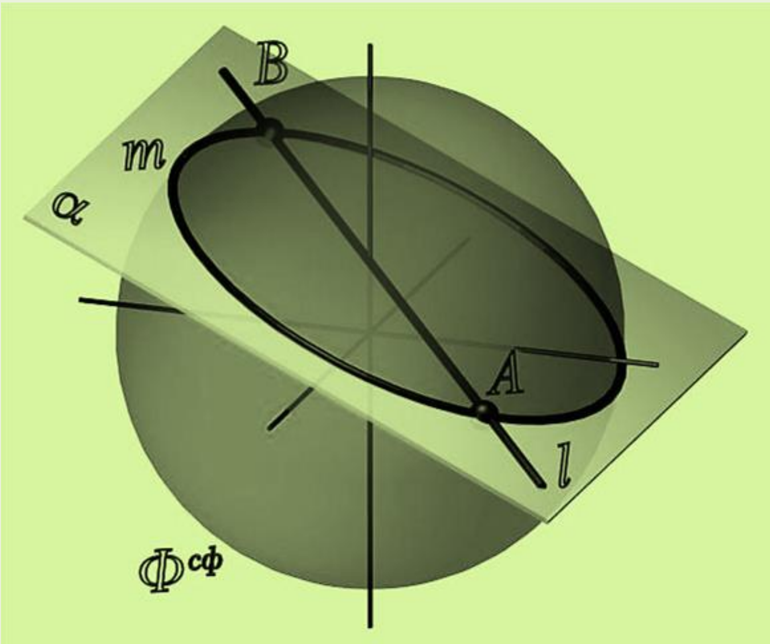
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Нижнекамский химико-технологический институт (филиал) федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования
«Казанский национальный исследовательский технологический университет»
НХТИ ФГБОУ ВО «КНИТУ»

О.А. Маркова

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Учебно-методическое пособие



2018

УДК 514.182
М 25

Маркова, О.А.
М 25 Решение задач по начертательной геометрии. Учебно-методическое пособие / О.А. Маркова. - Нижнекамск: ИПЦ «Гузель», 2018. - 86 с.

Пособие содержит теорию, примеры решения задач по основным темам начертательной геометрии для самостоятельного изучения и дальнейшего выполнения подобных заданий согласно своему варианту. Публикация предназначена для студентов технических направлений заочного отделения, обучающихся в учреждениях высшего образования по программам бакалавриата.

Пособие подготовлено согласно учебным программам, рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры «Техника и физика низких температур» НХТИ ФГБОУ ВО «КНИТУ».

Рецензенты:

Гарипов М.Г., кандидат технических наук, доцент;

Макусева Т.Г., кандидат педагогических наук, доцент.

Введение

Пособие содержит теорию, примеры решения задач по начертательной геометрии для самостоятельного изучения и дальнейшего выполнения подобных заданий согласно своему варианту. Целью данного пособия является: приобретение навыков в решении геометрических задач; углубление и развитие представления о пространственных объектах; распознавание и изображение на чертежах и рисунках геометрических фигур (тел) и их отношений.

Начертательная геометрия изучает методы и способы построения изображений геометрических объектов на плоскости и разрабатывает способы решения пространственных задач по изображениям этих объектов. Следовательно, для выполнения геометрических задач всегда используют графические построения. Практически все решения разнообразных задач по начертательной геометрии основываются на одних и тех же графических действиях.

Условия и содержания задач изложены на странице 71 и в разделе «Приложение» учебно-методического пособия. Решения 10-ти задач оформляются карандашом с помощью чертежных инструментов в тетради в клетку. Каждая задача пронумеровывается и переносится в тетрадь с записью условия задачи. Все точки и линии обозначаются буквами или цифрами (шрифтом № 5). Вспомогательные построения (тонкие линии) сохраняются.

Обозначения и символы

Обозначения и символы, применяемые в пособие, приведены в таблице 1.

Таблица 1

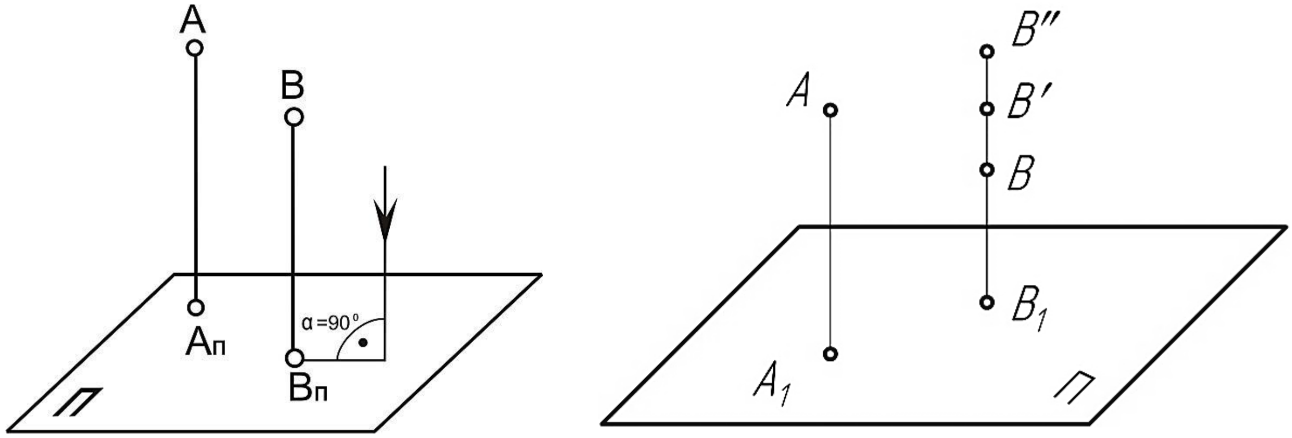
Обозначения геометрических фигур в различных системах				
Плоскости проекций: - горизонтальная - фронтальная - профильная	$\mathit{\Pi}_1$ $\mathit{\Pi}_2$ $\mathit{\Pi}_3$	π_1 π_2 π_3	Π_1 Π_2 Π_3	$\mathrm{\pi}_1$ $\mathrm{\pi}_2$ $\mathrm{\pi}_3$
Оси проекций	X, Y, Z	x, y, z	$\mathrm{X, Y, Z}$	$\mathrm{x, y, z}$
Точки в пространстве	$A, B, .., 1, 2, ...$		$\mathrm{A, B, .., 1, 2, ...}$	
Координаты точек	X_A, Y_A, Z_A	A_X, A_Z, A_Y	$\mathrm{X_A, Y_A, Z_A}$	$\mathrm{A_X, A_Z, A_Y}$
Проекции точек: - горизонтальная - фронтальная - профильная	$A_1, .., 1_1, ...$ $A_2, .., 1_2, ...$ $A_3, .., 1_3, ...$		$\mathrm{A_1, .., 1_1, ...}$ $\mathrm{A_2, .., 1_2, ...}$ $\mathrm{A_3, .., 1_3, ...}$	
Линии	$H, .., h, .., (AB), .., (12), .., \lvert AB\rvert, .., \lvert 12\rvert, ...$		$\mathrm{H, .., h, .., (AB), .., (12), .., \lvert AB\rvert, .., \lvert 12\rvert, ...}$	
Проекции линий	проекциями точек			
Отрезки	$[AB], .., [12], ...$		$\mathrm{[AB], .., [12], ...}$	
Проекции отрезков	$[A_1B_1], .., [1_12_1], ...$		$\mathrm{[A_1B_1], .., [1_12_1], ...}$	
Углы	$\alpha,\ \beta, ...$		$\mathrm{\alpha,\ \beta, ...}$	
Плоскости	$P, Q, .., \alpha, \gamma, ...$		$\mathrm{P, Q, .., \alpha, \gamma, ...}$	
Следы плоскостей: - горизонтальные - фронтальные - профильные	$P_1, .., \alpha_1, ...$ $P_2, .., \alpha_2, ...$ $P_3, .., \alpha_3, ...$		$\mathrm{P_1, .., \alpha_1, ...}$ $\mathrm{P_2, .., \alpha_2, ...}$ $\mathrm{P_3, .., \alpha_3, ...}$	
Треугольник	$\mathit{\Delta}$		Δ	
Символы, обозначающие отношения между геометрическими фигурами				
- результат действия - совпадение - конгруэнтность - перпендикулярность - параллельность	$=$ $\equiv$ $\cong$ $\perp$ $\parallel$	- пересечение - принадлежность - логическое следствие - больше - меньше	$\cap$ $\in$ $\Rightarrow$ $>$ $<$	

1. Тема «Проецирование точки»

Все геометрические фигуры состоят из бесконечного множества точек. Точка относится к основным, неопределяемым понятиям геометрии.

Теоретические положения:

Проекция точки есть точка. Чтобы спроецировать некоторую точку А на плоскость *П*, надо из точки на плоскость опустить перпендикуляр (рисунок 1,*а*). Если же на плоскости *П* задать проекцию точки, например B_1, то по этой одной проекции нельзя определить положение пространственной точки *B*, так как на проецирующем луче будет множество точек, соответствующих этой проекции (рисунок 1,*б*). Другими словами одна проекция не определяет положение точки в пространстве.



а) *б)*

Рисунок 1 - Проецирование точки

Если некоторую точку А спроецировать на три взаимно перпендикулярные плоскости проекций π_1, π_2 и π_3, то получим три проекции точки - горизонтальную A_1, фронтальную A_2 и профильную A_3. Из наглядного чертежа (рисунок 2) видно, что все три проекции точки взаимосвязаны между собой.

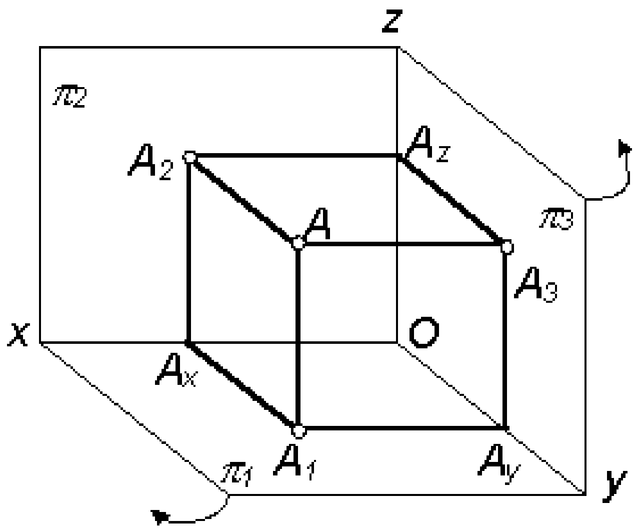


Рисунок 2 - Наглядный чертеж точки

Необходимо отметить:

1). Две проекции точки определяют положение третьей ее проекции.

2). Любая точка пространства задается координатами:

- $AA_3 = A_1A_Z = A_X0 = A_2A_Z$ - расстояние от А до π_3 - это координата X;
- $AA_2 = A_1A_X = A_y0 = A_3A_Z$ - расстояние от А до π_2 - координата Y;
- $AA_1 = A_2A_X = A_Z0 = A_3A_y$ - расстояние от А до π_1 - координата Z;

3). Точки A_X, A_y и A_Z называют точками схода;

4). Любую проекцию точки определяют две координаты:

A_1 - X и Y; A_2 - X и Z; A_3 - Y и Z;

5). Линии $|A_1A_2|$, $|A_2A_3|$, $|A_2A_X|$, $|A_XA_1|$, $|A_1A_y|$, $|A_3A_y|$ - линии связи;

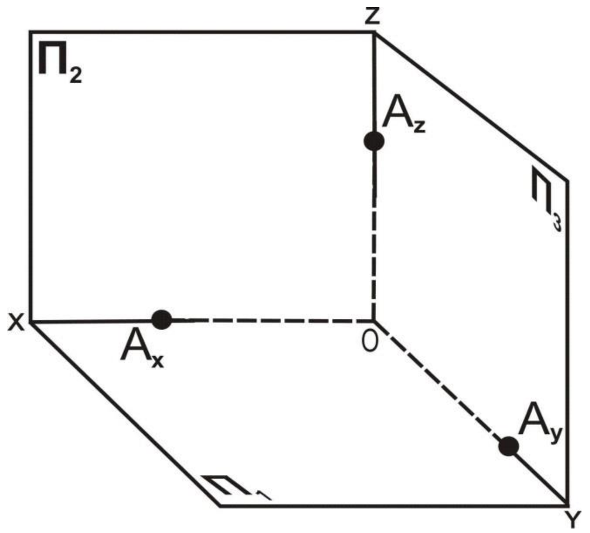
6). Горизонтальная A_1 и фронтальная A_2 проекции лежат на одной линии связи (вертикальной), перпендикулярной оси X, а фронтальная A_2 и профильная A_3 проекции лежат на одной линии связи, перпендикулярной оси Z , то есть находятся на одной высоте.

Следовательно, положение точки А в пространстве определяется тремя координатами X, Y, Z, показывающими величины расстояний, на которые точка удалена от плоскостей проекций.

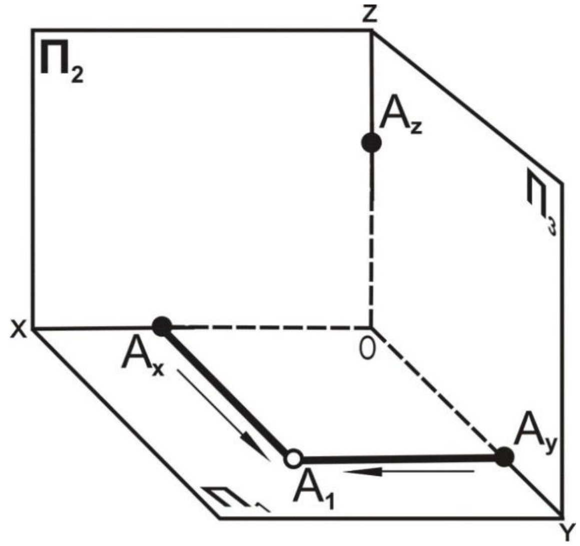
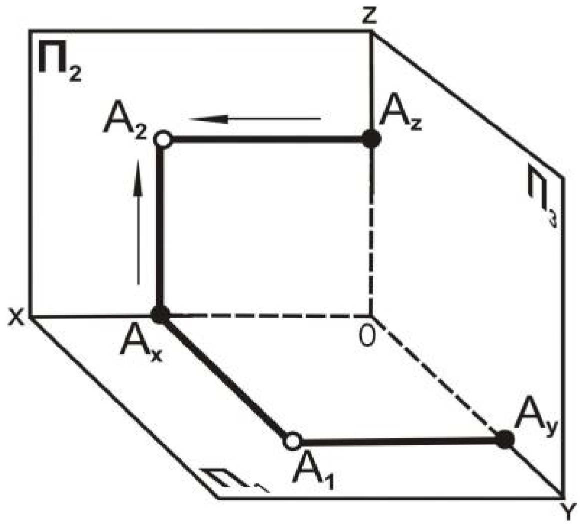
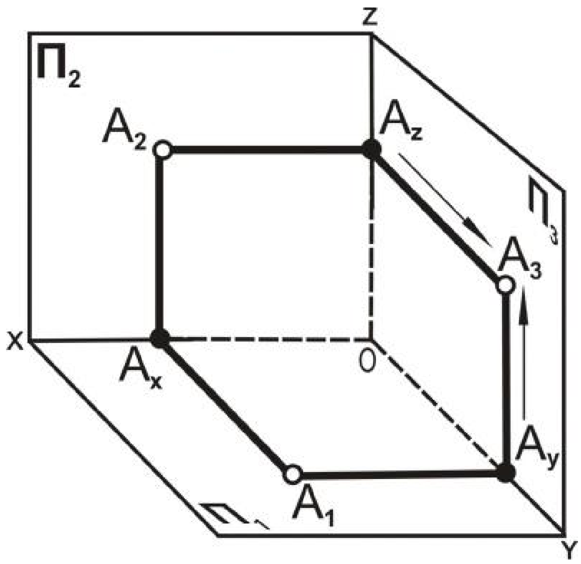
В таблице 2 представлен общий алгоритм построения точки А по заданным координатам в пространственной модели системы трех плоскостей проекций $П_1П_2П_3$.

Таблица 2

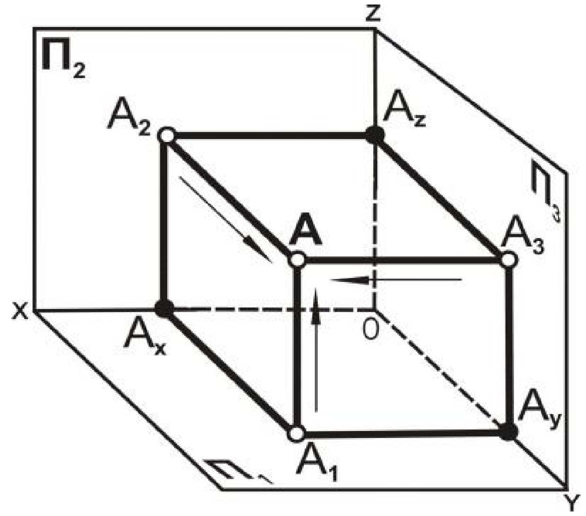
Алгоритм построения наглядного изображения точки по координатам

Словесная форма	Графическая форма
I	*II*
1). Отложив на осях X, Y, Z соответствующие координаты точки А, получают точки схода - A_X, A_y, A_Z.	

Продолжение таблицы 2

<table>
<tr><th>I</th><th>II</th></tr>
<tr><td>2). Горизонтальная проекция A_1 находится на пересечении линий связи из точек схода A_X и A_Y, проведенных параллельно осям X и Y.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3). Фронтальная проекция A_2 определяется на пересечении линий связи из точек A_X и A_Z, проведенных параллельно осям X и Z.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4). Профильная проекция A_3 находится на пересечении линий связи из точек A_Y и A_Z, проведенных параллельно осям Y и Z.</td><td>
</td></tr>
</table>

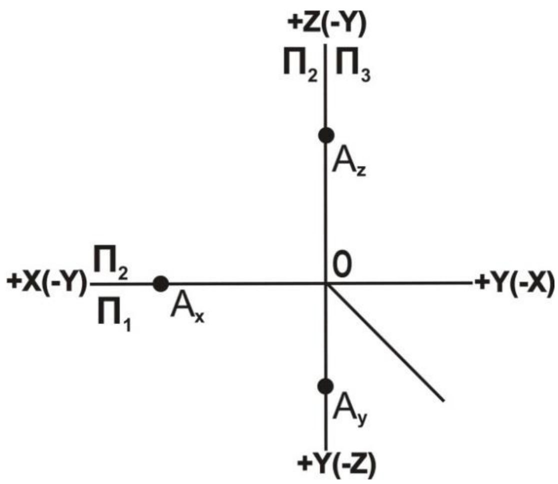
Продолжение таблицы 2

<table>
<tr><th>I</th><th>II</th></tr>
<tr><td>5). Точка А располагается на пересечении линий связи, проведенных из проекций точки - A_1, A_2 и A_3.</td><td>
</td></tr>
</table>

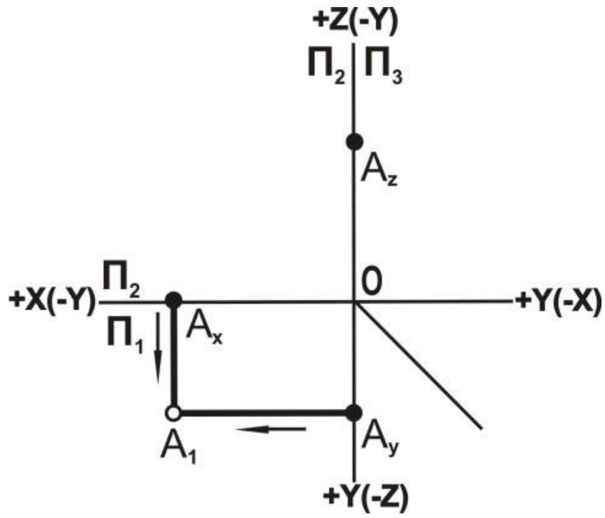
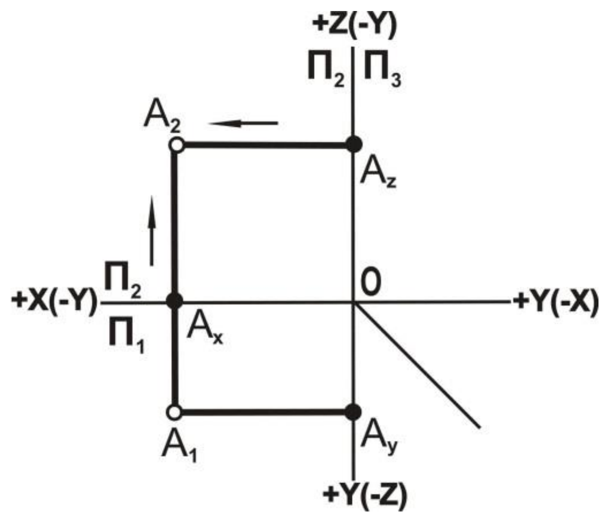
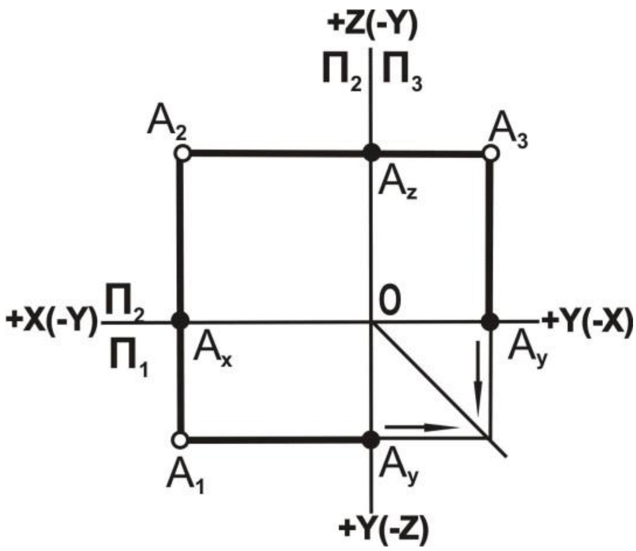
Чтобы построить для точки комплексный чертеж или эпюр Монжа пространственное изображение необходимо преобразовать в плоскостное. При этом плоскости проекций разворачиваются следующим образом: фронтальная плоскость $\pi_2(П_2)$ всегда остается на месте, горизонтальная плоскость $\pi_1(П_1)$ поворотом вниз вокруг оси X, а профильная плоскость $\pi_3(П_3)$ поворотом вправо вокруг оси Z совмещаются с фронтальной плоскостью (оба поворота на 90 градусов). В таблице 3 представлен общий алгоритм построения точки А по заданным координатам на комплексном чертеже.

Таблица 3

Алгоритм построения комплексного чертежа точки по координатам

<table>
<tr><th>Словесная форма</th><th>Графическая форма</th></tr>
<tr><td>I</td><td>II</td></tr>
<tr><td>1). Отложив на осях X, Y, Z соответствующие координаты точки А, получают точки схода A_X, A_Y и A_Z.</td><td>
</td></tr>
</table>

Продолжение таблицы 3

I	*II*
2). Горизонтальная проекция A_1 находится на пересечении линий связи из точек A_X и A_Y, проведенных параллельно осям X и Y.	
3). Фронтальная проекция A_2 располагается на пересечении линий связи из точек A_X и A_Z, проведенных параллельно осям X и Z.	
4). Профильная проекция A_3 определяется на пересечении линий связи из точек A_Z и A_Y, проведенных параллельно осям Z и Y.	

Пример № 1: Выполнение комплексного чертежа точки А(20;15;25) (рисунок 3).

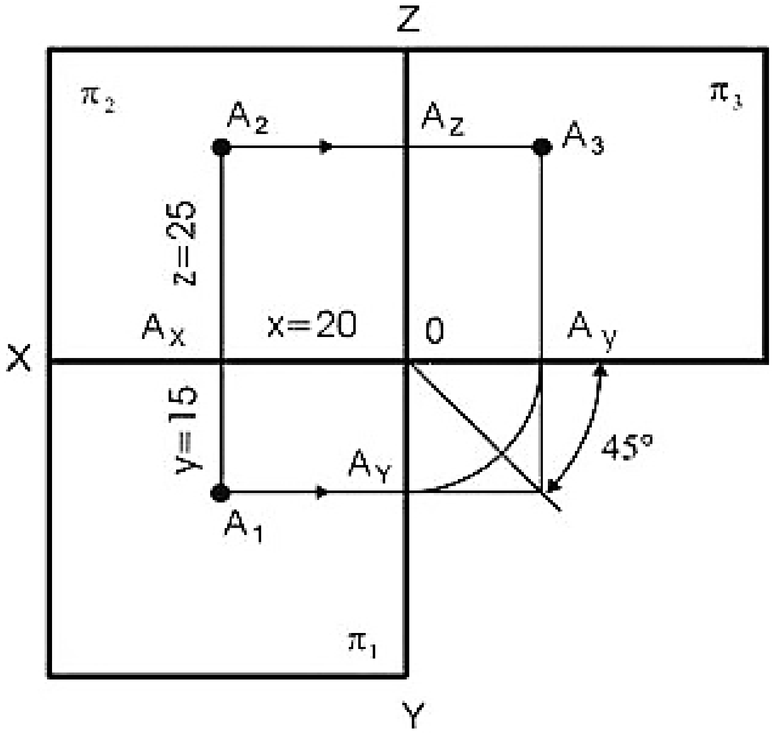


Рисунок 3 - Комплексный чертеж точки

Пример № 2: *Построение по заданным координатам проекций (эпюра) точки А(25;10;20)* (рисунок 4).

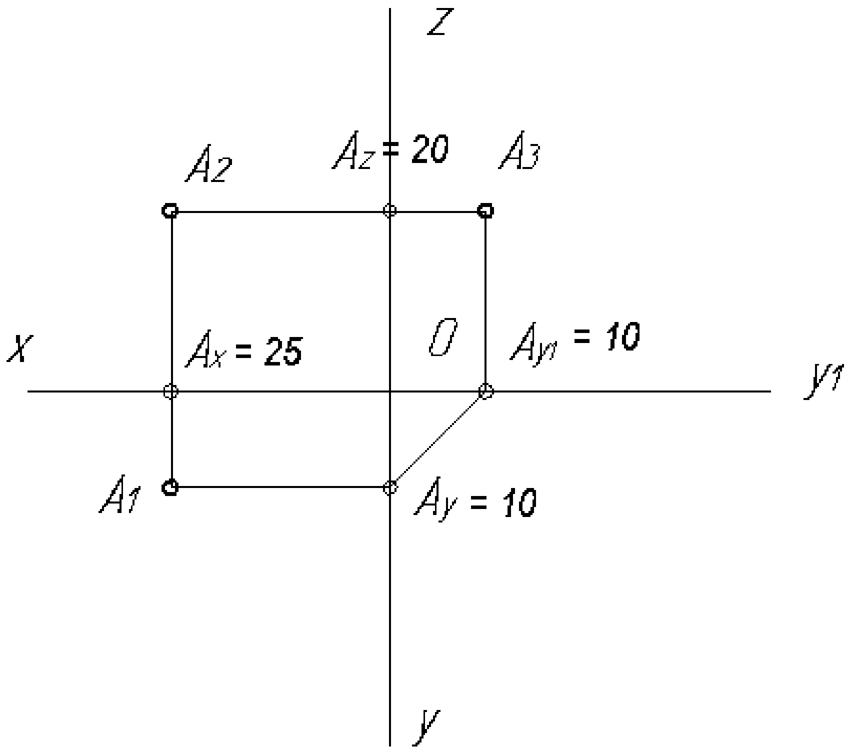


Рисунок 4 - Эпюр точки

Решение:
- проводят координатные оси X, Y, Z;
- откладывают координаты по трем осям;
- находят фронтальную A_2 и горизонтальную A_1 проекции точки A;
- с помощью переноса A_Y строят профильную проекцию точки A - A_3.

Этапы преобразования наглядного чертежа точки в комплексный чертеж, а затем и в эпюр Монжа показаны на рисунке 5.

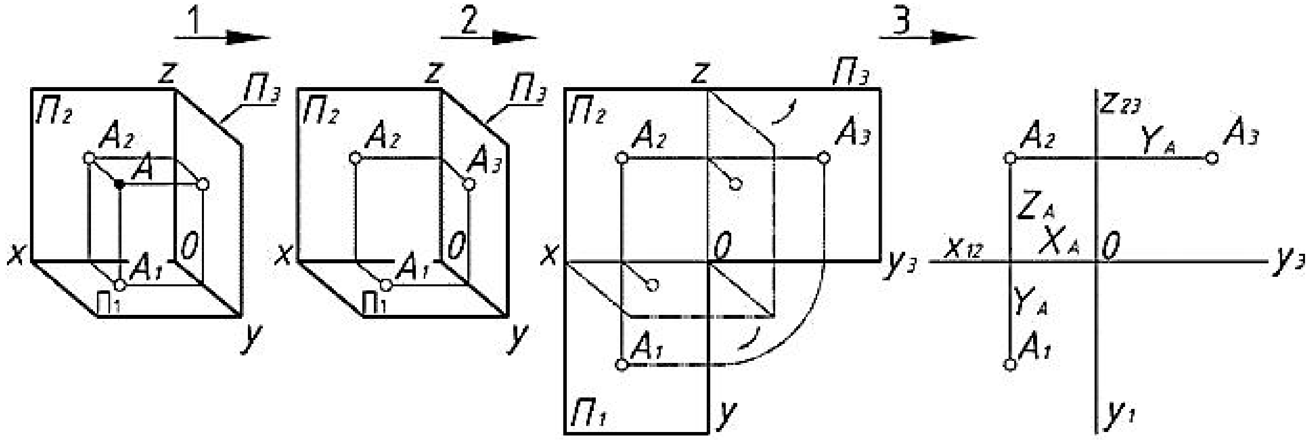


Рисунок 5 – Этапы преобразования чертежей точки

Задание к выполнению:

Задача 1: Выполнить согласно своему варианту комплексный чертеж точки D (Приложение: таблица 1). Задачу выполнить в масштабе 1:1.

Задача 2: Построить согласно своему варианту эпюр точки K (Приложение: таблица 1). Задачу выполнить в масштабе 1:1.

2. Тема «Конкурирующие точки»

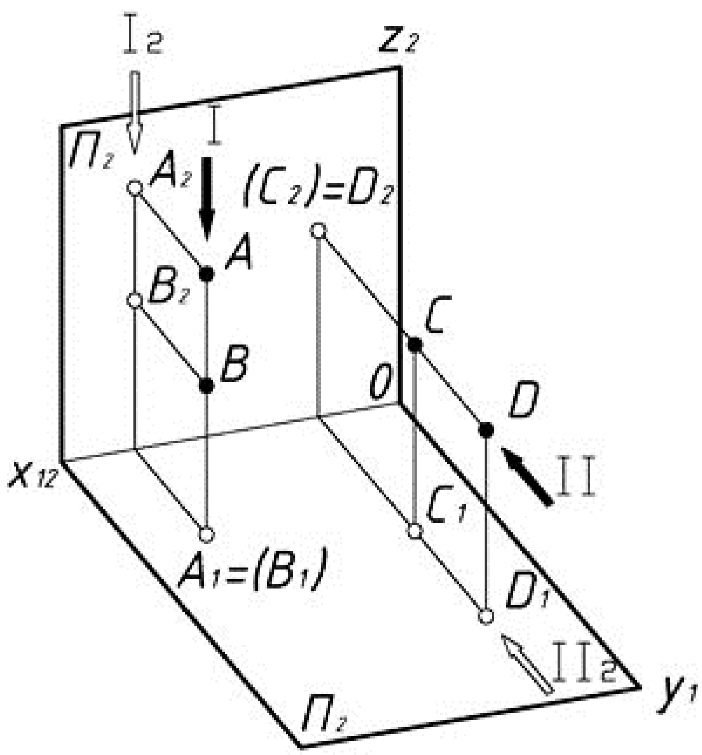
Точки на одном проецирующем луче называются *конкурирующими.* Объяснение такому названию в том, что в пространстве для наблюдателя одна из точек видна, другая нет. Соответственно, на чертеже одна из проекций конкурирующих точек видима, проекция другой точки – невидима. Задача определения видимости конкурирующих точек имеет большое практическое значение, поскольку окончательная обводка изображения геометрической фигуры производится с учетом видимости всех ее элементов.

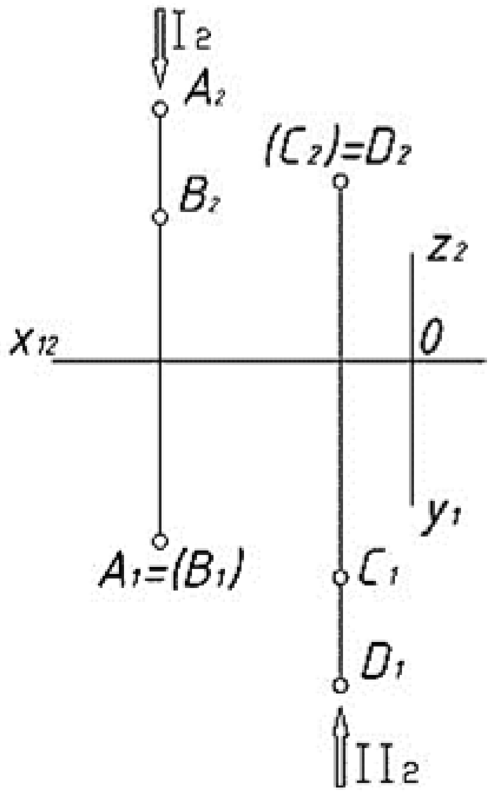
На пространственной модели проецирования (рисунок 6,*а*) из двух конкурирующих точек A и B наблюдателю видна точка A. Судя по цепочке

I $\Rightarrow A \Rightarrow B$ точка A находится ближе к наблюдателю, чем точка B и дальше от плоскости проекций $П_1$, то есть $Z_A > Z_B$. Сравнению подлежат координаты Z этих точек. Если видима сама точка A, то видима и ее проекция A_1 по отношению к совпадающей с ней проекцией B_1. Для наглядности невидимые проекции точек часто заключают в скобки.

На эпюре ($\mathrm{I}_2 \Rightarrow A_2 \Rightarrow B_2$) останутся совпадающие проекции точек на плоскости проекций $П_1$ и раздельные изображения – на $П_2$ (рисунок 6,*б*).

Из двух конкурирующих точек C и D наблюдатель видит точку D и ее проекцию D_2. Поскольку общий проецирующий луч этих точек параллелен оси Y, то признак видимости конкурирующих точек определяется неравенством $Y_D > Y_C$. Следуя цепочке $\mathrm{II}_2 \Rightarrow D_1 \Rightarrow C_1$ на эпюре останутся совпадающие проекции точек на плоскости $П_2$ и раздельные изображения – на $П_1$.





а) *б)*

Рисунок 6 – Проецирование конкурирующих точек

а) пространственное изображение; *б)* эпюр

Точки A и B являются горизонтально-конкурирующими, а точки C и D – фронтально-конкурирующими.

3. Тема «Проецирование прямой»

Теоретические положения:

1). Прямая линия определяется двумя точками. Для отображения прямой на плоскости достаточно спроецировать на эту плоскость две ее точки.

2). Любая прямая неограниченна и не имеет определенной длины, поэтому и задается на чертеже чаще всего отрезком. Две проекции прямой (или отрезка) – это минимальное, но достаточное количество проекций на комплексном чертеже или эпюре.

3). Прямая, не параллельная и не перпендикулярная ни одной из плоскостей проекций, называется прямой общего положения (рисунок 7).

4). Прямые частного положения расположены параллельно или перпендикулярно плоскостям проекций.

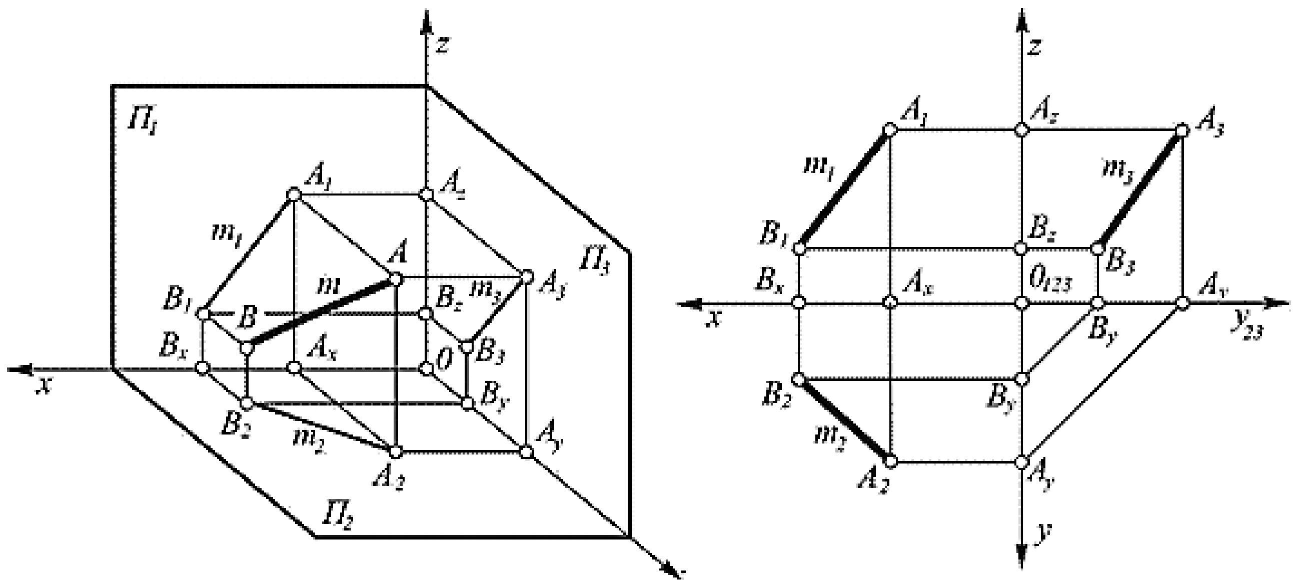


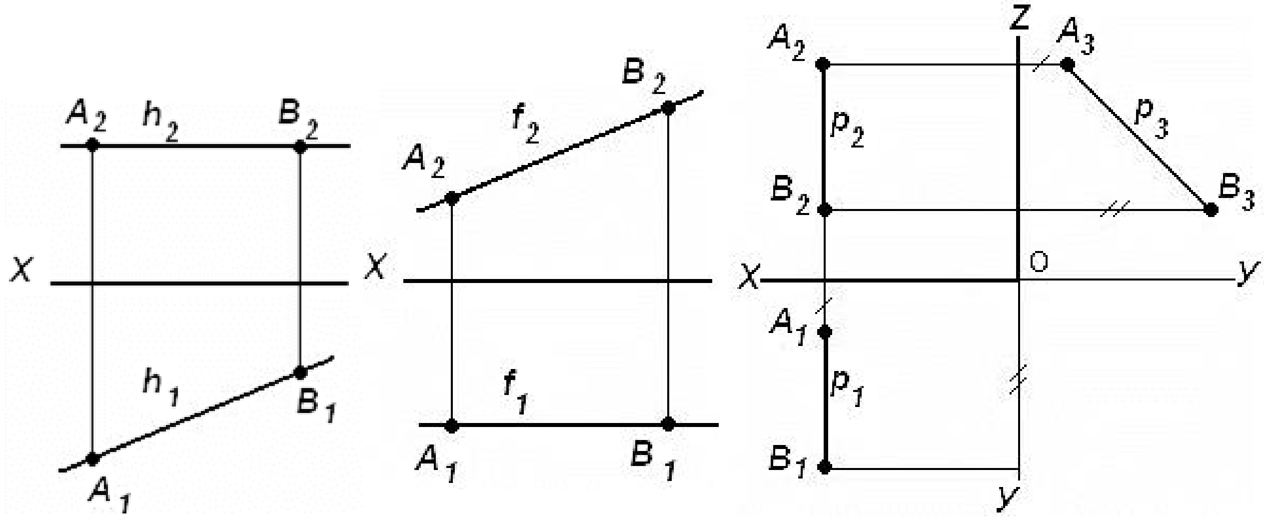
Рисунок 7 – Чертежи отрезка *AB* прямой *m* общего положения

Прямая, параллельная одной плоскости проекций, называется прямой уровня (рисунок 8). Прямых уровня три:

- прямая, параллельная плоскости проекций π_1, называется *горизонталью* (горизонтальной прямой) и обозначается *h* (*H*) (рисунок 8,*а*);

- прямая, параллельная плоскости проекций π_2, называется *фронталью* (фронтальной прямой) и обозначается *f* (*F*) (рисунок 8,*б*);

- прямая, параллельная плоскости проекций π_3, называется *профильной прямой* и обозначается *p* (*P*) (рисунок 8,*в*).

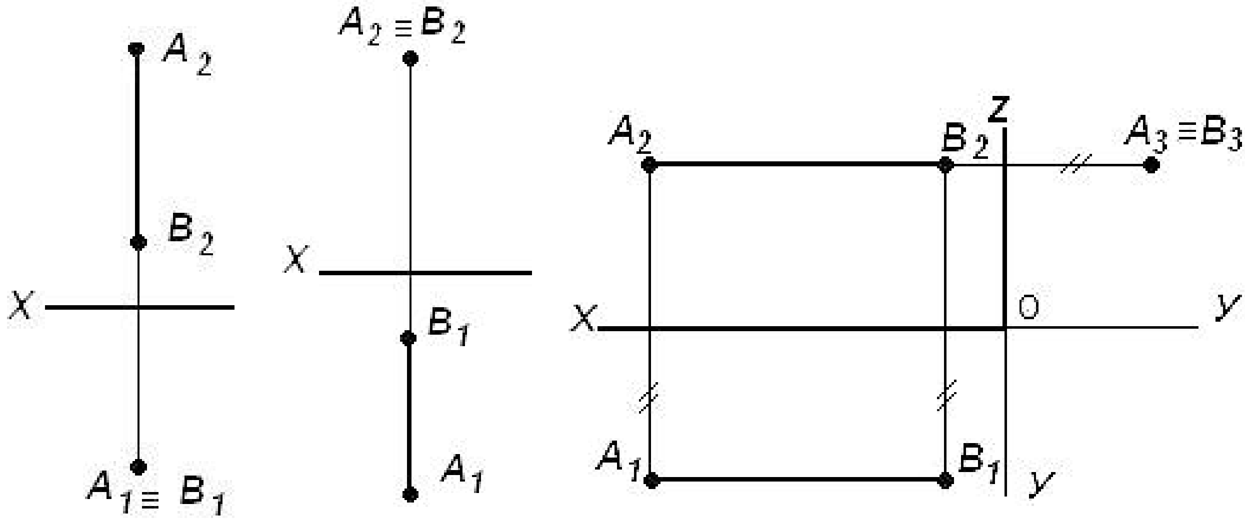


а) *б)* *в)*

Рисунок 8 - Прямые уровня

Прямая, параллельная двум плоскостям проекций и перпендикулярная третьей, называется проецирующей прямой (рисунок 9). Проецирующих прямых три:

- прямая, перпендикулярная плоскости проекций π_1, называется *горизонтально-проецирующей прямой* (рисунок 9,*а*);
- прямая, перпендикулярная плоскости проекций π_2, называется *фронтально-проецирующей прямой* (рисунок 9,*б*);
- прямая, перпендикулярная плоскости проекций π_3, называется *профильно-проецирующей прямой* (рисунок 9,*в*).



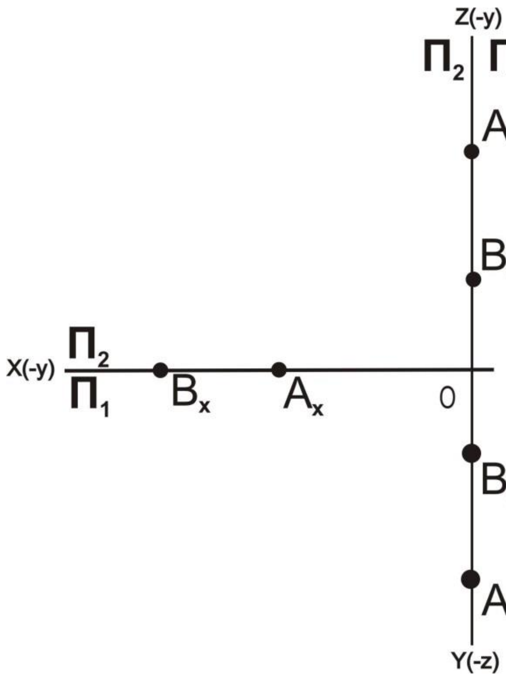
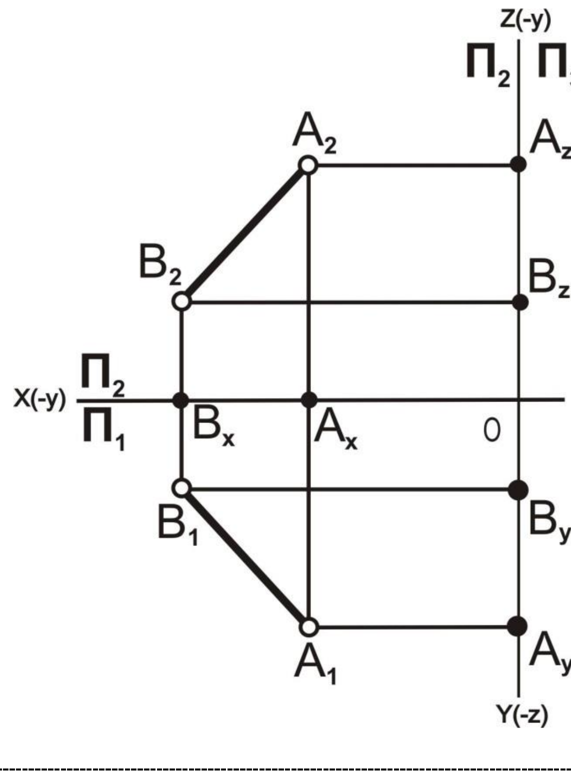
а) *б)* *в)*

Рисунок 9 - Проецирующие прямые

В таблице 4 дан алгоритм построения комплексного чертежа отрезка прямой линии по заданным координатам двух ее точек.

Таблица 4

Алгоритм построения проекций отрезка прямой линии

Словесная форма	Графическая форма
I	*II*
1). Отложив значения координат для точек A и B на осях X, Y, Z, получают вспомогательные точки: A_X, B_X на оси X; A_Y, B_Y на оси Y; A_Z, B_Z на оси Z. При построении этих точек учитывают знаки координат и откладывают их на осях в соответствующем направлении.	
2). Строят проекции точек A и B: A_1(X; Y), B_1(X; Y); A_2(X; Z), B_2(X; Z). 3). Соответствующие проекции точек A_1 и B_1, A_2 и B_2 соединяют. Получают проекции отрезка AB: [A_1B_1] и [A_2B_2]. [A_1B_1] – это проекция отрезка прямой линии на $П_1$. [A_2B_2] – это проекция отрезка прямой линии на $П_2$.	

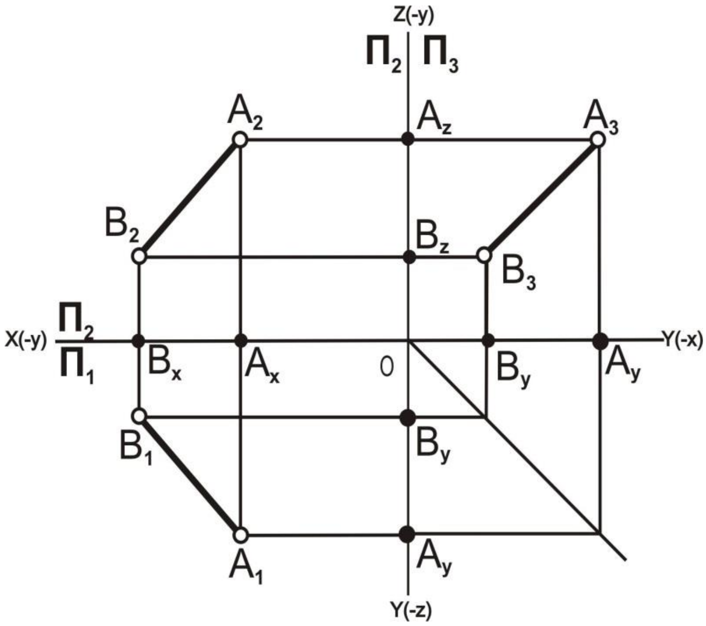
<table>
<tr><th>I</th><th>II</th></tr>
<tr><td>

4). Откладывают значение координаты Y и на оси Y профильной плоскости $П_3$: A_y, B_y, где $A_3(Y; Z)$, $B_3(Y; Z)$.

5). Одноименные проекции A_3 и B_3 соединяют толстой линией.

Судя по проекциям точек A и B – это отрезок прямой общего положения.

</td><td>



</td></tr>
</table>

Таким образом, для получения комплексного чертежа или эпюра прямой достаточно построить проекции двух ее точек и соединить одноименные проекции прямой линии между собой: горизонтальную $[A_1B_1]$, фронтальную $[A_2B_2]$ и профильную $[A_3B_3]$ проекции.

Пример № 3: *Построение эпюра горизонтали по наглядному чертежу без указания осей проекций* (рисунок 10).

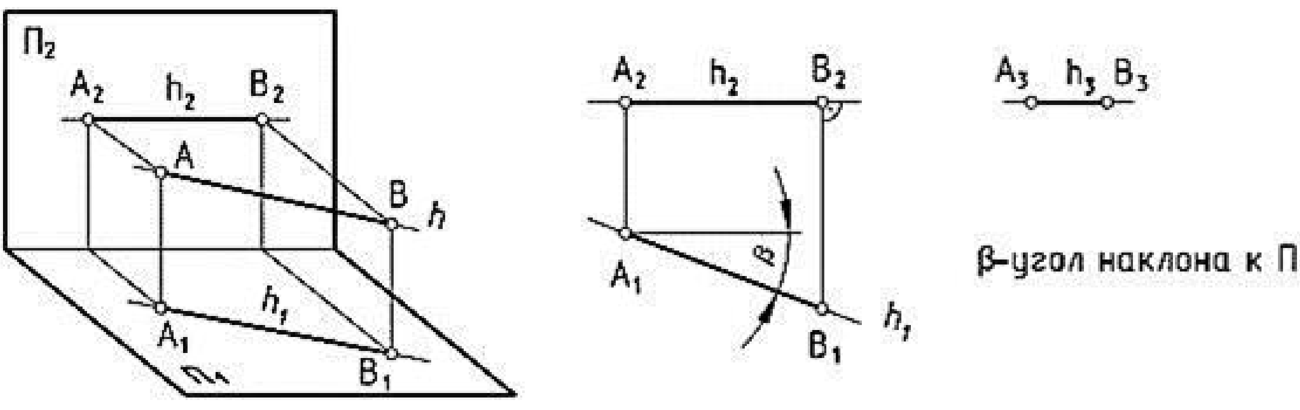


Рисунок 10 - Построение эпюра горизонтали H

Пример № 4: *Построение эпюра фронтали по наглядному чертежу без указания осей проекций* (рисунок 11).

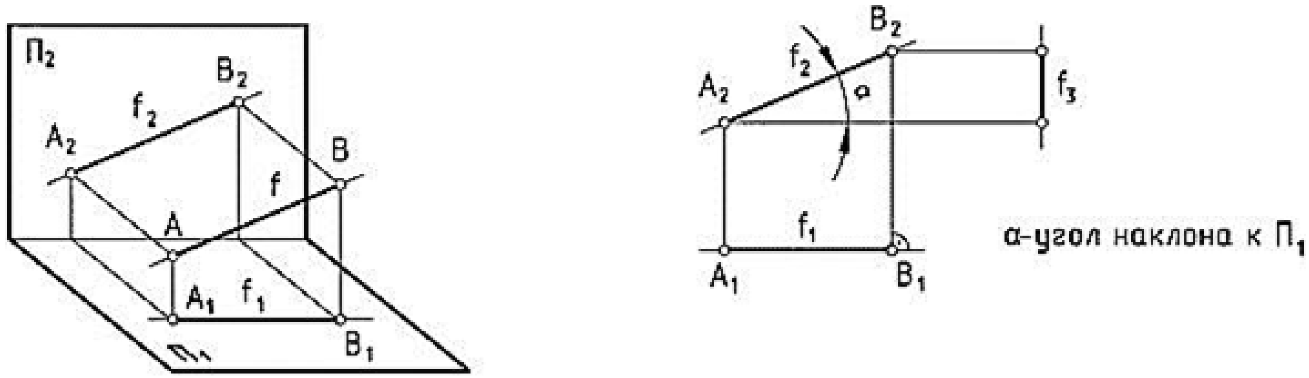


Рисунок 11 - Построение эпюра фронтали F

Пример № 5: *Построение эпюра профильной прямой по наглядному чертежу без указания осей проекций* (рисунок 12).

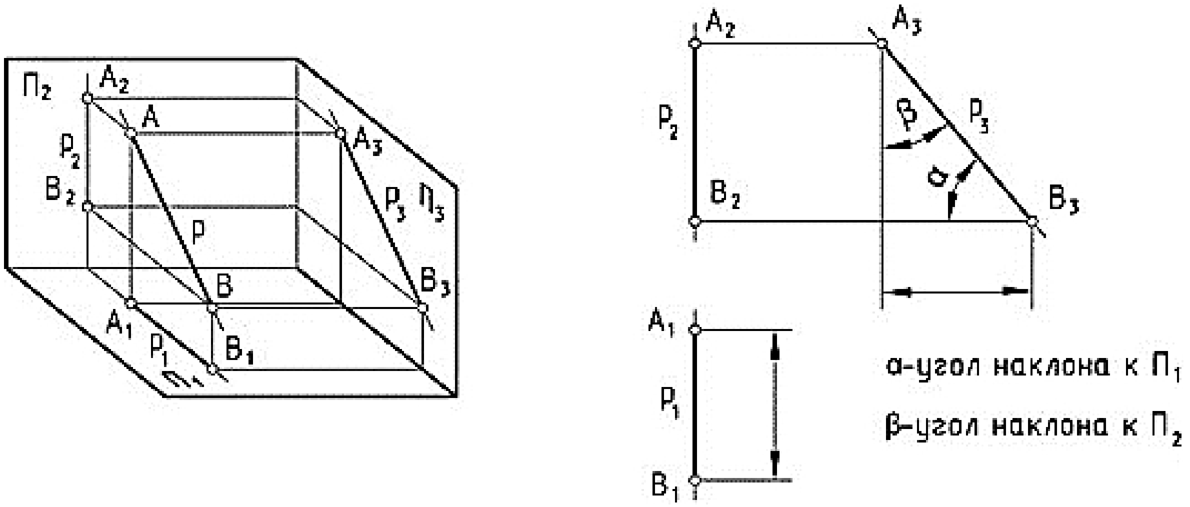


Рисунок 12 - Построение эпюра профильной прямой P

Пример № 6: Построение третьей проекции отрезка прямой общего положения по двум заданным проекциям (рисунок 13,*а*).

Построение:

- на осях Z и Y определяют координаты точки А - A_Z и A_Y (рисунок 13,*б*);

- строят точку схода A_Y для профильной проекции (рисунок 13,*в*);

- проводят перпендикуляры из A_Y и A_Z и обозначают полученную профильную проекцию точки - A_3 (рисунок 13,*г*);

- на осях Z и Y откладывают координаты точки B - B_Z, B_Y (рисунок 13,*д*);

- определяют точку схода B_Y для профильной проекции (рисунок 13,*е*);

- строят перпендикуляры: $B_ZB_3 \perp Z$, $B_YB_3 \perp Y$. Обозначают профильную проекцию точки - B_3 (рисунок 13,*ж*);

- соединяют полученные проекции A_3 и B_3 - это и будет искомая проекция отрезка АВ прямой общего положения на плоскости π_3 (рисунок 13,*з*).

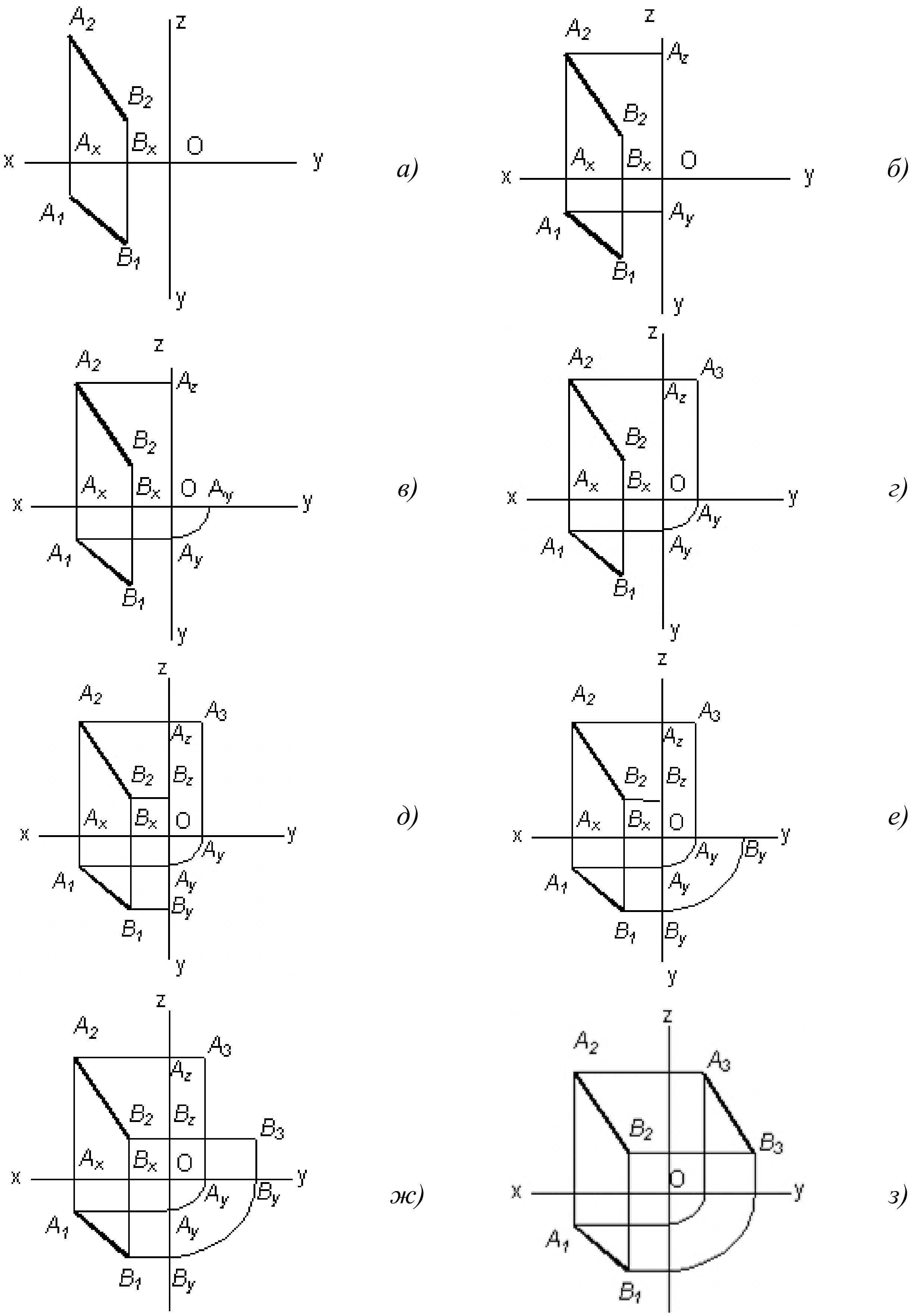


Рисунок 13 - Построение третьей проекции прямой

Задание к выполнению:

Задача 3: Выполнить комплексный чертеж прямой, заданной отрезком AB (Приложение: таблица 1). Определить расположение отрезка прямой в пространстве. Задачу выполнить в масштабе 1:1.

Задача 4: Построить эпюр отрезка EK (Приложение: таблица 1). Определить, какую прямую он задает и как она называется. Задачу выполнить в масштабе 1:1.

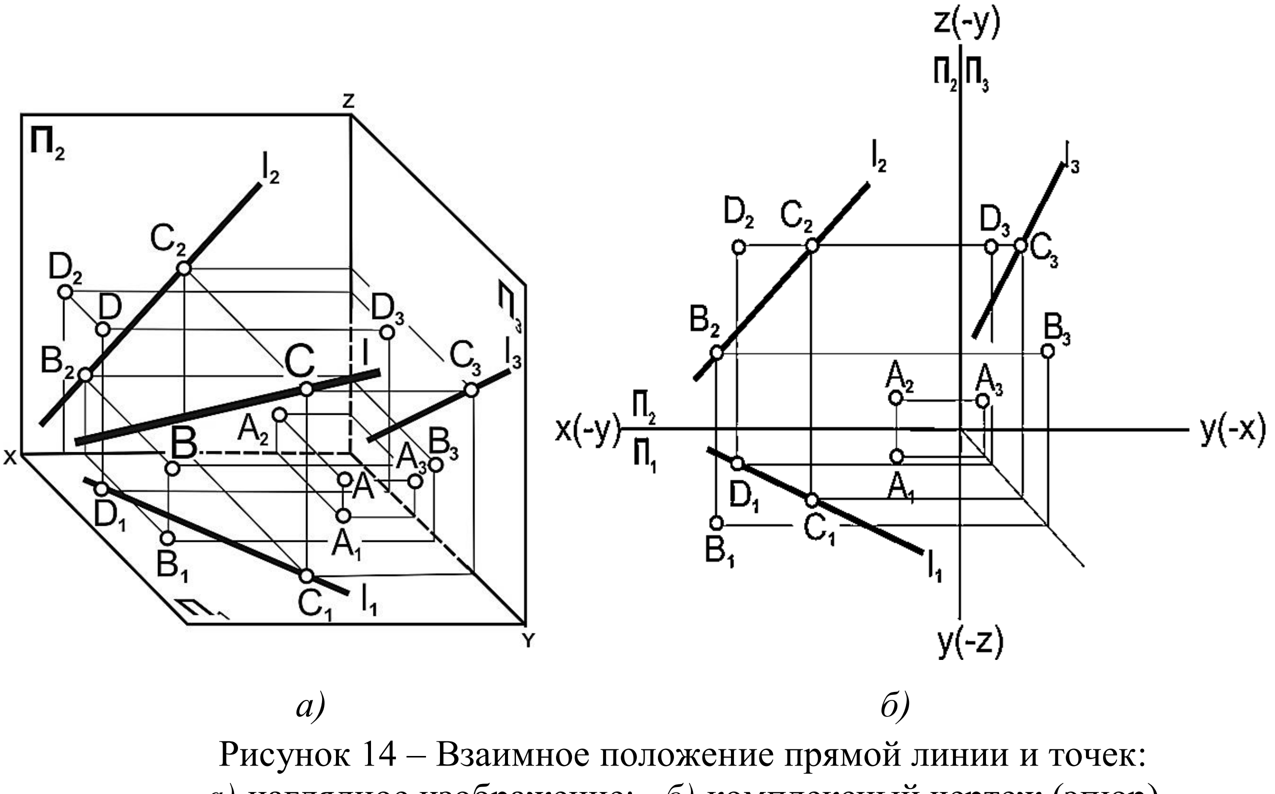
4. Тема «Взаимное положение точки и прямой линии»

Теоретические положения:

1). Если точка принадлежит прямой линии, то ее проекции принадлежат одноименным проекциям этой прямой линии (рисунок 14):

$$C \in l \quad \Rightarrow \quad C_1 \in l_1,\ C_2 \in l_2.$$

2). Если точка не принадлежит прямой линии, то хотя бы одна из ее проекций не принадлежит одноименной проекции прямой. На рисунке 14 точки A, B и D не принадлежат прямой *l*, причем точка D расположена над прямой, точка A – за прямой, а точка B – перед прямой.



а) *б)*

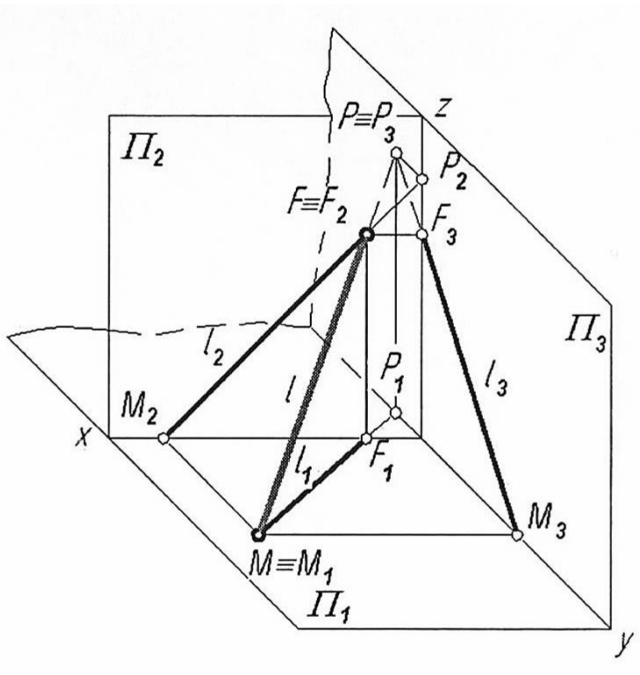
Рисунок 14 – Взаимное положение прямой линии и точек:
а) наглядное изображение; *б)* комплексный чертеж (эпюр)

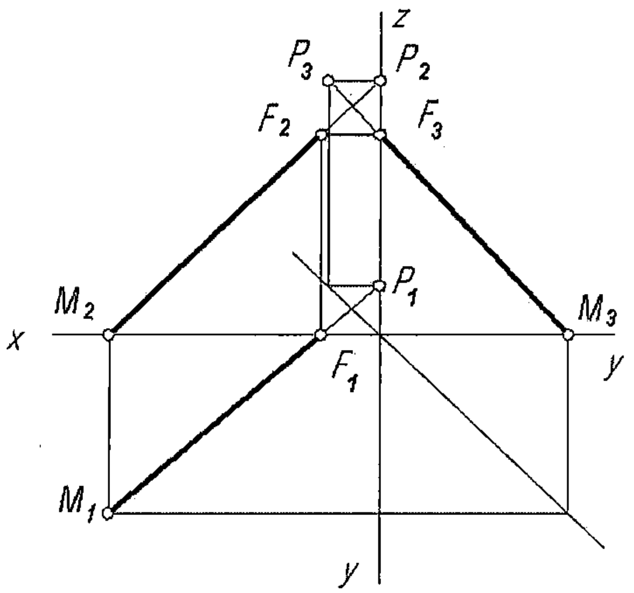
5. Тема «Следы прямой»

Следом прямой называется точка пересечения прямой с плоскостью проекций. Прямая не имеет следа на плоскости проекций в том случае, когда она параллельна этой плоскости.

На рисунке 15,*а* изображена пространственная модель, а на рисунке 15,*б* выполнен эпюр прямой l, которая пересекает три плоскости проекций, и, следовательно, имеет три следа:

- горизонтальный $M = l \cap П_1$;
- фронтальный $F = l \cap П_2$;
- профильный $P = l \cap П_3$.



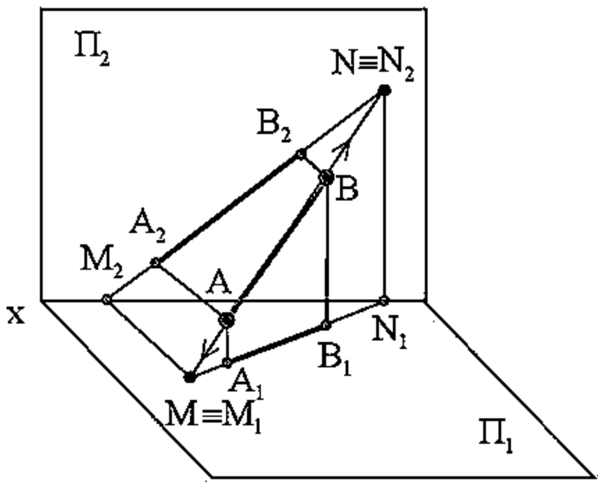


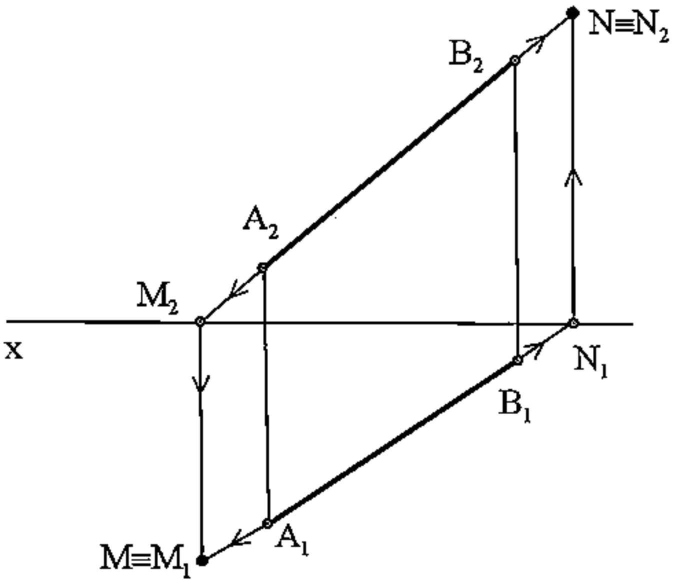
а) *б)*

Рисунок 15 - Следы прямой общего положения: *а)* наглядное изображение; *б)* эпюр

Горизонтальная проекция горизонтального следа M_1 всегда совпадает с самим следом M, фронтальная проекция этого следа M_2 лежит на оси проекций X, а профильная проекция этого следа M_3 лежит на оси проекций Y. Всегда фронтальная проекция фронтального следа F_2 совпадает с самим следом F, горизонтальная проекция F_1 лежит на оси проекций X, профильная проекция следа F_3 лежит на оси проекций Z. Профильная проекция профильного следа P_3 всегда совпадает с точкой P, горизонтальная проекция P_1 лежит на оси проекций Y, а фронтальная проекция этого следа P_2 лежит на оси проекций Z.

Пример № 7: Построение следов отрезка прямой общего положения (рисунок 16).





а) *б)*

Рисунок 16 - Построение следов отрезка прямой общего положения: *а)* наглядное изображение; *б)* эпюр

Для того чтобы построить горизонтальный след М прямой общего положения, надо:

- продолжить фронтальную проекцию B_2A_2 до пересечения с осью проекций X - это фронтальная проекция следа M_2;

- провести через эту точку вертикальную линию связи (перпендикуляр к оси X);

- продолжить горизонтальную проекцию B_1A_1 прямой до пересечения с этой линией связи в точке M_1. Горизонтальная проекция M_1 совпадает со следом М.

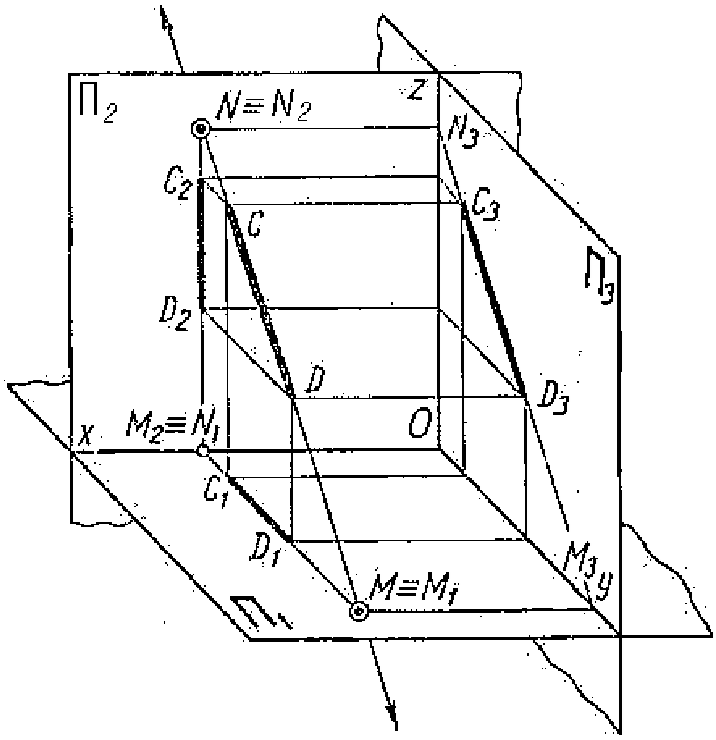
Для того чтобы построить фронтальный след N прямой общего положения, необходимо:

- продолжить горизонтальную проекцию A_1B_1 до пересечения с осью проекций X в точке N_1;

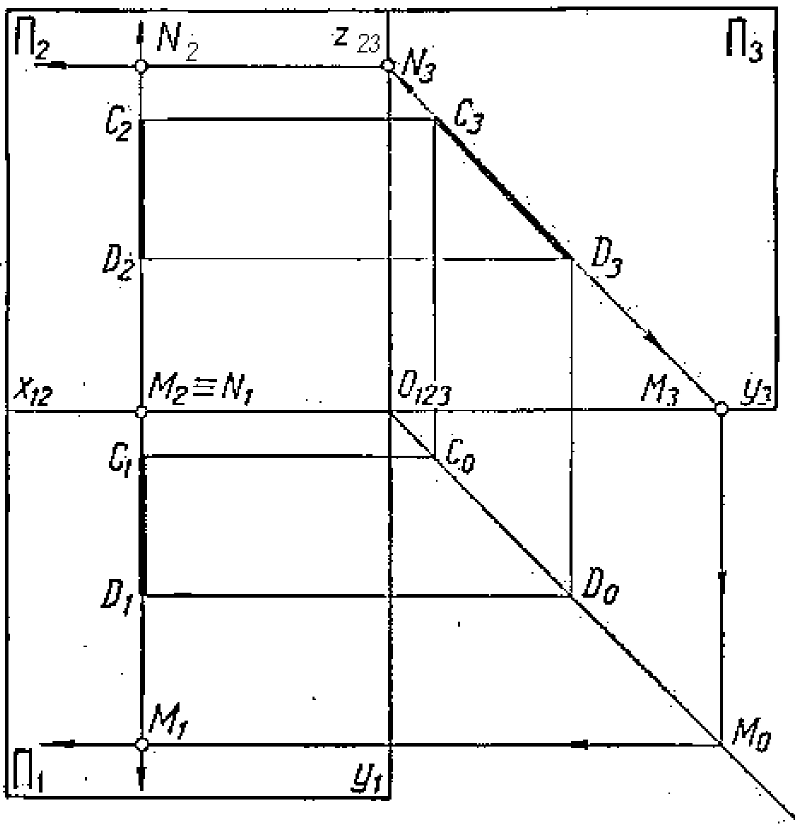
- через эту точку провести вертикальную линию связи;

- фронтальную проекцию A_2B_2 продолжить до пересечения с этой линией связи в точке N_2. N_2 - фронтальная проекция фронтального следа, которая совпадает с самим следом N (на рисунке 15 этот след обозначен буквой F).

Пример № 8: Построение следов отрезка прямой частного положения (рисунок 17).



а)



б)

Рисунок 17 - Построение следов отрезка прямой частного положения: *а)* наглядное изображение; *б)* комплексный чертеж

Отрезок *CD* задает профильную прямую. Определение следов прямой частного положения аналогично построению следов на рисунке 16.

Задание к выполнению:

Задача 5: Построить на эпюре согласно своему варианту следы прямой (Приложение: таблица 1, рисунок 1). Размеры изображения произвольны.

6. Тема «Проецирование плоскости»

Теоретические положения:

1). Плоскость - одно из основных понятий начертательной геометрии. Плоскостью является двумерный геометрический образ, имеющий длину и ширину.

2). Любая плоскость считается бесконечной, не имеющей толщины и непрозрачной.

3). Плоскость – это поверхность, содержащая полностью каждую прямую, соединяющую любые ее точки.

4). Плоскость в пространстве можно задать следующими способами:

- тремя точками, не лежащими на одной прямой (рисунок 18,*а*);
- прямой и точкой, не принадлежащей этой прямой (рисунок 18,*б*);
- двумя параллельными прямыми (рисунок 18,*в*);
- двумя пересекающимися прямыми (рисунок 18,*г*);
- какой-либо плоской фигурой - треугольником, четырехугольником, окружностью и др. (рисунок 18,*д*);
- следом плоскости (рисунок 18,*е*).

5). Плоскости в пространстве могут занимать или общее или частное положения.

На рисунке 19 показана классификация плоскостей в пространстве.

Плоскость, не перпендикулярную и не параллельную ни к одной из плоскостей проекций, называют плоскостью общего положения. На рисунке 20 плоскость общего положения, заданная треугольником АВС, представлена наглядным и комплексным изображениями.

На рисунке 21 плоскость общего положения α, задана следами. *Следом плоскости называется прямая линия, по которой плоскость пересекается с плоскостью проекций.*

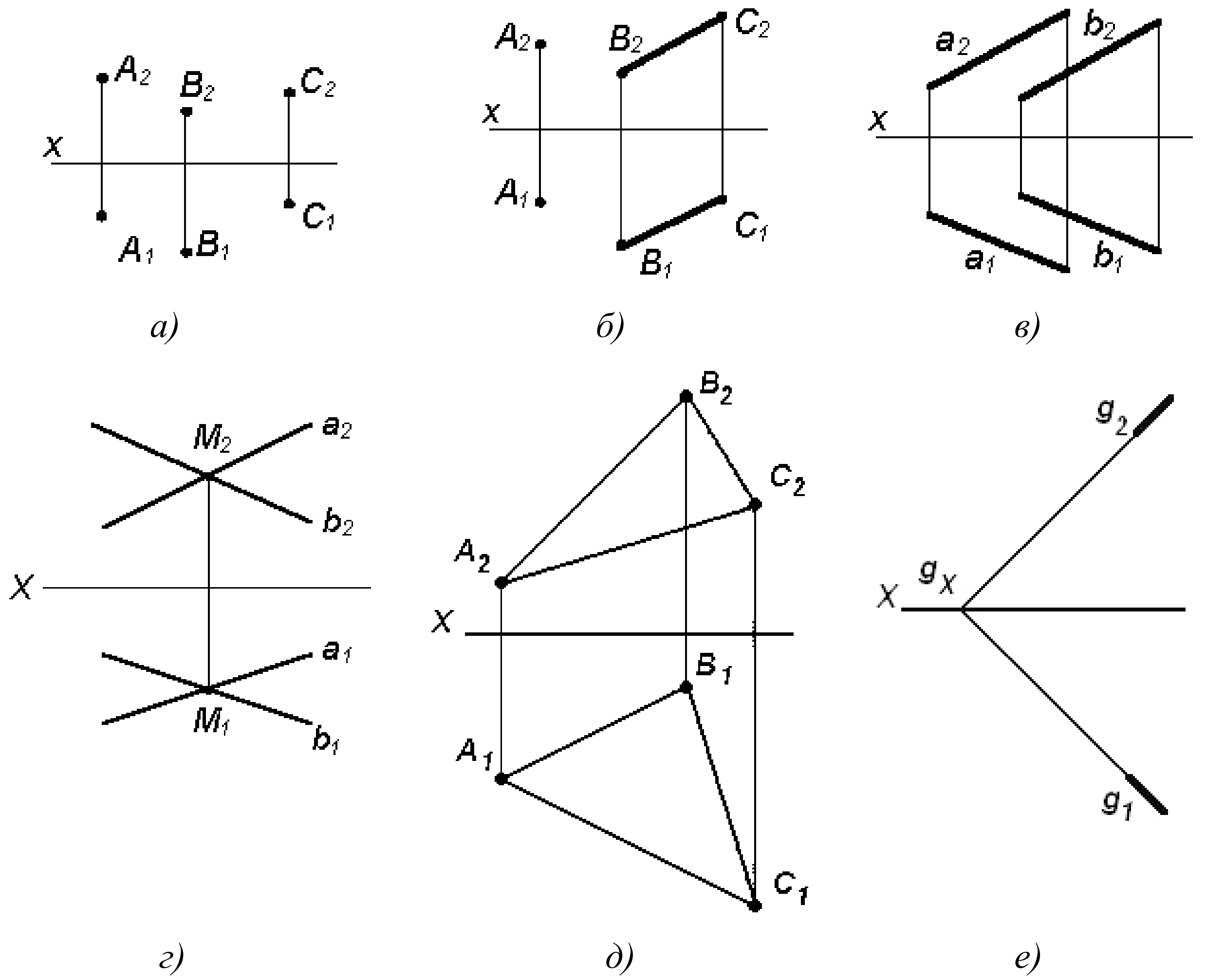


Рисунок 18 - Задание плоскостей

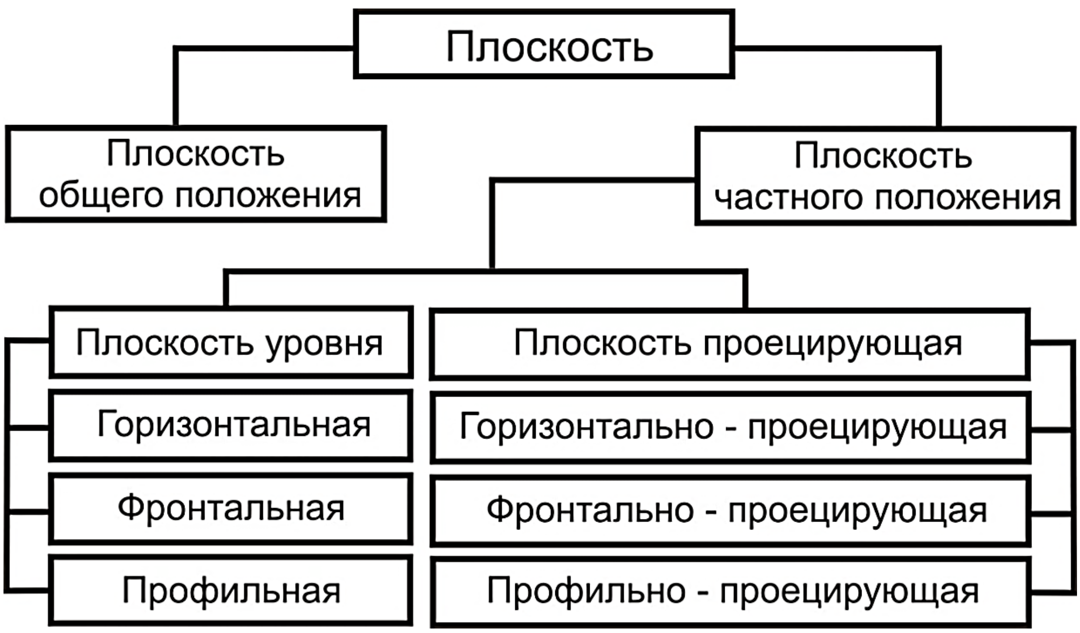
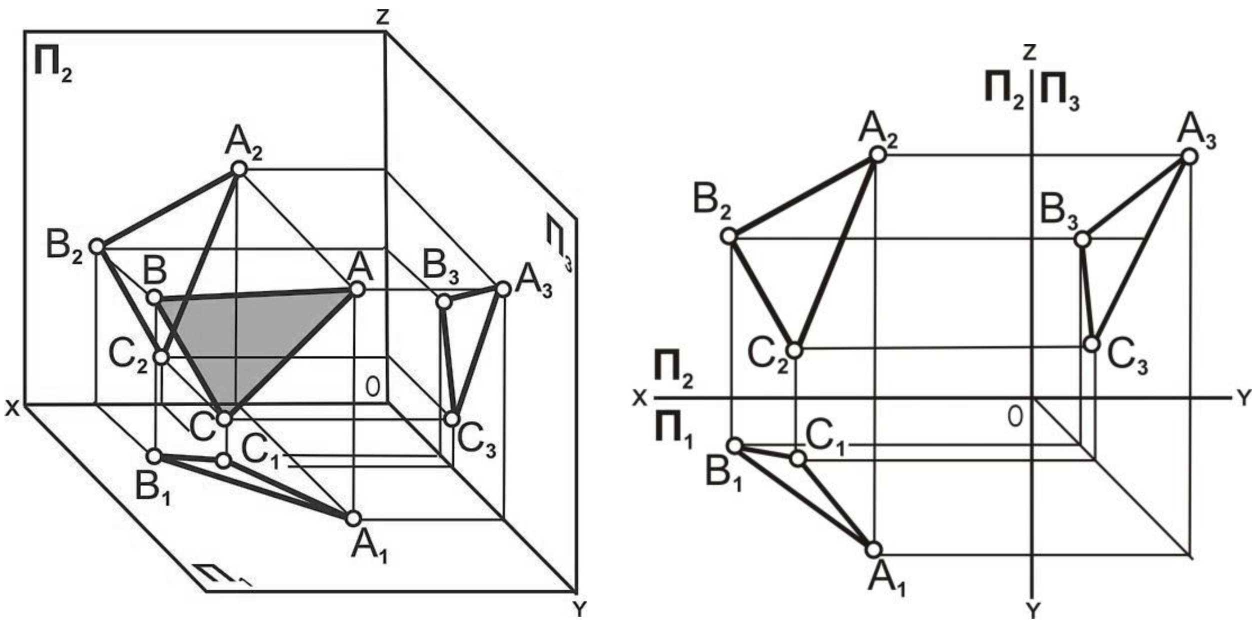


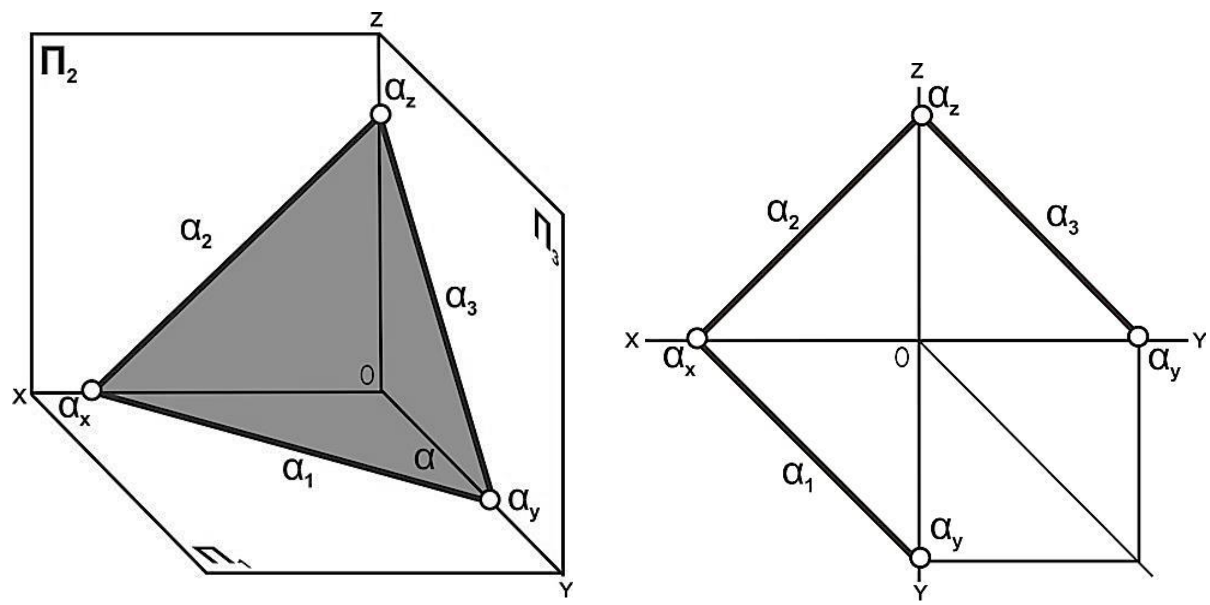
Рисунок 19 - Классификация плоскостей



а) *б)*

Рисунок 20 – Чертежи плоскости общего положения:
а) наглядное изображение; *б)* комплексный чертеж (эпюр)

В зависимости от того, какую плоскость проекций пересекает плоскость α, различают горизонтальный след α_1, фронтальный след α_2 и профильный след α_3 плоскости. Следы плоскости общего положения пересекаются попарно на осях проекций в точках α_X, α_Y, α_Z. Эти точки называют *точками схода следов*.



а) *б)*

Рисунок 21 – Плоскость общего положения, заданная следами:
а) наглядное изображение; *б)* комплексный чертеж (эпюр)

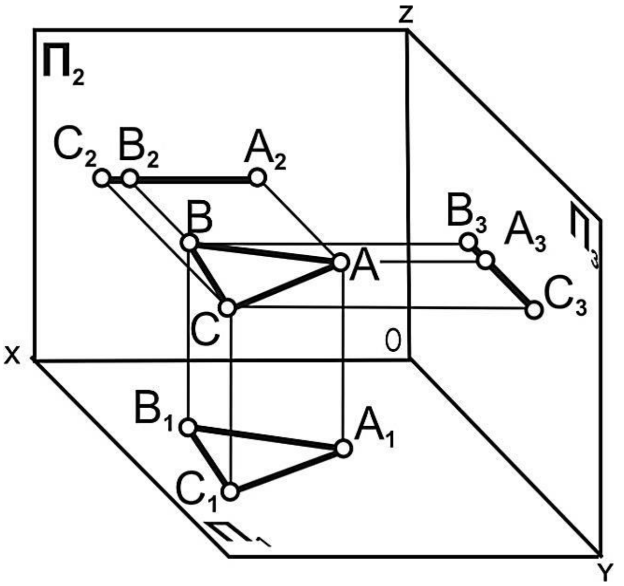
Плоскости частного положения в пространстве расположены или параллельно или перпендикулярно плоскостям проекций. *Плоскости уровня - это плоскости, параллельные одной из плоскостей проекций*, таких плоскостей три.

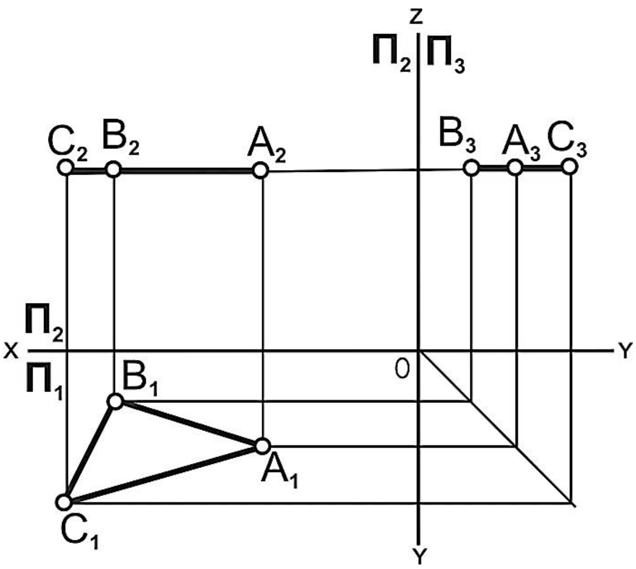
Горизонтальной плоскостью называется плоскость, параллельная горизонтальной плоскости проекций $П_1$ - $\alpha(\Delta ABC) \parallel П_1$ (рисунок 22).

Свойства проекций горизонтальной плоскости:

- горизонтальная проекция, содержащая геометрический объект, принадлежащий этой плоскости, проецируется на плоскость $П_1$ без искажения;

- фронтальная и профильная проекции проецируются в прямые – следы плоскости $|A_2B_2C_2| \parallel$ оси X и $|B_3A_3C_3| \parallel$ оси Y.





а) *б)*

Рисунок 22 – Горизонтальная плоскость:

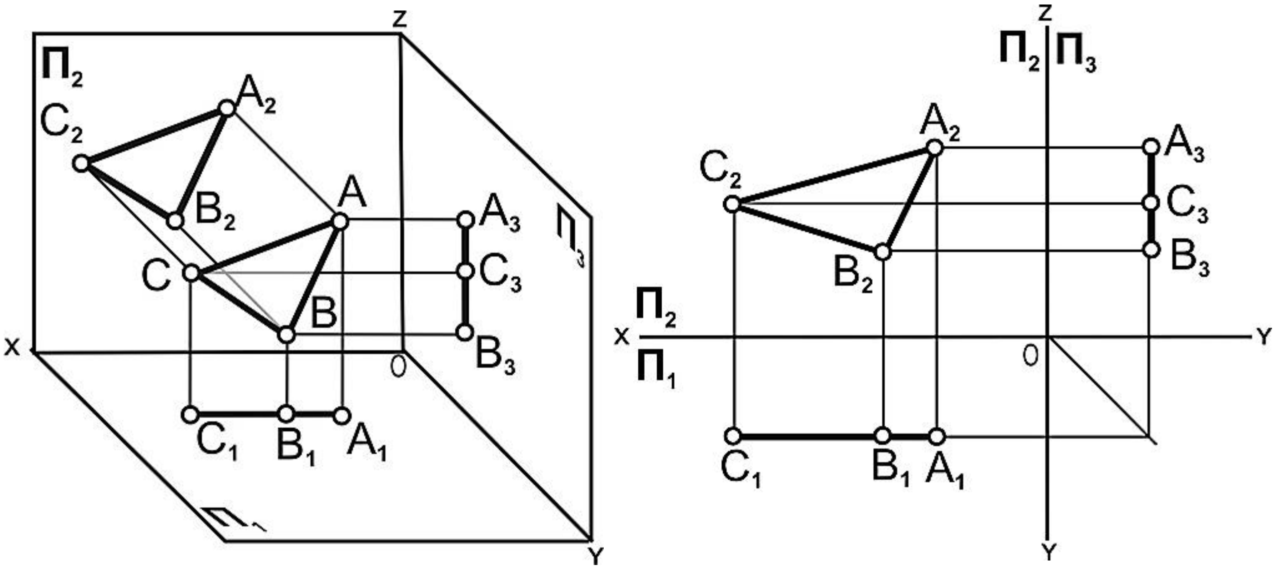
а) наглядное изображение; *б)* комплексный чертеж (эпюр)

Фронтальной плоскостью называется плоскость, параллельная фронтальной плоскости проекций $П_2$ - $\alpha(\Delta ABC) \parallel П_2$ (рисунок 23).

Свойства проекций фронтальной плоскости:

- фронтальная проекция, содержащая геометрический объект, принадлежащий этой плоскости, проецируется на плоскость $П_2$ без искажения.

- горизонтальная и профильная проекции проецируются в прямые линии – следы плоскости $|C_1B_1A_1| \parallel$ оси X и $|A_3C_3B_3| \parallel$ оси Z.



а) *б)*

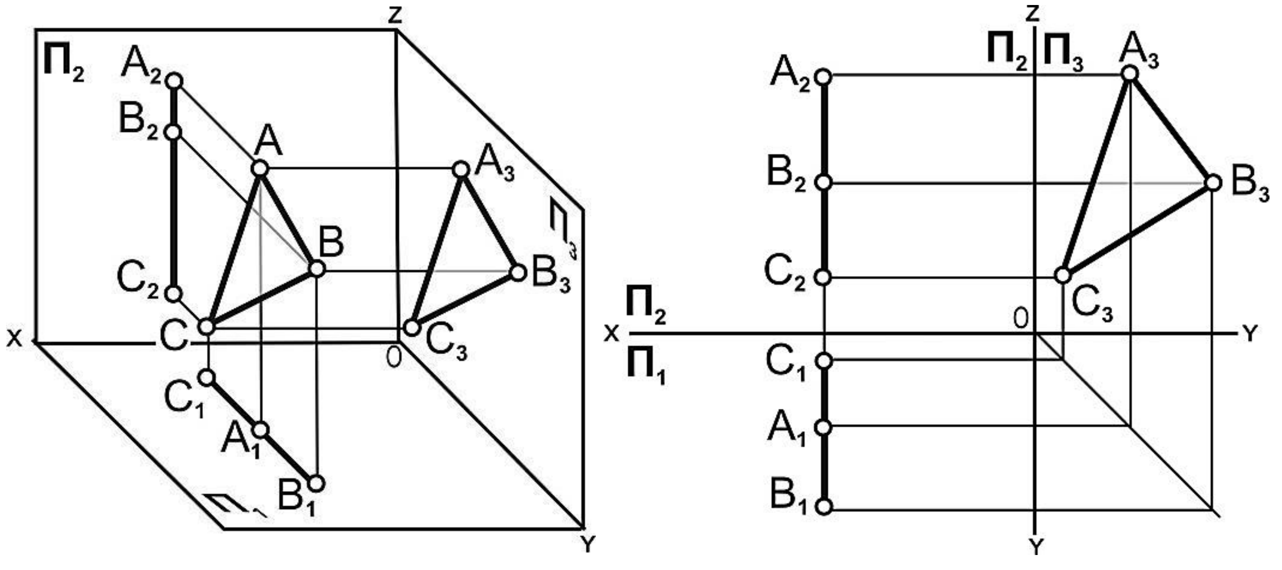
Рисунок 23 – Фронтальная плоскость:
а) наглядное изображение; *б)* комплексный чертеж (эпюр)

Профильной плоскостью называется плоскость, параллельная профильной плоскости проекций $П_3$ - $\alpha(\Delta ABC) \parallel П_3$ (рисунок 24).

Свойства проекций профильной плоскости:

- профильная проекция, содержащая геометрические объекты, принадлежащие этой плоскости, проецируется на плоскость $П_3$ без искажения.

- горизонтальная и фронтальная проекции проецируются в прямые – следы плоскости $|C_1A_1B_1| \parallel$ оси Y и $|A_2B_2C_2| \parallel$ оси Z.



а) *б)*

Рисунок 24 – Профильная плоскость:
а) наглядное изображение; *б)* комплексный чертеж (эпюр)

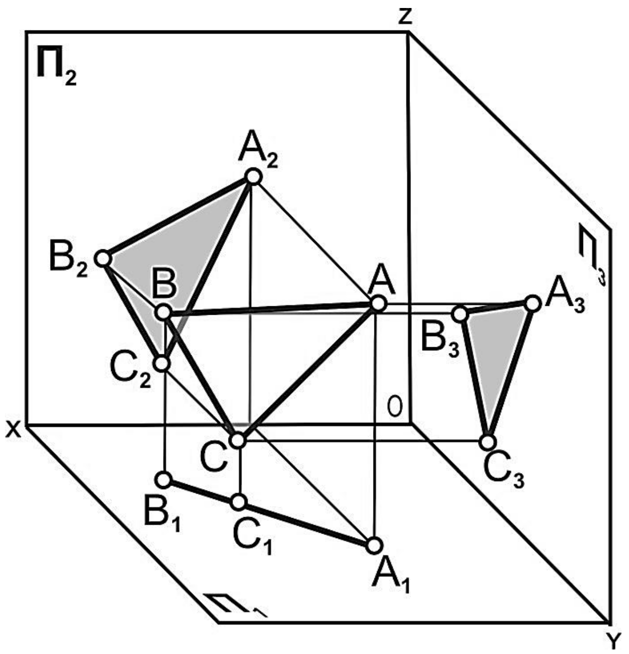
Проецирующие плоскости - это плоскости, перпендикулярные одной из плоскостей проекций, таких плоскостей три. Проецирующая плоскость и все лежащие в ней элементы проецируются на перпендикулярную ей плоскость проекций в прямую линию, совпадающую со следом этой плоскости. Подобная плоскость может быть задана всего одной прямой – своим следом.

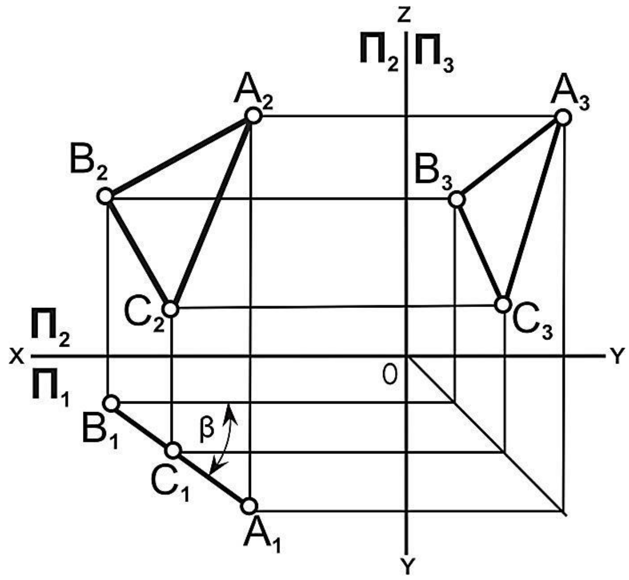
Горизонтально-проецирующей плоскостью называется плоскость, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций $П_1$ - $\alpha(\Delta ABC) \perp П_1$ (рисунок 25).

Свойства проекций горизонтально-проецирующей плоскости:

- горизонтальной проекцией плоскости α является прямая линия, совпадающая со следом $|A_1B_1C_1|$;

- угол β – натуральная величина угла наклона горизонтально-проецирующей плоскости к плоскости проекций $П_2$.





а) *б)*

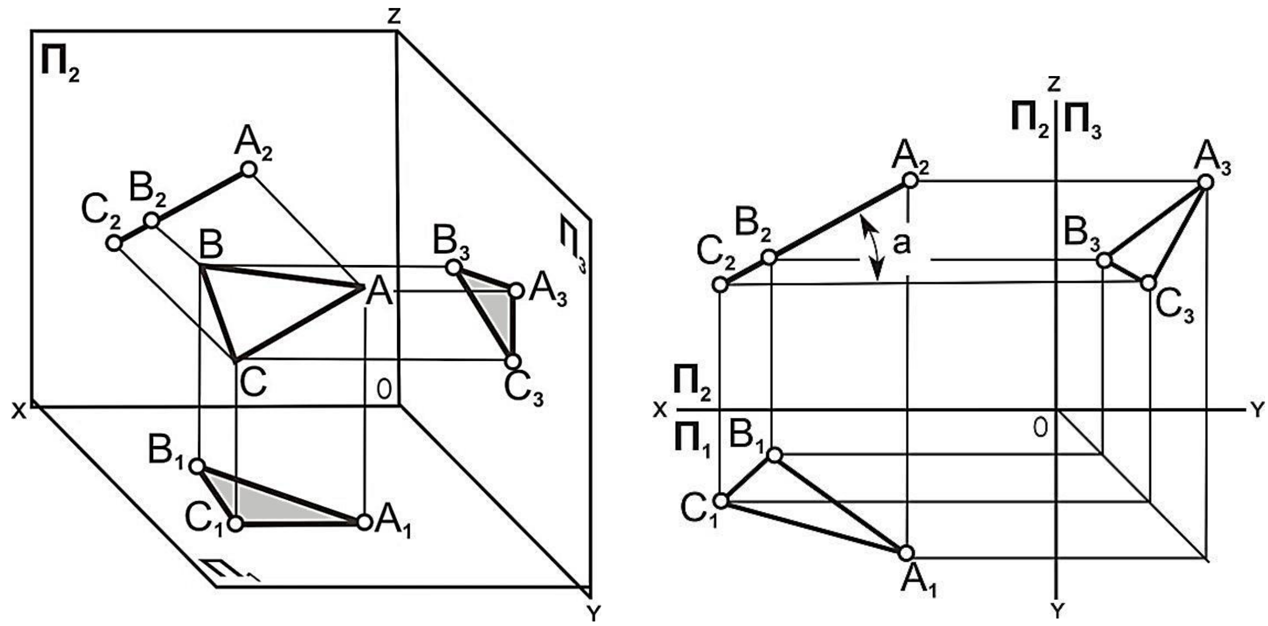
Рисунок 25 – Горизонтально-проецирующая плоскость:
а) наглядное изображение; *б)* комплексный чертеж (эпюр)

Фронтально-проецирующей плоскостью называется плоскость, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций $П_2$ - $\alpha(\Delta ABC) \perp П_2$ (рисунок 26).

Свойства проекций фронтально-проецирующей плоскости:

- фронтальной проекцией плоскости α является прямая линия, совпадающая со следом $|A_2B_2C_2|$;

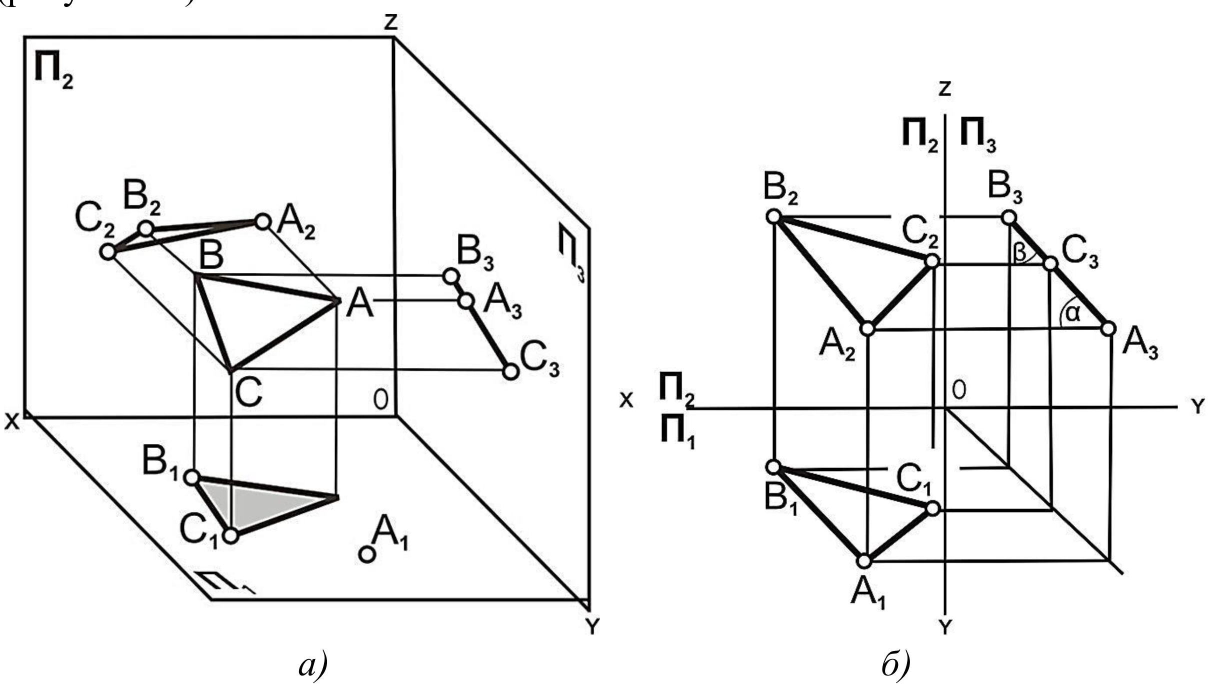
- угол а – натуральная величина угла наклона горизонтально-проецирующей плоскости к плоскости проекций Π_1.



а) *б)*

Рисунок 26 – Фронтально-проецирующая плоскость:
а) наглядное изображение; *б)* комплексный чертеж (эпюр)

Профильно-проецирующей плоскостью называется плоскость, перпендикулярная профильной плоскости проекций Π_3 - $\alpha(\Delta ABC) \perp \Pi_3$ (рисунок 27).



а) *б)*

Рисунок 27 – Профильно-проецирующая плоскость:
а) наглядное изображение; *б)* комплексный чертеж (эпюр)

Свойства проекций профильно-проецирующей плоскости:

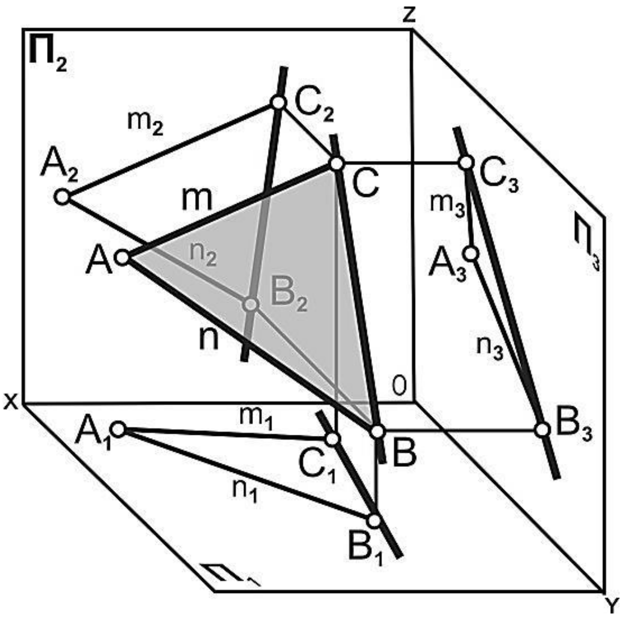
- профильной проекцией плоскости α является прямая линия, совпадающая со следом $|A_3B_3C_3|$;
- угол α – натуральная величина угла наклона горизонтально-проецирующей плоскости к плоскости проекций Π_1;
- угол β – натуральная величина угла наклона горизонтально-проецирующей плоскости к плоскости проекций Π_2.

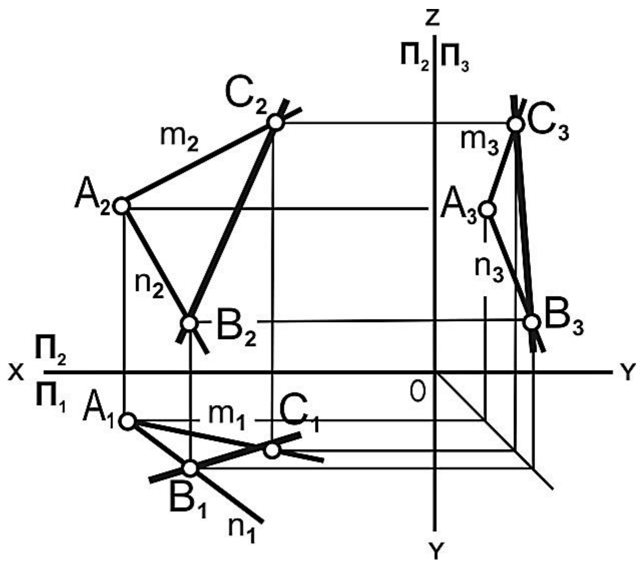
7. Тема «Взаимное положение прямой линии и плоскости»

По отношению к плоскости прямая линия может занимать следующие положения: принадлежать ей; пересекать ее; быть параллельной ей.

Прямая линия принадлежит плоскости, если две ее точки принадлежат этой плоскости (рисунок 28):

$$B \in n,\ C \in m \ \Rightarrow \ |BC| \in \Sigma(m \cap n)\ .$$



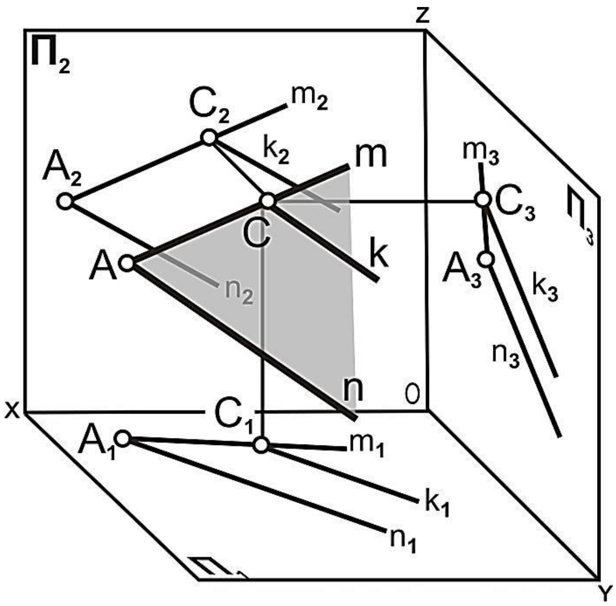


а) *б)*

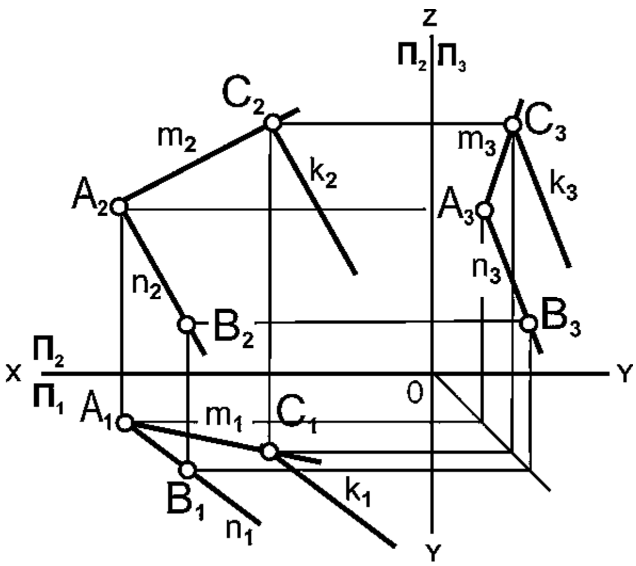
Рисунок 28 – Принадлежность прямой линии плоскости:
а) наглядное изображение; *б)* комплексный чертеж (эпюр)

Прямая принадлежит плоскости, если имеет с плоскостью одну общую точку и параллельна какой-либо прямой, расположенной в этой плоскости. Пусть плоскость α задана $m \cap n$ (рисунок 29):

$$m \cap k = C \quad \Rightarrow \quad C \in k,\ C \in m,$$
$$k \| n \quad \Rightarrow \quad k \in \alpha(m \cap n).$$



а)



б)

Рисунок 29 – Принадлежность прямой линии плоскости:
а) наглядное изображение; *б)* комплексный чертеж (эпюр)

Среди прямых линий, принадлежащих плоскости, особое значение имеют прямые, параллельные плоскостям проекций. Ими являются главные линии плоскости: горизонталь, фронталь, профильная прямая, линии наибольшого наклона. При решении задач часто используют горизонтали и фронтали плоскостей.

Горизонталь H - прямая, лежащая в данной плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций $\pi_1(\Pi_1)$:

всегда $h_2 \|$ оси X.

Фронталь F - прямая, лежащая в данной плоскости и параллельная фронтальной плоскости проекций $\pi_2(\Pi_2)$:

всегда $f_2 \|$ оси X.

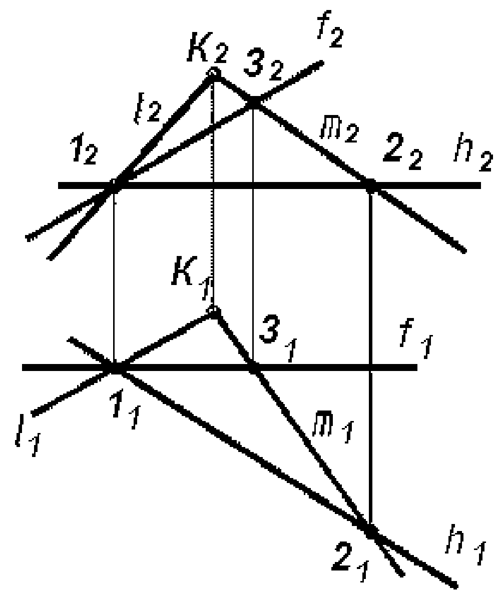


Рисунок 30 - Главные линии плоскости

На рисунке 30 показаны проекции горизонтали и фронтали плоскости Σ, заданной пересекающимися прямыми l и m:

$$H \in \Sigma(l \cap m),\ \ H \parallel \pi_1;$$
$$F \in \Sigma(l \cap m),\ \ F \parallel \pi_2.$$

Пример № 9: Построение горизонтали плоскости, заданной треугольником ABC (рисунок 31).

Построение:

- строят фронтальную проекцию горизонтали h_2: $h_2 \parallel |OX|$;
- отмечают точки 1_2 и 2_2, получают $[B_2C_2] \cap h_2 = 1_2$, $[A_2C_2] \cap h_2 = 2_2$;
- строят горизонтальные проекции точек 1 и 2 - 1_1 и 2_1: $1_1 \in [B_1C_1]$, $2_1 \in [A_1C_1]$;
- соединяют точки 1_1 и 2_1, получают горизонтальную проекцию h_1 горизонтали H - $[1_12_1]$;
- графическим построением находят профильную проекцию h_3 горизонтали H - $[1_32_3]$.

Горизонталь H плоскости $\alpha(\Delta ABC)$ построена.

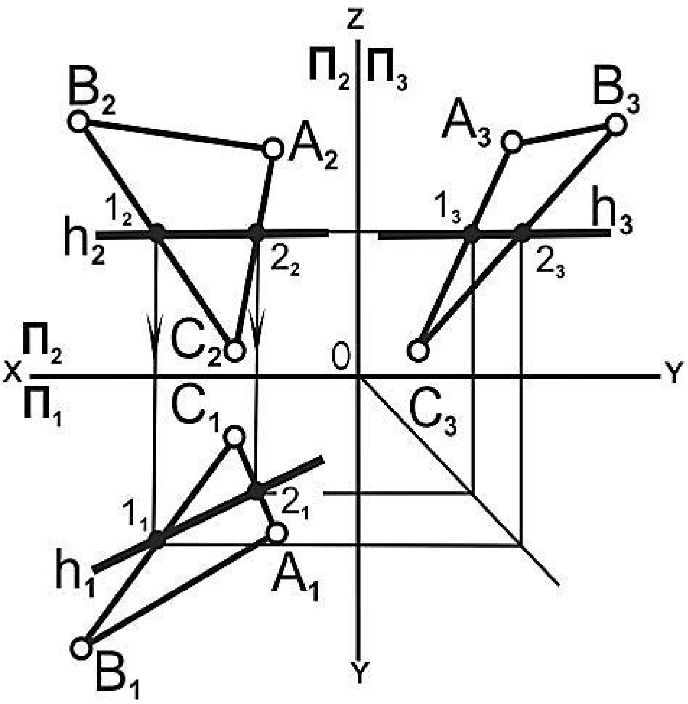


Рисунок 31 - Горизонталь плоскости $\alpha(\Delta ABC)$

Пример № 10: Построение фронтали плоскости, заданной треугольником ABC (рисунок 32).

Построение:

- строят горизонтальную проекцию фронтали f_1: $f_1 \parallel |OX|$;

- отмечают точки 1_1 и 2_1, получают $[B_1C_1] \cap f_1 = 1_1$, $[A_1C_1] \cap f_1 = 2_1$.

- определяют фронтальные проекции точек 1 и 2: $1_2 \in [B_2C_2]$, $2_2 \in [A_2C_2]$;

- соединяют точки 1_2 с 2_2, получают фронтальную проекцию фронтали $F - f_2$;

- графическим построением находят профильную проекцию f_3 фронтали $F - [1_3 2_3]$.

Фронталь F плоскости $\alpha(\Delta ABC)$ построена.

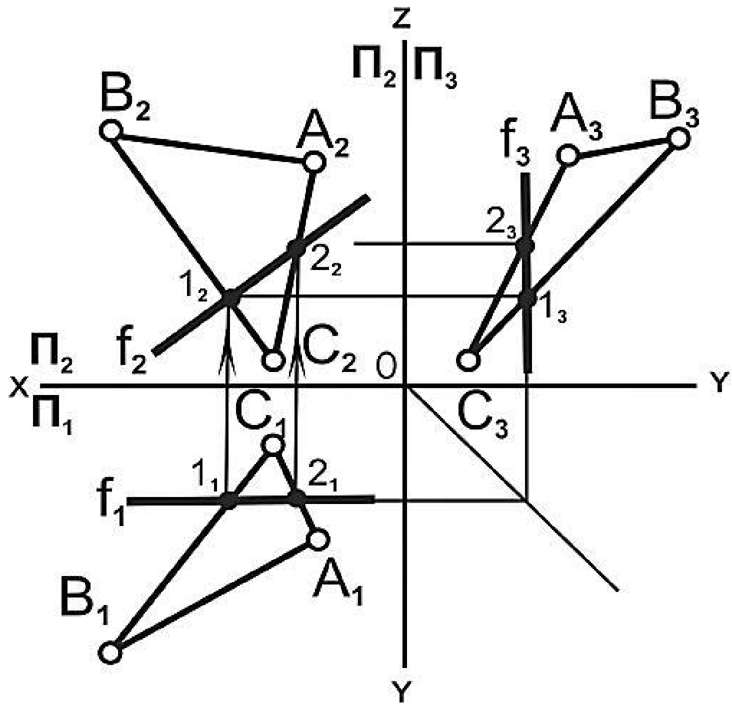


Рисунок 32 - Фронталь плоскости $\alpha(\Delta ABC)$

8. Тема «Пересечение прямой линии и плоскости»

Построение точки пересечения прямой линии с плоскостью - одна из основных задач начертательной геометрии.

Пример № 11: Построение точки пересечения прямой общего положения с проецирующей плоскостью P (рисунок 33).

Построение:

- опускают перпендикуляр линии связи из точки M_2 до пересечения с a_1, получают точку M_1, M_1 и M_2 – проекции точки пересечения M;

- видимость прямой а определяют так: часть прямой, находящаяся выше фронтально-проецирующей плоскости Р (P_2), будет видимой на горизонтальной плоскости проекций π_1 до точки М; вторая часть прямой, находящаяся под плоскостью Р не будет видимой на горизонтальной плоскости проекций π_1, и от проекции точки пересечения M_1 ее изображают штриховой линией.

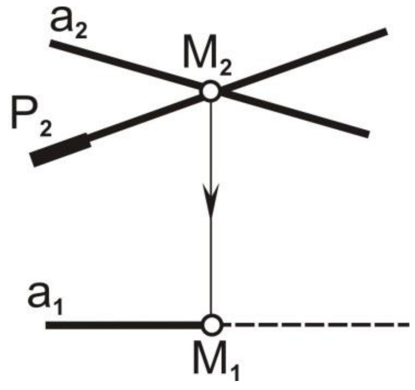


Рисунок 33 - Построение точки пересечения прямой с плоскостью

Пример № 12: Построение точки пересечения проецирующей прямой m с плоскостью общего положения Р (рисунок 34).

Построение:

- через горизонтальную проекцию горизонтально-проецирующей прямой m, а именно точку m_1 проводят горизонтальную проекцию фронтали f_1 плоскости Р(ΔАВС);

- определяют точки 1 и 2, строят фронтальную проекцию фронтали f_2;

- проекция E_1 – горизонтальная проекция искомой точки пересечения прямой m с плоскостью Р(ΔАВС): $m_1 = E_1$, $E_1 \in P(\Delta ABC)$;

- $f_2 \cap m_2 = E_2$, $E_2 \in f_2$, проекция E_2 – фронтальная проекция искомой точки пересечения прямой m с плоскостью Р(ΔАВС).

- видимость прямой m относительно точки Е определяют по конкурирующим точкам.

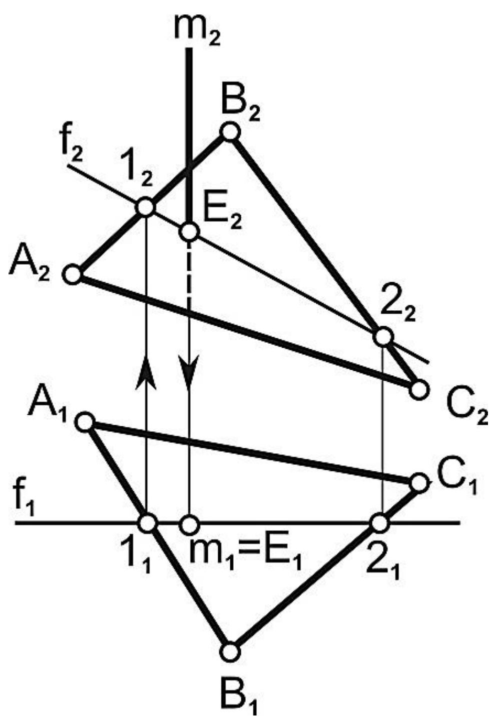
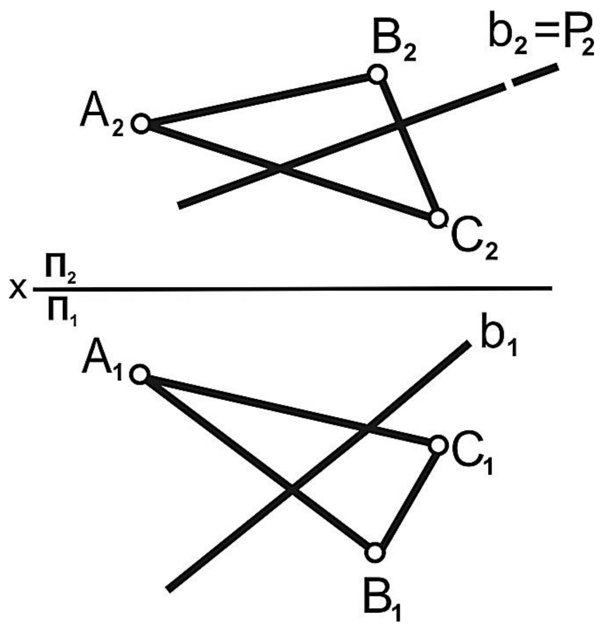
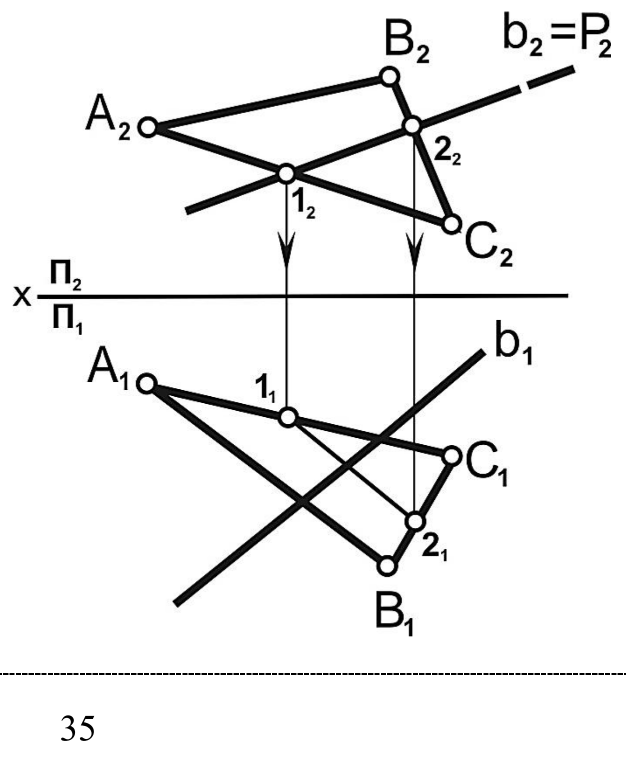


Рисунок 34 - Построение точки пересечения прямой с плоскостью

В таблице 5 представлен алгоритм построения точки пересечения прямой общего положения b с плоскостью общего положения Σ(ΔABC). Для решения подобных задач применяют метод вспомогательных секущих плоскостей-посредников, преимущественно проецирующих.

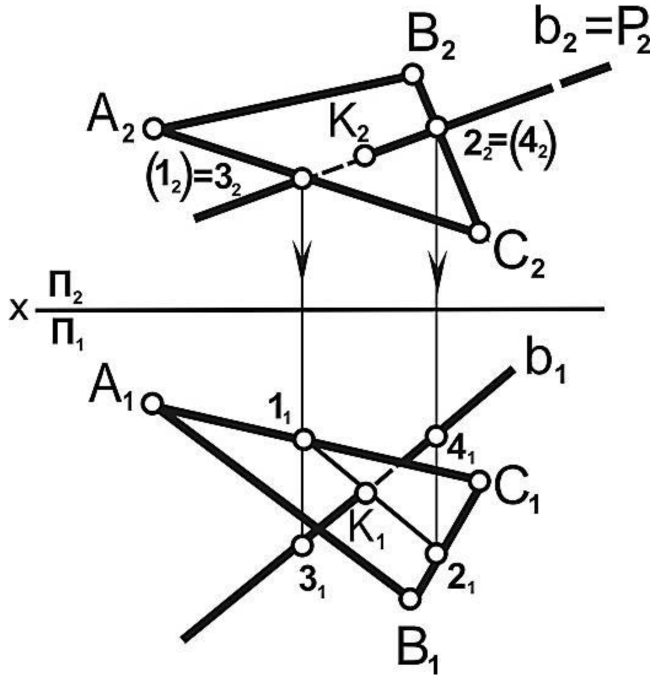
Таблица 5

Алгоритм построения точки пересечения прямой и плоскости

Словесная форма	Графическая форма
I	*II*
1). Заключают прямую b во вспомогательную, например, фронтально-проецирующую плоскость - посредник Р: $b_2 \equiv P_2$.	
2). Строят линию пересечения вспомогательной плоскости с заданной плоскостью: $P_2 \cap [A_2C_2] = 1_2$; $P_2 \cap [B_2C_2] = 2_2$; $1_1 \in [A_1C_1]$, $2_1 \in [B_1C_1] \Rightarrow$ $\Sigma(\Delta ABC) \in P = [12]$.	

Продолжение таблицы 5

<table>
<tr><th>I</th><th>II</th></tr>
<tr><td>3). Находят точку пересечения полученной линии пересечения 12 с заданной прямой b:
$[1_1 2_1] \cap b_1 = [K_1]$;
$K_2 \in [1_2 2_2] \Rightarrow$
$b \cap \Sigma(\Delta ABC) = K$.

4). Определяют видимость заданной прямой по методу конкурирующих точек.</td><td>
</td></tr>
</table>

Частный случай пересекающихся прямых и плоскости - это перпендикулярные прямые и плоскости. Согласно элементарной геометрии, *прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости*.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости можно сформулировать так: прямая перпендикулярна плоскости, если ее горизонтальная проекция перпендикулярна к горизонтальной проекции горизонтали плоскости, а фронтальная проекция прямой перпендикулярна к фронтальной проекции фронтали плоскости. В качестве двух пересекающихся прямых при решении задач с взаимной перпендикулярностью прямой и плоскости обычно выбирают линии уровня – фронталь и горизонталь заданной плоскости. В этом случае основанием решения будут являться свойства проецирования прямого угла: *если хотя бы одна из сторон прямого угла параллельна плоскости проекций, а другая не перпендикулярна ей, то на эту плоскость прямой угол проецируется без искажения*.

Пример № 13: Построение перпендикуляра к плоскости Q(ΔABC) (рисунок 35).

Построение:

- строят фронталь и горизонталь в заданной плоскости $Q(\Delta ABC)$: $h(h_1,h_2)$, $f(f_1,f_2)$;

- определяют проекции их точки пересечения К ($H \cap F = K$): K_1 и K_2;

- в проекции точки K_1 восстанавливают перпендикуляр к горизонтальной проекции горизонтали h_1;

- в проекции точки K_2 проводят перпендикуляр к фронтальной проекции фронтали f_2;

- на перпендикуляре берут точку D, проставляют ее проекции;

- в результате: $K \in Q(\Delta ABC)$, $[D_1K_1] \perp \Delta A_1B_1C_1$, $[D_2K_2] \perp \Delta A_2B_2C_2$ $\Rightarrow$ $[DK] \perp Q(\Delta ABC)$.

Перпендикуляр к плоскости построен.

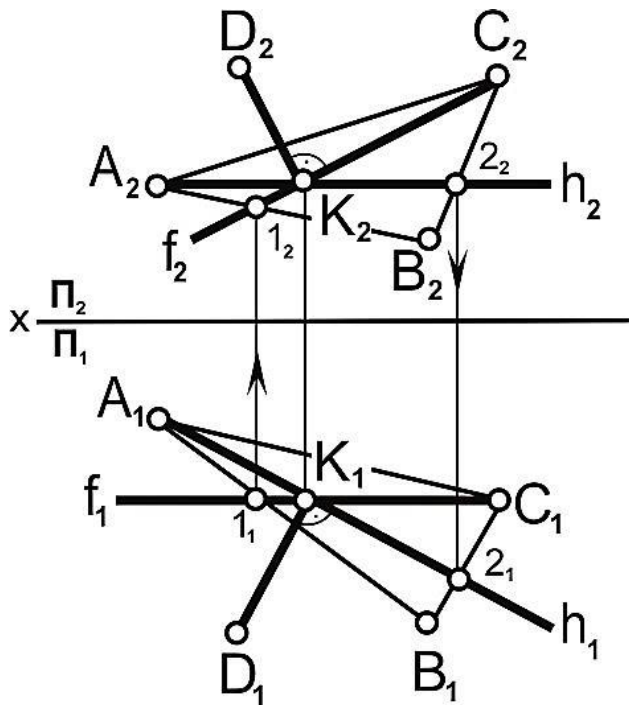


Рисунок 35 - Построение перпендикуляра к плоскости

Задание к выполнению:

Задача 6: Построить согласно своему варианту перпендикуляр к плоскости (Приложение: таблица 2). Для этого начертить на эпюре горизонтальную и фронтальную проекции треугольника; провести проекции горизонтали H и фронтали F треугольника, и в точке их пересечения восстановить перпендикуляр. Задачу выполнить в масштабе 1:1.

9. Тема «Способ замены плоскостей»

Теоретические положения:

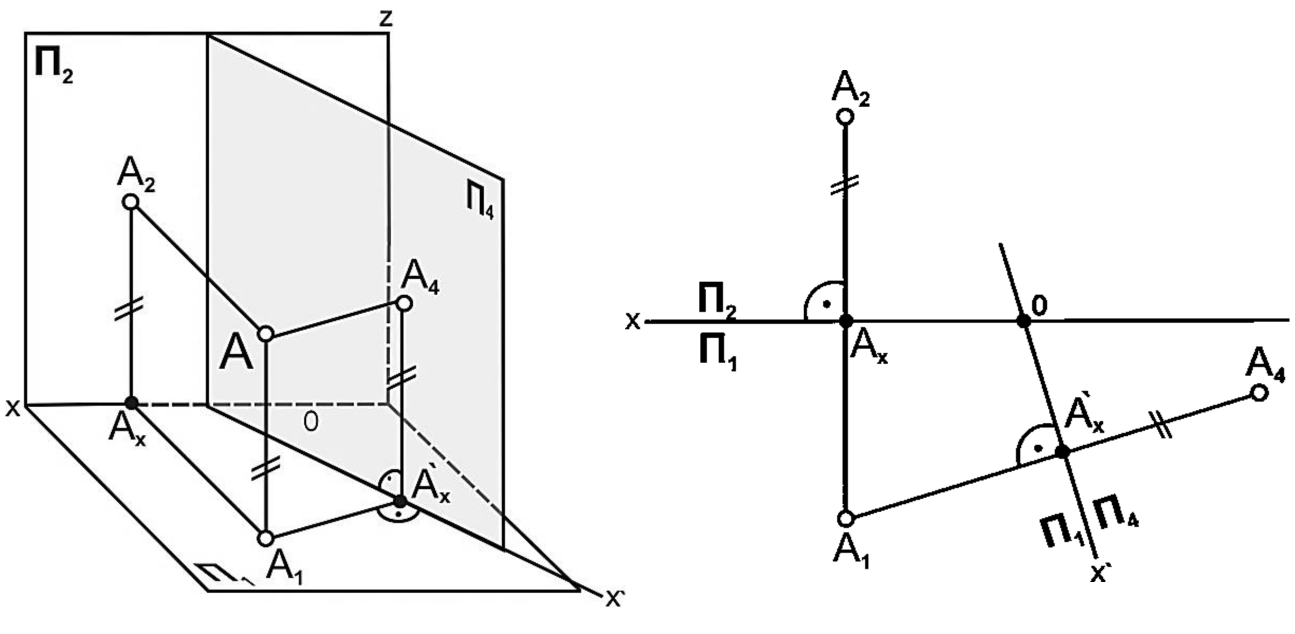
1). Сущность этого способа состоит в том, что при неизменном положении в пространстве заданного оригинала вводится новая плоскость проекций, которую располагают так, чтобы оригинал занимал к ней частное положение. Обязательным условием является взаимная перпендикулярность введенной и одной из плоскостей проекций.

2). Поскольку проецирование ортогональное, то направление проецирования на новую плоскость проекций осуществляется параллельно одной плоскости проекций, сохранившейся от предыдущей системы. Расстояние от оригинала до вводимой плоскости проекций может быть произвольным.

На рисунке 36 введена новая плоскость $П_4$ перпендикулярно плоскости $П_1$, полученная проекция – A_4. Так как положение точки в пространстве определяется двумя ее проекциями, например A_1 и A_2, то из рисунка видно, что и другая пара проекций – A_1 и A_4 также определяет положение точки в пространстве. Системы плоскостей $П_1П_2$ и $П_1П_4$ равноправны, обе плоскости $П_2$ и $П_4$ перпендикулярны $П_1$. Свойства, установленные ранее для системы плоскостей $П_1П_2$, распространяются и на новую систему $П_1П_4$.

Неизменными остаются свойства:

- положение горизонтальной проекции A_1 точки А;
- высота точки А: $|A_1A|=|A_XA_2|=|A`_XA_4|=Z_A$.



а) *б)*

Рисунок 36 - Способ замены плоскостей:

а) наглядное изображение; *б)* комплексный чертеж (эпюр)

Пример № 14: Преобразование прямой линии общего положения в линию уровня (рисунок 37).

Решение:

- параллельно горизонтальной проекции отрезка AB прямой линии проводят новую ось проекций X`, которая определяет положение новой плоскости $П_4$: ось X`|| $[A_1B_1]$;

- проводят линии связи из проекций точек A_1 и B_1 перпендикулярно к новой оси X`;

- от оси X` на этих перпендикулярах откладывают расстояния, равные удалению точек A и B от плоскости $П_1$, то есть значения координат Z для точек A и B;

- соединяют проекции точек A_4 и B_4 прямой линией.

В новой системе плоскостей $П_1П_4$ прямая, заданная отрезком AB заняла положение уровня: $[AB] \parallel П_4$. Отрезок AB проецируется на плоскость $П_4$ в истинную величину, то есть $[A_4B_4]=|AB|$, а α – величина угла наклона заданной прямой к плоскости проекций $П_1$.

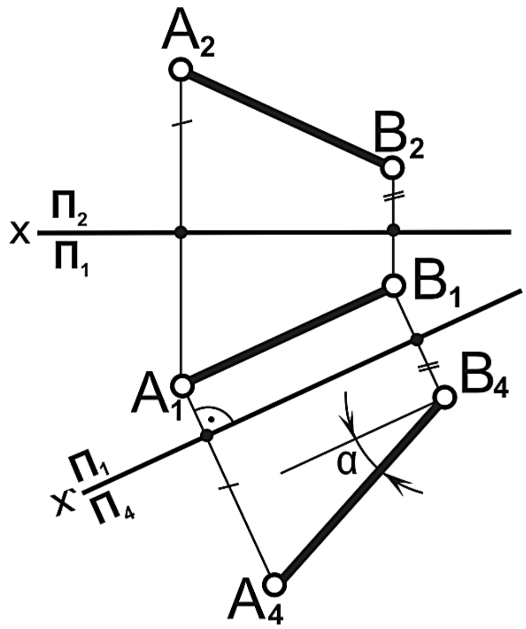


Рисунок 37 - Преобразование прямой общего положения в линию уровня

Пример № 15: Преобразование линии уровня в проецирующую прямую (рисунок 38).

Решение:

Дана горизонталь H (отрезок AB). Для преобразования линии уровня в проецирующую прямую:

- проводят новую ось проекций - X`, которая определяет положение новой плоскости $П_4$ перпендикулярно горизонтальной проекции отрезка AB, X`⊥ $[A_1B_1]$;

- проводят линии связи из точки A_1 и B_1 перпендикулярно к новой оси X`;

- на перпендикуляре от оси X` откладывают расстояния, равное удалению точек A и B от плоскости $П_1$, то есть значения координат Z для точек A и B, $A_Z = B_Z$, получают $A_4 \equiv B_4$.

В системе плоскостей $П_1П_4$ прямая заняла проецирующее положение по отношению к плоскости $П_4$: $[AB] \perp П_4$.

Для того чтобы прямую общего положения привести в проецирующее положение, необходимо выполнить две последовательные замены плоскостей проекций:

- первая замена преобразовывает прямую в линию уровня (рисунок 37);

- вторая - линию уровня в проецирующую прямую (рисунок 38).

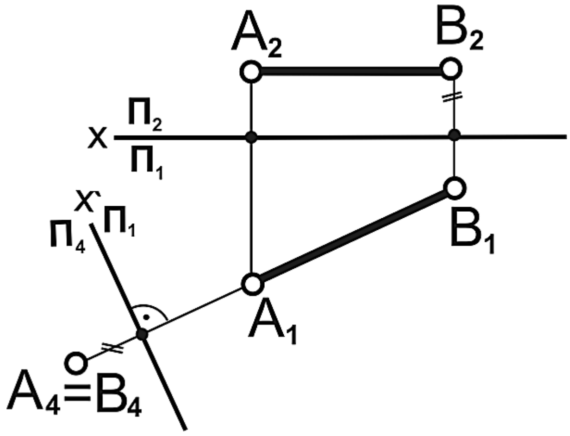


Рисунок 38 - Преобразование прямой уровня в проецирующую

Пример № 16: *Определение способом замены плоскостей натуральной величины треугольника, задающего плоскость общего положения* (рисунок 39).

План решения и построения:

1). Вводят в систему плоскостей проекций $\pi_1\pi_2$ дополнительную плоскость так, чтобы она была перпендикулярна одновременно и одной из плоскостей проекций и плоскости, заданной треугольником. Последний отобразится на новую плоскость отрезком прямой, то есть плоскость треугольника станет проецирующей.

2). В новую систему плоскостей вводят вторую дополнительную плоскость так, чтобы она была параллельна плоскости треугольника, тогда новая плоскость треугольника станет плоскостью уровня и треугольник спроецируется на вторую дополнительную плоскость в действительную величину.

Построение:

- в проекциях ΔABC проводят проекции горизонтали H - h_2, h_1 (рисунок 39, этап *1*);

- вводят в систему плоскостей проекций $\pi_1\pi_2$ дополнительную плоскость π_4 так, чтобы π_4 была перпендикулярна и к π_1 и к ΔABC, тогда новая ось X_1 пройдет перпендикулярно h_1 (рисунок 39, этап *1*);

- на эпюре на плоскости π_4 находят проекции вершин треугольника A_4, B_4, C_4;

- от оси X_1 откладывают для каждой точки координату Z, треугольник спроецируется в прямую - $|A_4C_4B_4|$ (рисунок 39, этап *2*);

- вводят в систему плоскостей вторую дополнительную плоскость π_5 параллельно треугольнику и перпендикулярно к плоскости π_4, вторая новая ось X_2 пройдет параллельно проекции прямой $|A_4C_4\,B_4|$ (рисунок 39, этап *2*);

- на плоскость π_5 треугольник спроецируется в натуральную величину: $\Delta A_5B_5C_5 = \Delta ABC$ (рисунок 39, этап *2*).

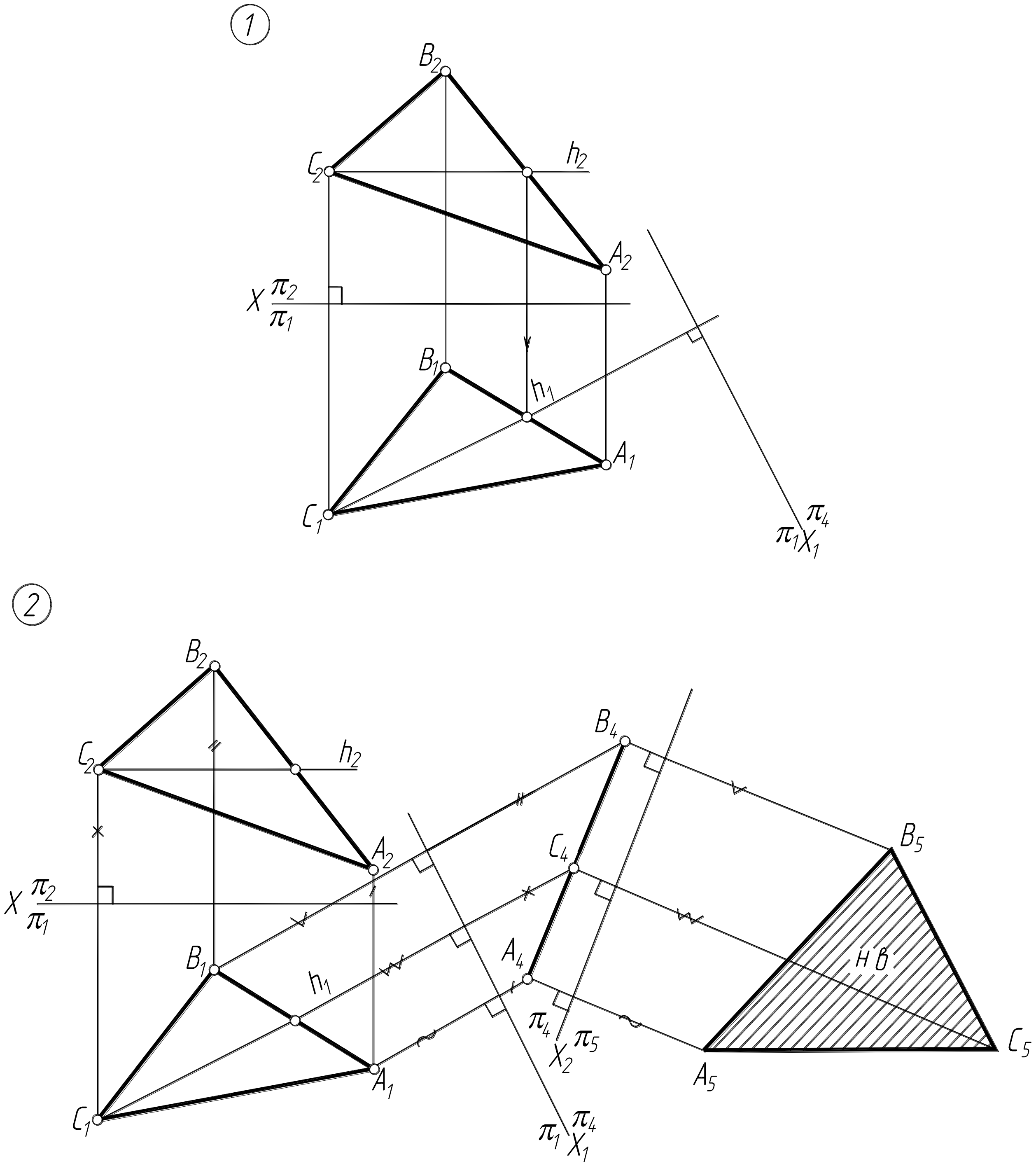


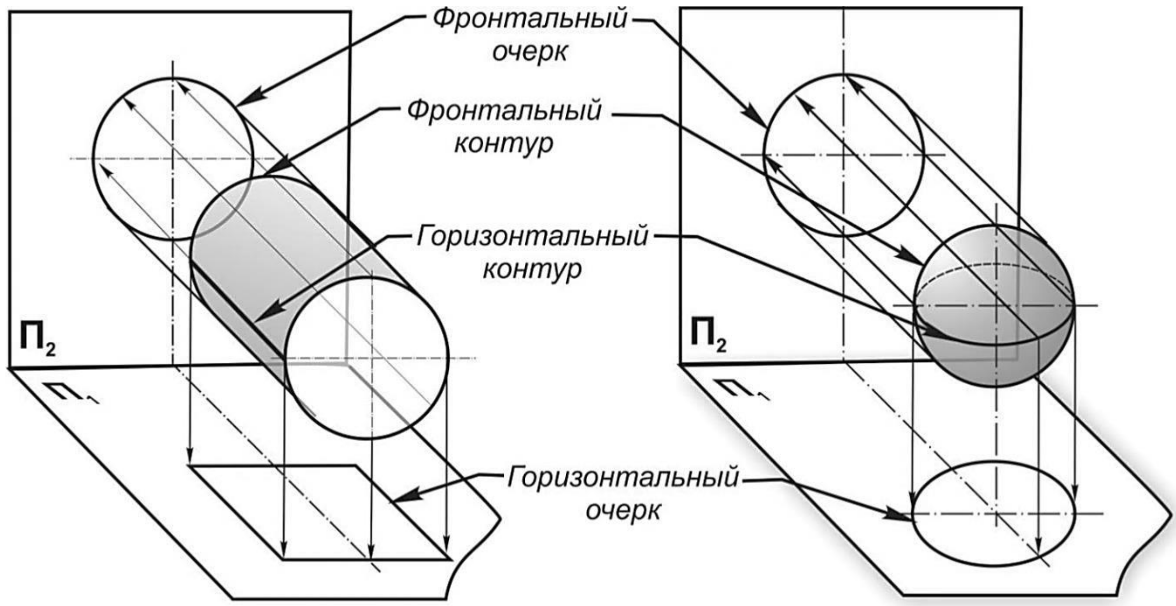
Рисунок 39 - Определение натуральной величины треугольника

Задание к выполнению:

Задача 7: Определить натуральную величину треугольника способом замены плоскостей (Приложение: таблица 2). Треугольник использовать из задачи 6 согласно своему варианту.

10. Тема «Поверхности»

Для построения проекций поверхности (или тела) обычно не строят всех ее точек, а определяют только очерк поверхности (рисунок 40).



а) *б)*

Рисунок 40 - Построение проекций поверхностей:
а) цилиндрической; *б)* сферической

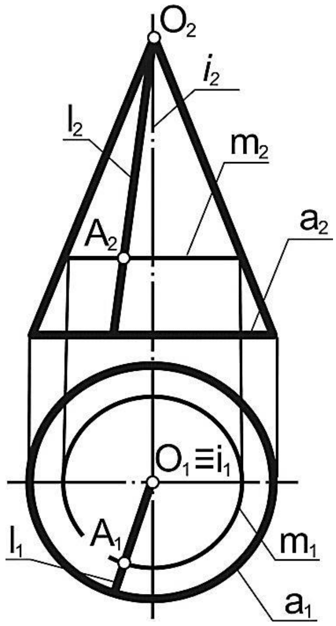
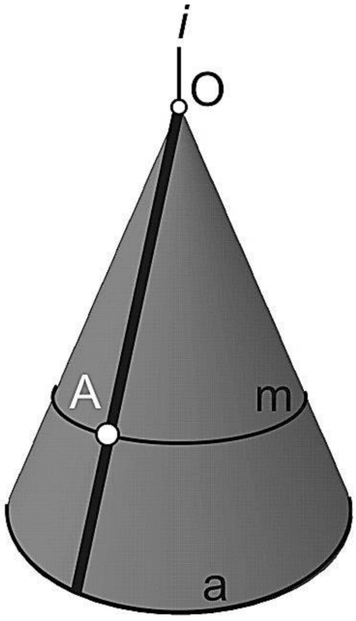
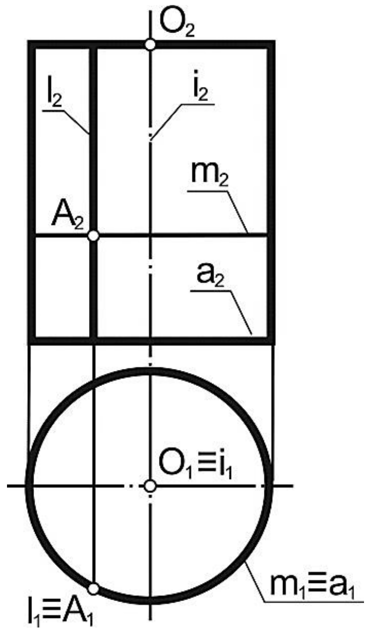
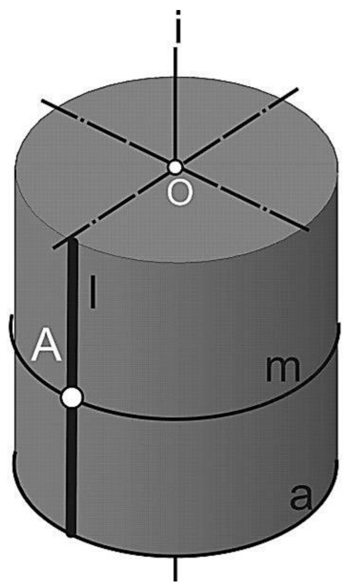
Очерком поверхности называют линию, ограничивающую проекцию фигуры на плоскости проекций. Проекции любой точки поверхности лежат внутри очерка (в частном случае на очерке). Если линией контура поверхности служит образующая поверхности, то ее называют *контурной образующей*, а ее проекцию – очерковой образующей.

При построении эпюра поверхности направление проецирования совпадает с направлением взгляда наблюдателя, поэтому контурная линия является границей видимости поверхности: та ее часть, которая расположена перед линией контура – видима, за линией контура – невидима. Очерковая линия разделяет проекцию на видимую и невидимую части. Проекции точек поверхности, расположенные на очерках, будем называть точками перемены (границы) видимости. Невидимые точки принято обозначать в скобках.

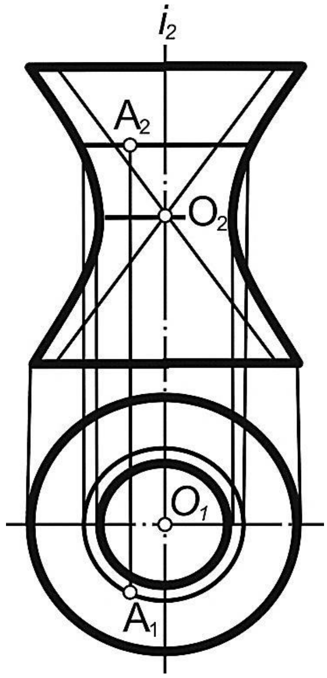
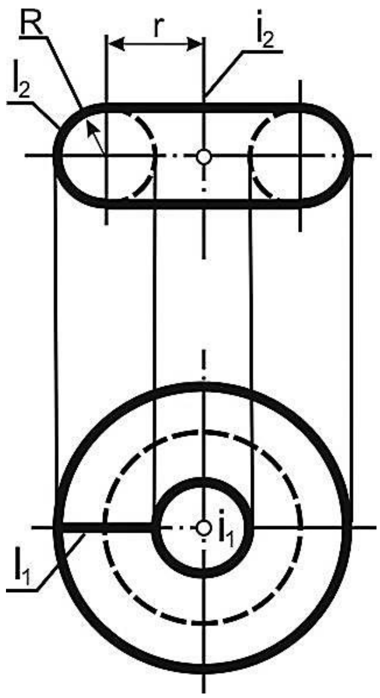
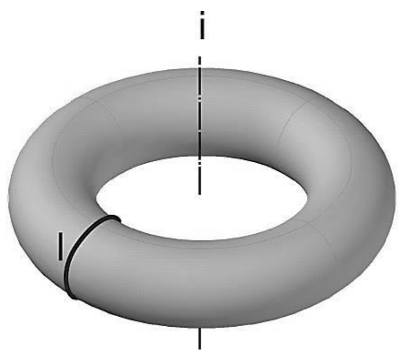
Изображения, наименование и характеристика основных поверхностей вращения представлены в таблице 6.

Таблица 6

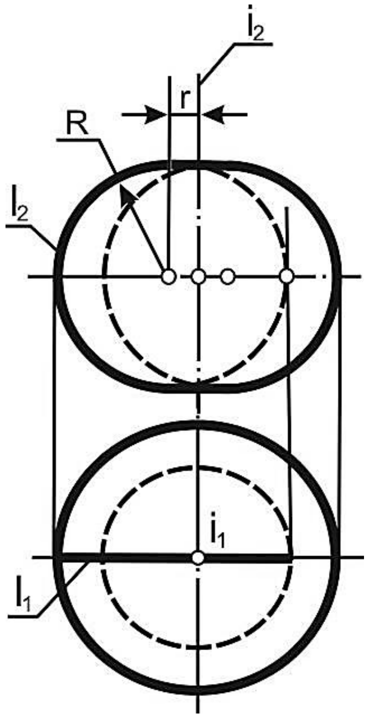
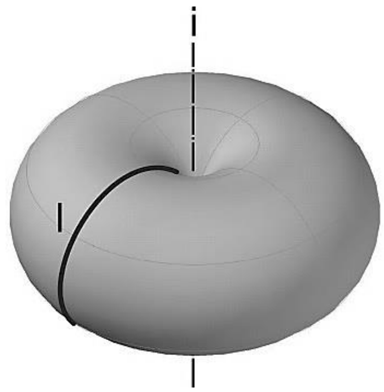
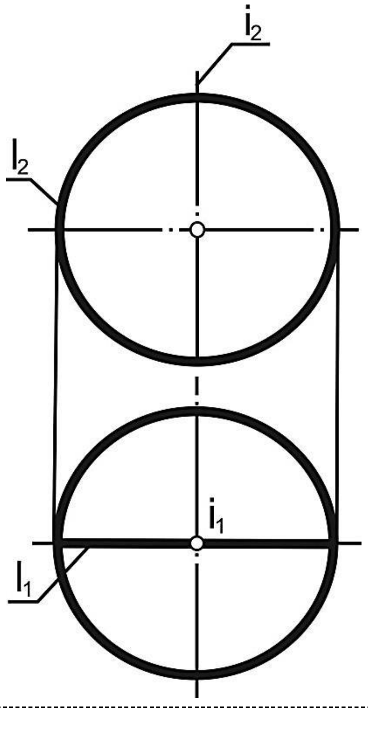
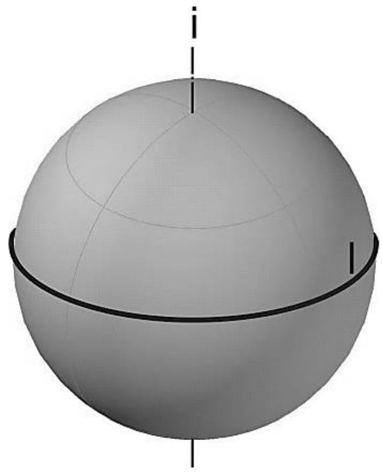
Основные поверхности вращения

Наименование и характеристика поверхности	Комплексный чертеж	3D модель
I	*II*	*III*
Линейчатые развертываемые поверхности вращения		
Конус вращения Поверхность, образованная движением прямолинейной образующей l, проходящей через неподвижную точку – вершину O по криволинейной направляющей m, называется *конической*.		
Цилиндр вращения Поверхность, образованная параллельным перемещением прямолинейной образующей l по кривой направляющей m, называется *цилиндрической*.		

Продолжение таблицы 6

<table>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>Гиперболоид однополостный
Поверхность, образованная вращением прямолинейной образующей l по криволинейной направляющей m вокруг оси i (образующая l и ось i скрещиваются), называется однополостным гиперболоидом вращения.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Нелинейчатые неразвертываемые поверхности вращения</td></tr>
<tr><td colspan="3">Поверхность, образованная вращением окружности (образующей l) вокруг оси i, не проходящей через ее центр, но расположенной в плоскости окружности. В зависимости от соотношения значений радиуса образующей l окружности R и расстояния r от центра окружности до оси вращения i возможны три разновидности поверхностей:</td></tr>
<tr><td>1). Тор открытый
Если R < r, то образующая окружность l не пересекает ось вращения i, поверхность называется кольцом или открытым тором.</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Продолжение таблицы 6

I	*II*	*III*
2). Тор закрытый Если R ≥ r, то окружность касается оси i или пересекает ее, поверхность называется *закрытым тором*.		
3). Сфера Если центр окружности принадлежит оси вращения r = 0, то образуется *сфера*.		

На рисунке 41 изображены линейчатые развертываемые гранные поверхности (многогранники). *Гранной* называется поверхность, образованная частями пересекающихся плоскостей. Элементами гранных поверхностей являются грани, ребра и вершины. Грань – это отсек плоскости, ребро – линии пересечения плоскостей (граней), вершина – точки пересечения ребер.

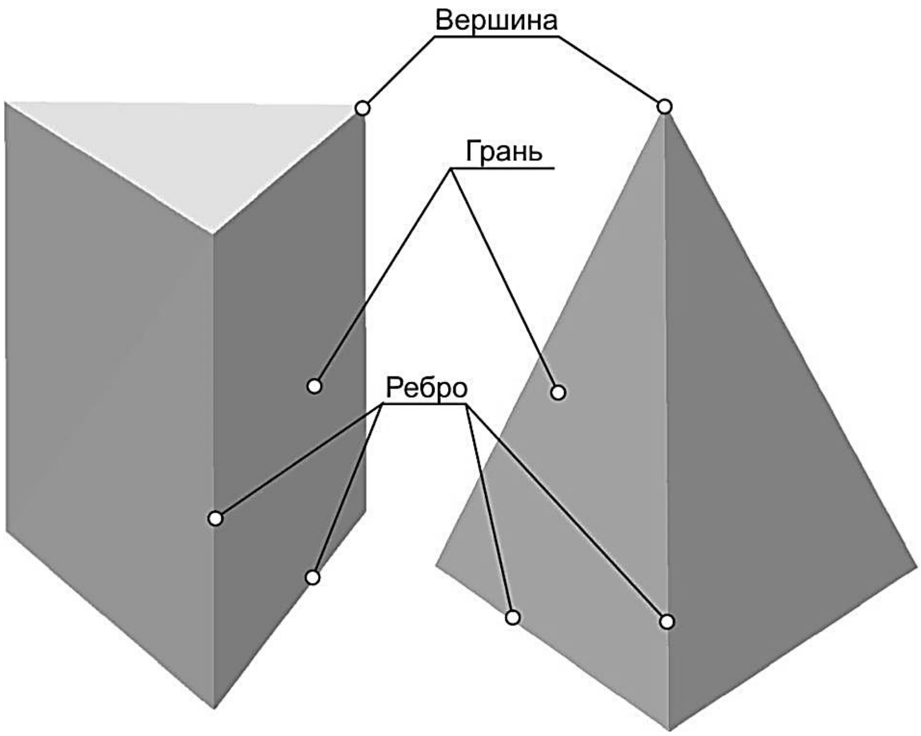
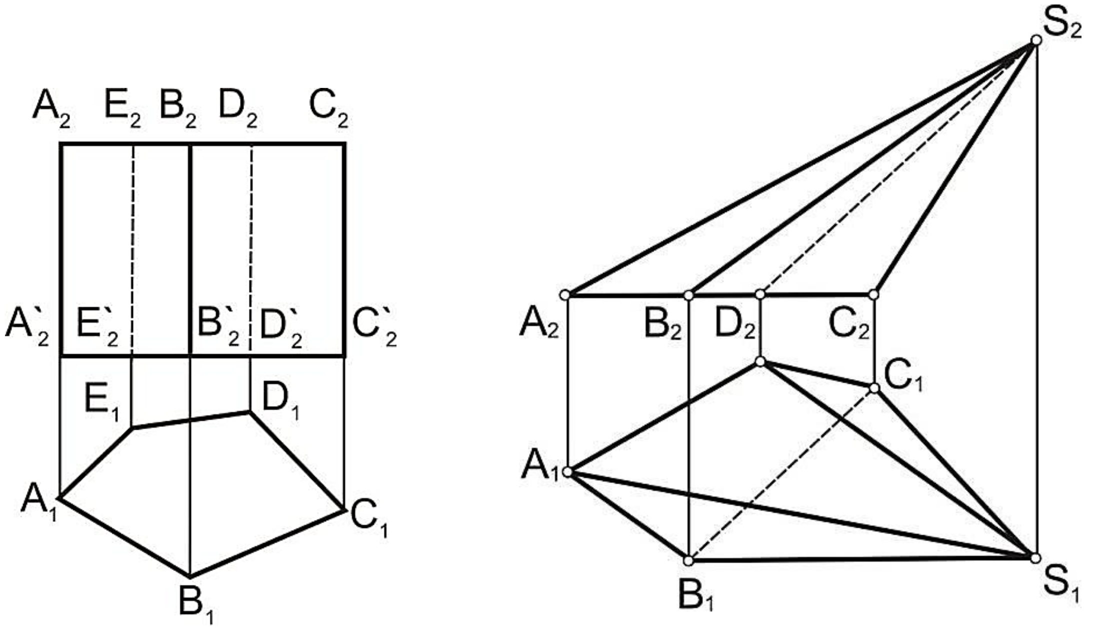


Рисунок 41 - Элементы гранных поверхностей: призмы и пирамиды

Гранная поверхность называется *призматической*, если все ее ребра параллельны между собой (рисунок 42,*а*). Гранная поверхность называется *пирамидальной*, если все ее ребра пересекаются в одной точке – вершине (рисунок 42,*б*).



а) *б)*

Рисунок 42 - Комплексные чертежи гранных поверхностей:
а) призма; *б)* пирамида

11. Тема «Точки на поверхностях»

Пример № 17: Построение горизонтальных проекций точек А, В и С, принадлежащих цилиндрической поверхности (рисунок 43).

Даны цилиндрическая поверхность, фронтальные проекции точек А, В и С – A_2, B_2 и C_2. Все образующие цилиндра перпендикулярны к $П_1$, горизонтальные проекции всех точек, расположенных на этой поверхности, находятся на горизонтальной проекции цилиндрической поверхности.

Построение:

- опускают линии связи на $П_1$;
- отмечают проекции точек - A_1, B_1 и C_1, учитывая, что точка В находится на невидимой части поверхности при взгляде на плоскость $П_2$.

В подобном случае, если заданы только горизонтальные проекции точек на данной поверхности, положение их фронтальных проекций не определить.

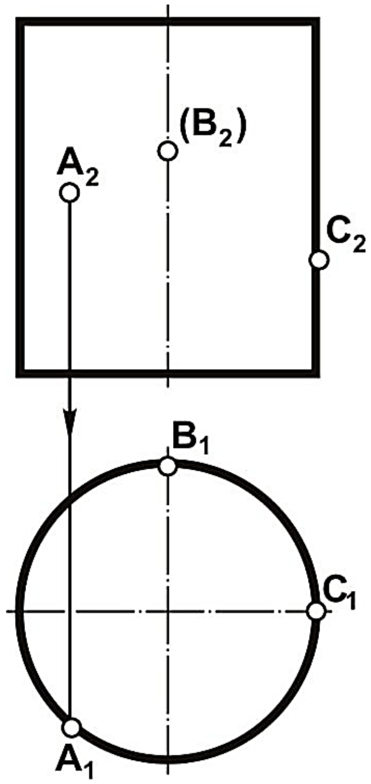


Рисунок 43 - Точки на поверхности цилиндра

Пример № 18: Построение недостающих проекций точек на поверхности сферы (рисунок 44).

Точки на поверхности сферы находят с помощью окружностей, проходящих через заданные точки, и расположенных перпендикулярно оси сферы. Только в этом случае окружность на проекциях сферы проецируется в прямую или окружность, в противном случае она проецируется в виде эллипса.

Дана фронтальная проекция точки A_2. Необходимо построить проекции точки - A_1 и A_3.

Для определения недостающих проекций точки A:

- строят на горизонтальной проекции окружность с радиусом R_1;

- получают проекцию A_1 на нижней половине горизонтальной проекции сферы, так как проекция A_2 точки видима;

- профильную проекцию A_3 находят, используя координату Y_A.

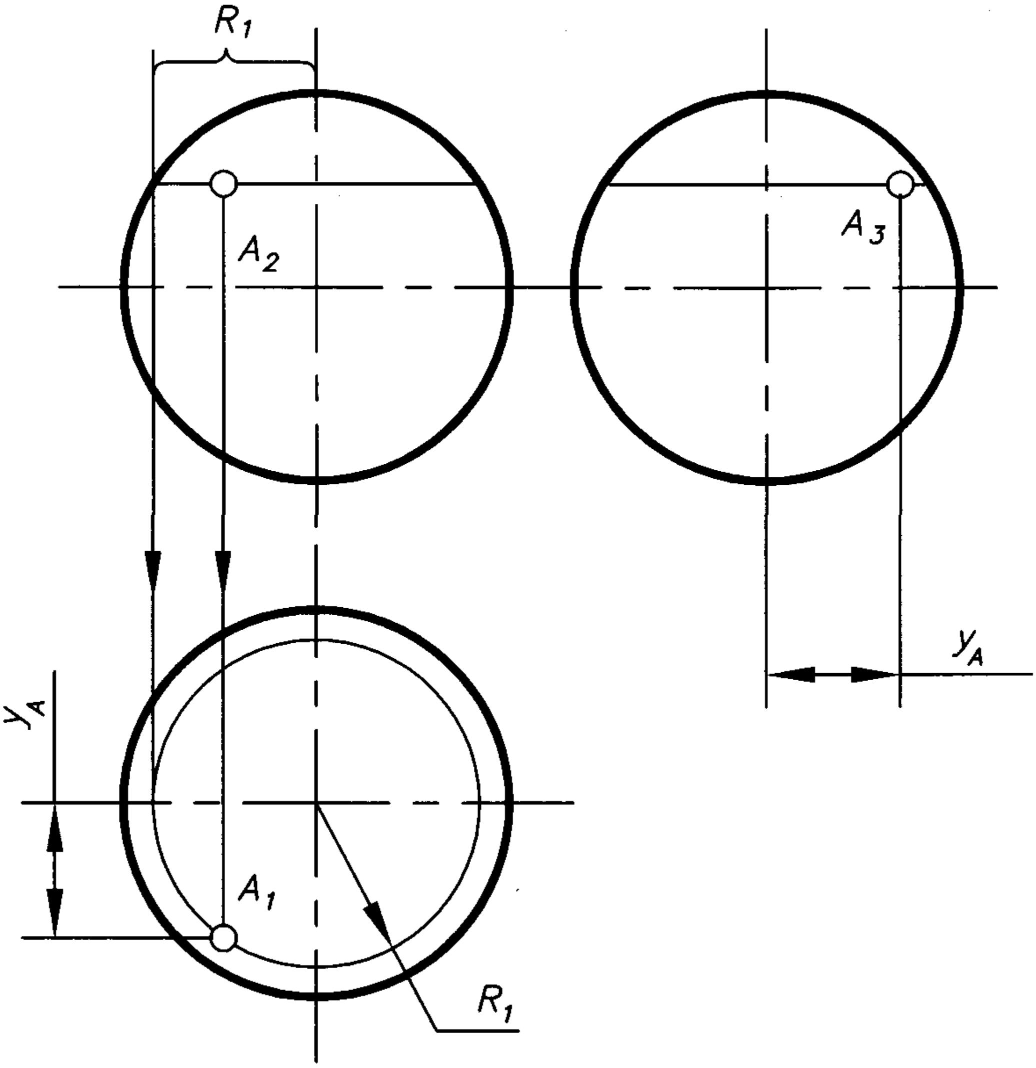


Рисунок 44 - Точка на поверхности сферы

Пример № 19: Построение недостающих проекций точек на поверхности тора (рисунок 45).

Точки на поверхности тора строят с помощью вспомогательных окружностей (параллелей), проходящих через точки и расположенных в плоскостях, перпендикулярных оси вращения тора.

Построение:

- зная одну проекцию точки A_2 на поверхности тора, проводят через нее проекцию окружности (на фронтальной проекции – это прямая);

- строят с помощью точки *1* (ее проекции – *1₂* и *1₃*) другую проекцию окружности и находят проекцию A_3.

Задача решена правильно при условии, что фронтальная проекция A_2 видима, то есть точка *A* лежит на ближней к наблюдателю части поверхности.

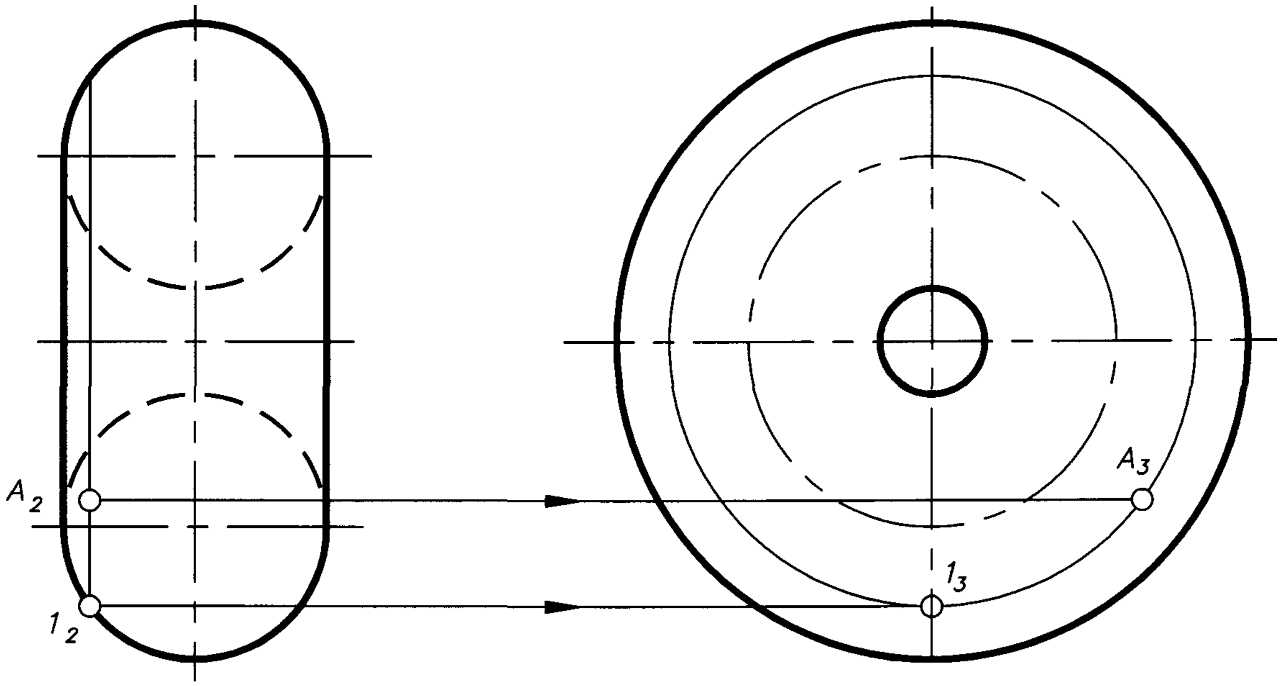


Рисунок 45 - Точки на поверхности тора

Пример № 20: Построение точек на поверхности конуса вращения (рисунок 46).

Даны конус вращения и проекции точек $F(F_2)$, $E(E_1)$, $C(C_2)$. Необходимо построить проекции точек $F(F_1)$, $E(E_2)$, $C(C_1)$.

Построение:

1). Точка F принадлежит фронтальной очерковой образующей конуса $SB - S_2B_2$:

– опускают линию связи на горизонтальную проекцию образующей S_1B_1;

– определяют недостающую проекцию точки $F - F_1$.

2). Для построения проекции точки $E(E_2)$:

– через заданную проекцию E_1 проводят горизонтальную проекцию образующей - S_11_1;

– строят проекцию образующей на $П_2 – 1_2S_2$;

– на проекции линии 1_2S_2 отмечают проекцию точки – E_2, она невидима наблюдателю на $П_2$.

3). Для построения проекции точки $C(C_1)$:

– через проекцию C_2 проводят параллель параллельно A_2B_2;

– строят проекцию параллели на $П_1$ – это окружность радиусом R, величину радиуса R определяют по фронтальной проекции;

– на горизонтальной проекции параллели отмечают недостающую проекцию точки C – C_1.

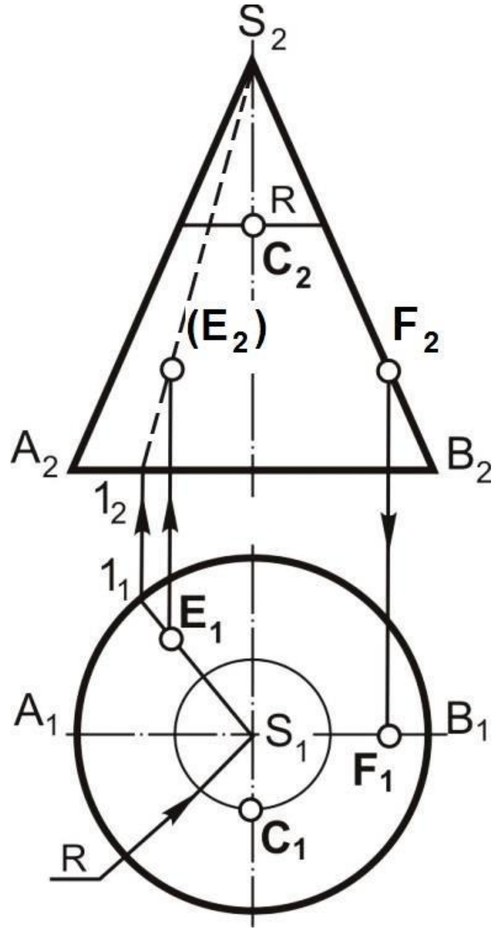


Рисунок 46 - Точки на поверхности конуса вращения

Пример № 21: Построение недостающих проекций точек на поверхности сферы (рисунок 47).

Даны сфера, проекции точек $A(A_1)$, $B(B_2)$ и $C(C_2)$ Необходимо построить проекции точек $A(A_2)$, $B(B_1)$ и $C(C_1)$.

Построение:

1). Точка A принадлежит экватору сферы, фронтальную проекцию точки отмечают на проекции одноименной линии.

2). Точка B принадлежит главному меридиану сферы, горизонтальную проекцию точки отмечают на проекции одноименной линии.

3). Построение проекции точки $C(C_1)$:

- через проекцию C_2 проводят параллель (параллельную экватору);

- строят проекцию параллели на $П_1$ – окружность радиуса R (величину радиуса R определяют по фронтальной проекции);

- отмечают проекцию C_1 на горизонтальной проекции параллели.

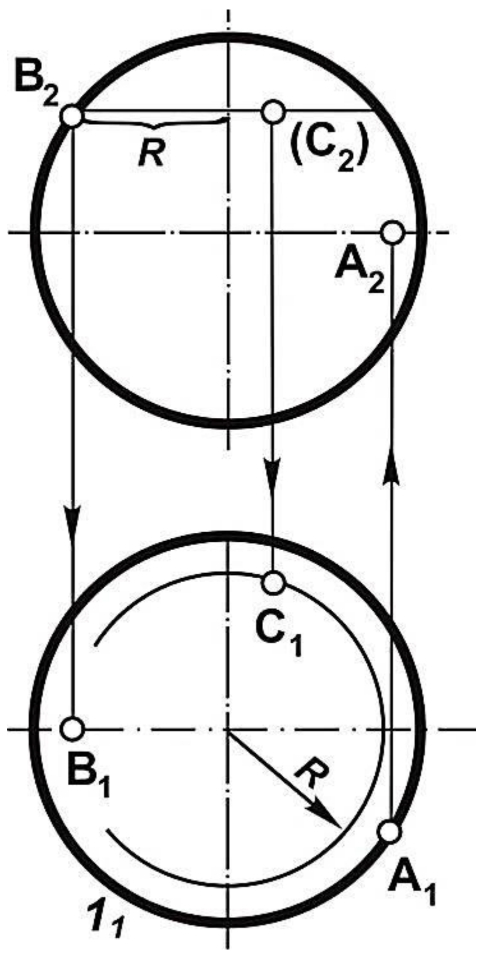


Рисунок 47 - Точки на поверхности сферы

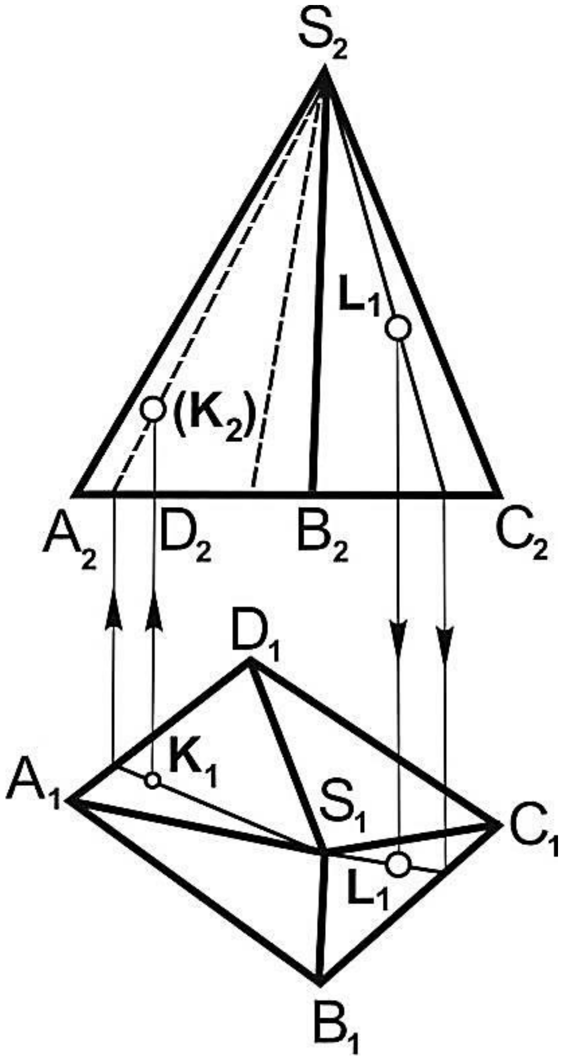


Рисунок 48 - Точки на поверхности пирамиды

Пример № 22: Построение недостающих проекций точек на поверхности пирамиды (рисунок 48).

Даны пирамида, проекции точек К($К_1$) и L(L_2). Необходимо построить проекции точек К($К_2$) и L(L_1).

Построение:

1). Для построения проекции точки К - $К_2$:

– через проекцию $К_1$ от проекции вершины S_1 проводят линию связи;

– строят проекцию линии связи на $П_2$;

– отмечают проекцию на $П_2$ точки К - $К_2$.

2). Для построения проекции точки L - L_1:

– через проекцию L_2 от проекции вершины S_2 проводят линию связи;

– строят проекцию линии связи на $П_1$;

– отмечают проекцию на $П_1$ точки L - L_1.

Пример № 23: Построение точек на поверхности прямой треугольной пирамиды (рисунок 49).

Заданы проекции пирамиды *SABC* и фронтальные проекции трех точек *1*, *2*, *3*, лежащих на поверхности пирамиды. Необходимо построить отсутствующие горизонтальные и профильные проекции этих точек.

Построение:

1). Для определения положения горизонтальной проекции 1_1 используют вспомогательную линию: проводят через проекции вершины S_2 и точки 1_2 прямую до пересечения с проекцией A_2B_2 основания. Затем на линии связи определяют горизонтальную проекцию этой точки на A_1B_1. Соединив полученную точку с проекцией вершины S_1, получают горизонтальную проекцию вспомогательной линии. На ней находят проекцию точки 1_1, положение которой определяют по линии связи из 1_2.

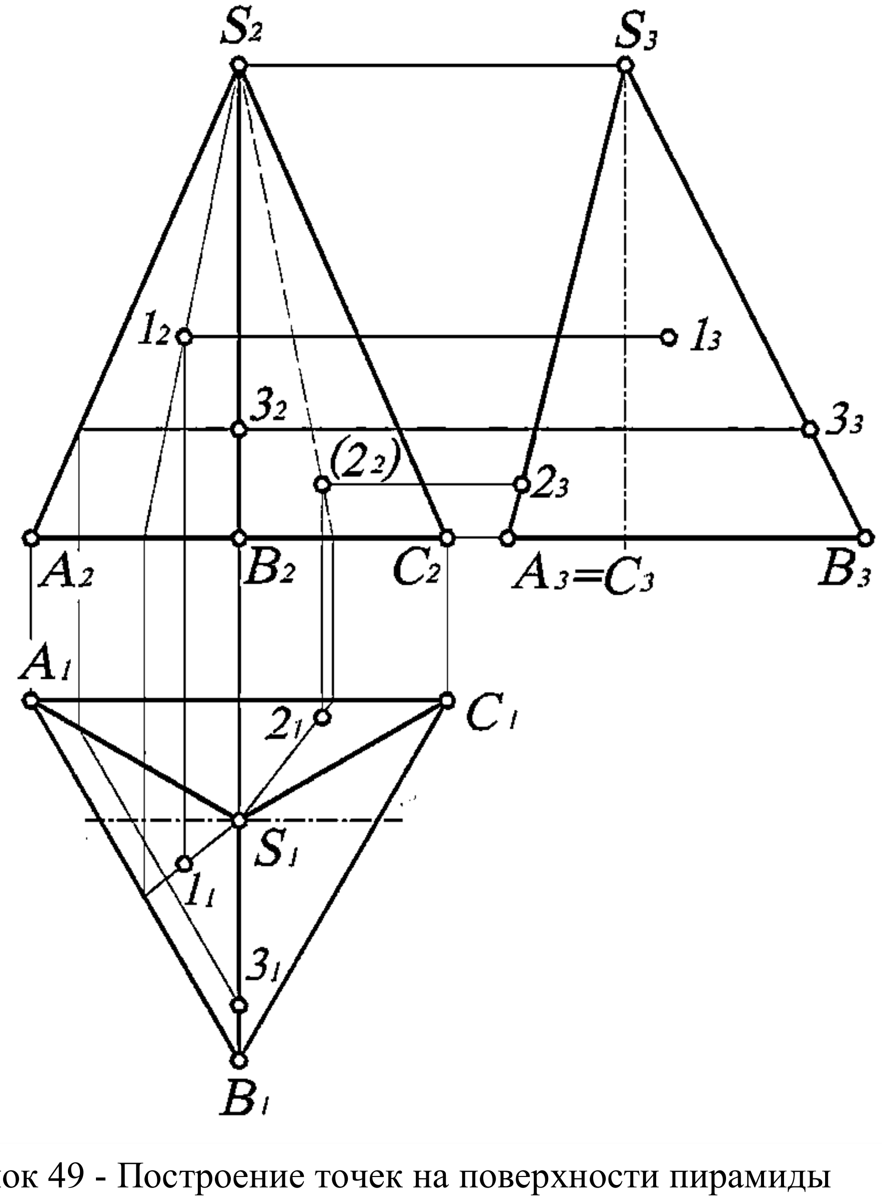


Рисунок 49 - Построение точек на поверхности пирамиды

2). Аналогично строят горизонтальную проекцию 2_1. С учетом того, что проекция (2_2) невидимая, точка *2* лежит на грани *SAC*. В остальном построение полностью повторяет предыдущее. По двум проекциям точек, строят и третью проекцию на плоскости проекций π_3.

3). Для определения положения горизонтальной проекции 3_1 можно использовать линию, параллельную основанию. Через проекцию 3_2 проводят прямую, параллельную A_2B_2, до пересечения с ребром S_2A_2. Затем на ребре S_1A_1 по линии связи получают горизонтальную проекцию точки пересечения, через которую проводят прямую параллельно A_1B_1. Поскольку точка *3* лежит на этой прямой и на ребре *SB*, определяют на S_1B_1 проекцию точки 3_1. Горизонтальную проекцию 3_1 можно найти и через профильную проекцию 3_3.

Пример № 24: Построение точек на поверхности прямой шестиугольной призмы (рисунок 50).

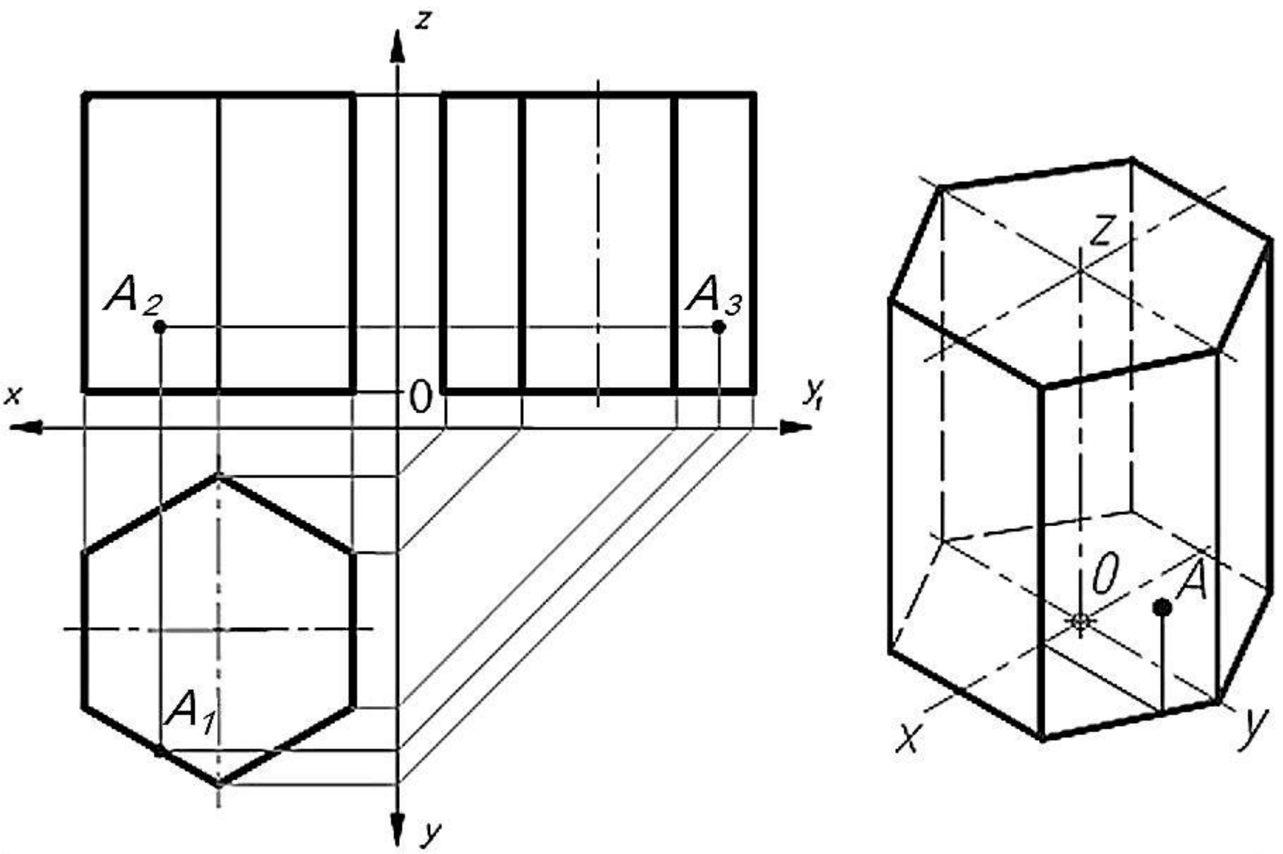


Рисунок 50 - Построение проекций точек на поверхности призмы

В данном примере горизонтальной проекцией основания является правильный шестиугольник. Фронтальной и профильной проекцией призмы являются прямоугольники. Нахождение проекций точек на поверхности призмы подобно нахождению проекций точек на поверхности цилиндра (см. рисунок 43).

Задание к выполнению:

Задача 8: Достроить недостающие проекции точек (невидимые проекции точек заключить в скобки), принадлежащих поверхности геометрической фигуры, согласно своему варианту (Приложение: таблица 2, рисунки 2, 3).

12. Тема «Пересечение поверхности плоскостью»

Теоретические положения:

1). При пересечении геометрического тела плоскостью получают плоскую фигуру, которую называют *фигурой сечения* или просто *сечением*, при этом плоскость, с помощью которой выполняют пересечение, называют секущей плоскостью.

2). При пересечении многогранника плоскостью в сечении получают плоский многоугольник, число сторон которого равно числу граней, пересеченных плоскостью, а число вершин - количеству ребер, пересеченных плоскостью.

3). При пересечении тела вращения плоскостью контур пересечения представляет собой замкнутую кривую линию, форма которой зависит от формы тела вращения и положения секущей плоскости относительно оси вращения.

Следовательно, любая из задач на пересечение поверхности с плоскостью сводится к построению проекций плоской кривой или прямой линии, являющейся их *общим элементом*. Построение проекций линии производят по ее отдельным точкам.

Основным способом построения проекций общих точек линии пересечения поверхности с плоскостью является способ вспомогательных проецирующих плоскостей, который заключается во введении ряда проецирующих плоскостей, пересекающих данную поверхность по некоторым линиям, а данную секущую плоскость по прямым. Точки пересечения этих линий с соответствующими прямыми и будут точками искомой линии пересечения.

Пример № 25: Построение фигуры сечения пирамиды фронтально-проецирующей плоскостью (рисунок 51).

Для построения плоской фигуры пересечения определяют точки пересечения ребер многогранника и секущей плоскости и соединяют построенные точки с учетом их видимости. Секущая плоскость $\beta(\beta_2)$ занимает фронтально-проецирующее положение, поэтому точки пересечения ребер определяют как точки пересечения прямой общего положения и плоскости частного положения:

$AS \cap \beta = 1(1_2, 1_1)$;
$BS \cap \beta = 2(2_2, 2_1)$;
$CS \cap \beta = 3(3_2, 3_1)$.

Видимость определяют методом конкурирующих точек. Грань *ACS* относительно плоскости $П_1$ невидима, следовательно, и линия ($1_1 3_1$) также невидима. Видимость на $П_2$, в данном случае, не определяется.

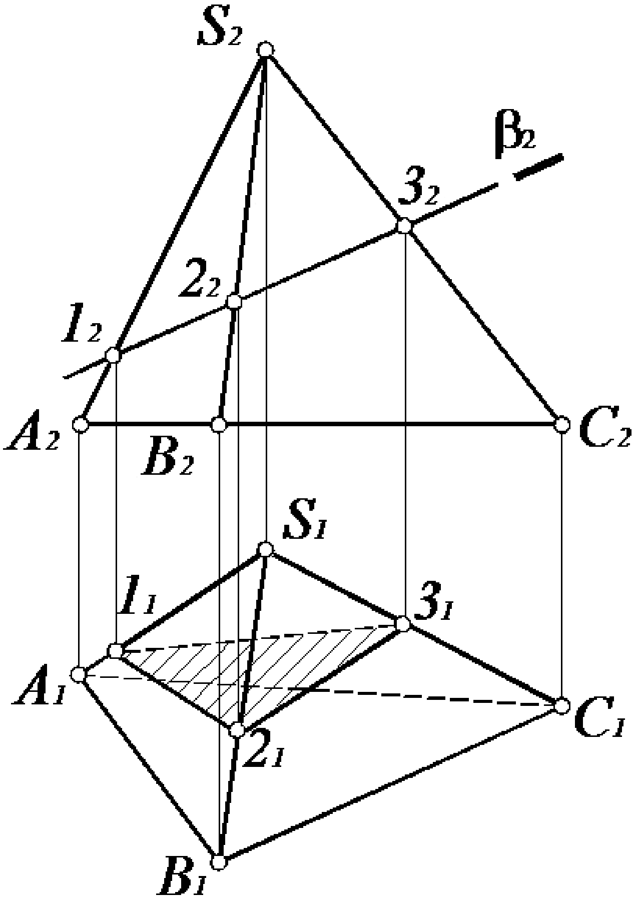


Рисунок 51 - Сечение пирамиды фронтально-проецирующей плоскостью

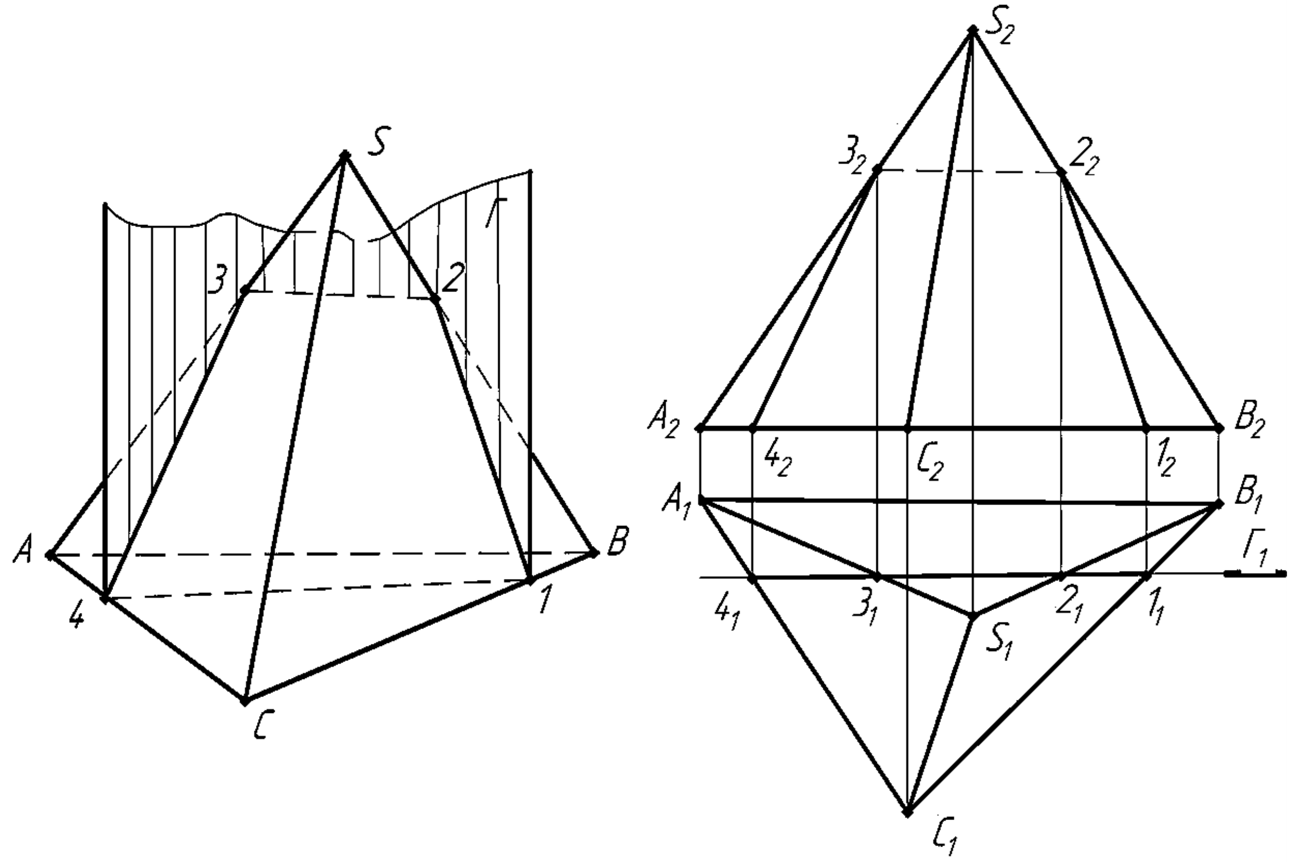
Пример № 26: Построение сечения пирамиды фронтальной плоскостью (рисунок 52).

Построение:

- горизонтальные проекции опорных точек *1, 2, 3, 4* находят в местах пересечения ребер пирамиды плоскостью *Г*;

- фронтальные проекции этих точек определяют с помощью линий связи на соответствующих ребрах пирамиды.

Участок 2_2-3_2 ломанной на $П_2$ не виден, так как он принадлежит невидимой грани *ASB*.



а) *б)*

Рисунок 52 - Сечение пирамиды фронтальной плоскостью

а) пространственное изображение; *б)* эпюр

Пример № 27: Построение сечения цилиндра секущей фронтально-проецирующей плоскостью (рисунок 53).

Секущая плоскость не перпендикулярна оси вращения цилиндра.

Построение:

1). Линия пересечения цилиндра – эллипс, который на плоскости $П_2$ проецируется в отрезок A_2B_2, на плоскости $П_1$ в окружность, совпадающую с проекцией цилиндрической поверхности, а на плоскости $П_3$ в эллипс.

2). Профильные проекции точек, принадлежащих эллипсу, строят по двум горизонтальной и фронтальной проекциям:

- определяют проекции высшей *A* и низшей *B* точек;
- находят проекции очерковых точек относительно $П_3$ - *C* и *D*;
- определяют проекции промежуточных точек - *1* и *2*.

3). Соединяют полученные точки плавной кривой с учетом видимости, получают эллипс, являющийся профильной проекцией фигуры сечения. Точки *C* и *D* являются точками смены видимости на $П_3$.

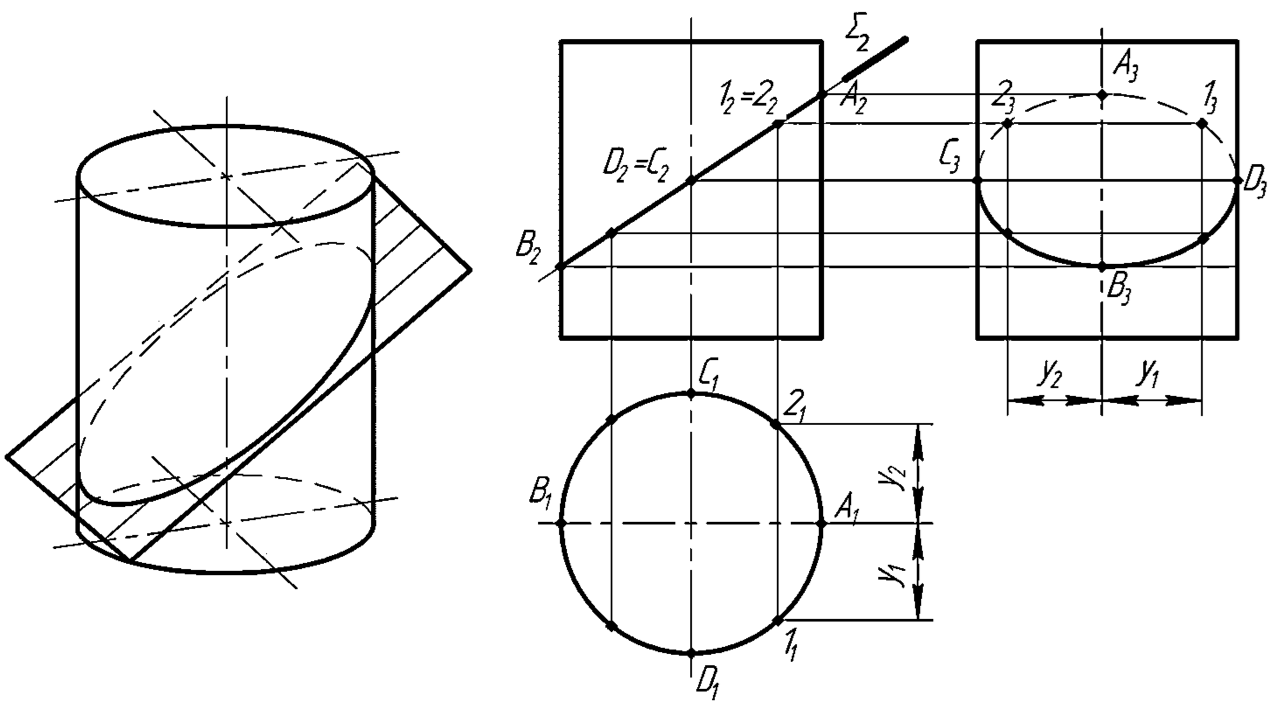


Рисунок 53 - Сечение цилиндра плоскостью

Пример № 28: *Построение линии сечения поверхности сферы фронтально-проецирующей плоскостью Σ* (рисунок 54).

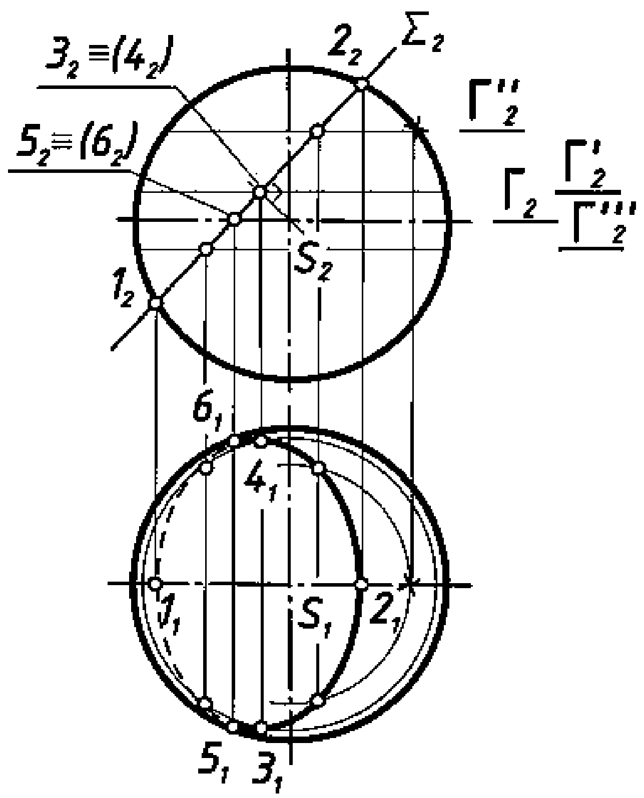


Рисунок 54 - Линия сечения сферы плоскостью

Построение:

1). Любая плоскость пересекает сферу по окружности, на плоскости π_1 окружность проецируется в виде эллипса.

2). Строят опорные точки линии сечения:

- проекции диаметров окружности (*12*) и (*34*) определяют величину большой и малой оси эллипса;

- высшая и низшая точки *1* и *2* линии сечения лежат во фронтальной плоскости симметрии сферы;

- фронтальные проекции точек *3* и *4* расположены на середине отрезка *12*;

- горизонтальные проекции этих точек строят с помощью параллели, полученной при пересечении сферы вспомогательной горизонтальной плоскостью Г';

- точки *3* и *4*, разделяют на π_1 видимую и невидимую части эллипса и лежат во вспомогательной плоскости Г на экваторе сферы.

3). Промежуточные точки линии сечения находят аналогично с помощью горизонтальных плоскостей-посредников Г'', Г''' на параллелях сферы.

Пример № 29: *Построение сечения поверхности сферы фронтально-проецирующей плоскостью Σ на трех плоскостях проекций* (рисунок 55).

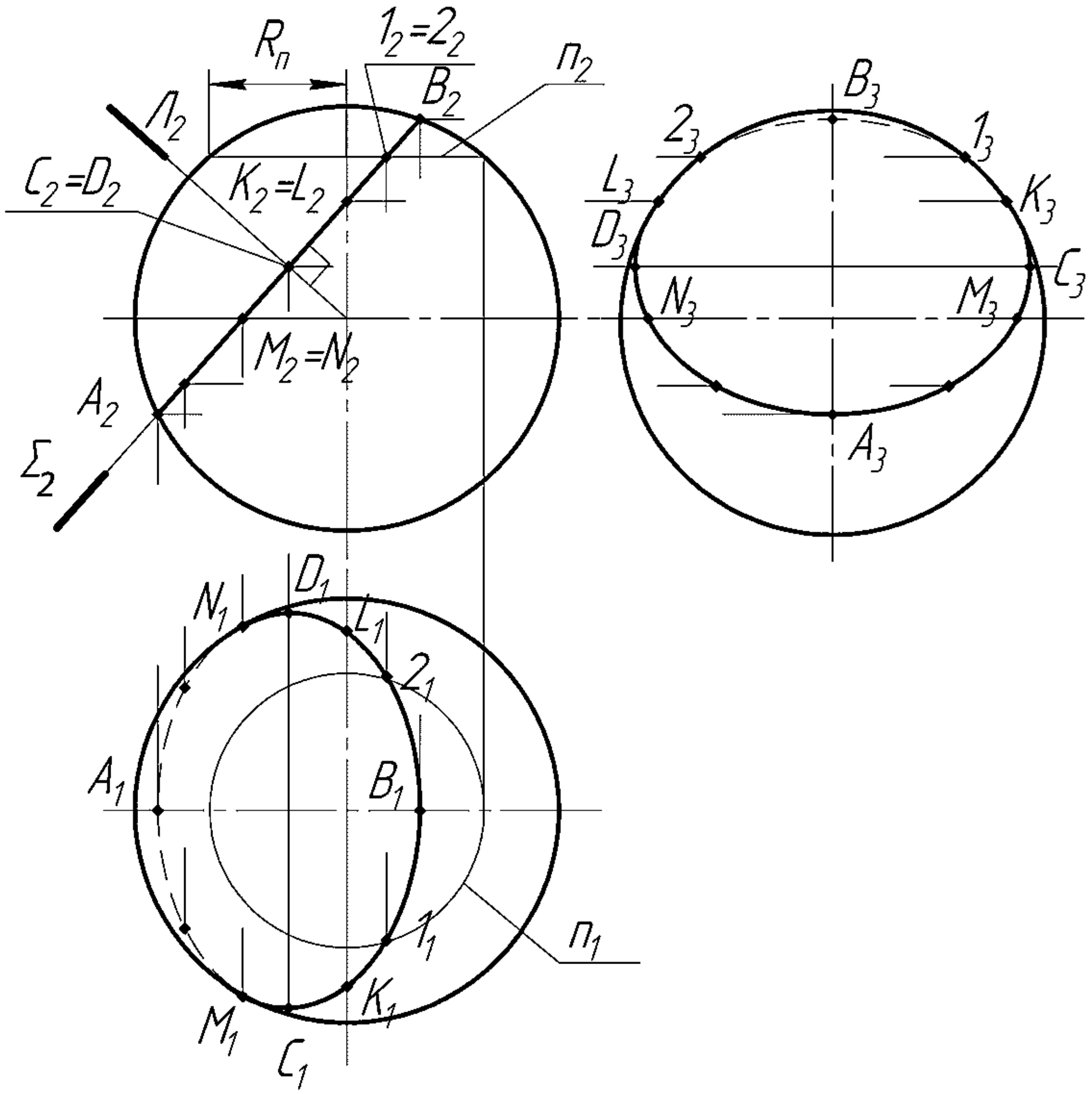


Рисунок 55 – Сечение сферы фронтально-проецирующей плоскостью

Построение:

1). Окружность сечения проецируется на плоскость $П_2$ в отрезок A_2B_2 на плоскость $П_1$ – в эллипс, который строят по точкам:

- точки A и B являются опорными (экстремальными) относительно $П_1$: B – высшая точка, A – низшая;

- фронтальные проекции точек A и B совпадают с точками пересечения фронтальной проекции плоскости Σ с очерком фронтальной проекции сферы;

- горизонтальные проекции точек A и B находят по линиям связи на горизонтальной проекции главного меридиана;

- фронтальные проекции точек M и N (точек смены видимости относительно $П_1$) находят на пересечении Σ_2 с фронтальной проекцией экватора сферы;

- горизонтальные проекции точек M и N находят по линиям связи на очерке горизонтальной проекции сферы;

- экстремальные относительно $П_2$ точки C и D (самая ближняя и самая дальняя) определяют при помощи общей плоскости симметрии $Л$, которая проводится через центр сферы перпендикулярно плоскости Σ;

- для нахождения промежуточных точек 1 и 2 используют параллель n, проходящую через эти точки, радиус параллели R_n, как и любой другой, измеряем от оси до очерка;

- на $П_1$ параллель проецируется в окружность.

2). Соединив полученные точки плавной кривой с учетом видимости, получают эллипс, являющийся горизонтальной проекцией фигуры сечения.

Задание к выполнению:

Задача 9: Определить и построить фигуру сечения геометрической поверхности вспомогательной секущей плоскостью согласно своему варианту (Приложение: таблица 2, рисунки 4, 5).

13. Тема «Развертка поверхности»

Развертка поверхности - это фигура, получающаяся в плоскости при таком совмещении точек данной поверхности с этой плоскостью, при котором длины линий остаются неизменными. При этом каждой точке поверхности соответствует единственная точка на развертке.

Теоретические положения:

1). При изготовлении ограждений станков, вентиляционных труб и некоторых других изделий из листового материала имеет большое значение построение разверток поверхностей. Если представить себе поверхность как гибкую нерастяжимую пленку, то некоторые из них путем изгиба можно совместить с плоскостью без разрывов и деформаций. Такие поверхности относятся к *развертываемым*. Полученная в результате развертывания (раскатки) плоская фигура и есть развертка поверхности.

2). Теоретически точно развертываются только гранные поверхности, торсы, конические или цилиндрические поверхности.

3). Поверхности, которые нельзя совместить без разрывов и деформаций, относятся к *неразвертываемым* (сферы, торы).

4). При развертывании сложных поверхностей их аппроксимируют (заменяют) вписанными гранными развертывающимися поверхностями, и чем больше граней содержит вписанная поверхность, тем точнее ее развертка. Построенные таким образом развертки поверхностей называют *приближенными* или *условными*.

5). *Разверткой поверхности многогранника* называют плоскую фигуру, полученную при совмещении с плоскостью чертежа всех граней многогранника в последовательности их расположения на многограннике. Чтобы построить развертку поверхности многогранника, определяют натуральную величину граней и вычерчивают на плоскости последовательно все грани. Истинные размеры ребер граней, если они спроецированы не в натуральную величину, находят способами вращения или перемены плоскостей проекций.

6). *Способ триангуляции* (треугольников) применяют прежде всего для развертки пирамид, находят натуральную величину каждого треугольника - боковой грани и основания, после чего строят последовательно эти треугольники и основание на плоском чертеже. В случае построения развертки призм при использовании способа триангуляции разбивают боковые грани диагоналями на треугольники, а затем находят их натуральную величину.

Пример № 30: *Построение полной развертки поверхности прямого конуса* («математический подход»).

Построение (рисунок 56):

1). Развертка поверхности прямого кругового конуса представляет собой плоскую фигуру, состоящую из кругового сектора и круга. Чтобы ее построить, проводят осевую линию, и из точки, взятой на ней, как из центра, радиусом равным образующей конуса, очерчивают дугу окружности.

На рисунке образующая, подсчитанная по теореме Пифагора, равна приблизительно 38 мм ($L = \sqrt{15^2 + 35^2} = \sqrt{1450} \approx 38$ мм).

2). Затем подсчитывают угол сектора по формуле: $\alpha = \dfrac{360°R}{L}$, где R - радиус окружности основания конуса; L - длина образующей боковой поверхности конуса. В данном примере $\alpha = 360°$ х $15/38 \approx 142{,}2°$. Этот угол строят симметрично относительно осевой линии с вершиной в точке S. К полученному сектору пристраивают круг с центром на осевой линии и диаметром, равным диаметру основания конуса.

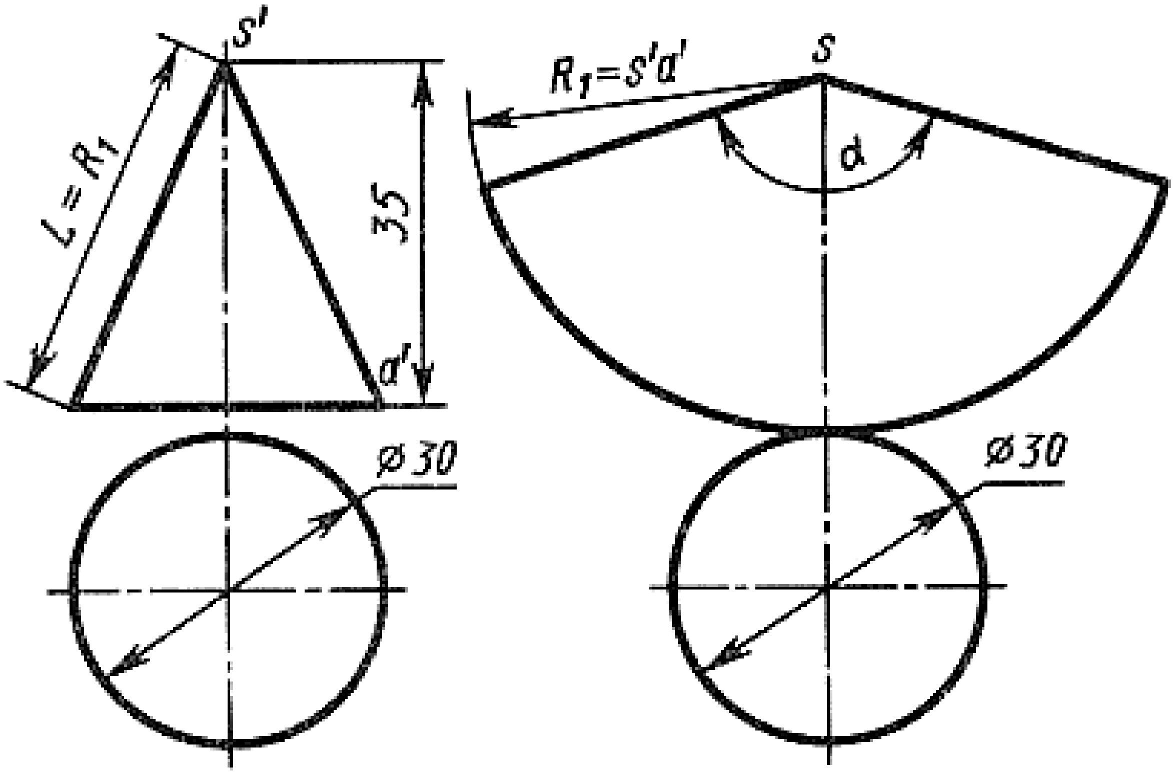


Рисунок 56 – Полная развертка прямого конуса

Пример № 31: *Построение развертки боковой поверхности конуса* и *нанесение на нее точки B* («графический подход»).

Построение (рисунок 57):

1). Делят окружность основания конуса на достаточное количество частей (чем больше, тем точней развертка), например, на двенадцать.

2). Строят соответствующие образующие конуса.

3). Находят образующую $S2$, которой принадлежит точка В.

4). Выполняют развертку:

- строят образующую $S1$, длина которой равна длина очерковой образующей на $П_2$;

- из точки *S* радиусом *S1* проводят дугу и откладывают на ней длину хорды |*a*| двенадцать раз;

- строят образующую *S2*.

5). Поворачивают точку *B* вокруг оси конуса до совмещения ее фронтальной проекции с очерковой образующей.

6). Замеряют длину отрезка L_B и, отложив его на образующей *S2*, получают изображение точки *B* на развертке.

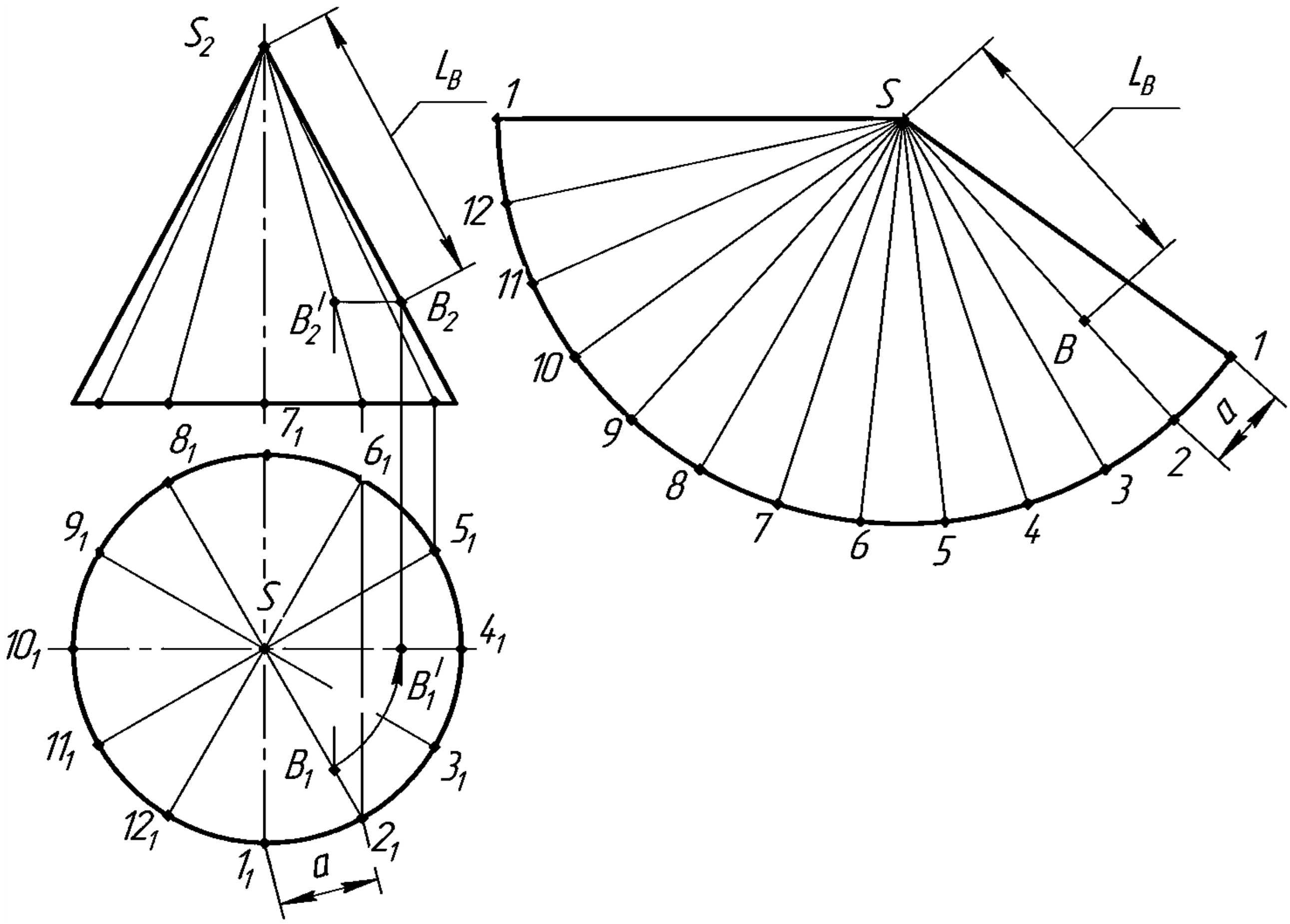


Рисунок 57 - Развертка боковой поверхности конуса

Пример № 32: *Построение полной развертки поверхностей пирамиды* (рисунок 58).

Построение:

- из произвольной точки *O* описывают дугу радиуса *L*, равного длине бокового ребра пирамиды;

- на этой дуге откладывают четыре отрезка, равные стороне основания;

- крайние точки соединяют прямыми с точкой *O*;

- пристраивают квадрат, равный основанию пирамиды.

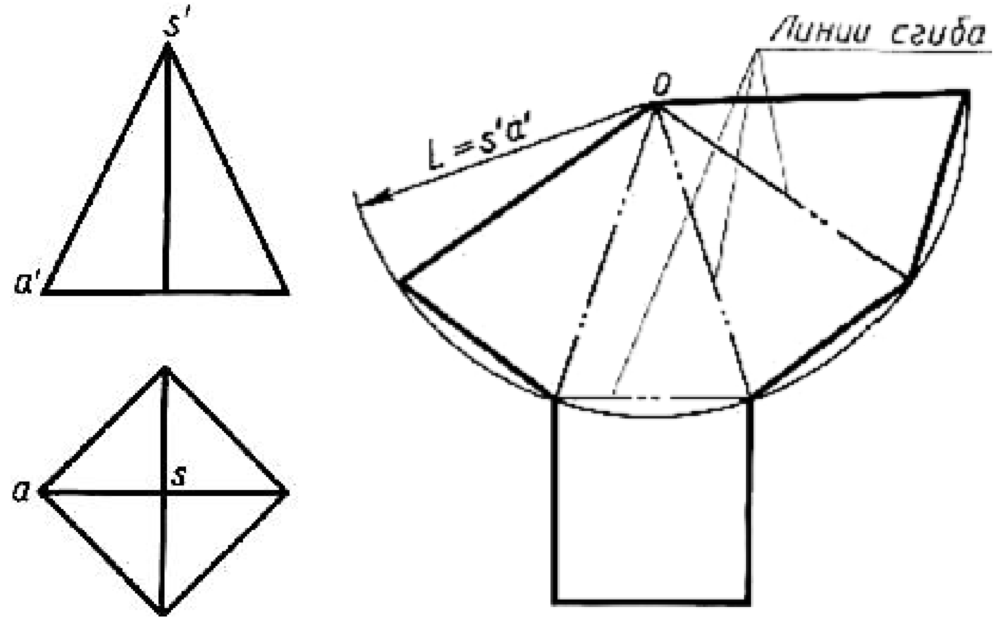


Рисунок 58 - Полная развертка поверхностей пирамиды

Контур развертки поверхностей пирамиды обводят сплошной основной линией, а линии сгиба - штрихпунктирной с двумя точками. Подобным образом можно построить развертки прямых пирамид с любым многоугольником в основании.

Пример № 33: *Построение развертки поверхностей четырехугольной пирамиды*.

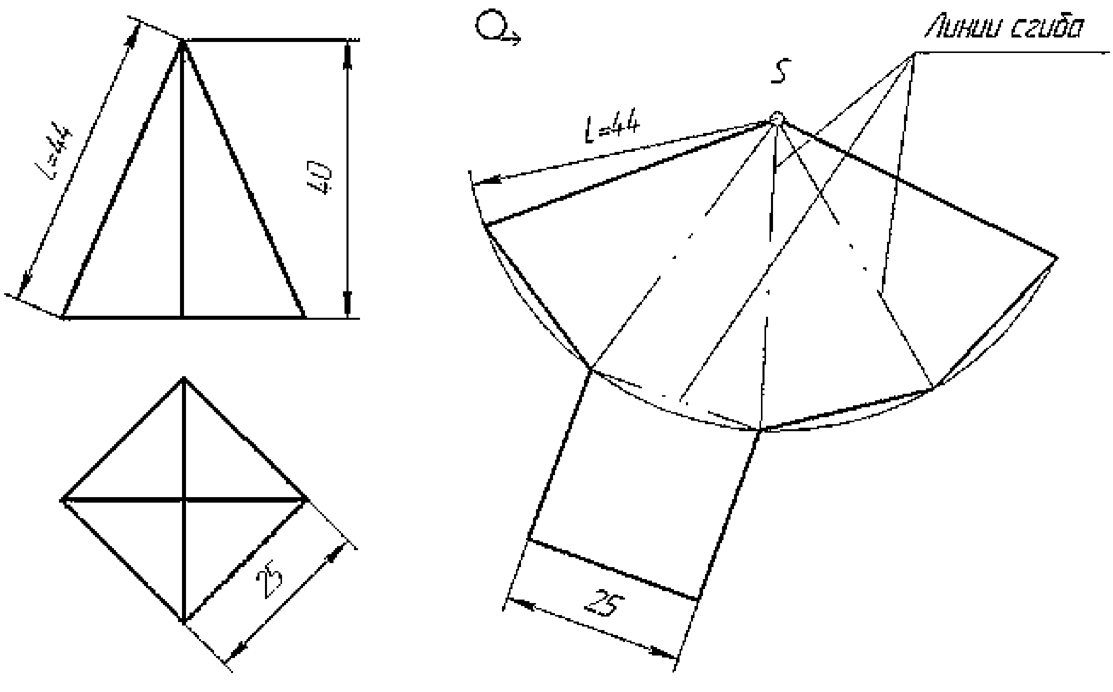


Рисунок 59 - Развертка поверхностей пирамиды

На рисунке 59 показана развертка поверхностей правильной четырехугольной пирамиды по заданным размерам. Развертка представляет собой плоскую фигуру, составленную из боковых граней – четырех равносторонних треугольников при вершине *S* и квадратного основания.

Над изображением развертки часто помещают знак: 

Пример № 34: *Построение развертки боковой поверхности пирамиды способом триангуляции* (рисунок 60).

Развертка боковой поверхности пирамиды *SABC* представляет собой плоскую фигуру, состоящую из треугольников, являющимися гранями пирамиды.

Построение:

1). Определение длин ребер пирамиды выполняют с помощью вращения их вокруг оси $i \in S$ и $i \perp \Pi_1$. Путем вращения ребра пирамиды совмещаются с плоскостью *P* - плоскость $P \parallel \Pi_2$ и $i \in P$.

2). После определения натуральных длин ребер S_2A_0, S_2B_0, S_2C_0, приступают к построению развертки. Через произвольную точку S_0 проводят прямую *D*. Откладывают на ней от точки S_0 - $|S_0A_0| \cong |S_2A_0|$. Из точки A_0 проводят дугу радиусом $r_1 = |A_1B_1|$, а из точки S_0 – дугу радиусом $R_1 = |S_2B_0|$. Пересечение дуг указывает положение вершины B_0. $\Delta S_0A_0B_0 \cong \Delta SAB$ – грани пирамиды. Аналогично находят точки C_0 и A_0.

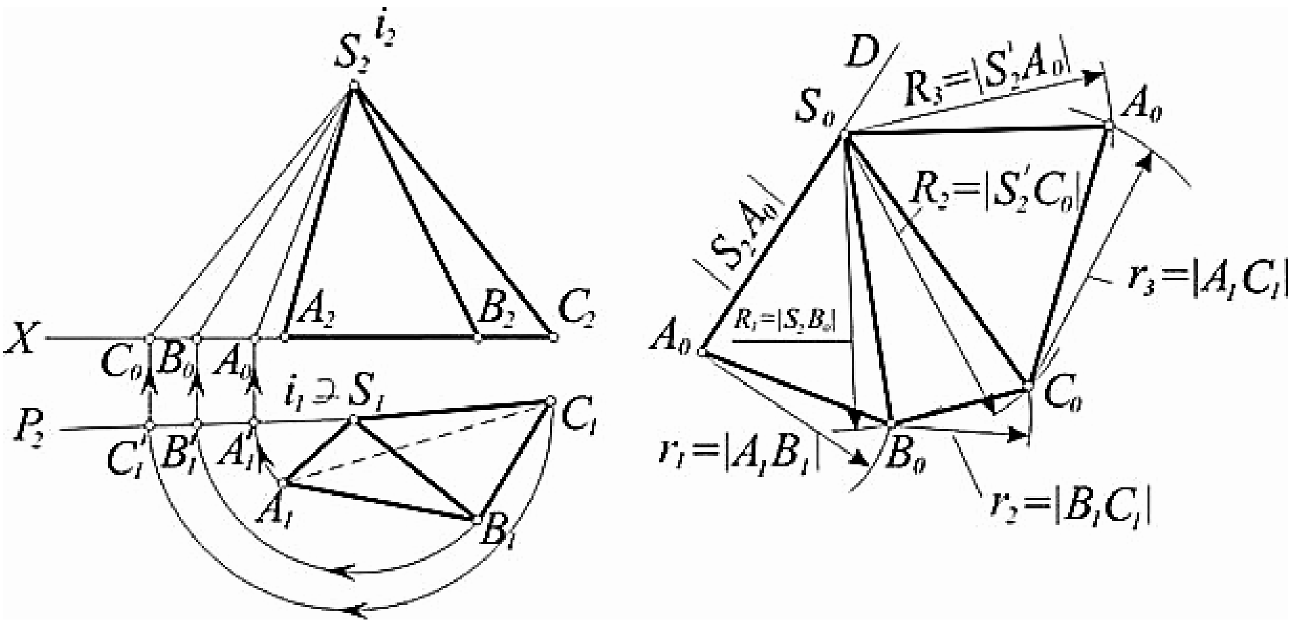


Рисунок 60 - Развертка боковой поверхности пирамиды

3). Соединив проекции точек A_0, B_0, C_0, A_0, получают развертку боковой поверхности пирамиды *SABC*.

Полную развертку пирамиды получат, если пристроят к развертке боковой поверхности на стороне основания фигуру - $\Delta A_0B_0C_0$.

Пример № 35: *Построение полной развертки поверхностей цилиндра* (рисунок 61).

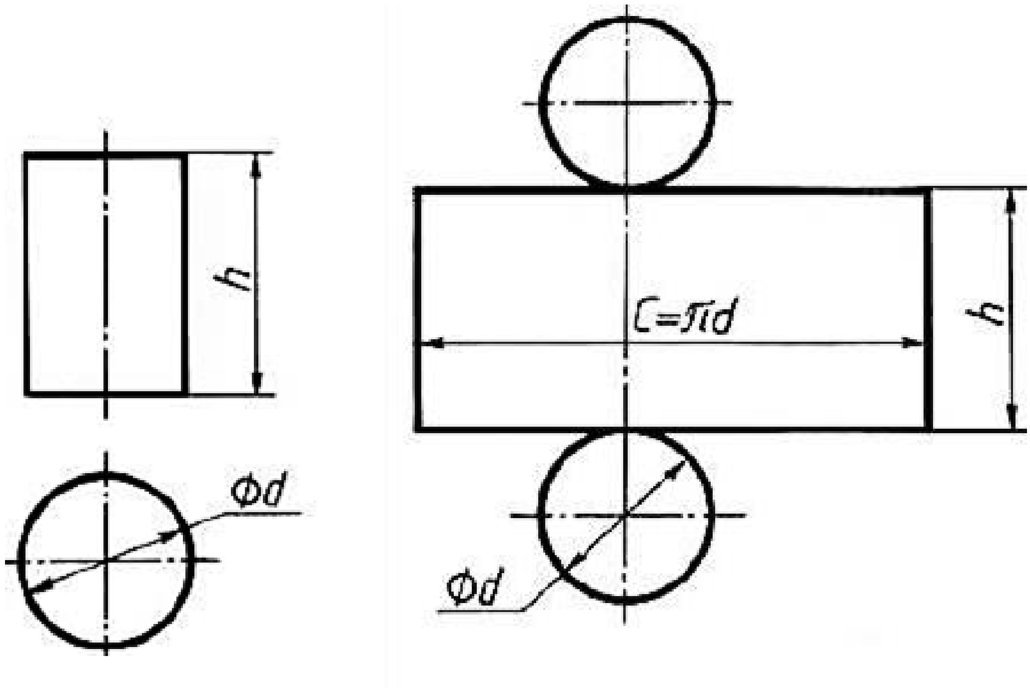


Рисунок 61 – Полная развертка поверхностей цилиндра

Развертка поверхностей цилиндра состоит из прямоугольника и двух кругов. Одна сторона прямоугольника равна высоте цилиндра, другая - длине окружности основания. На чертеже развертки к прямоугольнику пристраивают два круга, диаметр которых равен диаметрам оснований цилиндра.

Пример № 36: *Построение точки на развертке боковой поверхности цилиндра* (рисунок 62).

Построение:

1). Развертку боковой цилиндрической поверхности строим способом триангуляции, для чего окружность делим на 12 частей, заменяя отрезки дуг хордами. Развертка боковой поверхности цилиндра представляет собой прямоугольник высотой заданного цилиндра и длиной равной сумме двенадцати отрезков хорд, взятых с окружности цилиндра.

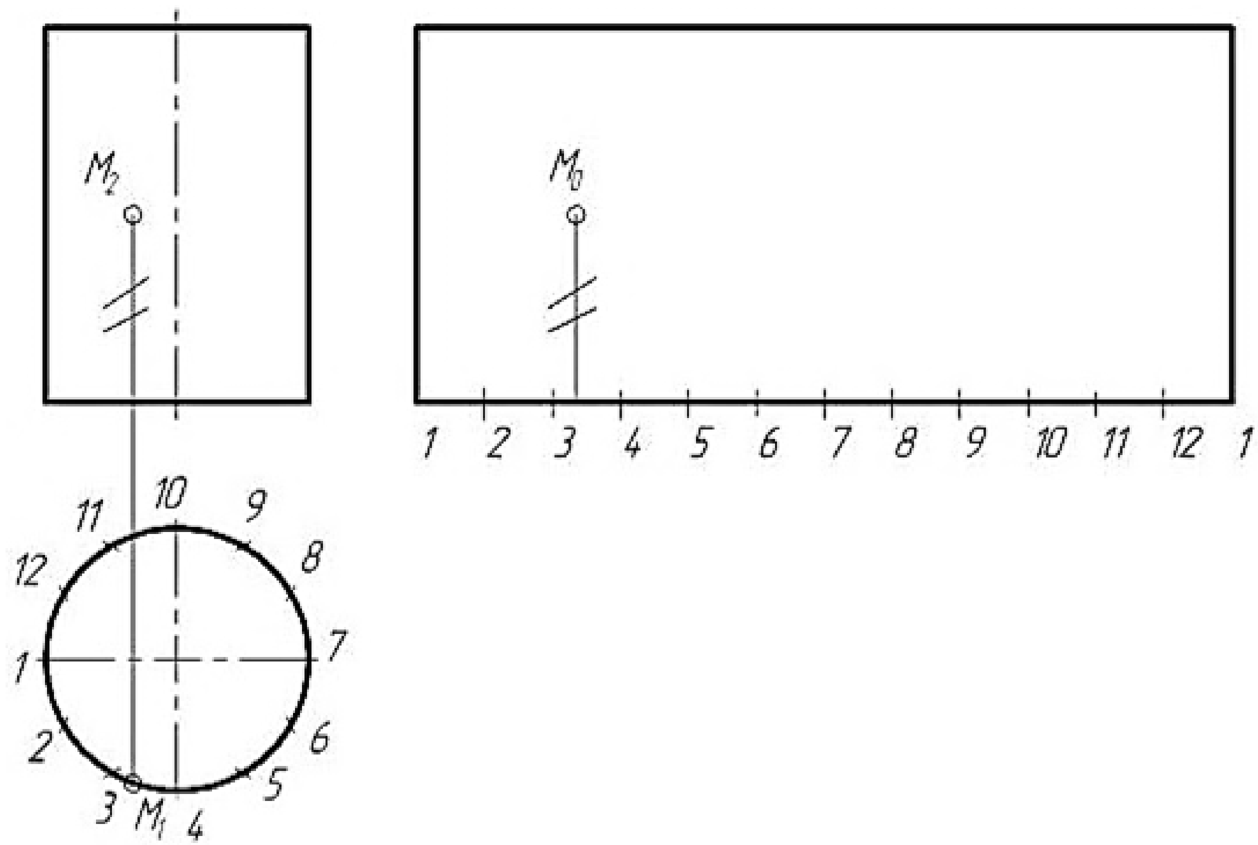


Рисунок 62 – Построение точки *M* на развертке цилиндра

2). Положение точки *M* на развертке цилиндрической поверхности определяется обычным способом. На горизонтальной проекции цилиндра проекция точки *M* (M_1) находится между точками *3* и *4*. Переносим горизонтальную проекцию точки на развертку между точками *3* и *4*, сохраняя расположение точки в этом отрезке. Проводим вертикальную линию, на которой откладываем высоту точки *M* с фронтальной проекции.

Пример № 37: *Построение развертки поверхностей призмы* (рисунок 63).

Развертка поверхностей любой прямой призмы представляет собой плоскую фигуру, составленную из боковых граней - прямоугольников и двух оснований - многоугольников.

На рисунке 63,*а* показаны две проекции правильной прямой шестигранной призмы. Все боковые грани призмы - прямоугольники, равные между собой по ширине *а* и высоте *H*, основания призмы - правильные шестиугольники со стороной, равной *а*.

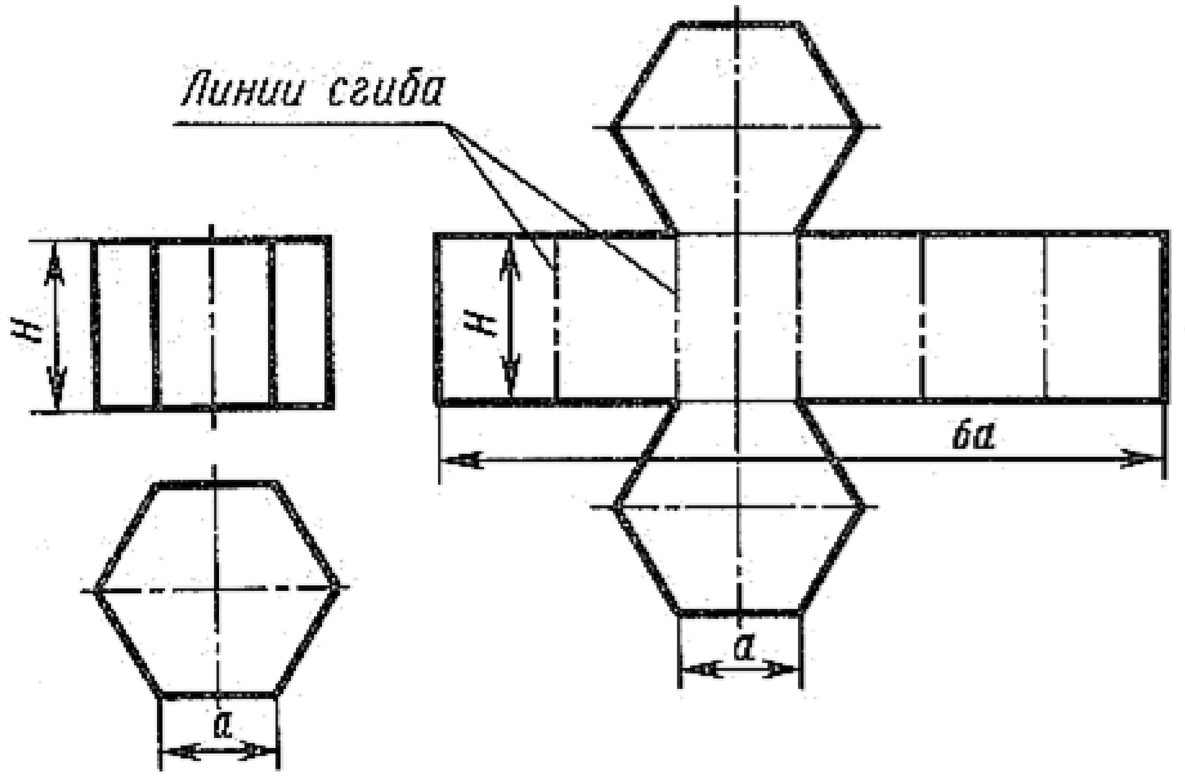
Истинные размеры граней известны, выполнение построения развертки следующее (рисунок 63,*б*):

- на произвольной горизонтальной прямой последовательно откладывают шесть отрезков, равных стороне основания шестиугольника, то есть *6a*;

- из полученных точек проводят перпендикуляры, равные высоте призмы *H*;

- конечные точки перпендикуляров соединяют второй горизонтальной прямой.

Полученный прямоугольник (*H* х *6a*) является разверткой боковой поверхности призмы. Затем пристраивают фигуры оснований - два шестиугольника со сторонами, равными *a*.



а) *б)*

Рисунок 63 – Построение развертки поверхностей призмы

Контур развертки обводят сплошной основной линией, линии сгиба - штрихпунктирной с двумя точками. Подобным образом строят развертки прямых призм с любым многоугольником в основании.

Пример № 38: *Построение развертки поверхностей шестиугольной призмы по заданным размерам* (рисунок 64).

Полная развертка поверхностей правильной шестиугольной призмы состоит из боковых граней – прямоугольников и двух шестиугольных оснований.

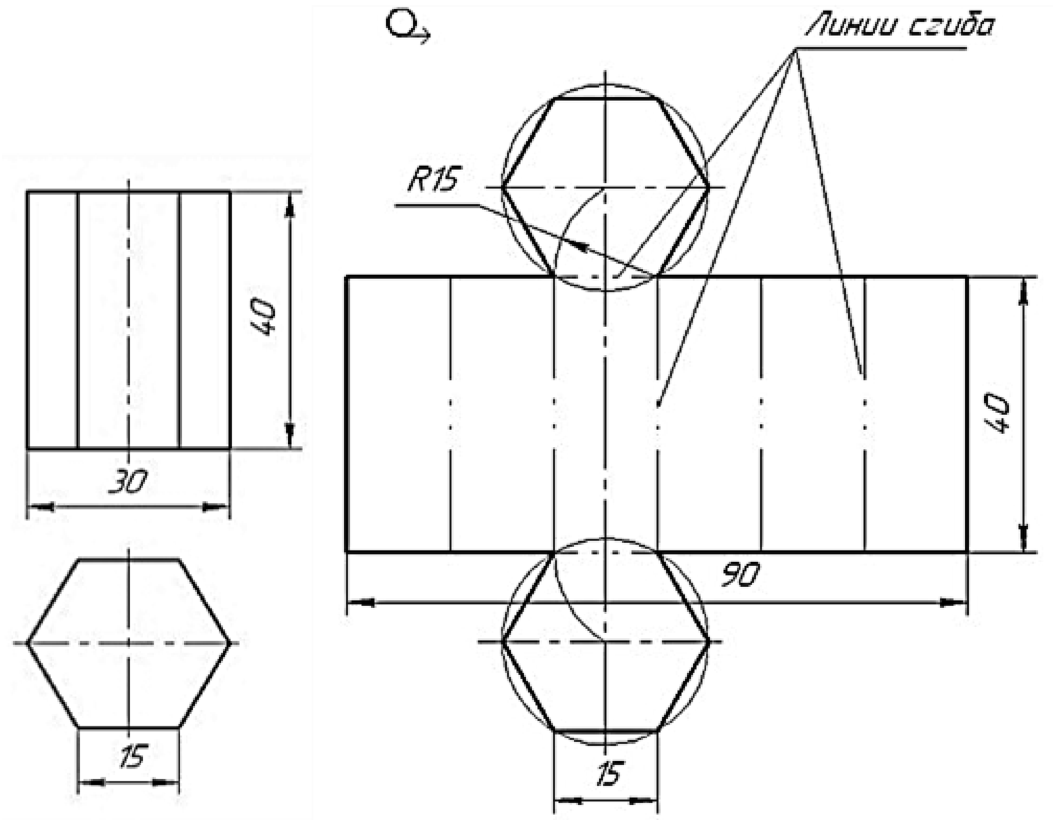


Рисунок 64 – Построение полной развертки призмы

Пример № 39: *Построение полной развертки параллелепипеда по заданным размерам* (рисунок 65).

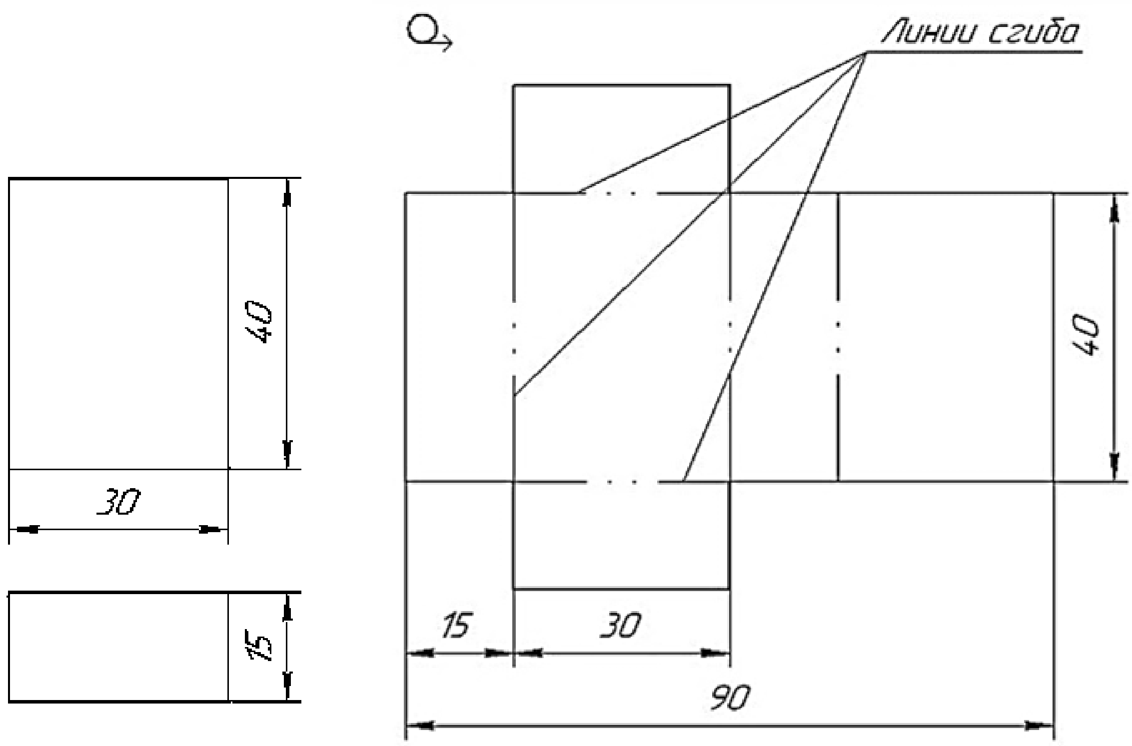


Рисунок 65 – Построение развертки параллелепипеда

Пример № 40: *Построение полной развертки поверхностей куба по заданным размерам* (рисунок 66).

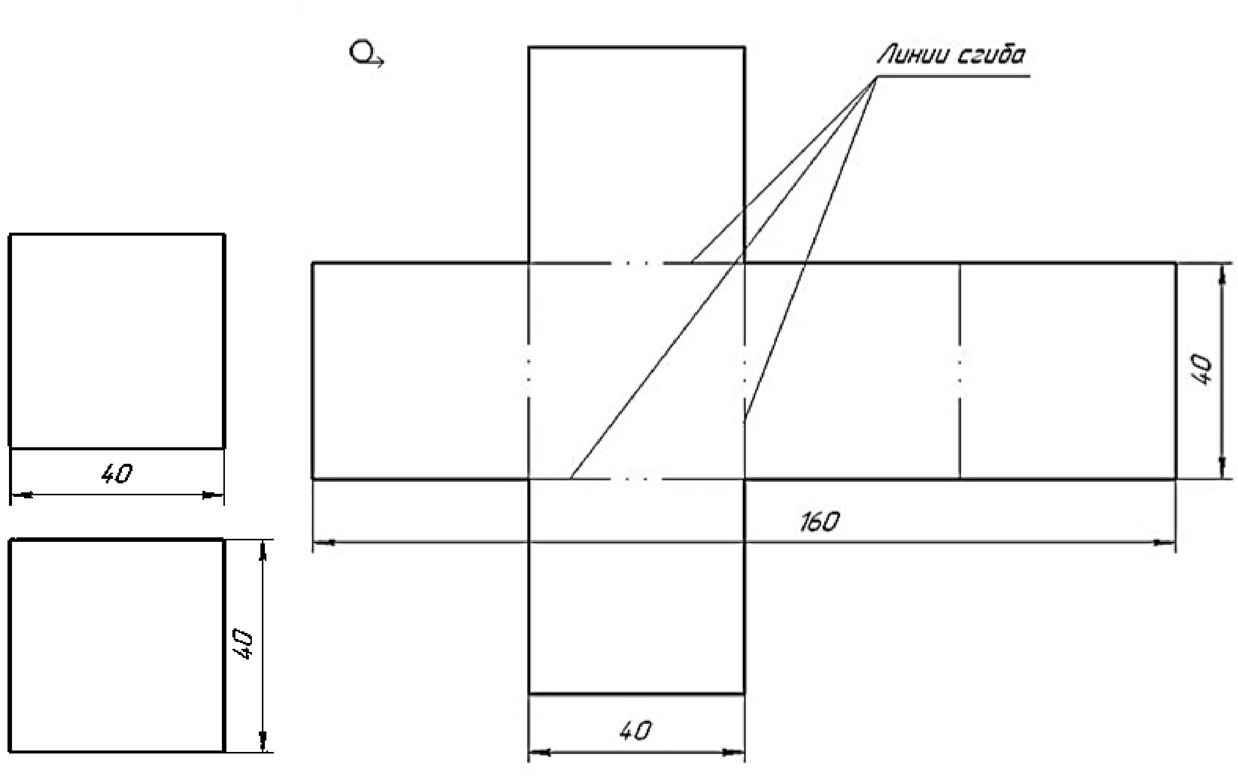


Рисунок 66 – Построение развертки поверхностей куба

Параллелепипед и куб – это частные случаи прямой правильной четырехугольной призмы.

Задание к выполнению:

Задача 10: Построить развертку поверхности согласно своему варианту; нанести на развертку боковой поверхности заданную точку: (Приложение, таблица 2, рисунки 6, 7).

Задачи к выполнению

Задача 1: Выполнить согласно своему варианту комплексный чертеж точки D (Приложение: таблица 1). Задачу выполнить в масштабе 1:1.

Задача 2: Построить согласно своему варианту эпюр точки K (Приложение: таблица 1). Задачу выполнить в масштабе 1:1.

Задача 3: Выполнить комплексный чертеж прямой, заданной отрезком AB (Приложение: таблица 1). Определить расположение отрезка прямой в пространстве. Задачу выполнить в масштабе 1:1.

Задача 4: Построить эпюр отрезка EK (Приложение: таблица 1). Определить, какую прямую он задает и как она называется. Задачу выполнить в масштабе 1:1.

Задача 5: Построить на эпюре согласно своему варианту следы прямой (Приложение: таблица 1, рисунок 1). Размеры изображения произвольны.

Задача 6: Построить согласно своему варианту перпендикуляр к плоскости (Приложение: таблица 2). Для этого начертить на эпюре горизонтальную и фронтальную проекции треугольника; провести проекции горизонтали H и фронтали F треугольника, и в точке их пересечения восстановить перпендикуляр. Задачу выполнить в масштабе 1:1.

Задача 7: Определить натуральную величину треугольника способом замены плоскостей (Приложение: таблица 2). Треугольник использовать из задачи 6 согласно своему варианту.

Задача 8: Достроить недостающие проекции точек (невидимые проекции точек заключить в скобки), принадлежащих поверхности геометрической фигуры, согласно своему варианту (Приложение: таблица 2, рисунки 2, 3).

Задача 9: Определить и построить фигуру сечения геометрической поверхности вспомогательной секущей плоскостью согласно своему варианту (Приложение: таблица 2, рисунки 4, 5).

Задача 10: Построить развертку поверхности согласно своему варианту; нанести на развертку боковой поверхности заданную точку: (Приложение, таблица 2, рисунки 6, 7).

Приложение

Задачи 1-5 к выполнению Таблица 1

№ варианта	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5
I	*II*	*III*	*IV*	*V*	*VI*
1	D(20;40;20)	K(25;0;20)	A(50;30;20) B(50;40;20)	E(10;30;40) K(30;40;10)	*а)*
2	D(40;40;20)	K(35;30;0)	A(20;30;40) B(50;40;40)	E(10;30;20) K(40;40;10)	*б)*
3	D(20;40;40)	K(15;10;0)	A(50;50;20) B(50;50;20)	E(20;30;50) K(30;20;40)	*в)*
4	D(30;40;0)	K(20;10;40)	A(30;20;50) B(30;40;20)	E(30;50;40) K(20;20;30)	*г)*
5	D(50;40;10)	K(45;0;20)	A(30;30;50) B(30;50;20)	E(50;20;50) K(10;30;30)	*д)*
6	D(20;0;20)	K(25;40;20)	A(30;40;50) B(30;40;20)	E(30;20;40) K(10;40;30)	*е)*
7	D(10;40;20)	K(25;0;20)	A(30;30;50) B(50;10;50)	E(20;30;40) K(50;20;30)	*ж)*
8	D(50;30;25)	K(25;0;20)	A(40;30;10) B(40;40;50)	E(40;30;40) K(20;20;30)	*з)*
9	D(40;0;20)	K(25;40;30)	A(35;40;50) B(10;40;50)	E(20;20;10) K(50;40;35)	*и)*
10	D(20;50;35)	K(0;40;20)	A(30;20;50) B(30;20;10)	E(10;40;40) K(50;20;30)	*к)*
11	D(25;50;20)	K(15;50;0)	A(10;40;25) B(50;40;25)	E(60;30;40) K(20;40;30)	*л)*
12	D(0;50;20)	K(25;30;30)	A(20;10;20) B(40;40;20)	E(25;60;40) K(50;20;30)	*м)*
13	D(20;50;25)	K(35;30;0)	A(40;50;20) B(40;20;20)	E(35;30;40) K(60;40;10)	*а)*
14	D(25;30;20)	K(0;30;20)	A(20;20;40) B(50;20;40)	E(35;60;40) K(10;20;30)	*б)*
15	D(20;40;0)	K(45;30;30)	A(20;20;40) B(40;20;20)	E(50;30;50) K(10;20;30)	*в)*
16	D(30;0;20)	K(25;50;20)	A(50;20;10) B(50;20;40)	E(35;40;40) K(30;20;30)	*г)*
17	D(25;50;30)	K(25;10;0)	A(20;40;20) B(40;20;20)	E(25;60;40) K(10;20;20)	*д)*

Продолжение таблицы 1

I	*II*	*III*	*IV*	*V*	*VI*
18	D(20;30;20)	К(0;30;40)	A(60;20;20) B(60;20;50)	E(25;30;40) K(40;20;10)	*е)*
19	D(10;50;20)	К(15;30;0)	A(40;40;20) B(40;10;20)	E(25;10;40) K(35;40;10)	*ж)*
20	D(30;0;40)	К(30;30;20)	A(15;20;40) B(30;20;20)	E(15;40;40) K(30;10;30)	*з)*
21	D(20;50;20)	К(0;40;20)	A(20;30;30) B(40;30;30)	E(35;20;40) K(10;50;30)	*и)*
22	D(20;30;20)	К(0;30;40)	A(20;20;40) B(50;20;40)	E(25;60;50) K(10;20;30)	*к)*
23	D(40;30;0)	К(30;20;50)	A(40;40;25) B(40;10;25)	E(25;20;40) K(10;40;30)	*л)*
24	D(20;50;30)	К(20;0;35)	A(30;30;20) B(45;30;20)	E(25;60;20) K(20;40;30)	*м)*
25	D(20;30;20)	К(0;35;10)	A(10;20;25) B(40;20;35)	E(45;20;40) K(10;40;20)	*а)*
26	D(30;45;0)	К(10;30;20)	A(20;50;30) B(40;50;30)	E(35;30;40) K(10;50;20)	*б)*
27	D(50;50;20)	К(0;10;30)	A(30;20;10) B(30;40;40)	E(15;30;40) K(50;20;30)	*в)*
28	D(60;50;40)	К(0;30;30)	A(20;40;20) B(40;40;50)	E(25;50;40) K(10;20;50)	*г)*
29	D(0;10;20)	К(50;30;20)	A(10;30;20) B(30;30;50)	E(25;40;60) K(40;20;30)	*д)*
30	D(60;30;20)	К(0;50;20)	A(20;10;10) B(40;10;50)	E(45;60;40) K(10;40;30)	*е)*
31	D(20;0;40)	К(50;20;25)	A(40;40;10) B(40;40;50)	E(25;30;10) K(10;20;40)	*ж)*
32	D(40;50;20)	К(20;0;20)	A(10;40;20) B(40;40;10)	E(25;10;50) K(50;20;30)	*з)*
33	D(20;50;50)	К(0;30;40)	A(20;50;20) B(40;50;10)	E(45;60;40) K(10;40;30)	*и)*
34	D(30;50;40)	К(50;0;25)	A(10;40;20) B(50;40;50)	E(25;60;50) K(50;20;30)	*к)*
35	D(20;30;20)	К(0;20;50)	A(25;40;50) B(40;40;50)	E(35;50;40) K(10;30;10)	*л)*
36	D(50;50;20)	К(40;40;0)	A(20;40;30) B(60;40;50)	E(25;60;20) K(10;10;30)	*м)*

Продолжение таблицы 1

I	*II*	*III*	*IV*	*V*	*VI*
37	D(20;50;40)	К(0;30;50)	A(60;30;20) B(60;30;50)	E(25;50;40) К(40;20;10)	*а)*
38	D(40;50;25)	К(10;40;0)	A(15;30;10) B(45;30;10)	E(40;30;10) К(15;20;50)	*б)*
39	D(0;50;20)	К(40;10;20)	A(25;40;20) B(45;40;40)	E(25;30;40) К(30;20;10)	*в)*
40	D(20;40;20)	К(0;45;40)	A(25;30;30) B(45;30;30)	E(25;60;20) К(50;20;30)	*г)*
41	D(0;50;30)	К(50;35;20)	A(15;40;20) B(35;40;50)	E(25;50;40) К(20;30;30)	*д)*
42	D(0;40;25)	К(40;10;20)	A(50;20;40) B(10;20;40)	E(35;30;40) К(10;50;50)	*е)*
43	D(30;30;0)	К(50;30;25)	A(40;50;20) B(40;50;50)	E(15;60;40) К(30;20;30)	*ж)*
44	D(40;50;40)	К(0;30;25)	A(30;10;50) B(30;40;50)	E(25;60;10) К(50;10;30)	*з)*
45	D(25;50;20)	К(0;35;30)	A(20;40;15) B(40;40;15)	E(25;50;40) К(50;20;50)	*и)*
46	D(20;55;0)	К(50;0;50)	A(25;40;20) B(45;40;50)	E(25;40;40) К(40;20;30)	*к)*
47	D(10;20;25)	К(20;0;25)	A(50;40;10) B(50;40;50)	E(35;50;10) К(10;40;30)	*л)*
48	D(20;50;20)	К(20;45;0)	A(30;30;10) B(30;40;50)	E(25;10;30) К(50;30;20)	*м)*
49	D(0;10;45)	К(20;30;25)	A(20;40;20) B(50;40;20)	E(20;40;50) К(45;20;30)	*а)*
50	D(10;40;0)	К(50;50;20)	A(30;40;40) B(30;20;40)	E(15;60;40) К(20;30;30)	*б)*
51	D(45;0;20)	К(40;30;20)	A(20;40;10) B(40;40;10)	E(25;30;40) К(30;20;35)	*в)*
52	D(20;30;20)	К(0;35;20)	A(10;50;20) B(10;30;50)	E(45;20;40) К(20;40;30)	*г)*

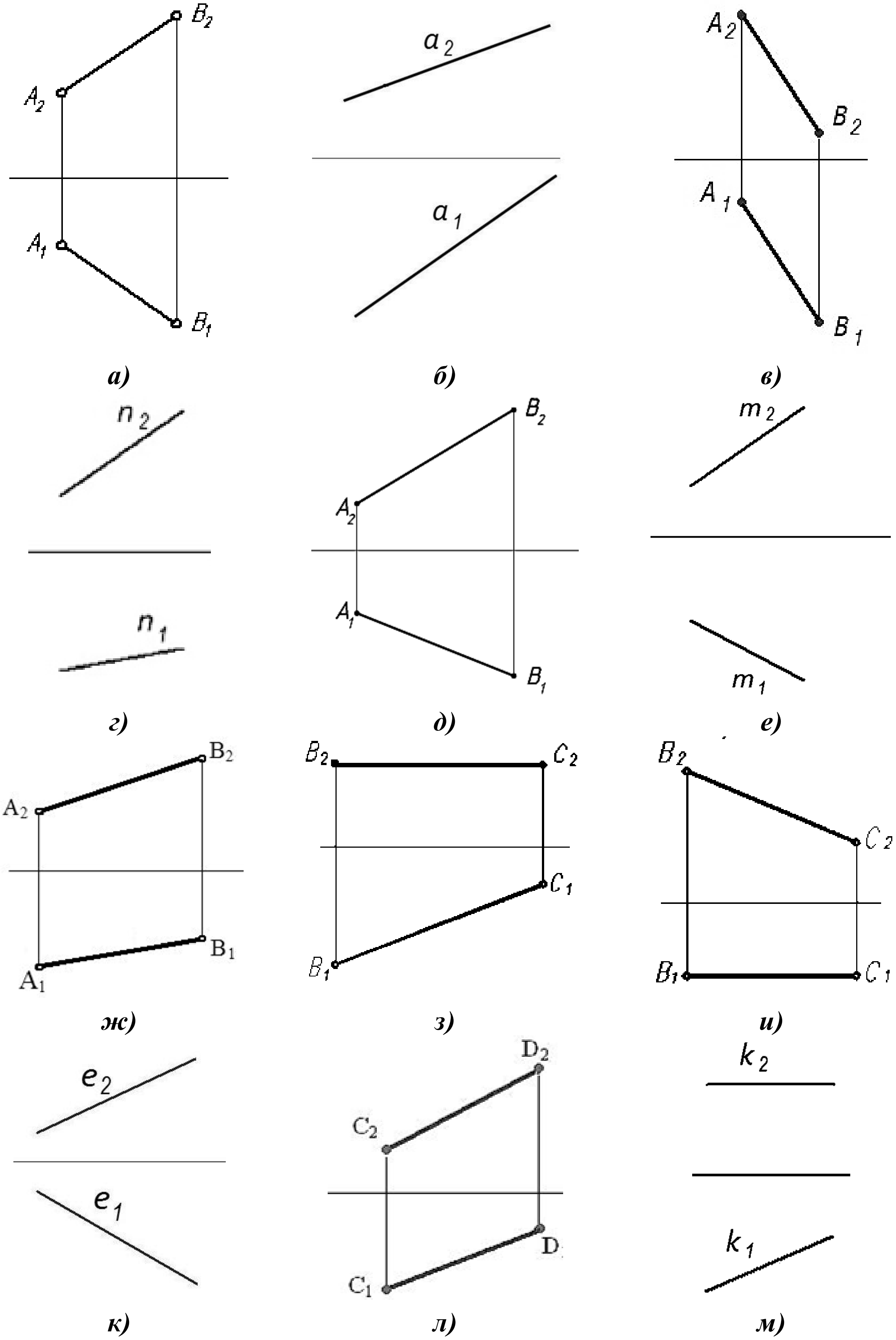


Рисунок 1 - Отрезки прямой общего положения для задачи 5

Задачи 6-10 к выполнению

Таблица 2

№ варианта	**Задача 6**	**Задача 7**	**Задача 8**	**Задача 9**	**Задача 10**
I	*II*	*III*	*IV*	*V*	*VI*
1	A(50;30;20) B(10;40;50) C(30;0;30)	ΔABC	*а)*	*а)*	*а)* $l = 26$
2	A(0;30;30) D(50;10;40) C(30;40;10)	ΔADC	*б)*	*б)*	*б)* $l = 28$
3	K(10;50;20) B(50;10;0) C(30;30;50)	ΔKBC	*в)*	*в)*	*в)* $l = 30$
4	E(30;30;50) K(10;10;20) C(0;50;30)	ΔEKC	*г)*	*г)*	*г)* $l = 32$
5	A(30;40;50) B(20;10;0) C(60;40;10)	ΔABC	*д)*	*д)*	*д)* $l = 34$
6	E(50;10;50) D(30;50;40) C(0;30;20)	ΔEDC	*е)*	*е)*	*е)* $l = 36$
7	A(30;10;10) B(0;20;50) D(40;40;20)	ΔABD	*ж)*	*ж)*	*ж)* $h = 65$
8	A(40;20;40) B(20;40;0) E(50;30;20)	ΔABE	*з)*	*з)*	*з)* $h = 60$
9	A(35;60;50) D(20;30;20) C(0;30;40)	ΔADC	*и)*	*и)*	*и)* $h = 55$
10	K(30;25;30) B(60;0;50) C(20;50;10)	ΔKBC	*к)*	*к)*	*к)* $h = 50$
11	P(30;40;45) K(50;10;25) C(20;50;0)	ΔPKC	*л)*	*л)*	*л)* $h = 45$
12	D(10;0;40) B(40;30;55) C(30;50;10)	ΔDBC	*м)*	*м)*	*м)* $h = 40$
13	A(40;20;10) B(10;20;0) K(20;60;45)	ΔABK	*а)*	*а)*	*а)* $l = 36$

Продолжение таблицы 2

I	*II*	*III*	*IV*	*V*	*VI*
14	D(20;30;50) E(40;20;30) C(15;30;50)	ΔDEC	*б)*	*б)*	*б)* $l = 34$
15	A(10;20;50) D(40;20;20) K(50;50;0)	ΔADK	*в)*	*в)*	*в)* $l = 32$
16	E(40;35;10) B(50;20;40) C(10;0;30)	ΔEBC	*г)*	*г)*	*г)* $l = 30$
17	D(60;40;15) B(40;20;50) C(15;50;30)	ΔDBC	*д)*	*д)*	*д)* $l = 28$
18	A(50;30;20) E(60;0;50) C(10;50;45)	ΔAEC	*е)*	*е)*	*е)* $l = 26$
19	K(60;40;40) B(30;10;20) P(20;30;20)	ΔKBP	*ж)*	*ж)*	*ж)* $h = 42$
20	A(15;0;50) D(40;20;30) C(40;50;20)	ΔADC	*з)*	*з)*	*з)* $h = 46$
21	A(20;30;30) B(50;40;50) C(0;50;10)	ΔABC	*и)*	*и)*	*и)* $h = 50$
22	A(30;10;50) B(50;40;30) E(10;30;20)	ΔABE	*к)*	*к)*	*к)* $h = 54$
23	K(20;40;50) B(50;20;25) E(10;50;0)	ΔKBE	*л)*	*л)*	*л)* $h = 58$
24	A(30;10;20) D(45;30;40) C(20;0;30)	ΔADC	*м)*	*м)*	*м)* $h = 62$
25	D(40;20;25) B(30;0;35) K(20;30;20)	ΔDBK	*а)*	*а)*	*а)* $l = 28$
26	A(60;20;10) B(40;60;50) D(10;35;10)	ΔABD	*б)*	*б)*	*б)* $l = 26$

Продолжение таблицы 2

I	*II*	*III*	*IV*	*V*	*VI*
27	E(10;50;40) B(30;20;0) C(50;10;20)	ΔEBC	*в)*	*в)*	*в)* $l = 32$
28	A(0;40;10) B(40;20;50) D(60;50;30)	ΔABD	*г)*	*г)*	*г)* $l = 34$
29	E(30;30;20) B(30;40;55) D(0;10;40)	ΔEBD	*д)*	*д)*	*д)* $l = 36$
30	K(20;50;10) D(45;0;50) A(60;10;30)	ΔKDA	*е)*	*е)*	*е)* $l = 30$
31	A(50;30;15) B(30;40;50) C(20;30;0)	ΔABC	*ж)*	*ж)*	*ж)* $h = 65$
32	P(15;40;50) B(40;50;10) C(0;30;20)	ΔPBC	*з)*	*з)*	*з)* $h = 60$
33	A(50;30;50) B(40;10;0) E(20;50;30)	ΔABE	*и)*	*и)*	*и)* $h = 55$
34	D(10;40;30) B(60;0;50) C(20;50;10)	ΔDBC	*к)*	*к)*	*к)* $h = 50$
35	K(20;40;10) B(0;30;60) C(20;50;20)	ΔKBC	*л)*	*л)*	*л)* $h = 45$
36	A(25;40;0) B(40;10;50) C(10;50;20)	ΔABC	*м)*	*м)*	*м)* $h = 40$
37	C(20;60;30) B(40;20;50) A(0;20;10)	ΔCBA	*а)*	*а)*	*а)* $l = 26$
38	D(60;20;10) B(0;30;50) C(10;50;40)	ΔDBC	*б)*	*б)*	*б)* $l = 28$
39	A(55;20;20) B(15;20;0) K(40;40;60)	ΔABK	*в)*	*в)*	*в)* $l = 30$

Продолжение таблицы 2

I	*II*	*III*	*IV*	*V*	*VI*
40	B(25;30;40) A(15;10;20) C(50;50;10)	∆BAC	*г)*	*г)*	*г)* $l = 32$
41	D(45;30;0) B(15;10;20) C(20;50;60)	∆DBC	*д)*	*д)*	*д)* $l = 34$
42	A(35;60;20) E(25;0;50) C(30;20;30)	∆AEC	*е)*	*е)*	*е)* $l = 36$
43	E(50;10;40) K(0;60;50) C(20;30;20)	∆EKC	*ж)*	*ж)*	*ж)* $h = 64$
44	A(40;50;40) B(10;20;60) K(40;50;0)	∆ABK	*з)*	*з)*	*з)* $h = 60$
45	A(20;10;0) B(60;30;50) C(40;50;20)	∆ABC	*и)*	*и)*	*и)* $h = 56$
46	A(20;40;55) B(40;30;15) E(0;50;20)	∆ABE	*к)*	*к)*	*к)* $h = 52$
47	K(25;0;20) B(25;20;60) C(50;55;20)	∆KBC	*л)*	*л)*	*л)* $h = 46$
48	A(20;40;10) C(50;30;50) B(30;50;25)	∆ACB	*м)*	*м)*	*м)* $h = 42$
49	D(10;30;30) B(30;40;0) C(20;50;60)	∆DBC	*а)*	*а)*	*а)* $l = 34$
50	A(20;30;20) K(50;40;10) C(30;10;45)	∆AKC	*б)*	*б)*	*б)* $l = 32$
51	A(20;40;40) B(30;40;10) C(50;10;55)	∆ABC	*в)*	*в)*	*в)* $l = 30$
52	K(20;60;50) B(40;10;10) C(15;0;20)	∆KBC	*г)*	*г)*	*г)* $l = 28$

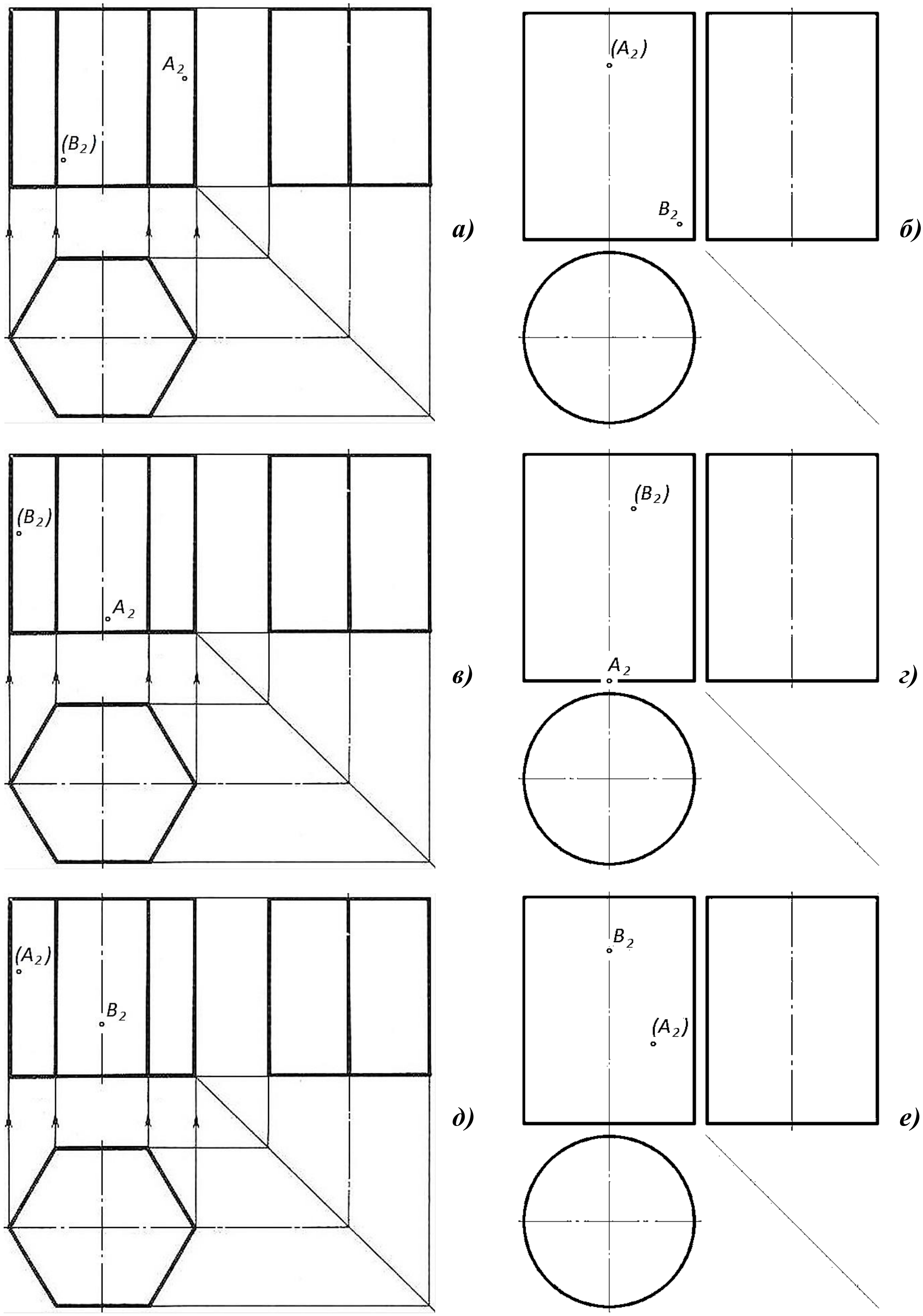
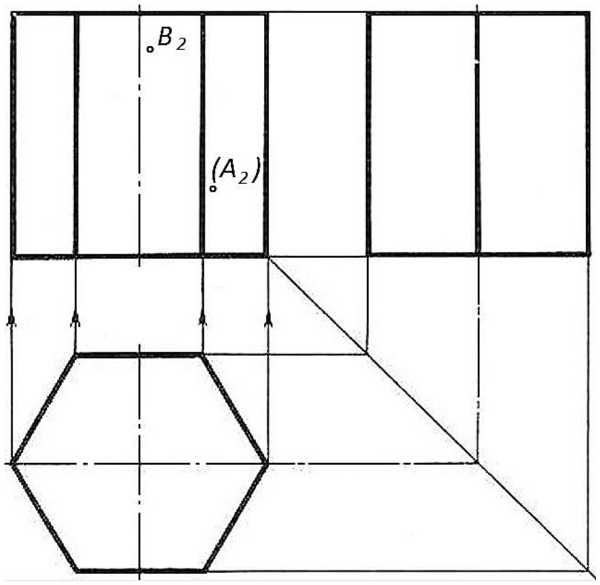
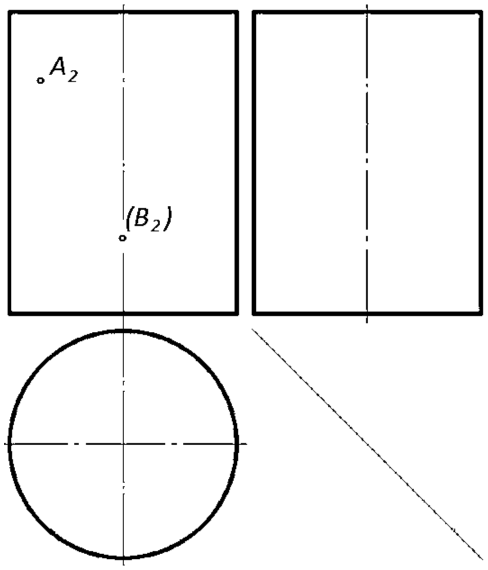


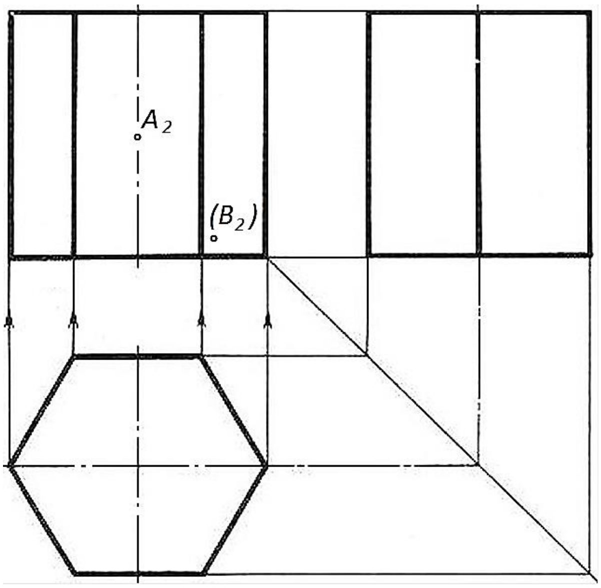
Рисунок 2 - Данные к задаче 8



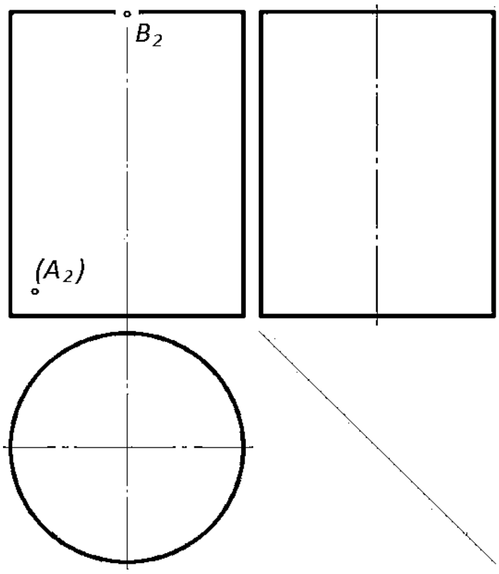
ж)



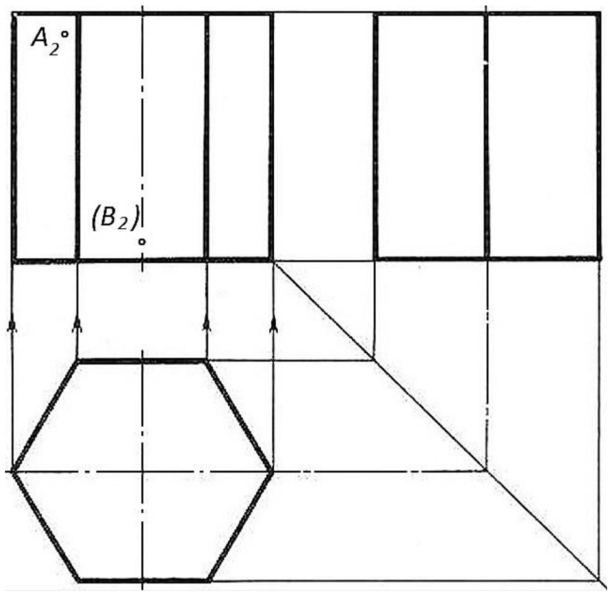
з)



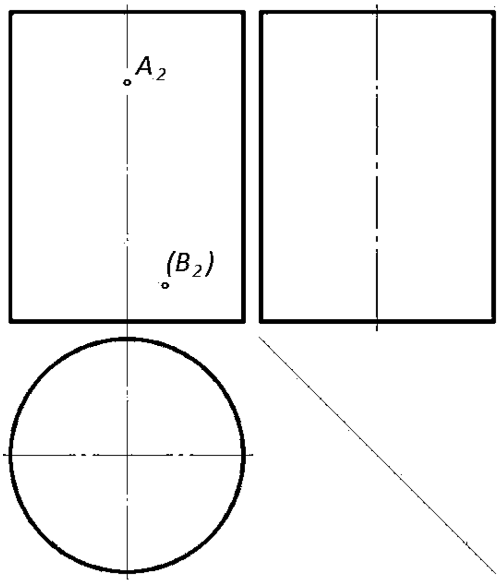
и)



к)



л)



м)

Рисунок 3 - Данные к задаче 8

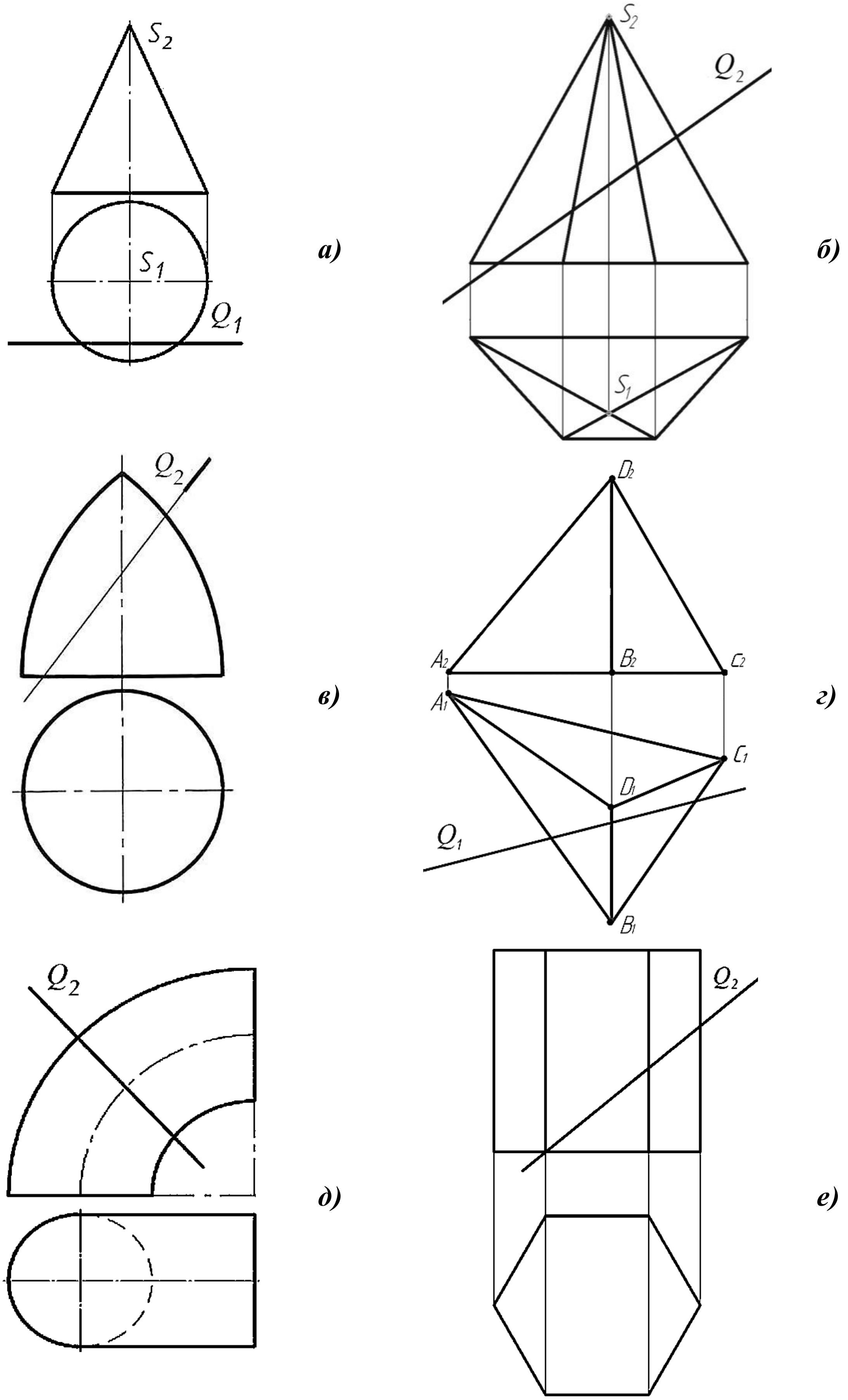


Рисунок 4 - Данные к задаче 9

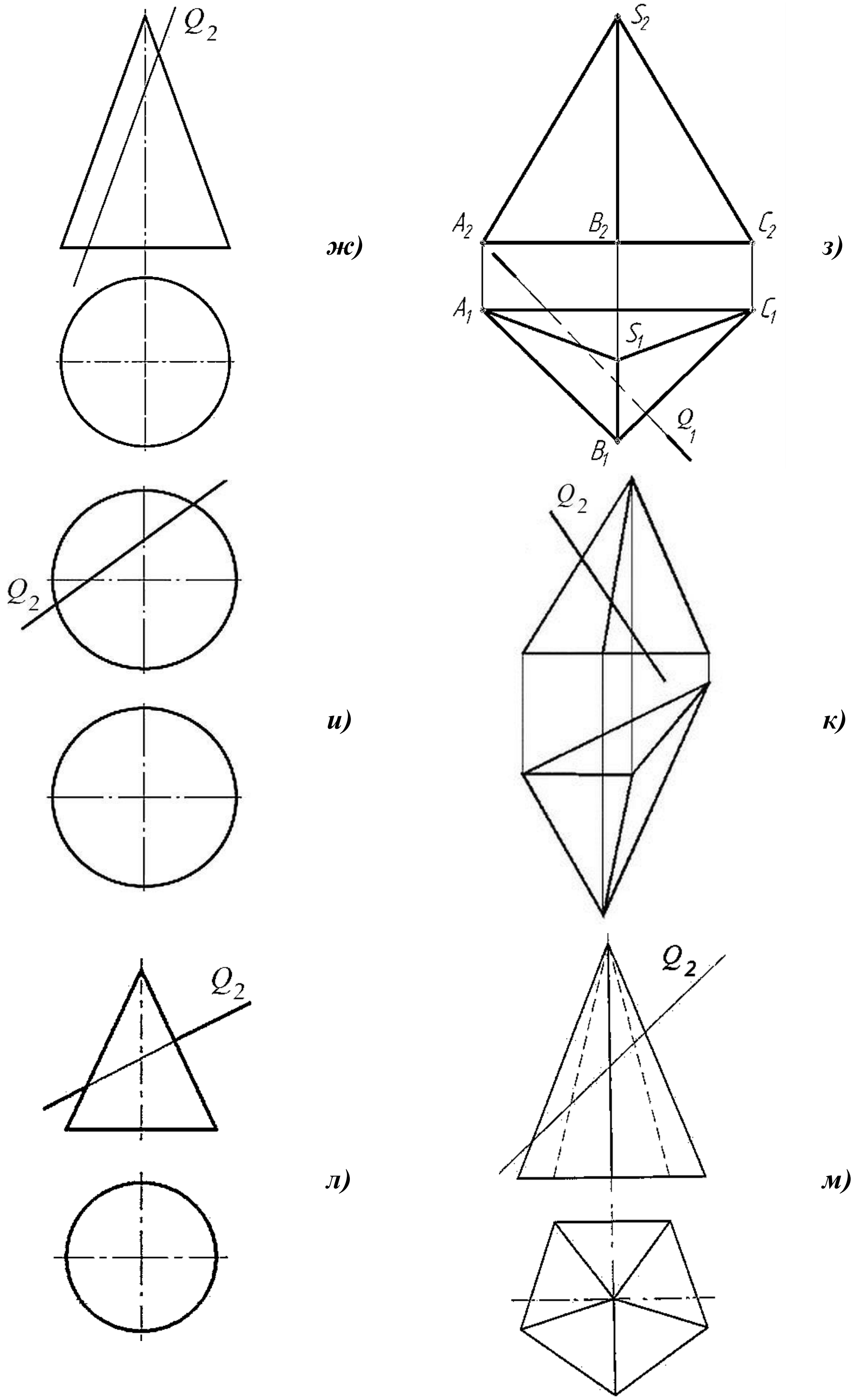
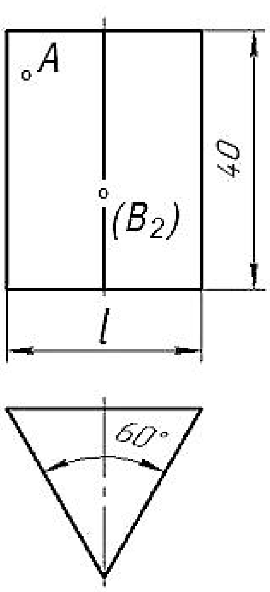
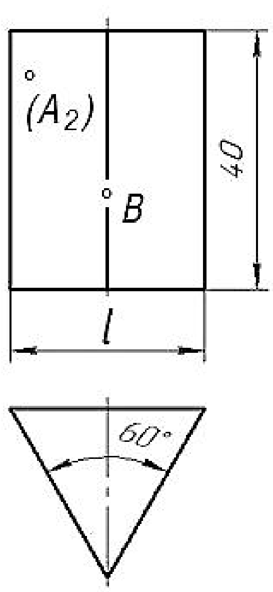


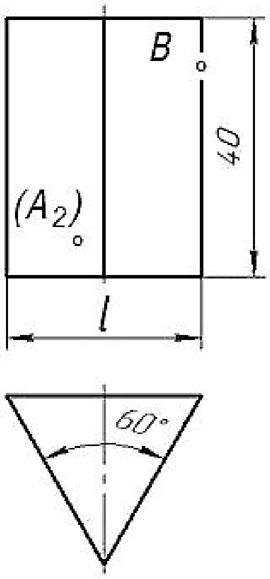
Рисунок 5 - Данные к задаче 9



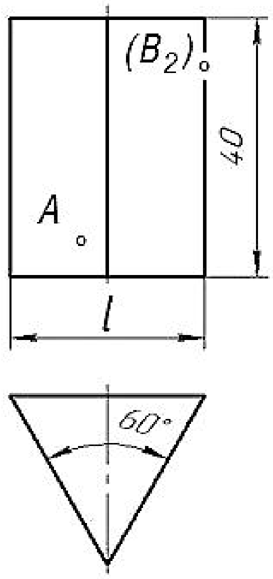
а)



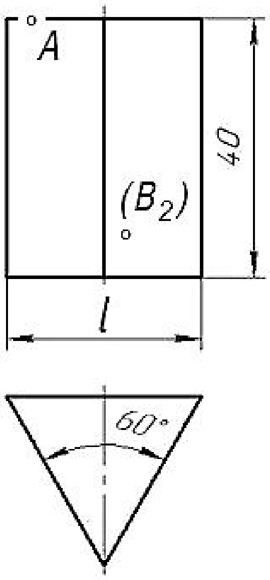
б)



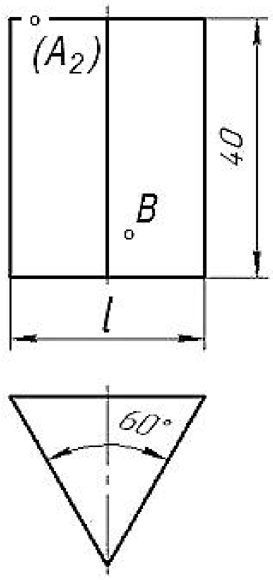
в)



г)

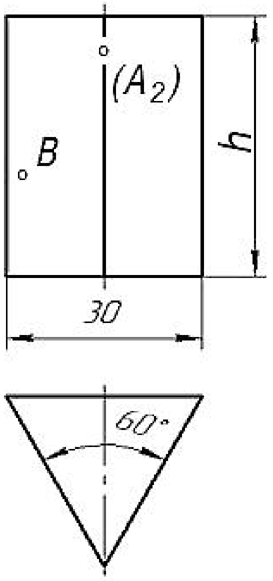


д)

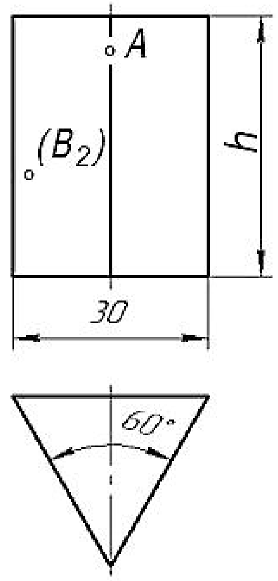


е)

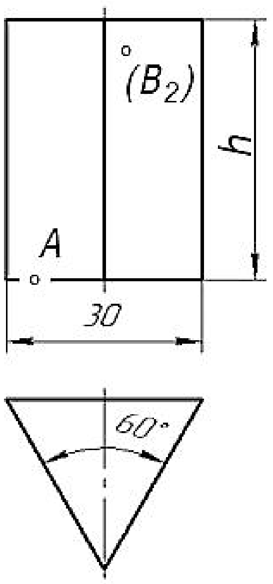
Рисунок 6 - Данные к задаче 10



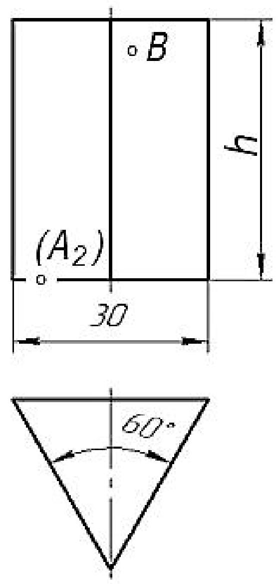
ж)



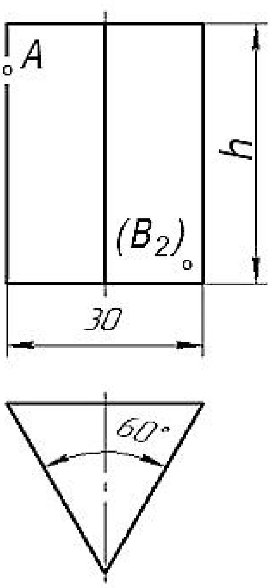
з)



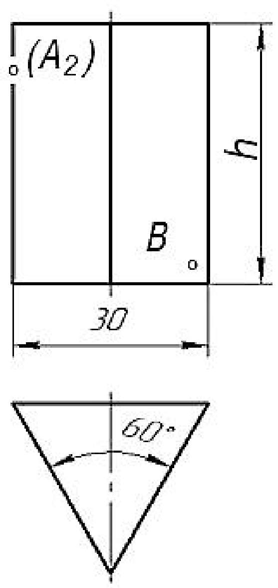
и)



к)



л)



м)

Рисунок 7 - Данные к задаче 10

Электронные источники

1). http://weldworld.ru/theory/nach-geom/proecirovanie-tochki.html

2). http://mirrorref.ru/ref_jgebewpolbew.html

3). http://polynsky.com.kg/proecirovanie/134-sledy-prjamojj-na-ploskosti-proekcii.html

4). https://studfiles.net/preview/2619986/page:12/

5). https://studfiles.net/preview/5943930/page:13/

6). https://studopedia.ru/2_19782_konkuriruyushchie-tochki.html

7). http://cdot-nntu.ru/basebook/ng1/system/teor/teor45.html

8). https://cadinstructor.org/ng/lectures/7-poverhnosty/

9). http://vendor-online.ru/geometria/proekt44.htm

10). http://www.tepka.ru/Cherchenie_7-8/15.html

Содержание

Введение…………………………………………………………………....…3
Обозначения и символы……………………………………………………....4
1. Тема «Проецирование точки» 5
2. Тема «Конкурирующие точки» 11
3. Тема «Проецирование прямой».. 13
4. Тема «Взаимное положение точки и прямой линии». 19
5. Тема «Следы прямой».. 20
6. Тема «Проецирование плоскости». 23
7. Тема «Взаимное положение прямой линии и плоскости»............................. 30
8. Тема «Пересечение прямой линии и плоскости»……………………………..33
9. Тема «Способ замены плоскостей». 37
10. Тема «Поверхности» 42
11. Тема «Точки на поверхностях»………………………………………..... 47
12. Тема «Пересечение поверхности плоскостью»………………………………54
13. Тема «Развертка поверхности»………………………………………………..59
Задачи к выполнению…………………………………………………………70
Приложение……………………………………………………………………71
Электронные источники ……………………………………..………………85

Учебное издание

Маркова
Ольга Анатольевна
кандидат педагогических наук

Подписано в печать 11.11.2017 г. Формат 60x84 1/16
Печать офсетная. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 5,1515
Тираж 100. Заказ 75354

Отпечатано в ООО "ИПЦ "Гузель"
Республика Татарстан, г. Нижнекамск,
пр. Химиков, д. 18, тел.: 30-31-60