_1, параллельной центральной, то есть проходящей через центр масс C, момент инерции определяется по формуле Гюйгенса-Штейнера:

$$I_{z_1} = I_{c_z} + Md^2,$$

где I_{c_z} – момент инерции относительно центральной оси; I_{z_1} – момент инерции относительно оси, параллельной центральной; M – масса тела; d – расстояние между указанными осями.

Если входящие в механическую систему тела совершают поступательное движение или их можно рассматривать как материальные точки, то для определения движения одного из тел системы целесообразно воспользоваться **теоремой о движении центра масс**:

$$M\overrightarrow{a_c} = \vec{R}^{\,e},$$

где $\overrightarrow{a_c}$ – вектор ускорения центра масс, $\vec{R}^{\,e} = \sum\limits_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_k}^{\,e}$ – главный вектор действующих на точки системы внешних сил (вызванных действием тел, не входящих в механическую систему).

В проекциях на оси декартовых координат теорема имеет вид:

$$M\ddot{x}_c = R_x^e, \quad M\ddot{y}_c = R_y^e, \quad M\ddot{z}_c = R_z^e.$$

С помощью теоремы о движении центра масс задачи следует решать в следующей последовательности:

1) выбрать систему координат;

2) изобразить механическую систему в этой системе координат;

3) приложить к механической системе все действующие на нее внешние силы;

4) записать теорему о движении центра масс;

5) проектируя векторное выражение теоремы о движении центра масс на выбранные оси координат, составить дифференциальные уравнения движения центра масс системы;

6) задать начальные условия для искомых движений тел;

7) проинтегрировать полученные в п.5 дифференциальные уравнения движения центра масс системы;

8) по формуле (3.22) составить, используя законы движения отдельных тел системы, выражения для координат центра масс (при их задании по условиям задачи);

9) подставить выражения координат центра масс (п.8) в уравнения, полученные в п.7;

10) используя начальные условия, определить константы интегрирования;

11) используя полученные либо в п.9, либо, в зависимости от условия задачи, в п.7 уравнения, определить искомые величины.

В задачах, где в механическую систему входят тела, совершающие вращательное движение, для определения их движения или угловой скорости целесообразно воспользоваться **теоремой об изменении кинетического момента** относительно некоторого неподвижного центра O:

$$\frac{d\overrightarrow{K_0}}{dt} = \overrightarrow{M_0}^{\,e},$$

где $\overrightarrow{M_0}^{\,e}$ – главный момент внешних сил, действующих на систему относительно центра O; $\overrightarrow{K_0}$ – кинетический момент или главный момент количества движения системы, который определяется суммой векторных произведений; $\overrightarrow{K_0} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{r_k} \times m_k \overrightarrow{V_k}$, где $m_k \overrightarrow{V_k}$ – вектор количества движения k-й точки.

В проекциях на неподвижные оси декартовых координат теорема имеет вид:

$$\frac{dK_x}{dt} = M_x^e, \qquad \frac{dK_y}{dt} = M_y^e, \qquad \frac{dK_z}{dt} = M_z^e.$$

Кинетический момент тела, совершающего вращательное движение вокруг неподвижной оси z, вычисляется по формуле

$$K_z = I_z\, \omega, \qquad (3.26а)$$

где I_z – момент инерции тела относительно оси вращения; $\omega = \dot{\varphi}$ – угловая скорость тела.

Следовательно, дифференциальное уравнение вращательного движения тела вокруг неподвижной оси z имеет вид:

$$I_z \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z^e .$$

С помощью теоремы об изменении кинетического момента задачи следует решать в следующей последовательности:

1) изобразить механическую систему, выбрав при этом систему координат так, чтобы одна из осей, например z, совпала с неподвижной осью вращения тела;

2) приложить к механической системе все действующие на нее внешние силы;

3) записать теорему об изменении кинетического момента относительно выбранной оси z;

4) вычислить главный момент внешних сил, приложенных к системе, относительно той же оси z;

5) вычислить кинетический момент системы относительно оси z;

6) составить дифференциальное уравнение движения системы, подставив результаты, полученные в пп.4 и 5, в п.3;

7) задать начальные условия движения системы;

8) проинтегрировать полученное в п.6 дифференциальное уравнение;

9) используя начальные условия, определить константы интегрирования;

10) используя полученное в п.8 уравнение, определить, в зависимости от условия, искомые величины.

Примеры выполнения задания

Пример 1

Груз D массой m_2 перемещается по цилиндрическому каналу вертикальной однородной плиты массой m_1 (рис. 34), движущейся, получив начальную скорость u_0, по гладким горизонтальным направляющим. Зная закон движения груза $s = F(t)$ относительно плиты, определить перемещение плиты, ее скорость, а также давление плиты на направляющие в заданный момент времени $t = t_1$; s – дуговая координата точки D, отсчитываемая от точки O в метрах.

Дано: $m_1 = 10$ кг, $m_2 = 5$ кг, $R = 0{,}5$ м, $u_0 = 0$, $s = \dfrac{\pi}{6}t^2$, $t_1 = 1$ с.

Решение. Задачу будем решать с помощью теоремы о движении центра масс в последовательности, указанной выше.

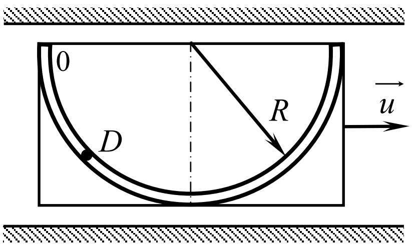


Рис. 34

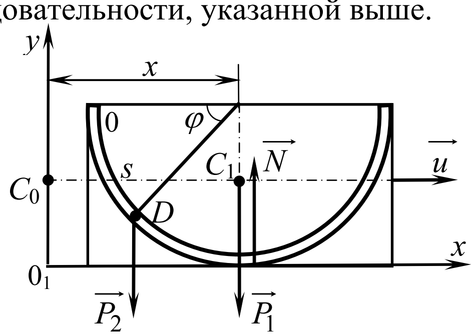


Рис. 35

Механическая системы состоит из плиты, принимаемой за абсолютно твердое тело, совершающее поступательное прямолинейное движение, и груза D, принимаемого за материальную точку. Ось x системы координат O_1xy направим вдоль горизонтальных направляющих (рис. 35). Начало отсчета O_1 выберем так, чтобы ось y проходила через начальное положение центра масс C_0. Тогда текущее положение центра масс будет определяться координатой x. Относительное движение груза D задано естественным способом и определяется текущей дугой s, отсчитываемой от точки O (начальное положение точки D). На систему действуют внешние силы: сила тяжести плиты $\overrightarrow{P_1} = m_1 \vec{g}$, сила тяжести груза $\overrightarrow{P_2} = m_2 \vec{g}$, суммарная реакция направляющих $\vec{N}$.

Запишем теорему о движении центра масс:

$$M\overline{a_c} = \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2} + \vec{N}, \qquad (3.27)$$

где $M = m_1 + m_2$.

Проецируя (3.27) на оси x и y и учитывая, что $a_{c_x} = \ddot{x}_c$, $a_{c_y} = \ddot{y}_c$, получим дифференциальные уравнения движения центра масс системы:

$$M\ddot{x}_c = 0, \qquad M\ddot{y}_c = N - P_1 - P_2. \qquad (3.28)$$

Запишем начальные условия движения плиты:

$$\text{при} \quad t = 0 \quad x_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = u_0 = 0. \qquad (3.29)$$

Интегрируя первое уравнение (3.28) дважды, имеем

$$M\dot{x}_c = C_1, \qquad Mx_c = C_1 t + C_2. \qquad (3.30)$$

где C_1 и C_2 – константы интегрирования.

По формулам (3.22): $Mx_c = m_1 x + m_2 x_D$, $My_c = m_1 y_{c_1} + m_2 y_D$.

Из рис. 35 видно, что $x_D = x - R\cos\varphi$, $y_D = R - R\cos\varphi$, где $\varphi = \dfrac{s}{R} = \dfrac{\pi t^2}{3}$.

Следовательно, $x_D = x - R\cos\dfrac{\pi t^2}{3}$, $y_D = R - R\cos\dfrac{\pi t^2}{3}$ и

$$(m_1 + m_2)x_c = (m_1 + m_2)x - m_2 R\cos\frac{\pi t^2}{3}, \qquad (3.31)$$

$$(m_1 + m_2)y_c = m_1 y_c + m_2\left(R - R\cos\frac{\pi t^2}{3}\right). \qquad (3.32)$$

Продифференцируем (3.31):

$$(m_1 + m_2)\dot{x}_c = (m_1 + m_2)\dot{x} + \frac{2\pi t}{3} \cdot m_2 \cdot R\sin\frac{\pi t^2}{3}. \qquad (3.33)$$

Подставляя (3.31) и (3.33) в уравнения (3.30), получим

$$(m_1+m_2)x - m_2 R\cos\frac{\pi t^2}{3} = C_1 t + C_2,$$

$$(m_1+m_2)\dot{x} + \frac{2\pi t}{3}\cdot m_2\cdot R\sin\frac{\pi t^2}{3} = C_1. \tag{3.34}$$

Для определения констант интегрирования C_1 и C_2 подставим начальные условия (3.29) в (3.34):

$$-m_2 R = C_2, \qquad 0 = C_1.$$

Из первого уравнения (3.34) получим закон движения плиты, соответствующий начальным условиям:

$$x = \frac{m_2\cdot R}{m_1+m_2}\left(\cos\frac{\pi t^2}{3} - 1\right). \tag{3.35}$$

Из второго уравнения (3.34) имеем зависимость для определения скорости плиты:

$$\dot{x} = -\frac{m_2 R}{m_1+m_2}\cdot\frac{2\pi t}{3}\cdot\sin\frac{\pi t^2}{3}. \tag{3.36}$$

Перемещение плиты и ее скорость в момент времени $t_1 = 1$ с найдем, подставляя время в уравнения (3.35) и (3.36). Получим $x_1 = -0{,}083$ м, $u_1 = \dot{x}_1 = -0{,}302$ м/с. Знак "–" означает, что плита переместится влево.

Для определения реакции направляющих N продифференцируем (3.32) дважды, учитывая, что $y_{c_1} = y_{c_0} = \text{const}$:

$$(m_1+m_2)\ddot{y}_c = \frac{2\pi}{3}\cdot m_2\cdot R\sin\frac{\pi t^2}{3} + \frac{4\pi^2 t^2}{9}\cdot m_2\cdot R\cos\frac{\pi t^2}{3}. \tag{3.37}$$

Подставляя (3.37) но второе уравнение (3.28), получим:

$$N = P_1 + P_2 + \frac{2\pi}{3}\cdot m_2\cdot R\sin\frac{\pi t^2}{3} + \frac{4\pi^2 t^2}{9}\cdot m_2\cdot R\cos\frac{\pi t^2}{3} =$$

$$= (m_1+m_2)g + \frac{2\pi}{3}\cdot m_2\cdot R\left(\frac{2\pi t^2}{3}\cos\frac{\pi t^2}{3} + \sin\frac{\pi t^2}{3}\right).$$

Вычислим реакцию N в момент времени $t_1 = 1$ с:

$$N = (10+5)\cdot 9{,}8 + 5\cdot 0.5\cdot\left(\frac{2\cdot 3{,}14}{3}\cos 60^\circ + \sin 60^\circ\right) = 166{,}1\ \text{Н}.$$

Давление плиты на направляющие равно по величине реакции направляющих $N = 166{,}1$ Н.

Пример 2

Прямоугольная плита $ABCD$ вращается вокруг стороны AB (рис. 36) и в начальный момент времени $t_0 = 0$, когда угловая скорость плиты равна ω_0, на нее начинает действовать вращающий момент $M = M(t)$, направленный в ту же сторону, что и ω_0. Остальные условия задачи такие же, как в примере 1.

Дано: $M = 0{,}5t$ Н · м, $m_1 = 10$ кг, $m_2 = 5$ кг, $R = 0{,}5$ м, $s = \dfrac{\pi}{6}t^2$, $\omega_0 = 1{,}5$ с$^{-1}$, $t_1 = 1$ с.

Определить зависимость угловой скорости плиты от времени $\omega = f(t)$. Плиту принять за однородную пластинку.

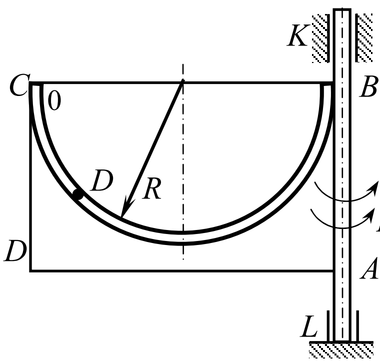


Рис. 36

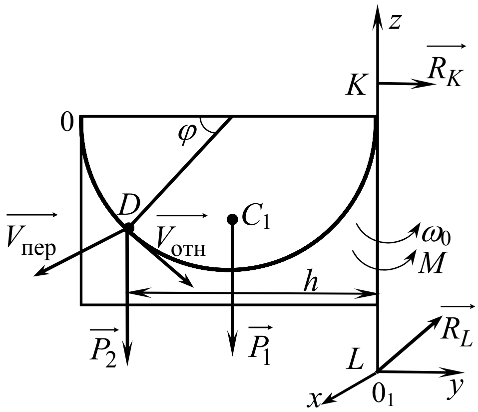


Рис. 37

Решение. Задачу будем решать с помощью теоремы об изменении кинетического момента в вышеуказанной последовательности.

Механическая система состоит из принимаемой за абсолютно твердое тело плиты, совершающей вращательное движение вокруг стороны *AB,* и груза *D,* принимаемого за материальную точку. Ось *z* системы координат O_1xyz направим вдоль оси вращения плиты. На механическую систему действуют следующие силы (рис. 37): сила тяжести плиты $\overrightarrow{P_1} = m_1 \overrightarrow{g}$, сила тяжести груза $\overrightarrow{P_2} = m_2 \overrightarrow{g}$, вращающий момент *M* и реакции R_K и R_L подшипника *K* и подпятника *L* соответственно. Запишем теорему об изменении кинетического момента относительно оси *z*:

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^e. \tag{3.38}$$

Силы $\overrightarrow{P_1}$ и $\overrightarrow{P_2}$ параллельны оси *z*, а реакции $\overrightarrow{R_K}$ и $\overrightarrow{R_L}$ ее пересекают. Следовательно, их моменты относительно оси *z* равны нулю и главный момент внешних сил M_z^e равен внешнему моменту *M*.

Для рассматриваемой системы, состоящей из плиты и груза *D*, кинетический момент K_z относительно оси *z* равен сумме кинетических моментов плиты и груза *D:*

$$K_z = K_z^{\text{пл}} + K_z^D .$$

Кинетический момент плиты, совершающей вращательное движение вокруг неподвижной оси *z,* вычислим по формуле (3.26а):

$$K_z^{\text{пл}} = I_z \cdot \omega ,$$

где момент инерции плиты, принимаемой за однородную прямоугольную пластинку (см. выше п.3 примеров осевых моментов инерции однородных тел),

$$I_z = \frac{m_1 (2R)^2}{3} = \frac{4}{3} m_1 R^2 .$$

Кинетический момент груза *D* определим, рассматривая движение груза как сложное, совершающего относительное движение по полуокружности радиуса *R* относительно плиты со скоростью $\overrightarrow{V}_{\text{отн}}$, направленной по касательной к полуокружности. Вращательное движение плиты относительно оси z будет переносным для точки D.

Тогда по теореме сложения скоростей

$$\vec{V}_D = \vec{V}_{\text{отн}} + \vec{V}_{\text{пер}}$$

и, следовательно, для вектора количества движения точки D имеем

$$m_2 \vec{V}_D = m_2 \vec{V}_{\text{отн}} + m_2 \vec{V}_{\text{пер}}.$$

Используя теорему Вариньона для определения момента вектора количества движения точки D относительно оси z (см. раздел «Статика»), получим

$$K_z^D = m_2\left(m_2 \vec{V}_D\right) = m_2\left(m_2 \vec{V}_{\text{отн}}\right) + m_2\left(m_2 \vec{V}_{\text{пер}}\right).$$

Поскольку вектор $\vec{V}_{\text{отн}}$ лежит в одной плоскости с осью z, то $m_2\left(m_2 \vec{V}_{\text{отн}}\right) = 0$.

Вектор $\vec{V}_{\text{пер}}$ направлен перпендикулярно плите и по модулю $V_{\text{пер}} = \omega \cdot h$, где h – расстояние от точки D до оси вращения z.

Следовательно, $K_z^D = m_2\left(m_2 \vec{V}_{\text{пер}}\right) = m_2 V_{\text{пер}} \cdot h = m_2 \omega h^2$.

Из рис. 37 видно, что $h = R + \cos\varphi$, где $\varphi = \dfrac{\pi t^2}{3}$ (см. пример 1). Тогда

$$K_z^D = m_2 \omega R^2 \left(1 + \cos\frac{\pi t^2}{3}\right)^2$$

и соответственно

$$K_z = \frac{4}{3} m_1 R^2 \omega + m_2 R^2 \left(1 + \cos\frac{\pi t^2}{3}\right)^2 \cdot \omega = \left[\frac{4}{3} m_1 + \left(1 + \cos\frac{\pi t^2}{3}\right)^2\right] R^2 \cdot \omega. \quad (3.39)$$

Подставляя выражение (3.39) в (3.38) и учитывая, что $\omega = \dot{\varphi}$, $M_z^e = M = 0{,}5t$, получим уравнение

$$R^2 \frac{d}{dt}\left\{\left[\frac{4}{3}m_1 + \left(1+\cos\frac{\pi t^2}{3}\right)^2 \omega\right]\right\} = 0{,}5t. \qquad (3.40)$$

Зададим начальное условие для дифференциального уравнения (3.40):

$$\text{при} \quad t = 0 \quad \omega_0 = 1{,}5\ \text{с}^{-1}. \qquad (3.41)$$

Интегрируя (3.40), имеем

$$R^2\left[\frac{4}{3}m_1 + \left(1+\cos\frac{\pi t^2}{3}\right)^2\right]\omega = 0{,}25t^2 + C_1. \qquad (3.42)$$

Константу интегрирования определим, подставляя начальное условие (3.41) в уравнение (3.42):

$$R^2\left(\frac{4}{3}m_1 + 2\right)\omega_0 = C_1.$$

Подставляя в (3.42) числовые значения, получим искомую зависимость

$$\omega = \frac{t^2 + 23}{\frac{40}{3} + \left(1 + \frac{\cos \pi t^2}{3}\right)^2}.$$

2. Указания к выполнению контрольной задачи Д3

Рекомендуемая учебная литература: [**2**], **часть 2:** гл. X, §58 - 69, с.484–508; [**3**]**:** гл. XXV, §121–127, с.301–323.

Задача Д3 – на применение теоремы об изменении кинетической энергии системы:

$$T - T_0 = A^e + A^i. \qquad (3.43)$$

Равенство (3.43) выражает **теорему об изменении кинетической энергии механической системы** в интегральной форме: изменение кинетической энергии T механической системы при ее перемещении из начального в текущее (конечное) положение равно сумме работ на этом перемещении всех внешних A^e и внутренних A^i сил, приложенных к точкам системы.

Кинетическая энергия механической системы, состоящей из n отдельных материальных точек, определяется по формуле

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k V_k^2 ,$$

где $\overrightarrow{V_k}$ – скорость k-й материальной точки массой m_k. Соответственно для абсолютно твердою тела

$$T = \frac{1}{2}\int\limits_{(M)} V^2 dm ,$$

где интеграл распространен по массе тела.

Формулы для вычисления кинетической энергии тел в разных случаях движения будут следующими:

1) *Поступательное движение:*

$$T = \frac{1}{2} M V_c^2 , \tag{3.44}$$

где M – масса тела, V_c – скорость его центра масс.

2) *Вращательное движение:*

$$T = \frac{1}{2} I_z \cdot \omega^2 , \tag{3.45}$$

где I_z – момент инерции тела относительно оси вращения z, ω – его угловая скорость.

3) *Плоскопараллельное движение.* В этом случае кинетическая энергия тела вычисляется по формуле Кенига:

$$T = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} I_{c_z} \omega^2 , \tag{3.46}$$

где I_{c_z} – момент инерции тела относительно оси z, проходящей через его центр масс C.

Если механическая система состоит из нескольких тел, то ее кинетическая энергия будет равна сумме кинетических энергий T_k всех тел, входящих в систему:

$$T = \sum_{k=1}^{n} T_k \ .$$

Для определения работы силы на элементарном перемещении вводится понятие элементарной работы силы. ***Элементарная работ силы*** ΔA равна скалярному произведению векторов силы $\vec{F}$ и элементарного перемещения $d\vec{r}$:

$$\Delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} \ .$$

Вектор элементарного перемещения $d\vec{r}$ направляется по касательной к траектории в данной точке (рис. 38) и по модулю ранен элементарной дуге ds. Исходя из определения скалярного произведения векторов, элементарную работу можно вычислить по следующим формулам:

$$\Delta A = F\left|d\vec{r}\right|\cos\alpha = F_\tau ds \quad \text{или} \quad \Delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz, \qquad (3.47)$$

где $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$, $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$.

При этом знак элементарной работы будет положительным, если угол α острый. Если угол α тупой, то элементарная работа будет отрицательной.

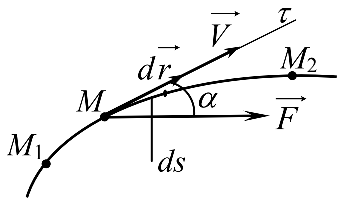


Рис. 38

Работа силы на конечном перемещении M_1M_2 (рис. 38) равна криволинейному интегралу, взятому вдоль дуги кривой от M_1 до M_2, от элементарной работы:

$$A = \int_{(M_1)}^{(M_2)} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{(M_1)}^{(M_2)} F_\tau\, ds = \int_{(M_1)}^{(M_2)} F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz \ . \qquad (3.48)$$

Знак работы имеет следующий смысл: если сила способствует движению, то работа положительна, если не способствует движению – отрицательна.

Единицей измерения работы в системе СИ является 1 джоуль (Дж) = 1 Н·м = 1 кг·м^2/с^2.

Примеры работы сил, наиболее часто используемые в задачах

1) *Работа сил тяжести:*

$$A(\vec{P}) = -\int_{z_{c_2}}^{z_{c_1}} P\,dz = -P(z_{c_2} - z_{c_1}) = \pm Ph. \tag{3.49}$$

При перемещении абсолютно твердого тела из положения с центром масс в точке C_1 (рис. 39) в положение с центром масс и точке C_2 работа силы тяжести тела равна произведению веса тела на вертикальное перемещение его центра масс.

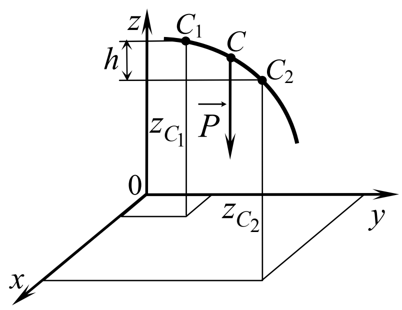


Рис. 39

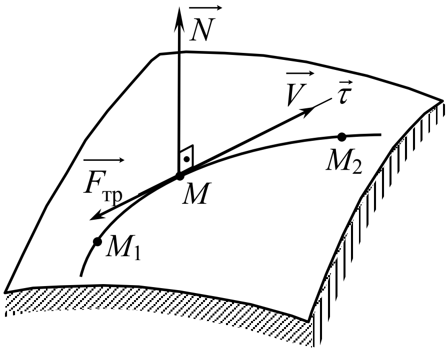


Рис. 40

2) *Работа силы трения скольжения*

Величина силы трения, действующей на материальную точку при ее движении по шероховатой поверхности (рис. 40), определяется по формуле Кулона–Амонтона $F_{тр} = f \cdot N$, где f – коэффициент трения, N – величина нормальной реакции поверхности. Тогда по формуле (3.48)

$$A\left(\overrightarrow{F_{\text{тр}}}\right) = -\int\limits_{(M_1)}^{(M_2)} F_{\text{тр}}\, ds = -\int\limits_{(M_1)}^{(M_2)} f\, N\, ds\,.$$

Если величина силы трения постоянная, то

$$A\left(\overrightarrow{F_{\text{тр}}}\right) = -F_{\text{тр}}\, s\,. \tag{3.50}$$

3) *Работа силы, приложенной к вращающемуся телу*

Элементарная работа силы $\vec{F}$, приложенной к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, равна:

$$\Delta A = M_z\, d\varphi\,. \tag{3.51}$$

где M_z – момент силы $\vec{F}$ относительно оси вращения z, $d\varphi$ – элементарное угловое перемещение тела.

Работа силы $\vec{F}$ на конечном угле поворота $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, где φ_2 и φ_1 –конечное и начальное значения угла φ, определяющего положения тела, вычисляется по формуле

$$A\left(\vec{F}\right) = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z\, d\varphi\,. \tag{3.52}$$

где M_z – момент силы $\vec{F}$ относительно оси вращения z.

В случае постоянного момента

$$A = M_z \cdot \Delta\varphi\,. \tag{3.53}$$

4) *Работа внутренних сил твердого тела*

Сумма работ всех внутренних сил A^i абсолютно твердого тела на любом его перемещении равна нулю.

При решении задач теоремой об изменении кинетической энергии системы целесообразно воспользоваться, когда по условиям задачи необходимо определить скорости точек механической системы в заданные моменты времени, при условии, что можно вычислить, зная перемещения системы за заданный промежуток времени, работу всех приложенных к системе сил.

В соответствии с вышеизложенным задачу **Д3** следует решать в следующей последовательности:

1) изобразить механическую систему в начальном и при необходимости в конечном положениях;

2) приложить к механической системе все внешние силы;

3) записать теорему об изменении кинетической энергии системы;

4) вычислить кинетическую энергию системы в начальном и конечном ее положениях;

5) вычислить сумму работ всех внешних сил на перемещении системы из начального положения в конечное; если сумма работ при положительном изменении кинетической энергии получится отрицательной, то необходимо ее пересчитать, изменив направление движения механизма на противоположное;

6) подставить результаты пп. 4 и 5 в п. 2;

7) используя уравнение, полученное в п. 6, определить искомую величину.

Пример

Механическая система (рис. 41) состоит из груза 1, коэффициент трения которого о плоскость f, ступенчатых шкивов 2 и 3 с радиусами R_2, r_2, R_3, r_3 и цилиндрического катка 4, соединенных друг с другом нерастяжимыми нитями, намотанными на шкивы. Система приходит в движение из состояния покоя под действием силы тяжести груза 1 и переменной силы $F = f(s)$, приложенной к грузу 1 и зависящей от его перемещения s. На шкивы 2 и 3 при движении действуют постоянные моменты сил сопротивления M_2, и M_3. Учитывая трение скольжения тела 1, моменты сил сопротивления шкивов и пренебрегая другими силами сопротивления, массами нитей, их проскальзыванием по шкивам, определить скорость груза V_1, когда он переместится на расстояние $s = s_1$. Массу каждого шкива считать равномерно распределенной по его внешнему ободу. Каток считать однородным круглым цилиндром.

Дано: $m_1 = 10$ кг, $m_2 = 12$ кг, $m_3 = 10$ кг, $m_4 = 5$ кг, $R_2 = 0{,}3$ м, $r_2 = 0{,}1$ м, $R_3 = 0{,}4$ м, $r_3 = 0{,}2$ м, $f = 0{,}1$, $M_2 = 0{,}5$ Н·м, $M_3 = 0{,}3$ Н·м, $F = 10(1 + 3s)$ Н, $s_1 = 1{,}5$ м, $\alpha = 45^0$, $\beta = 60°$.

Решение. На рис. 41 механическая система показана в начальном положении. На систему действуют внешние силы: силы тяжести $\vec{P_1}, \vec{P_2}, \vec{P_3}, \vec{P_4}$, переменная сила $\vec{F}$, моменты сил сопротивления M_2 и M_3, реакции $\vec{N_1}, \vec{N_2}, \vec{N_3}, \vec{N_4}$ и силы трения $\vec{F_1}^{\text{тр}}$, $\vec{F_4}^{\text{тр}}$. Запишем теорему об изменении кинетической энергии системы (3.43):

$$T - T_0 = A^e + A^i,$$

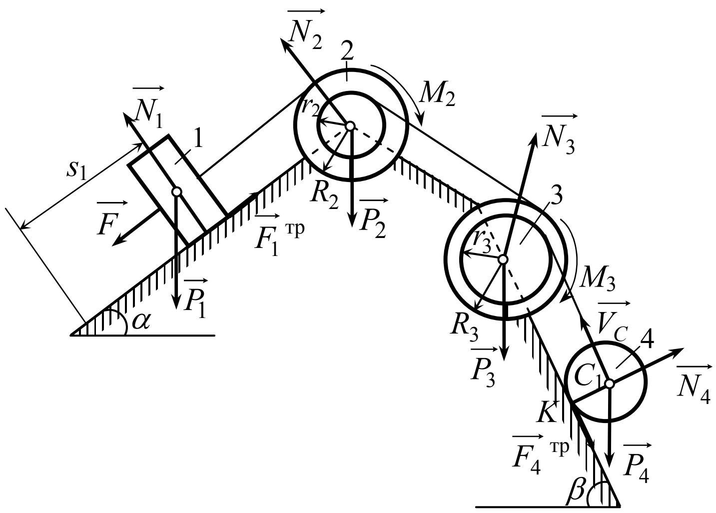


Рис. 41

где T_0 и T – кинематические энергии системы и начальном и конечном положениях. Так как в начальный момент система находилась в покое, то $T_0 = 0$. Для рассматриваемой системы, состоящей из абсолютно твердых тел, соединенных нерастяжимыми нитями, $A^i = 0$. Следовательно, имеем

$$T = A\left(\overrightarrow{P_1}\right) + A\left(\overrightarrow{P_2}\right) + A\left(\overrightarrow{P_3}\right) + A\left(\overrightarrow{P_4}\right) + A\left(\overrightarrow{N_1}\right) + A\left(\overrightarrow{N_2}\right) + A\left(\overrightarrow{N_3}\right) + A\left(\overrightarrow{N_4}\right) +$$
$$+ A\left(\overrightarrow{F}\right) + A\left(\overrightarrow{F_1}^{\text{тр}}\right) + A\left(\overrightarrow{F_4}^{\text{тр}}\right). \qquad (3.54)$$

Величина кинетической энергии T равна сумме кинетических энергий всех тел системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4. \qquad (3.55)$$

Кинетическая энергия груза 1, движущегося поступательно, определяется по формуле (3.44):

$$T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2}. \qquad (3.56)$$

Кинетическая энергия шкива 2, вращающегося вокруг неподвижной оси, определяется но формуле (3.45):

$$T_2 = \frac{1}{2} I_2 \, \omega_2^2 .$$

где угловую скорость шкива ω_2 необходимо выразить через искомую скорость V_1: $\omega_2 = \dfrac{V_1}{R_2}$. Учитывая, что момент инерции шкива с распределенной по ободу массой относительно оси, проходящей через точку O, определяется по формуле для тонкого однородного кольца (см. выше п.2 примеров вычисления моментов инерции однородных тел) $I_2 = m_2 \, R_2^2$ имеем

$$T_2 = \frac{1}{2} I_2 \, R_2^2 \cdot \frac{V_1^2}{R_1^2} = \frac{1}{2} m_2 \, V_1^2 . \qquad (3.57)$$

Кинетическая энергия шкива 3 также определяется по формуле (3.45):

$$T_3 = \frac{1}{2} I_3\, \omega_3^2.$$

где

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 \cdot r_2}{R_3} = \frac{V_1 \cdot r_2}{R_2 R_3}, \quad I_3 = m_3\, R_3^2.$$

Следовательно,

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \frac{r_2^2}{R_2^2} \cdot V_1^2. \qquad (3.58)$$

Кинетическую энергию катка 4, совершающего плоскопараллельное движение, определим по формуле Кенига (3.46):

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4\, V_c^2 + \frac{1}{2} I_4\, \omega_4^2.$$

где момент инерции катка 4 относительно оси, проходящей через его центр масс, вычисляется но формуле для однородного цилиндра (см. п.5 примеров вычисления моментов инерции однородных тел) $I_4 = \frac{m_4 R_4^2}{2}$. В формуле радиус катка обозначен R_4. Скорость центра масс катка $V_c = \omega_3 \cdot r_3 = \frac{r_2 \cdot r_3}{R_2 \cdot R_3} V_1$. Учитывая, что каток катится без проскальзывания, имея мгновенный центр скорости в точке *K*, выразим угловую скорость катка через скорость груза V_1.

$$\omega_4 = \frac{V_c}{R_4} = -\frac{r_2 \cdot r_3}{R_2 \cdot R_3 \cdot R_4} \cdot V_1.$$

Тогда

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 \left(\frac{r_2 \cdot r_3}{R_2 \cdot R_3} \right)^2 V_1^{\,2} + \frac{1}{2} \frac{m_4 R_4^{\,2}}{2} \cdot \left(\frac{r_2 \cdot r_3}{R_2 \cdot R_3 \cdot R_4} \right)^2 \cdot V_1^{\,2} =$$

$$= \frac{3}{4} m_4 \left(\frac{r_2 \cdot r_3}{R_2 \cdot R_3} \right)^2 V_1^{\,2}. \qquad (3.59)$$

Подставляя выражения (3.56), (3.57), (3.58), (3.59) в равенство (3.55), получим выражение кинетической энергии системы в конечном положении, когда груз 1 переместится на расстояние s_1, имея в этот момент скорость V_1:

$$T = \left[\frac{1}{2} m_1 + \frac{1}{2} m_2 + \frac{1}{2} m_3 \left(\frac{r_2}{R_2} \right)^2 + \frac{3}{4} m_4 \left(\frac{r_2 \cdot r_3}{R_2 \cdot R_3} \right)^2 \right] \cdot V_1^2. \quad (3.60)$$

Подставляя в (3.60) числовые значения, имеем

$$T = 11{,}66\, V_1^2. \qquad (3.61)$$

Найдем сумму работ всех внешних сил системы на ее перемещении, выражая перемещения системы через перемещение s_1 груза 1. При этом зависимости между перемещениями в задаче будут такими же, как между соответствующими скоростями:

$$\varphi_2 = \frac{s_1}{R_2}, \;\; \varphi_3 = \frac{r_2}{R_2 \cdot R_3} \cdot s_1, \;\; s_4 = \frac{r_2 \cdot r_3}{R_2 \cdot R_3} \cdot s_1.$$

Работу сил тяжести $\overrightarrow{P_1}$ и $\overrightarrow{P_4}$ определим по формуле (3.49):

$$A\left(\overrightarrow{P_1}\right) = m_1 \cdot g \cdot s_1 \cdot \sin 45°,$$

$$A\left(\overrightarrow{P_4}\right) = -m_4 \cdot g \cdot s_4 \cdot \sin 60° = -m_4 \cdot g \frac{r_2 \cdot r_3}{R_2 \cdot R_3} \cdot \sin 60° \cdot s_1, \quad (3.62)$$

$A\left(\overrightarrow{P_2}\right) = 0,\;\; A\left(\overrightarrow{P_3}\right) = 0$, так как силы тяжести $\overrightarrow{P_2}$ и $\overrightarrow{P_3}$ приложены к неподвижным точкам. По этой же причине

$A(\overrightarrow{N_2}) = 0$, $A(\overrightarrow{N_3}) = 0$; $A(\overrightarrow{N_1}) = 0$, так как сила $\overrightarrow{N_1}$ перпендикулярна перемещению; $A(\overrightarrow{N_4}) = 0$, $A(\overrightarrow{F_4}^{\text{тр}}) = 0$, так как силы $\overrightarrow{N_4}$ и $\overrightarrow{F_4}^{\text{тр}}$ приложены в мгновенном центре скоростей *K* катка ($V_k = 0$).

Работу переменной силы $\vec{F}$ вычислим но формуле

$$A(\vec{F}) = \int_0^{s_1} F(s)\,ds = \int_0^{s_1} 10(1+3s)\,ds = \left(10s + 15s^2\right)\Big|_0^{s_1} = 10s_1 + 15s_1^2. \quad (3.63)$$

Работу постоянных моментов M_2 и M_3 вычислим по формуле (3.53):

$$A(M_2) = -M_2 \cdot \varphi_2 = -M_2 \cdot \frac{s_1}{R_2}. \quad (3.64)$$

$$A(M_3) = -M_3 \cdot \varphi_3 = -M_3 \cdot \frac{r_2}{R_2 \cdot R_3} \cdot s_1. \quad (3.65)$$

Работу силы трения $\overrightarrow{F_1}^{\text{тр}}$ определим по формуле (3.50), учитывая, что $N_1 = m_1 g \cos 45°$:

$$A(\overrightarrow{F_1}^{\text{тр}}) = -\overrightarrow{F_1}^{\text{тр}} \cdot s_1 = -f\, N_1\, s_1 = -f\, m_1\, g \cdot \cos 45° \cdot s_1. \quad (3.66)$$

Складывая выражения работ всех внешних сил (3.62)–(3.66) и подставляя числовые значения всех величин, получим

$$A^e = \left(10 + m_1 g \sin 45° - m_4 g \frac{r_2 \cdot r_3}{R_2 \cdot R_3} \sin 60° - \right.$$

$$\left. - \frac{M_2}{R_2} - \frac{M_3 r_2}{R_2 R_3} - f m_1 g \sin 45° \right) s_1 + 15 s_1^2. \quad (3.67)$$

Подставляя выражения (3.61) и (3.67) в равенство (3.54), имеем $1{,}66\, V_1^2 = 65{,}541\, s_1 + 15\, s_1^2$. Откуда определяем скорость груза при $s_1 = 1{,}5$ м $V_1 = 3{,}37$ м/с.

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

Указания к выполнению контрольной задачи Д4

Рекомендуемая учебная литература: [**2**], **часть 2:** гл. XVII, §112–113, с.621–624, гл. XVIII, § 119, с.649–652; гл. XIX, § 125–128, с.663–682; [**3**]**:** гл. XXIX, § 142–143, с.369–375, § 145–146, с.376–387.

Задача Д4 – на применение уравнений Лагранжа второго рода. Метод решения задач динамики с помощью уравнений Лагранжа второго рода является общим и наиболее удобным в применении для несвободных систем.

Если на систему, состоящую из n точек, наложено s связей вида $f_1(x_1, y_1, z_1, \ x_2, y_2, z_2, \ ..., \ x_n, y_n, z_n) = 0$, то такая система называется ***голономной***, а ее положение определяется $k = 3n - s$ независимыми параметрами $q_1, q_2, ..., q_k$, называемыми ***обобщенными координатами***. Число k является ***числом степеней свободы*** механической системы.

Уравнения Лагранжа второго рода, описывающие движение механической системы е k степенями свободы, имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, 2, ..., k),$$

где число дифференциальных уравнений равно числу степеней свободы системы k; q_j – обобщенные координаты системы; $\dot{q}_j = \dfrac{d\,q_j}{d\,t}$ – обобщенные скорости; Q_j – обобщенные силы, соответствующие обобщенным координатам q_j; $T = T(q_j, \dot{q}_j)$ – кинетическая энергия системы, выраженная как функция обобщенных координат и обобщенных скоростей.

Обобщенными силами Q_j являются коэффициенты при обобщенных перемещениях в выражении для элементарной работы активных сил на любых бесконечно малых перемещениях системы, допускаемых связями (возможных перемещениях).

При решении задач уравнения Лагранжа второго рода следует составлять в следующей последовательности:

1) установить число степеней свободы и выбрать обобщенные координаты системы;

2) составить выражение кинетической энергии системы, пользуясь формулами (3.44) – (3.46) и представить полученные выражения как функции обобщенных координат и обобщенных скоростей;

3) определить обобщенные силы системы;

4) выполнить все необходимые операции дифференцирования кинетической энергии системы;

5) подставить результаты пп. 3 и 4 в уравнения Лагранжа;

6) решая полученные в п. 5 уравнения, определить искомые величины; если при этом искомая величина получится отрицательной, необходимо пересчитать обобщенную силу, изменив направление движения механической системы на противоположное.

Пример

Механическая система (рис. 42) состоит из груза 1, ступенчатых шкивов 2 и 3 с радиусами ступеней R_2, r_2, R_3, r_3, цилиндрических катков 4 и 5, соединенных друг с другом нерастяжимыми нитями, намотанными на шкивы. Система приходит в движение из состояния покоя под действием сил тяжести. На шкивы 2 и 3 при их вращении действуют постоянные моменты сил сопротивления M_2 и M_3. Пренебрегая другими силами сопротивления, массами нитей, их проскальзыванием по шкивам и каткам, определить ускорение груза 1.

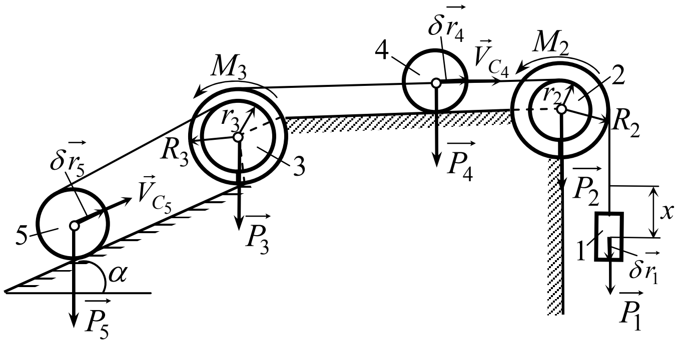


Рис. 42

Массу каждого шкива считать равномерно распределенной по его внешнему ободу; катки считать однородными круглыми цилиндрами.

Дано: $R_2 = R$, $r_2 = 0{,}5\,R$, $R_3 = 0{,}5\,R$, $r_3 = 0{,}2\,R$, $P_1 = 4P$, $P_2 = 3P$, $P_3 = 4P$, $P_4 = 6P$, $P_5 = 2P$, $M_2 = 0{,}1\,P{\cdot}R$, $M_3 = 0{,}3\,P{\cdot}R$, $\alpha = 60°$.

Решение. Система имеет одну степень свободы (k =1). Определим положение груза 1 координатой x, направив ось x вниз вдоль движения груза. Выберем эту координату в качестве обобщенной ($q = x$). Тогда уравнение Лагранжа будет иметь вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q\,, \tag{3.68}$$

где кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий всех тел, входящих в систему:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5. \tag{3.69}$$

Кинетическая энергия груза 1, движущегося поступательно, определяется по формуле (3.44):

$$T_1 = \frac{P_1}{2g}\cdot V_1^{\,2}\,,$$

где $V_1 = \dot{x}$ – обобщенная скорость и, следовательно,

$$T_1 = \frac{P_1}{2g}\cdot \dot{x}^2\,. \tag{3.70}$$

Кинетическая энергия шкива 2, совершающего вращательное движение вокруг неподвижной оси, определяется по формуле (3.45):

$$T_2 = \frac{1}{2} I_2 \cdot {\omega_2}^2 ,$$

где угловую скорость ω_2 нужно выразить через обобщенную скорость $V_1 = \dot{x}$:

$$\omega_2 = \frac{\dot{x}}{R_2} = \frac{\dot{x}}{R} . \tag{3.71}$$

Момент инерции шкива 2 относительно оси вращения определим по формуле для тонкого однородного кольца (см. п. 2 примеров вычисления моментов инерции однородных тел): $I_2 = \frac{P_2}{g} R_2^2$. Тогда

$$T_2 = \frac{P_2}{2g} \dot{x}^2 . \tag{3.72}$$

Кинетическую энергию шкива 3 также определим по формуле (3.45):

$$T_3 = \frac{1}{2} I_3 \cdot \omega_3^2 , \quad \text{где} \quad I_3 = \frac{P_3}{g} R_3^2 .$$

Выразим угловую скорость ω_3 шкива через обобщенную скорость:

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 \cdot r_2}{R_3} = \frac{r_2}{R_3 \cdot R_2} \dot{x} = \frac{\dot{x}}{R} . \tag{3.73}$$

Следовательно,

$$T_3 = \frac{P_3}{2g} \cdot \frac{R^2}{4} \cdot \frac{\dot{x}^2}{R^2} = \frac{P_3}{8g} \cdot \dot{x}^2 . \tag{3.74}$$

Катки 4 и 5 совершают плоскопараллельное движение. Их кинетические энергии определим по формуле Кенига (3.46):

$$T_4 = \frac{P_4}{2g} \cdot V_{C_4}^2 + \frac{1}{2} \cdot I_4 \, \omega_4^2 ,$$

$$T_5 = \frac{P_5}{2g} \cdot V_{C_5}^2 + \frac{1}{2} \cdot I_5 \, \omega_5^2 .$$

Моменты инерции катков относительно осей, проходящих через их центры масс, вычислим по формуле для однородного цилиндра (см. п.5 примеров вычисления моментов инерции однородных тел): $I_4 = \frac{P_4}{2g} R_4{}^2$, $I_5 = \frac{P_5}{2g} R_5{}^2$, где радиусы катков 4 и 5 обозначены соответственно R_4 и R_5.

Выразим скорости центров масс катков V_{C_4}, V_{C_5} и их угловые скорости ω_4, ω_5 через обобщенную скорость:

$$V_{C_4} = \omega_2 \cdot r_2 = \frac{\dot{x}}{R_2} r_2 = \frac{R}{2R} \dot{x} = \frac{\dot{x}}{2},$$

$$V_{C_5} = \frac{\omega_3 \cdot r_3}{2} = \frac{\dot{x} \cdot 0{,}2R}{R \cdot 2} = \frac{\dot{x}}{10},$$

$$\omega_4 = \frac{V_{C_4}}{R_4} = \frac{\dot{x}}{2R_4}, \quad \omega_5 = \frac{V_{C_5}}{R_5} = \frac{\dot{x}}{10R_5}. \qquad (3.75)$$

Следовательно,

$$T_4 = \frac{P_4}{2g} \cdot \frac{\dot{x}^2}{4} + \frac{P_4 \cdot R_4{}^2}{4g} \cdot \frac{\dot{x}^2}{R_4{}^2 \cdot 4} = \frac{3}{16} \frac{P_4}{g} \cdot \dot{x}^2,$$

$$T_5 = \frac{P_5}{2g} \cdot \frac{\dot{x}^2}{100} + \frac{1}{2} \cdot \frac{P_5}{2g} \cdot \frac{R_5{}^2}{R_5{}^2} \cdot \frac{\dot{x}^2}{100} = \frac{3}{400} \frac{P_5}{g} \cdot \dot{x}^2. \qquad (3.76)$$

Складывая кинетический энергии (3.70), (3.72), (3.74), (3.76), получим кинетическую энергию всей системы (3.69)

$$T = \left(\frac{P_1}{2} + \frac{P_2}{2} + \frac{P_3}{5} + \frac{3}{16} P_4 + \frac{3}{400} P_5 \right) \frac{\dot{x}^2}{g} = 0{,}523 \cdot P \cdot \dot{x}^2. \quad (3.77)$$

Для определения обобщенной силы сообщим системе возможное перемещение, дав грузу 1 обобщенное возможное перемещение $\delta \vec{r_1}$ в сторону возрастания координаты x: $\left| \delta \vec{r_1} \right| = \delta x$. При этом шкивы 2 и 3 получат угловые перемещения $\delta\varphi_2$ и $\delta\varphi_3$, а катки 4 и 5 – перемещения $\delta \overrightarrow{r_4}$ и $\delta \overrightarrow{r_5}$, связанные с δx зависимостями, аналогичными зависимостям (3.71), (3.73), (3.75) между соответствующими угловыми и линейными скоростями:

$$\delta \varphi_2 = \frac{\delta x}{R_2} = \frac{\delta x}{R}, \quad \delta \varphi_3 = \frac{\delta x}{R}, \quad \left|\delta \overrightarrow{r_4}\right| = \frac{\delta x}{2}, \quad \left|\delta \overrightarrow{r_5}\right| = \frac{\delta x}{10}.$$

Составим выражение элементарной работы на выбранном возможном перемещении системы, воспользовавшись формулами (3.47) и (3.51):

$$\delta A = P_1 \cdot \delta x + P_4 \cdot \frac{\delta x}{2} \cdot \cos 90° - P_5 \cdot \frac{\delta x}{10} \cdot \cos 30° - M_2 \cdot \frac{\delta x}{R} - M_3 \cdot \frac{\delta x}{R} =$$

$$= \left(P_1 - \frac{P_5}{10} \cos 30° - \frac{M_2 + M_3}{R} \right) \delta x.$$

По определению коэффициент, стоящий при δx в последнем выражении, равен обобщенной силе:

$$Q = P_1 - \frac{P_5}{10} \cos 30° - \frac{M_2 + M_3}{R} = 4P - \frac{3\sqrt{3}}{20} P - \frac{4}{10} P = 3{,}34P. \quad (3.78)$$

Выполним операции дифференцирования кинетической энергии системы (3.77):

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 1{,}046 \cdot P \cdot \dot{x}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = 1{,}046 \cdot P \cdot \ddot{x}. \quad (3.79)$$

Подставим полученные выражения (3.79) и обобщенную силу (3.78) в уравнения Лагранжа (3.68), получим $1{,}046 \cdot P \cdot \ddot{x} = 3{,}34P$.

Следовательно, искомое ускорение груза 1

$$a_1 = \ddot{x} = \frac{3{,}34}{1{,}046} = 3{,}193 \text{ м/с}^2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Теоретическая механика : метод. указания и контрольные задания для студентов заочного отделения /сост.: А.Н. Гайфутдинов, А.В Садыков. – Нижнекамск. - Нижнекам. хим.-технол. ин-т., 2012. - 48 с.

2. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики : учеб. для техн. вузов /А.А. Яблонский, В.М.Никифорова. – 11-е изд., стер. – СПб.: Изд-во «Лань», 2004. -768 с.

3. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики : учеб. для вузов / С.М. Тарг. – 15-е изд., стер. – М.: Высш. школа, 2005. – 415 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Гайфутдинов Айдар Наилович

кандидат физико-математических наук, доцент

Гайфутдинов Ринат Айдарович

кандидат физико-математических наук

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Корректор Габдурахимова Т.М.
Худ. редактор Федорова Л.Г.

Сдано в набор 04.04.2013.
Подписано в печать 06.06.2013.
Бумага писчая. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 5,25. Тираж 100.
Заказ №25.

НХТИ (филиал) ФБГОУ ВПО «КНИТУ», г. Нижнекамск, 423570,
ул. 30 лет Победы, д. 5а